UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

logons2.pdf

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Saidi Messaouda

Thème

Sur la stabilité de solutions d'équations différentielles fractionnaire

Version de : /05/2019

Devant le jury composé de :

M. Meflah Mabrouk	MCA. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab Brahim	MCB. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M. Badidja Salim	MCB. UKMO université-Ouargla	Examinateur

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.
Je tiens à remercier tous d'abord mon encadreur ***Dr.Brahim Tellab*** *pour n'avoir proposé le thème de ce mémoir et m'avoir dirigée tous au long de mon travail, et ses conseils n'ont été trés pricieux aussi son encouragement ont guidé et stimulé mon travail.*
*Je remercie également :****Dr.Amara Abdelkader, Dr.Badidja Salim.*** *membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail, et pour tous leurs remarques et conseils.*
Je ne pourrais terminer sans remarcier mes parents, mes frères et mes soeurs, mes amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loi à l'élaboration de ce travail.
Enfin je remercier tous les étudiants d'université de ***Kasdi Merbah Ouargla****.*

Dédicace

Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur existance à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis.

À ma mère qui m'a encouragé durant tous mes étude, est fatiguée pour nous.

À mon père, qui a été mon ombre durant tous les années des études, qui a veillé a me donner l'aide, a m'encourager et a me protéger, que dieu les gardes et les protèges.

À mon encadreur ***Brahim Tellab*** *pour tous les conseils et les remarque pour terminer le travail.*

À mes frères ***Achour, Abd djalil, Abd djoud, Djemouai.***

À mes soeurs ***Sabrina, Boutiana, Achouk, Soumia.***

À tous mes amis ***Bouchra, Hasina, Roumiasa, Hani, Achouk, Sabrina, Nadjat, Houda, Ghalya, Marwa, Maissone, Yakin, Soumia, Awatf, Hadjar, Ibtissam, Chaima, Zineb, Kaouter.***

À tous la famille Saidi et Kadouri

À ma cousine messaouda koildi.

À tous la famille en générale.

À tous les étudiants de math et info.

À tous mes chers enseignants qui ont enseigné, et à tous les collègues.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Le calcul fractionnaire généralise la dérivée et l'intégrale d'une fonction à l'ordre non-entier. Plusieurs définitions ont été introduites par Grunwald-Letnikov, Caputo, Riemann-Liouville et d'autres. Pour plus de détails, les auteurs intéressés ont conseillé de consulter par exemple [14, 27, 31]. Dans ce travail, nous avons concentrés sur la fonction Mittag-Leffler, l'un des plus importants fonctions spéciales utilisées en calcul fractionnaire. Son importance est réalisée lors des quinze dernières années en raison de son implication directe dans les problèmes de la physique, biologie, ingénierie et sciences appliquées. Diverses propriétés des fonctions de Mittag-Leffler sont décrites dans [4, 11, 18, 21].

En 1920, Tamarkin a présenté une solution d'équation intégrale de type Abel-Volterra :

$$\phi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad 0 < x < 1,$$

en termes de la fonction Mittag-Leffler.

Récemment, le calcul fractionnaire a été introduit dans l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaire, (voir par exemple [29, 30]) et de nombreux problèmes ont été étudiés à ce sujet. Voir [12, 24, 23, 33], où certains résultats fondamentaux ont été obtenus. La stabilité des systèmes non linéaires a fait l'objet d'une attention accrue en raison de son importance rôle dans les domaines de la science et de l'ingénierie. Un grand nombre de monographies et d'articles sont consacrés aux systèmes non linéaires fractionnaires [10, 25, 28, 32].

Dans ce travail, on considère le système différentiel fractionnaire suivant

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f(t, x), \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

où $0 < \alpha < 1$ et $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
Nous supposerons que pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, le système (1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ admet une solution $x(t; t_0, x_0) \in C^{\alpha}([t_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$.
Le but de ce travail est d'étudier quelques types de stabilité du système (1). pour ce fait nous supposerons à la suite que l'origine $x = 0$ soit un point d'équilibre pour le système d'ordre fractionnaire (1) c'est-à-dire que $f(t, 0) \equiv 0$.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de présenter quelques définitions et notations, et propriétés pour les fonctions **Gamma, Bêta** et **Mittag-Leffler** que nous utiliserons à la suite de ce travail.

1.1 Méthodes opérationnelles

1.1.1 La fonction Gamma

En mathématiques, la fonction Gamma. C'est une fonction complexe qui prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1.1 *Pour tout nombre complexe z , la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définit par l'intégral suivant.*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad Re(z) > 0. \tag{1.1}$$

Quelques Propriétés importantes de la fonction Gamma

1) une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ d'après (1.1) est la relation suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

Qu'on peut la démontrer par intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = [-t^z e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).$$

2) La fonction Gamma généralise la factorielle car :

$$\Gamma(n+1) = n! \ \ (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.3}$$

3) On définit le prolongement de $\Gamma(z)$ pour z nombre réel négatif comme suit :
Supposons $z \in]-1;0[$ alors $z+1$ est bien défini par la formule (1.2), mais non pas par (1.1). Alors il convient de définir $\Gamma(z)$ par la relation suivante :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \tag{1.4}$$

En suivant la même procédure pour tous nombre réel $z \in]-(n+1); -n[(n \in \mathbb{N}_0)$ on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)....(z+n)}, \quad [1 > z+n+1 > 0] \tag{1.5}$$

Pour $z = 0$: $\Gamma(z)$ est infinie, il en sera de même pour tous les valeurs entieres négatives de z c'est -à- dire $\Gamma(-1); \Gamma(-2); ....; \Gamma(-n)$ sont infinies. On a :

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty$$

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $1 \geq z > 0$.

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
De la définition (1.1) nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

Si nous posons $t = y^2$,
Alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.6}$$

De la même, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.7}$$

Nous multiplions les formulation (1.6) et (1.7) on trouve :

$$\Gamma\left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{1.8}$$

L'équation (1.8) represente intégrale double qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir :

$$\Gamma\left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} drd\theta = \pi \tag{1.9}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ L'équation fractionnelle (1.2) entraine pour les entiers relatifs positifs n ([20])

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) = \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) = \frac{1.59...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

Et poor les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}$$

Autres définitions de la fonction Gamma

$$\Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{1.2.3...k}{(x+1)(x+2)...(x+k)} k^x$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{yx} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{m}\right) e^{-\frac{x}{m}} \right\}$$

Il s'agit d'une représentation produit infinie pour la fonction Gamma, où y est la constante d'Euler.

Dérivées de la fonction Gamma

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -y$$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -y + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + ...$$

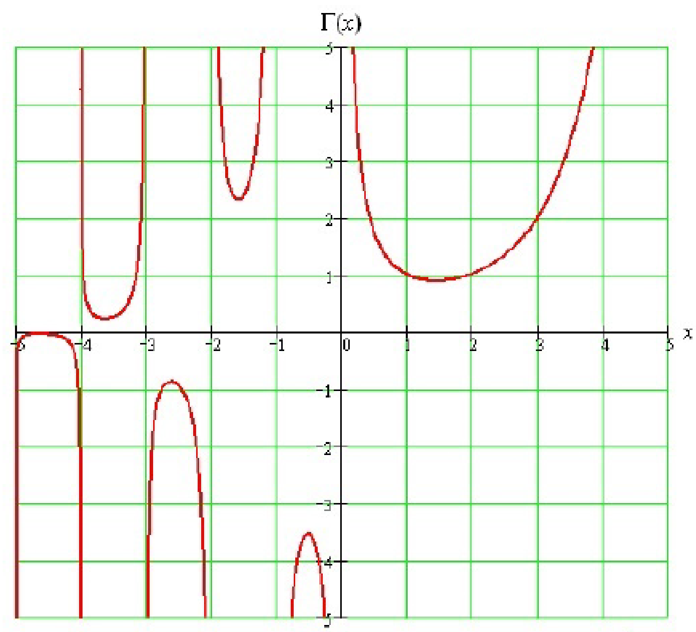

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction Gamma

1.1.2 La fonction Bêta

la fonction Bêta (qui est un type d'intégrale , au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}_+ \tag{1.10}$$

