



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : Kadri Aabir

Thème

Problème de la surface libre de l'écoulement de Navier-Stokes bidimensionnel.

Soutenu publiquement le : 27/06/2019

Devant le jury composé de :

Badidja Salim	M.C.B Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Tellab Ibrahim	M.C.B Université KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Amara Abdelkader	M.C.B Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2018/2019

Dédicaces

Je veux dédier ce modeste travail à :

Mon cher père **Bachir**.

Mon coeur et ma vie ma chère maman **Ratiba**.

A mes frères **Lahbib, Nacer, Mouhammed, Yacine, .**

Mes soeurs **Meriem, Nessrine, Houyemme**.

Ma chère cousin **Wafa**

A mon oncle **Abd elaziz** et mes tantes **Dalila, Zohra**.

La famille :**Kadri**.

Tous mes amis en particulier :**Hadjer, Fatma, Messaouda**.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

Remerciement

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **Amara Abdelkader**, pour l'aide précieuse qu'il m'a fait durant la réalisation de ce travail.

Je tiens tout a remercier deuxieme lieu mon guide Mademoiselle **Chedala Fatma zohra**, pour l'aide précieuse qu'il m'a fait durant la réalisation de ce travail.

Je suis très heureux de remercier aussi Monsieur **Tellb Ibrahim** qui n'a pas hésité d'être membre du jury.

Je remercie vivement Monsieur **Badidja Slalim** qui a accepté d'être membre du jury.

Ces remarques pertinentes m'ont souvent éclairé dans ce travail.

Je tiens aussi à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations et Définitions

soient u et v composition de la vecteur V

• $\nabla V = \text{grad}(V) = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y v \end{pmatrix}$, (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse V

• $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

• $\rho = \rho(\vec{x}, t)$: la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t .

• $\vec{V} = \vec{V}(x, t)$: la vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point par le vecteur \vec{x} à l'instant t .

• P : la pression d'un fluide

• $\vec{u} \cdot \vec{v}$: Le produit scalaire de deux vecteurs

• $\vec{u} \wedge \vec{v}$: Le produit vectoriel de deux vecteurs

• $\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u$

• $\vec{\text{rot}}(V) = \nabla \wedge V$

• $\text{argsh}(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

Table des matières

Dédication	i
Remerciement	i
Notations et Définitions	ii
Introduction	v
1 Notions fondamentales sur la mécanique des fluides	1
1.1 Description de mouvement des fluides	1
1.1.1 Description Lagrangienne	1
1.1.2 Description eulérienne	2
1.2 Fluides et la surface libre	3
1.3 Écoulement des fluides	4
1.3.1 Écoulement bidimensionnel	4
1.3.2 Écoulement uniforme	4
1.3.3 Écoulement stationnaire	4
1.3.4 Fluide incompressible	4
1.3.5 Écoulement irrotationnel	5
1.3.6 Potentiel de vitesse	5
1.4 Quelques équations en mécanique des fluides	5
1.4.1 Lignes de courant	5
1.4.2 Équation d'Euler	6
1.4.3 Équation de Bernoulli	7

1.5	Etude dans le plan complexe	8
2	Représentations et transformations conformes	9
2.1	Généralités sur les transformation conformes	9
2.1.1	Quelques transformations classique	10
2.1.2	Exemples élément d'application	11
2.2	Quelques types des transformations conformes	12
2.2.1	Transformation de Schwarz-Christoffel	12
2.2.2	Méthode des lignes de courant libre	15
3	La solution exact de notre problème	17
3.1	Position du problème	17
3.2	Solution Analytique	20
	Conclusion	32
	Bibliographie	33

Introduction

Plusieurs phénomènes physiques d'intérêt pour le domaine de l'environnement concernent les écoulements de fluides en surface libre, ce qui fait référence à un écoulement avec une interface libre entre l'air et l'eau, comme par exemple dans une rivière, par opposition pour les écoulements chargés où cette interface manque dans une canalisation à pression, si par exemple.

Dans ce travail, on se propose d'étudier un problème d'écoulement à surface libre autour un obstacle rectangulaire. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel sans effets de la gravité et la tension de surface, le plan des variables (x, y) de l'écoulement est identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$.

La résolution du problème est effectuée à l'aide des transformations conformes, en particulier la transformation de Schwarz-Christoffel, qui possèdent de simplifier le problème dans un plan plus pratique.

Le mémoire est organisé comme suit :

Dans **le premier chapitre**, on donne des notions sur les deux modes de description : la description lagrangienne et la description eulérienne et quelques définitions préliminaires sur la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement des fluides.

Dans **le deuxième chapitre**, on présente les transformations conformes en générale, en citant quelques cas particuliers, tels que la transformation de Schwarz-Christoffel.

Dans **le dernier chapitre**, on traite le problème d'un écoulement à surface libre bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux dans le cas où la tension de surface et la gravité sont nulles. Dans ce cas, la solution exacte peut être calculée explicitement en utilisant la transformation de Schwarz-Christoffel.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la mécanique des fluides

Dans le présent chapitre, nous présenterons les notions de base de la mécanique des fluides : définitions et propriétés des fluides, et les équations de mouvement fondamentales du fluide pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

1.1 Description de mouvement des fluides

Le mouvement du fluide est décrit de deux façons : nous suivons une particule fluide dans son mouvement et nous observons sa position à un instant t (Description Lagrangienne), ou nous observons à chaque instant, pendant un temps donné (Description Eulerienne), les entrées et sorties.

1.1.1 Description Lagrangienne

Le mouvement d'un fluide peut être défini par le mouvement de chacun de ses points $M(x, y, z, t)$, donc nous suivons une particule fluide dans son mouvement et nous examinons sa position à un instant t . La particule est identifiée par sa position initiale située au point M_0 à l'instant $t = 0$. r_0 est le vecteur position initiale, il ne dépend pas du temps

$$\vec{r}_0 = O\vec{M}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

On cherche