Proposition 1.1.1 *la fonction Bêta et la fonction Gamma sont liées par la relation suivante ([14]) :*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+ \tag{1.11}$$

preuve 1.1.1

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{x-1}t_2^{y-2}e^{-t_1}e^{-t_2}dt_1dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} e^{|t_1+t_2|}dt_2\right)\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$t_2' = t_2 + t_1$$

On trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}dt_1\int_{t_1}^{+\infty}(t_2'-t_1)^{y-1}e^{-t_2'}dt_2' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2'\int_0^{t_1}(t_2'-t_1)^{y-1}t^{x-1}dt_1\end{aligned}$$

Si on pose $t_1' = \frac{t_1}{t_2'}$*, on arrive à*

$$\begin{aligned}&= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2'\left(\int_0^1 (t_1't_2')^{t_1}(t_2'-t_1't_2')^{y-1}t_2'dt_1'\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2'\left((t_2')^{x+y-1}B(x,y)\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}(t_2')^{x+y-1}dt_2'B(x,y) \\ &= \Gamma(x+y)B(x,y).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.

Propriétés de la fonction Béta

1) B(x,y)=B(y,x) pour tous x, y telsque Re(x)>0, Re(y) > 0.

2) B(x,y)=$\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Exemple 1.1.1 *Calculons* $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z, joue un rôle trés importante dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramétre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler ([16, 15]).

Et désingée par la fonction suivante([8, 9])

Définition 1.1.2 *la fonction **Mittag-leffler** à un seul parametre, est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha(k+1))} \quad Re(\alpha) > 0, z \in \mathbb{C} \tag{1.12}$$

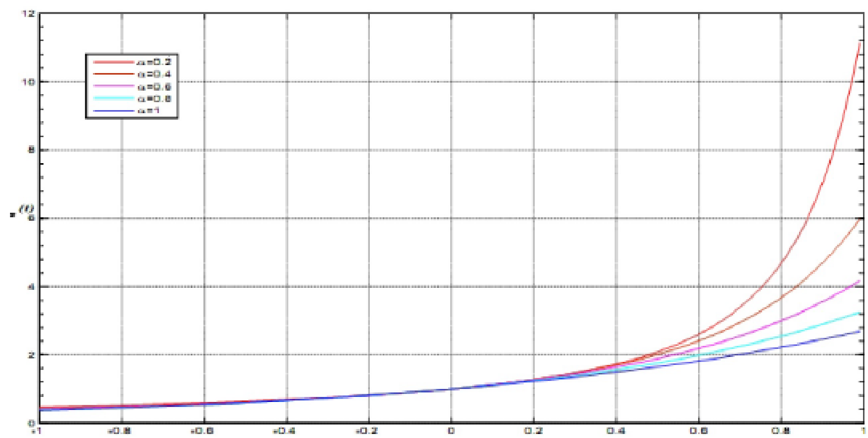

FIGURE 1.2 – La fonction Mittag-Leffler à un seul parametre

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramétres joue également un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction à deux paramétres a été introduite par ARGAWAL ([22]) et elle est définie par un développement en série entière.

Définition 1.1.3 *[3] la fonction Mittag-Leffler à deux parametres, est définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad (z, \beta \in \mathbb{C} \quad Re(\alpha) > 0). \tag{1.13}$$

De la définition (1.13), *résulte :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha} + \beta(z).$$

En effet, par définition on a :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{zz^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha}+\beta(z).
\end{aligned}$$

Par exemple ,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$$

par analogie avec (1.11) pour A $\in \mathbb{C}^{n*n}$ on introduit une matrice dans la fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \quad (z,\beta \in \mathbb{C} \quad Re(\alpha) > 0). \tag{1.14}$$

Quelques relations avec les fonctions classiques
D'après (1.13) on obtient les relation suivantes :

$$E_{\frac{1}{2},2}(z) = \frac{\sinh(z)}{\sqrt{z}}$$

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \cosh(z)$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$$

$$E_{\frac{1}{2}}(z) = e^{z^2}(1+erf(z)) = e^{z^2}(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt).$$

Théorème 1.1.1 *La fonction de Mittag-Leffler possède les proprietés suivantes :*

1) *Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag-Leffler généralisée satisfait :*

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})dt = \frac{1}{z-1}$$

2) *La transformée de laplace de cette fonction est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left[z^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(+az^{\alpha})\right](s)=\frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha-a})^{k+1}},\quad Re(s)>|a|^{\frac{1}{a}}$$

où $E^{(k)}_{\alpha,\beta}(y)=\frac{d^k}{dy^k}E_{\alpha,\beta}(y)$.

3) *Intégration de la fonction de M-L :*

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})t^{\beta-1}dt=z^{\beta}E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^{\alpha}).$$

4) *La dérivée d'ordre* $n\in\mathbb{N}$ *de la fonction de M-L est donnée par :*

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha}))=z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(z^{\alpha})$$

preuve 1.1.2 *Voir [1]*

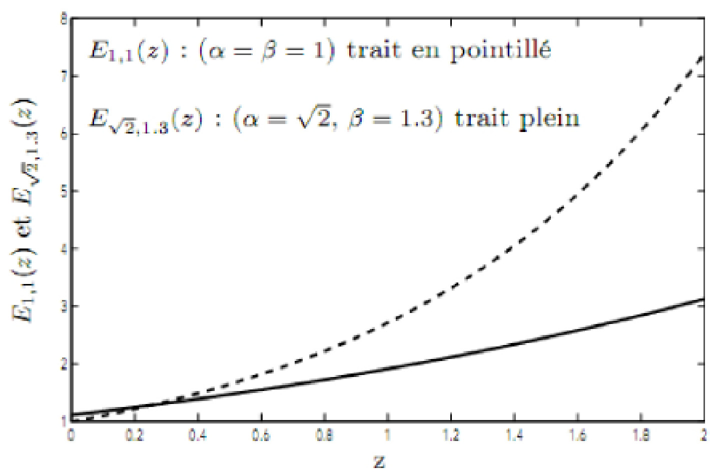

FIGURE 1.3 – La fonction Mittag-Leffler à deux parametres

1.1.4 La fonction Miller-Ross

En 1993, Miller et Ross ont introduit une fonction comme base de la solution du problème de la valeur initial d'ordre fractionnaire définie comme l'intégrale avec l'intégrale de la fonction exponentielle, c'est-à-dire :

$$E_i(v,a)=\frac{d^{-v}}{dt^{-v}}e^{at}=t^{v}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{\Gamma(v+k+1)}$$

1.1.5 Fonction d'Agarwal

La fonction de Mittag-Leffler est généralisée par Agarwal en 1953. Cette fonction est particulièrement intéressante pour la théorie du système d'ordre fractionnaire en raison de sa transformation de Laplace donnée par Agarwal.
La fonction est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{(m+\frac{\beta-1}{\alpha})}}{\Gamma(\alpha - m + \beta)}$$

$$\mathcal{L}\left\{E_{\alpha,\beta}(t)^{\alpha}\right\} = \frac{S^{\alpha-\beta}}{S^{\alpha}-1}$$

1.1.6 Fonction d'Erdelyi

Erdelyi 1954 a étudié la généralisation de la fonction de Mittag-Leffler en tant que :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m}}{\Gamma(\alpha.m + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

où les puissances de t sont des entiers.

1.1.7 La fonction d'Erreur

La fonction d'Erreur est définie par l'intégrale suivante :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

la fonction d'Erreur complémentaire notée $Erfc$ est définie comme suit :

$$Erf(x) = 1 - Erf(x)$$

Par exemple :

$$Erf(0) = 0$$

Et

$$Erf(\infty) = 1$$

1.2 Définitions et notations

Dans cette section, nous introduisons quelques définitions et notations nécessaires qu'on va utiliser au chapitre 3.

1.2.1 Définition de quelques types de stabilité

Le point $x = 0$ de système (3.1) est :

Stable : par a rapport à y, si pour chaque $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe $\delta := \delta(\varepsilon, t_0)$ tel que pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $\|x_0\| < \delta$ implique $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ pour $t \geq t_0$.

Uniformément stable : par a rapport à y, si il est stable et δ ne dépend que de ε.

Uniformément attractive :par a rapport à y, s'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T := T(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x_0\| < \beta$ l'inégalité $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ vaut pour $t \geq t_0 + T$.

Uniformément assymptotiquement stable : par a rapport à y, si il est uniformément stable par a rapport à y, et uniformément attractive par a rapport à y.

Globalement uniformément assymptotiquement stable : par a rapport à y, si il est uniformément stable par a rapport à y, et globalement uniformément attractive par a rapport à y.

Définition 1.2.1 *Le système d'ordre fractionnaire non linéare* (3.1) *est dit conditionel asymptotiquement stable, si pour* $\xi > 0$ *tel que pour tous* $\|\mu\| \leq \xi$*, il existe une fonction* ψ *de classe* k_∞ *satisfaisant pour chaque condition initiale* $\|x(t_0)\|$*, la solution x(t) satisfait :*

$$\|x(t)\| \leq \psi(\|x(t_0)\|), t - t_0)$$

.

1.2.2 Définition des fonction de classe K et K_∞

Définition 1.2.2 *On dit qu'une fonction continue* $\varphi : R_+ \to R_+$ *est de classe* K *si elle est strictement croissante et* $\varphi(0) = 0$*. Si en plus* $\varphi(t) \xrightarrow{t \longmapsto +\infty} +\infty$*, on dit que* φ *appartient à la classe* K_∞*.*

Remarque 1.2.1 *Si* $\varphi_1, \varphi_2 : R_+ \to R_+$ *sont deux fonctions de classe* K *(respectivement de classe* K_∞*), alors les fonctions* $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_2$ *et* $\varphi_2 \circ \varphi_1$ *sont aussi de classe* K *(resp. de classe* K_∞*).*

Chapitre 2

Dérivées et intégrales fractionnaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques approches de dérivation et intégration fractionnaires.

2.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est basée sur la remarque qu'on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par le formule générale suivant :

$$_aD_t^p = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh)$$

avec

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$$

qui représente la dérivée d'ordre entier p si $0 < p < n$ et l'intégrale répétée $(-p)$ fois si $-n < p < 0$ avec $nh = t - a$.

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 < p < n$) et

$$(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(1-p)(2-p)...(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}$$

nous donne :

$$_a^G D_t^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh) \tag{2.1}$$

et

$$_a^G D_t^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{2.2}$$

Si f est de classe C^n alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$_a^G D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^1 (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \tag{2.3}$$

et aussi :

$$ {}_a^G D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^1 (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \tag{2.4} $$

Exemple 2.1.1 **1)** ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov***

En générale la dérivée d'une constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante. Si $f(t) = c$ et p non entier on a : $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, 2, ..., n$

$$ \begin{aligned} {}_a^G D_t^p f(t) &= \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}}_{\Downarrow 0} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^1 (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_{\Downarrow 0} \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} \end{aligned} $$

2) ***La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Grünwald-Latnikov***

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a :$f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$ et

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n} $$

donc

$$ {}_a D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau $$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$ \begin{aligned} {}_a D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned} $$

2.2 Intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Dans cette section on présente les définitions et quelques propriétés des dérivées et des intégrales de Riemann-Liouville.

2.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouvile

Soit $\Omega = (a; b]$, un intervalle fini sur l'axe réel $\mathbb{R}$, et f une fonction intégrable sur Ω. L'intégrale fractionnaire $([2], [13])$ de Riemann-Liouville $I_{a+}^{\alpha} f$ d'ordre réel $\alpha > 0$ est définie par :

$$(I_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (t > a, \alpha > 0). \tag{2.5}$$

Où $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction Gamma définie dans (1.1). La formule (2.5) s'appelle intégrale fractionnaire d'ordre α à gauche.

Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la définition (2.5) coincide avec la n-iéme intégrale de R-L de la forme :

$$\begin{aligned}(I_{a^+}^{\alpha} f)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 .... \int_a^{s_n-1} f(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, (n \in \mathbb{N})\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $D_{a^+}^{\alpha} f$ d'ordre réel $\alpha > 0$, (Voir [2], [13]) est définie par :

$$\begin{aligned}(D_{a^+}^{\alpha} f)(t) : &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(t) \qquad (2.7) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad (t > a; n = [\alpha]+1)\end{aligned}$$

où $[\alpha]$ désigne la partie entiére du nombre réel α.

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$$(D_{a^+}^{0} f)(t) = f(t), (D_{a+}^{n} f)(t) = f(n)(t), \tag{2.8}$$

où $f^{(n)}(t)$ désigne la dérivée usuelle d'ordre n de $f(t)$.

Si $0 < \alpha < 1$, alors

$$(D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad (t > a). \tag{2.9}$$

Quelques propriétés

Les dérivées fractionnaires au sens de R-L ont les propriétés suivantes(Voir [2], [13]) :

1. Si $f(t)$ est continue pour $t > a$, alors l'intégration fractionnaire d'ordre réel arbitraire définie par (2.5), possède la propriété importante suivante :

$$I_{a^+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta} f(t)) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t), \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \tag{2.10}$$

Évidemment, on peut interchanger α et β, nous obtenons :

$$I_{a^+}^{\beta}(I_{a+}^{\alpha} f(t)) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t), \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \tag{2.11}$$

Nous pouvons que la régle (2.11) est semblable à la propriété bien connue sur les dérivées d'ordre entier

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} \tag{2.12}$$

2. La propriété qui peut être la plus importante de la dérivée fractionnaire au sens de R-L pour $\alpha > 0$, et $t > a$ est que :

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t)$$

qui signifie que l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de R-L est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de R-L du même ordre.

3. Si $\alpha > \beta > 0$, et $f(t) \in L^p(a,b), (1 \leq p \leq \ \infty)$, la relation

$$D_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha} f(t) = I_{a^+}^{\alpha-\beta} f(t), \tag{2.13}$$

est satisfaire presque partout sur l'intervalle [a, b], où

$$L^p\,[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \;\; est \;\; mesurable \;\; dans\,[a,b]\}$$

En particulier, quand $\beta = K \in \mathbb{N}$, et $\alpha > k$, alors

$$D_{a^+}^{K} I_{a+}^{\alpha} f(t) = I_{a^+}^{\alpha-K} f(t), \tag{2.14}$$

4. Soient $\alpha \geq 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dt}$.
Si les deux dérivées fractionnaires $D_{a^+}^{\alpha} f(t), D_{a^+}^{m} f(t)$ existes, nous avons :

$$D_{a^+}^{m} D_{a^+}^{\alpha} f(t) = D_{a^+}^{\alpha+m} f(t), \tag{2.15}$$

5. Si la dérivée fractionnaire d'ordre α, $(n-1 \leq \alpha < n)$, d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[D_{a^+}^{\alpha-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{2.16}$$

En général, nous voyons que les dérivées fractionnaires et les intégrales fractionnaires au sens de R-L de même ordre ne commutent pas entre elles.

6. Nous avons aussi les formules de compositions suivantes(Voir [2], [13]) ;
Soient, $m-1 \leq \alpha < m$, et $n-1 \leq \beta < n$,

$$D_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\beta} f(t) = D_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[D_{a+}^{\beta-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)} \tag{2.17}$$

et

$$D_{a^+}^{\beta} D_{a+}^{\alpha} f(t) = D_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{m} [D_{a+}^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)} \tag{2.18}$$

D'après les deux relations (2.17) et (2.18), nous pouvons que les dérivées fractionnaires au sens de R-L ne commutent pas.

Intégrale fractionnaire de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$

On va calculer(Voir [6]) l'intégrale fractionnaire $I^\alpha_{a^+}f(t)$ au sens de Riemann-Liouville de la fonction puissance $f(t) = (t-a)^\beta$, où β est un nombre réel.
Utilisons la formule (2.5)

$$I^\alpha_{a^+}(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^\beta ds, \tag{2.19}$$

et supposons que$\beta > -1$ pour la convergence de l'intégrale, En appliquant dans (2.19) le changement de variable $s = a + \xi(t-a)$ et en utilisant la définition de la fonction Bêta (1.9) nous obtenons :

$$I^\alpha_{a^+}(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1}\xi^\beta d\xi, \tag{2.20}$$

où $\xi = 0$ quand $s = a, \xi = 1$ quand $s = t$ et $\xi = \frac{s-a}{t-a}$.

Alors

$$I^\alpha_{a^+}(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha)(t-a)^{\alpha+\beta}$$

L'utilisation de la formule (1.11) donne le résultat :

$$I^\alpha_{a^+}(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}, \quad (\alpha > 0, \beta > -1), \tag{2.21}$$

Dérivée fractionnaire de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$

Calculons maintenant (Voir [5])la dérivée fractionnaire $D^\beta_{a^+}, (\beta \in \mathbb{R})$.

A ce propos, supposons que $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$, et rappelons que la définition de la dérivée fractionnaire au sens de R-L est :

$$D^\alpha_{a^+}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}_{a^+}f(t)), \quad (n-1 \leq \alpha < n), \tag{2.22}$$

Avant d'appliquer la formule (2.22), nous avons besoin d'imposer $\beta > n$ pour convergence de l'intégrale (2.5), Nous avons alors :

$$D^\alpha_{a^+}(t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}_{a^+}(t-a)^\beta), \tag{2.23}$$

L'utilisation de la formule (2.21) et (2.23) donne :

$$D^\alpha_{a^+}(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{\beta+n-\alpha} \tag{2.24}$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned} \frac{d^n(x-a)^{\beta+n-\alpha}}{dt^n} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha+1)...(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

Nous substituons le résultat (2.25), dans la formule (2.24) nous obtenons :

$$D^\alpha_{a^+}(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{2.26}$$

Alors, nous pouvons conclure que la dérivée fractionnaire au sens de R-l de la fonction

$f(t) = (t-a)^{\beta}$ est :
$$D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{2.27}$$
avec $0 \leq n-1 \leq \alpha < n, \beta > n$.

2.2.3 Dérivée fractionnaire d'une constante

En particulier(Voir [13]), si on prend la relation (2.27) on posant $\beta = 0$ avec $\alpha \geq 0$, nous pouvons conclure que la dérivée fractionnaire d'une constante au sens de R-L est différente de zéro, c'est-à-dire :
$$D^{\alpha}_{a^+}(1) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0, \quad (0 < \alpha < 1) \tag{2.28}$$

Définition 2.2.1 ***(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gouche)***

$$\forall t > a, \quad {}^{R}_{a}D^{-\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

Définition 2.2.2 ***(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gouche)***

$$\forall t > a, \quad {}^{R}_{a}D^{-\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passéde f, c'est-à-dire les valeurs de $f(s)$ pour $a < s < t$.

Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de f, c'est-à-dire les valeurs de $f(s)$ pour $t < s < b$.

On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

Définition 2.2.3 ***(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)***

$$\forall t < b, \quad {}^{R}_{t}D^{-\beta}_{b} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (t-s)^{\beta-1} f(s) ds$$

Définition 2.2.4 ***(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)***

$$\forall t < b, \quad {}^{R}_{t}D^{\beta}_{b} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (t-s)^{n-\beta-1} f(s) ds.$$

Notons bien que f est une fonction tell que ${}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t)$ et ${}^{R}_{t}D^{\beta}_{b} f(t)$ sont définies.

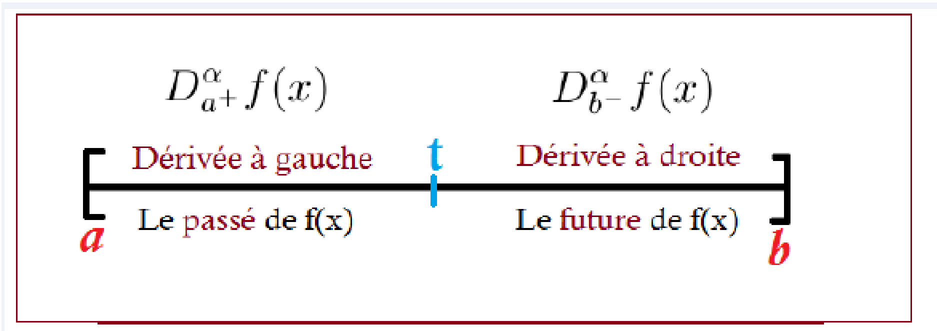

FIGURE 2.1 – Les dérivée à droite et à gauche de f(x)

2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville méne à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$. Une certaine solution de ce problème a été proposée par M.Caputo. Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n \quad et \ n \in N^*$) f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a, b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^c_aD^p_t f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p}(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) \end{aligned}$$

Définition 2.3.1 *[2] La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^cD^{\alpha}_{a+}f(t)$ d'ordre $\alpha \geq 0$ sur $[a, b]$, est définie par l'intermédiare du dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :*

$${}^cD^{\alpha}_{a+}f(t) = D^{\alpha}_{a+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \tag{2.29}$$

où

$$n = [\alpha] + 1 \quad pour \quad \alpha \notin \mathbb{N}, n = \alpha \quad pour \quad \alpha \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$, la relation (2.29)non prend la forme suivante :

$${}^cD^{\alpha}_{a+}f(t) = D^{\alpha}_{a+}\left[f(t) - f(a)\right] \tag{2.31}$$

Théorème 2.3.1 *[2] Soit $\alpha \geq 0$, et n donné par la relation (2.30), si $f(t) \in AC^n[a, b]$, la dérivée fractionnaire de Caputo existe presque partout sur $[a, b]$.*

(a) *Si $\alpha \notin \mathbb{N},^c D^{\alpha}_{a+}$ est donné par :*

$${}^cD^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds = (I^{n-\alpha}_{a+} D^n_{a+} f)(t). \tag{2.32}$$

tell que :
$D = \frac{d}{dt}$ *et* $n = [\alpha] + 1, AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \quad et \quad D^{n-1}f(t) \in AC[a, b]\}$
En particulier quand $0 < \alpha < 1$ et $f(t) \in AC[a, b]$, nous obtenons :

$${}^cD^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds = (I^{1-\alpha}_{a+} D^1_{a+} f)(t). \tag{2.33}$$

(b) *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on obtient :*

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = f^{(n)}(t), \tag{2.34}$$

En particulier

$$^{c}D^{0}_{a^+}f(t) = f(t)$$

preuve 2.3.1 *(Voir[2])*

Quelques propriétées(Voir[2],[13],[17])

Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo représent ent les propriétés suivante.

1) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $f(t)$ est la fonction où les dérivées fractionnaires $^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t)(\alpha) \geq 0$, et $D^{\alpha}_{a^+}f(t)$ existent, nous relions les deux relation (2.27) et (2.29), nous obtenons :

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = D^{\alpha}_{a^+}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\alpha]+1) \tag{2.35}$$

En particulier quand $0 < \alpha < 1$, nous obtenons :

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = D^{\alpha}_{a^+}f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \tag{2.36}$$

2) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, et $f(a) = f'(a) = ... = f(n-1)(a), \quad (n = [\alpha]+1)$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo coincide avec la dérivée fractionnaire de R-L, comme suit :

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = D^{\alpha}_{a^+}f(t), \tag{2.37}$$

3) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, et la dérivée usuelle $f^{(n)}(t)$ existe, alors la dérivée fractionnaire $^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$ de Caputo d'ordre n coincide avec $f^{(n)}(t)$ comme suit :

$$^{c}D^{n}_{a^+}f(t) = f^{(n)}(t). \tag{2.38}$$

4) La relation entre l'ntégrale fractionnaire de R-L et la dérivée fractionnaire de Caputo.
Soit $\alpha > 0$, et n donné par (2.30), si $f(t) \in AC^{n}[a,b]$ oú $f(t) \in C^{n}[a,b]$ alors :

$$I^{\alpha}_{a^+}\,{}^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}. \tag{2.39}$$

En particulier si $0 < \alpha < 1$, et $f(t) \in C[a,b]$, nous obtenons la relation suivante :

$$I^{\alpha}_{a^+}\,{}^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(t) - f(a)$$

.

Dérivée fractionnaire de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$

On va calculer la dérivée fractionnaire $^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$, au sens de Caputo de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}, \quad (\beta \in \mathbb{R})$.

A ce propos, on suppose que $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$, et rappelons que la définition de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = I^{n-\alpha}_{a+}D^{n}_{a^+}f(t), \quad (n-1 \leq \alpha < n) \tag{2.40}$$

On suppose que $\beta > n$ pour la convergence de l'intégrale (2.5) et appliquer la formule (2.40).

Nous avons alors :

$$ {}^cD^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta} = I^{n-\alpha}_{a^+} D^{n}_{a^+}(t-a)^{\beta}. \tag{2.41}$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta} &= \frac{d^n(t-a)^{\beta}}{dt^n} \\ &= \beta(\beta-1)......(\beta-n+1)(t-a)^{\beta-n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n} \end{aligned} \tag{2.42}$$

Alors nous substituons le résultat (2.42) à la formule (2.40) , et d'après la relation(2.21) nous obtenons :

$$ {}^cD^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}$$

Nous pouvons alors conclure que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ est :

$$ {}^cD^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n} \tag{2.43}$$

avec n donné par (2.30), et $\beta > n$.

2.3.1 Dérivée fractionnaire d'une constante

L'utilisation de la formule (2.29) ou (2.32) pour calculer la dérivée fractionnaire de la constante k, $(k \in \mathbb{R})$ exprime que cette dérivée égale à zéro, c'est-à-dire[2] :

$$ {}^cD^{\alpha}_{a^+}(k) = 0, \quad (k \in \mathbb{R}), \alpha > 0).$$

2.4 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivante établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.4.1 *[1][26] Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D^{\alpha}_{a} f$ existe, alors :*

$$ ({}^cD^{\alpha}_{a})(x) = D^{\alpha}_{a}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \right]$$

Prèsque partout sur $[a, b]$.

Remarque 2.4.1 *Le résultat du théorème $(2.4.1)$ signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f.*

2.5 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Rieman-Liouville

1* L'avantage principale de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

2* Une autre différence entre la définition de Rieman celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Rieman-Liouville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}$.

3* Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est-à-dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

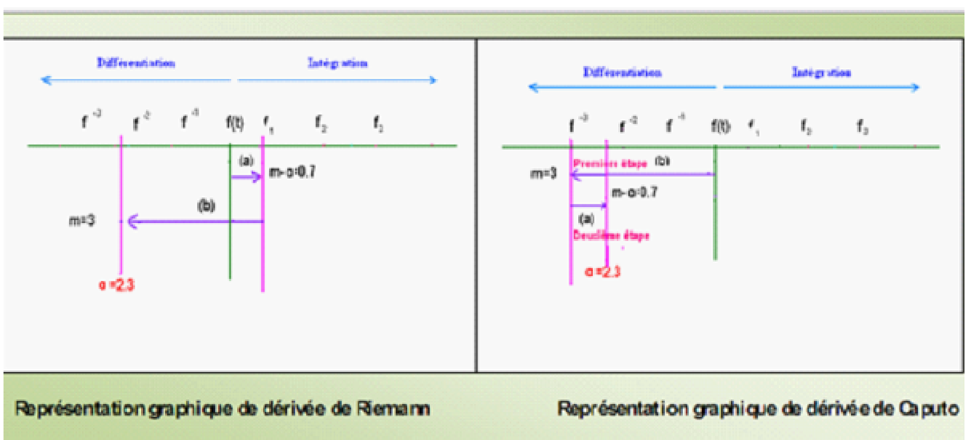

FIGURE 2.2 – Comparaison entre la dérivée fractionnaire de Caputo et Rieman-Liouville

2.6 Transformation de Laplace

2.6.1 Données de base sur la transformation Laplace

Rappelons-nous quelques résultas fondamentaux de la transformée de Laplace .
La fonction $F(s)$ de la variable complexe est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \tag{2.44}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, qui s'appelle l'original.

Pour l'existance de l'intégrale (2.44), la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel, ce qui signifie qu'il existe des constantes positives M et T telles que :

$$e^{-\alpha t}|f(t)|\leq M \quad t > T.$$

En d'autre termes la fonction $f(t)$ ne doit pas croite plus vite qu'une certaine fonction exponentielle lorsque $t \to \infty$.

Nous noterons les transformation laplace par des lettres majuscules et les originaux par des lettres minuscules.

La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s);t\right\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad c = Re(s) > c_0, \tag{2.45}$$

où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale(2.44) de Laplace.

La Laplace transformer de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g\tau d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{2.46}$$

des deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égales à zéro pour $t < 0$, est égal au produit de la transformation laplace de celles-ci :

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t);s\right\} = F(s)G(s) \tag{2.47}$$

En supposant que $F(s)$ et $G(s)$ existe.

Nous utiliserons la propriété (2.47) pour évaluer la transformée en laplace de l'intégrale fractionnaire de Rieman-Liouville.

Exemple 2.6.1 **1*** $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$

2* $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{1}{s^2+1}$*(pour la démonstration, on utilisons l'intégration par partie)*

3* $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ *(on applique intégration par partie :)*

$$\int_0^{+\infty} te^{-st}dt = 0 + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

4* $\mathcal{L}(t^k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$*(par récurrence)*

5* $\mathcal{L}(\exp(-at))(s) = \frac{1}{s+a}$

Proposition 2.6.1 *[1] La transformée de laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^{n-k-1}f^{(k)}(0^+)\\ &= s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^k f^{(n-k-1)}(0^+)\end{aligned}$$

2.7 Propriétés des dérivées fractionnaires

Portons maintenant notre attention sur les propriétés d'intégration et de différenciation d'ordre fractionnaire, qui sont le plus souvent utilisées dans les applications [13].

1. **Linearité** la différentiation fractionnaire d'ordre entier est une opération linéaire :

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t)$$

2. **La régle de Leibniz**
   Si $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions les dérivées continues dans $[a, T]$, alors on peut ecrire la régle de Libniz pour différentiation fractionnaire à la forme :

$$D^{\alpha}(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \varphi^{k}(t) D^{\alpha-k} f(t)$$

Chapitre 3

Résultats de stabilité

3.1 Introduction

On considére le système suivante pour des équation différentielles fractionnaires avec dérivée fractionnaire de Caputo .

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}X(t) = f(t, X(t)), \quad t \geq t_0 \tag{3.1}$$

où $0 < \alpha < 1$ et $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Nous supposerons que pour toute donné initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, le système (3.1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ admet une solution $x(t; t_0, x_0) \in C^{\alpha}([t_0, +\infty])$.

Le put de ce travail est d'étudier la stabilité de système (3.1), pour ce fait nous supposerons dans la suite que l'origine $x = 0$ soit un poit d'équilibre du système d'ordre fractionnaire (3.1) c'est-à-dire que $f(t, 0) \equiv 0$.

Lemme 3.1.1 *Soit x(t) $\in \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Alors pour tous instant $t \geqslant t_0$*

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x^2(t) \leq x(t) {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t), \quad \forall \alpha \in]0, 1[\tag{3.2}$$

preuve 3.1.1 *Pour démontrer le lemme précédente, il suffit démontrer que :*

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x^2(t) - x(t) {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) \leq 0, \quad \forall \alpha \in]0, 1[\tag{3.3}$$

Par la définition on a :

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \tag{3.4}$$

Alors on peut écrire :

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}X^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \tag{3.5}$$

Donc l'expression (3.3) s'écrit sous la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)x'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \quad - & \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x(t)\int_{t_0}^{t}\frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
= & \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)x'(\tau)-x(t)x'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
= & \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x'(\tau)(x(\tau)-x(t))}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \geq 0
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

En utilisant ensuite le changement de variables.

$$y(\tau) = x(\tau) - x(t)$$

Ce qui donne

$$y'(\tau) = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dx(\tau)}{d\tau}$$

Et par suite l'expresion (3.6) *peut s'écrit sous la forme.*

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y(\tau)y'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \geq 0 \tag{3.7}$$

En utilisant l'intégration par parties ensuite, on posont.

$$dx = y(\tau)y'(\tau)d\tau, \quad x = \frac{1}{2}y^2$$

$$v = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}, \quad dv = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha-1}d\tau$$

l'expression (3.7) *s'écrit :*

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} v dx \quad = & \quad \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}\frac{1}{2}y^2\right]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}y^2\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha-1}d\tau \\
= & \quad \left[\frac{y^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{-\alpha}}\right]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}y^2\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau \\
= & \quad \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}} - \frac{y_0^2(\tau)}{2\tau(1-\alpha)(t-t_0)^{\alpha}} - \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau \\
\geq & \quad 0.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

l'expression (3.8) *représente une indétermination au point* $\tau = t$*, donc on calcule la limite quand* $\tau \to t$*, on a*

$$\lim_{\tau \to t} \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \frac{1}{2\tau(1-\alpha)} \lim_{\tau \to t} \frac{[x(\tau)-x(t)]^2}{(t-\tau)^\alpha}$$

Etant donné que la fonction est derivable, alors on utilisé la régle de l'opitale(car elle en résulte $\frac{0}{0}$*) peut s'applifier.*

Alors

$$\lim_{\tau \to t} \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \to t} \frac{2[(x(\tau)-x(t))x'(\tau)]}{\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}}$$
$$= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \to t} \frac{2[(x(\tau)-x(t)]x'(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha} = 0$$

donc l'expression (3.8) *se réduit a :*

$$\frac{y_0^2(\tau)}{2\tau(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \leq 0. \tag{3.9}$$

l'expression (3.9) *est bien vérifiée et ceci termine la preuve.*

Lemme 3.1.2 *[19] Si* $x(t) \in R^n$*, le lemme* $(3.1.1)$ *reste toujours applicable et on a pour tout* $\alpha \in]0,1[$ *et* $t \geq t_0$

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x^t(t).x(t) \leq x^t(t). {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x(t) \tag{3.10}$$

preuve 3.1.2 *La preuve est simplement obtenu, en décomposant l'expression* (3.10) *en une somme des produits scalaires et en utilisant le lemme* $(3.1.1)$ *.*

Remarque 3.1.1 *le cas où* $\alpha = 1$ *correspond à la régle de produit pour les dérivés d'ordre entier, qui stipule que* $\frac{1}{2}\frac{dx^2(t)}{dt} = x(t)\frac{dx(t)}{dt}$

Lemme 3.1.3 *Soit le problème est donnée aux limite*

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha Y(t) - \lambda Y(t) = h(t), \quad t \geq t_0 \\ \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1$

la solution de ce problème est donnée par

$$Y(t) = Y_0 E_{\alpha,1}(\lambda(t-t_0)^\alpha) + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) h(s) ds, \tag{3.11}$$

où $E_{\alpha,\beta}$ *est la fonction Mittag-Leffer à deux paramètres.*

3.2 Stabilité de solutions

Théorème 3.2.1 *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V*$\in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ *qui admet une dérivée de Caputo d'ordre* α *pour tous* $t \geq t_0$ *telle que* $V(t,0) \equiv 0$ *et une fonction* α_1 *de classe* K *vérifiant :*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.12}$$

$$^C_{t_0}D^\alpha_t V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \forall t_0 \geq 0 \tag{3.13}$$

Alors le point $x = 0$ *est Stable .*

Si, de plus pour certaine fonction $\alpha_2 \in K$

$$V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.14}$$

alors $x = 0$ *est uniformément Stable .*

preuve 3.2.1 *Pour l'expression* (3.13)*, il existe une fonction* $h(t)$ *non négative, telle que*

$$^C_{t_0}D^\alpha_t V(t, x(t; t_0, x_0)) = -h(t), \quad \forall t \geq t_0 \tag{3.15}$$

Remarque 3.2.1 *Pour démonstration de ce théorème on utilise le lemme* (3.1.3) *.*

D'aprés l'expresion (3.11) *, t*$\geq t_0$

Si

$$\lambda = 0$$

On trouve

$$^C_{t_0}D^\alpha_t V(t) = h(t), \quad t \geq t_0$$

Alors,

$$I^\alpha {}^C_{t_0}D^\alpha_t V(t) = h(t)$$

telle que

$$V(t) = C_0 - I^\alpha h(t) = C_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

$$V(t_0, x_0) = C_0$$

Donc for $t \geq t_0$ *on a,*

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \leq V(t_0, x_0), \quad \forall t \geq t_0 \tag{3.16}$$

Parce que :

$$h(s) \geq 0.$$

Et

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} ds \geq 0 \implies -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \leq 0$$

nous utilisons l'expresion (3.12) *et* (3.16) *on trouve :*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t_0, x_0) \implies \alpha_1(\|y(t; t_0, x_0)\|) \leq V(t_0, x_0), \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.17}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $V(t_0, x_0) = 0$

Et V est une fonction continue, alors il exists $\delta := \delta(\varepsilon, t_0)$ *tellque :*

$$(\|x_0\|) < \delta \implies V(t_0, x_0) < \alpha_1(\varepsilon), \quad \alpha_1 \in K \tag{3.18}$$

Par conséquent , par (3.17) *et* (3.18) *on trouve :*

$$(\|x_0\|) < \delta \implies (\|y(t; t_0, x_0)\|) < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \tag{3.19}$$

Alors le point $x = 0$ *est stable.*

Si de plus pour certiane fonction $\alpha_2 \in K$ *, en* $x = 0$ *est uniformément stable.*

Pour $\varepsilon > 0$,

Il existe

$$\delta := \delta(\varepsilon) > 0$$

telle que

$$\alpha_2(\delta) < \alpha_1(\varepsilon)$$

On a $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *telle que*

$$(\|x_0\|) < \delta;$$

On utilise l'expresion (3.14) *et* (3.17) ,
On trouve.

$$\alpha_1(\|y(t; t_0, x_0)\|) \leq V(t_0, x_0) \leq \alpha_2 < \alpha_2(\delta) < \alpha_1(\varepsilon), \quad t \geq t_0$$

Puisque $\alpha_1 \in K$,
Alors

$$\|y(t; t_0, x_0)\|) < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Par concéquent, x=0 est uniformément stable.

Exemple 3.2.1 *On connsidére le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_1 = -x_1 + \sin(x_3) x_1 \\ \\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_2 = -x_2 + e^{-t} \cos(x_1) x_2 \\ \\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_3 = x_3 \end{cases} \tag{3.20}$$

où $0 < \alpha < 1$ *et* $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$

Considérons la fonction de lyapunov-tike :

$$V(t, x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

Par le lemme $(3.1.3)$ *nous avons :*

$$\begin{aligned}
{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(t,x(t;t_0,x_0)) &\leq x_1(t;t_0,x_0)_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x_1(t;t_0,x_0)+x_2(t;t_0,x_0)_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x_2(t;t_0,x_0)\\
&+ x_3(t;t_0,x_0)_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x_3(t;t_0,x_0)\\
&\leq x_1(t;t_0,x_0)(-x_1(t;t_0,x_0)+\sin(x_3(t;t_0,x_0)))x_1(t;t_0,x_0)\\
&+ x_2(t;t_0,x_0)(-x_2(t;t_0,x_0)+e^{-t}\cos(x_1(t;t_0,x_0)))x_2(t;t_0,x_0)\\
&\leq -x_1^2(t;t_0,x_0)+\sin(x_3(t;t_0,x_0))x_1^2(t;t_0,x_0)\\
&- x_2^2(t;t_0,x_0)+e^{-t}\cos(x_1(t;t_0,x_0)))x_2^2(t;t_0,x_0)\\
&\leq -x_1^2(t;t_0,x_0)(1-\sin(x_3(t;t_0,x_0)))\\
&- x_2^2(t;t_0,x_0)(1-e^{t}\cos(x_1(t;t_0,x_0)))\\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Alors l'hypothése du théorème $(3.2.1)$ *est vérifiée*

Par conséquent, x=0 est uniformément stable par rapport à (x_1,x_2).

Théorème 3.2.2 *Supposons qu'il existe une fonction de lyapunov V*$\in$ $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_+)$ *qui admet une dérivée de Caputo d'ordre* α *pour tous* $t\geq t_0$ *et deux fonction* $\alpha_1,\alpha_2\in K$ *qui vérifient :*

$$\alpha_1(\|x\|)\leq V(t,x)\leq\alpha_2(\|x\|),\quad \forall t\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}^n \tag{3.21}$$

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(t,x(t;t_0,x_0))\leq -c\alpha_2(\|x\|),\quad \forall t\geq t_0,\forall t_0\geq 0 \tag{3.22}$$

Alors $x=0$ *est uniformément assymtotiquement stable.*

α_i *de plus,* $\alpha_1,\alpha_2\in K_\infty$,

Alors $x=0$ *est globalement uniformément assymtotiquement, stable.*

preuve 3.2.2 *Du thérème* $(3.2.1)$*, nous avons que le point x=0 est uniformément stable par raport á* y.

Soit r *un nombre positif tel que* $\alpha_2(\|x_0\|)<r$

Il découle de l'expresion (3.21) *et* (3.22) *que.*

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(t,x(t;t_0,x_0))\leq -cV(t,x(t;t_0,x_0)) \tag{3.23}$$

Alors,

il existe une fonction non négative $h(t)$

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(t,x(t;t_0,x_0))\leq -cV(t,x(t;t_0,x_0))-h(t) \tag{3.24}$$

D'après l'équation (3.11) *on a*

$$V(t,x(t;t_0,x_0))\leq V(t_0,x_0)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-c(t-s)^\alpha)h(s)ds$$

Puisque $E_{\alpha,\alpha}(-c(t-s)^\alpha)$ *et* $h(s)$ *sont des fonctions non négatives,*

on trouve

$$V(t, x(t;t_0,x_0)) \leq V(t_0,x_0)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha), \quad \forall t \geq t_0 \tag{3.25}$$

Par concéquent d'après (3.21), *pour* $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|y(t;t_0;x_0)\|) \leq V(t,x(t;t_0,x_0)) &\leq V(t_0,x_0)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha) \\ &\leq \alpha_2((\|x_0\|))E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha) \\ &\leq rE_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha). \end{aligned} \tag{3.26}$$

D'après l'expresion (3.26) *on a :*

$$(\|y(t;t_0;x_0)\|) \leq (\alpha_1^{-1}(rE_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha))), \quad t \leq t_0. \tag{3.27}$$

Soit $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\lim_{s\to+\infty} E_\alpha(-cs^\alpha) = 0 \quad tellque \quad s = t - t_0 \tag{3.28}$$

Alors, il existe $T := T(\varepsilon)$ *tel que*

$$E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha)) < \frac{\alpha_1(\varepsilon)}{r}, \quad \forall t - t_0 > T \tag{3.29}$$

De (3.27) *et* (3.29), *il s'ensuit que*

$$(\|y(t;t_0;x_0)\|) \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T \tag{3.30}$$

$x = 0$ *est uniformément asymptotiquement stable par rapport à* y.

De plus $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$,

Alors de l'expression (3.26)

$$(\|y(t;t_0;x_0)\|) \leq (\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x_0\|))E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha)), \quad t \geq t_0, \tag{3.31}$$

pour $\varepsilon > 0, B > 0 \;\; et \;\; x_0 \in \mathbb{R}^n$,

tellque

$$\|x_0\| \leq B$$

De l'expression (3.31) *on trouve*

$$(\|y(t;t_0;x_0)\|) \leq (\alpha_1^{-1}(\alpha_2(B)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha)), \quad t \geq t_0, \tag{3.32}$$

il s'ensuite pour (3.29), *qu'il existe* $T := T(\varepsilon, B)$ *tell que*

$$E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha) \leq \frac{\alpha_1(\varepsilon)}{\alpha_2(B)}, \quad t - t_0 \geq T \tag{3.33}$$

Pour (3.32) *et* (3.33), *il s'ensuite que*

$$\|y(t;t_0;x_0)\| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0 + T$$

$x = 0$ *est globallement uniformément assymptotiquement stable par rapport à* y.

Exemple 3.2.2 *On concidère le système suivant :*

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_1 = -4x_1 + (1+e^{-t})x_1 \\ \\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_2 = -4x_2 + 2\cos(x_1)x_2 \\ \\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_3 = -2x_3 \end{cases}$$

et la fonction de Lyapunov

$$V(t,x(t)) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2},$$

et

$$(\|x(t)\|) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} V(t,x(t;t_0,x_0)) &\leq x_1(t;t_0,x_0) {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_1(t;t_0,x_0) + x_2(t;t_0,x_0) {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_2(t;t_0,x_0) \\ &+ x_3(t;t_0,x_0) {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_3(t;t_0,x_0) \\ &\leq x_1(t;t_0,x_0)(-4x_1 + (1+e^{-t}))x_1(t;t_0,x_0) \\ &+ x_2(t;t_0,x_0)(-4x_2 + 2\cos(x_1))x_2(t;t_0,x_0) + x_3(t;t_0,x_0)(-2)x_3(t;t_0,x_0) \\ &\leq -4x_1^2(t;t_0,x_0) + (1+e^{-t})x_1^2(t;t_0,x_0) - 4x_2^2(t;t_0,x_0) \\ &+ 2\cos(x_1(t;t_0,x_0))x_2^2(t;t_0,x_0) - 2x_3^2(t;t_0,x_0) \\ &\leq -2[x_1^2(t;t_0,x_0) + x_2^2(t;t_0,x_0) + x_3^2(t;t_0,x_0) \\ &= -2(\|x(t)\|)^2. \end{aligned}$$

Alors $x = 0$ uniformément asymptotiquement stable.

Théorème 3.2.3 *Supposons qu'il existe une fonction V$\in$ $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ qui a une dérivée de Caputo d'ordre α pour tout $t \geq t_0$ et deux fonctions α_1, α_2 de classe K_∞ satisfaisant :*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x(t)) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall t \geq t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.34}$$

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} V(t,x(t)) \leq -(k - \alpha_1(\|\mu\|))V(t,x(t)), \quad \alpha_1(\|\mu\|) < k. \tag{3.35}$$

Alors le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.1) d'ordre fractionnaire non linéaire est conditionnel asymptotiquement stable.

preuve 3.2.3 *En tenant compte de la condition (3.35) et de l'hypothése,$\|\mu\| \leq \xi$, nous constatons que :*

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} V(t,x(t)) \leq -(k - \alpha_1(\xi))V(t,x(t)),$$

puisque $k - \alpha_1(\xi) > 0$,

Alors il existe une fonction continue non négative $h(t)$ telle que :

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} V(t,x(t)) = -cV(t,x(t)) - h(t).$$

Où $c = k - \alpha_1(\xi)$
De $(3.1.3)$, il s'ensuit que pour $t \geq t_0$:

$$V(t,x(t)) = V(t_0,x_0)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha) + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-c(t-s)^\alpha)h(s)ds.$$

Puisque $E_{\alpha,\alpha}(-c(t-s)^\alpha)$ *et* $h(t)$ *sont des fonctions positives, il résulte que pour* $t \geq t_0$ *:*

$$V(t,x(t)) \leq V(t_0,x_0)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha) \tag{3.36}$$

Par conséquent, l'inégalité (3.36) *et la condition* (3.34) *conduisent à :*

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(t_0,x_0)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha) \\ &\leq \alpha_2(\|x_0\|)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha), \end{aligned}$$

Cela signifiie que :

$$\|x(t)\| \leq (\alpha_1^{-1}\alpha_2(\|x_0\|)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha)). \tag{3.37}$$

Maintenant, nous posont :

$$\psi(\|x_0\|, t-t_0) = (\alpha_1^{-1}\alpha_2(\|x_0\|)E_\alpha(-c(t-t_0)^\alpha)).$$

Alors (3.37) *donne :*

$$\|x(t)\| \leq \psi(\|x_0\|, t-t_0).$$

Ainsi, le point d'equilibre $x=0$ *du systéme d'ordre fractionnaire non linéaire est conditionnel asymptotiquement stable.*

Exemple 3.2.3 *On considérons le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x_1 = -4x_1 + e^{-t}\cos(x_2)x_1 \\ \\ {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x_2 = -4x_2 + \frac{\sin(x_3)}{1-t^2}x_2 \\ \\ {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x_3 = -4x_3 + \sin(x_2)x_3 \end{cases} \tag{3.38}$$

et la fonction de Lyapunov

$$V(t,x(t)) = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4},$$

Avec $\|\mu\| \leq \xi$.

En utilisant le lemme(3.1.1)*, nous avons :*

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha V(t,x(t;t_0,x_0)) &\leq \frac{1}{2}\Big[x_1(t;t_0,x_0){}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x_1(t;t_0,x_0) + x_2(t;t_0,x_0){}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x_2(t;t_0,x_0) \\ &+ x_3(t;t_0,x_0){}_{t_0}^{C}D_t^\alpha x_3(t;t_0,x_0)\Big] \\ &\leq \Big[-4x_1^2(t;t_0,x_0) + e^{-t}\cos(x_2(t;t_0,x_0))x_1^2(t;t_0,x_0) \\ &- 4x_2^2(t;t_0,x_0) + \frac{\sin(x_3(t;t_0,x_0))}{1-t^2}x_2^2 - 4x_3^2(t;t_0,x_0) \\ &+ \sin(x_2(t;t_0,x_0))x_3^2\Big] \\ &- \frac{3}{2}\Big[x_1^2(t;t_0,x_0) + x_2^2(t;t_0,x_0) + x_3^2(t;t_0,x_0)\Big] \\ &= -6V(t,x(t;t_0,x_0)) \end{aligned}$$

Ensuite, il suffit de choisir

$$\alpha(\|\mu\|) < k \leq \alpha_1(\|\mu\|) + 6.$$

Maintenant, toutes les hypothèses du théorème $(3.2.3)$ *sont satisfaites, donc* $x = 0$ *est conditionnel asymptotiquement stable.*

Conclusion

Le but de ce mémoire est l'étude de quelques types de stabilité de solutions d'équations différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire $0 < \alpha < 1$ où les dérivées sont prises au sens de Caputo.

Quelques exemples illustratifs sont présentés pour plus de compréhensions.

Plusieurs d'autres types de stabilité peuvent être établis on utilisant les fonctions de Lyapunov et on procédant de manières analogues.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas H.M.Srivastava and J.J.Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[2] A.A.Kilbas,H.M.Srivastava and J.J.Trujillo ; *Theory of Fractional Differential Equation*, Elsevier, Amsterdam (2006).

[3] A. A. Kilbas, H. M.Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and application of fractional differential equations, Elsevier, New York, 2006.

[4] A. A. Kilbas, M. Saigo and R. K. Saxena, Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional caculus operators. Inregral Transforms and Special Functions, 2004, 15, 31-49.

[5] A.A.Kilbas and S.A. Marzan ; Cauchy Problem for Differentical Equation wiht Caputo Derivative. Fra. Cal. App. ISSN (2004) 1311-0454.

[6] A.B. Basset ; A *Treatise on Hydrodynamics*, Vol.2, Cambridge University Press, England,1888.

[7] A. B. Makhlouf, Stability with respect to part of the variables of nonlinear Caputo Fractional differential equations. *Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Sfax, University of Sfax, BP 1171 Sfax, 3000, Tunisia*. Received March 10, 2017 ; accepted July 24, 2017.

[8] A.Erdelyi. Higher transcendental functions. McGraw-Hill,New York, 2, 1955.

[9] A.Erdelyi. Higher transcendental functions. McGraw-Hill,New York, 3, 1955.

[10] A. Souahi, A. B. Makhlouf, M. A. Hammami, Stability analysis of conformable fractionalorder nonlinear systems. Indag. Math. 2017, 28, 1265-1274.

[11] B. K. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Academic Press, New York (1973).

[12] J. Wang, L. Lv, Y. Zhou, Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative. Electron. J. Qualit. Diff. Equat. 63(2011) 1-10.

[13] I. Podlubny ; *Fractional Differential Equations, Academic Press*, San Diego, 1999.

[14] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.

[15] G.M.Mittag-leffer. Higher transcendental functions. C.R.Academie des Sciences, (137) :554-558, 1955

[16] G.M.Mittag-leffer. Sur la representation analytique d'un branch uniforme d'une fonctionhomogene. Acta Mathematica, (29) :101-182, 1905.

[17] K.Diethelm ; *The Analysic Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

[18] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction of the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York (1993).

[19] M. A.Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A.Gallegos, R. CastroLinares, Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 22(2012), 650-659.

[20] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, (1964).

[21] R. (Ed.). Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientic, Singapore (2000).

[22] R.P.Agarwal. A propos d'une note de m.pierre humbert. C.R.Academie des Sciences,(236) :2031-2032, 1953.

[23] R. W. Ibrahim, Generalized Ulam-Hyers stability for fractional differential equations, Int. J.

[24] R. W. Ibrahim, On generalized Hyers-Ulam stability of admissible functions, Abstract and Applied Analysis,Volume 2012, Article ID 749084, 10 pages doi :10.1155/2012/749084. Math., Vol. 23, No. 5 (2012) 1250056 (9 pages).

[25] S. Huang, B. Wang, Stability and stabilization of a class of fractional-order nonlinear systems for $0 < \alpha < 2$: Nonlinear Dyn. 2016, 2, 973-984.

[26] Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[27] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications). Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[28] S. Liu, W. Jiang, X. Li, X.F. Zhou, Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. Appl. Math. Lett. 2016, 51, 13-19.

[29] S. Momani, S. Hadid, Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 47 (2004) 2503-2507.

[30] V.E.Tarasov, Fractional stability, 2007. Available online :http ://arxiv.org/abs/0711.2117v1.

[31] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi : Theory of Fractional Dynamic Systems. Cambridge Scientic Publishers, Cambridge, 2009.

[32] W. S. Chung, Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. J. Comput. Appl. Math. 2015, 290, 150-158.

[33] Y. Li, Y. Chen Y, I. Podlubny, Mittag-Leffler stability of Fractional order nonlinear dynamic Systems. Automatica 45(2009) 1965-1969.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة بعض أنماط الاستقرار لجمل معادلات تفاضلية غير خطية ذات رتب كسرية باستعمال دالة ليابونوف (lyaponov)

الكلمات المفتاحية:استقرار الحل ،مشتق كسري من كابيتو،وظيفة ليابونوف.

Abstract

The main objective of this work is to study some of the stability patterns of nonlinear differential equations of fractional grade using the lyaponov function.

Keywords: Stability of the solution,Fractional derivative of Capito , Function of lyaponov.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier certaines structures de stabilité d'équations différentielles non linéaires de grades fractionnaires à l'aide de la fonction de Lyaponov.

Mots clés: Stabilité de la solution, Dérivée fractionnaire de Capito, Fonction de Lyaponov.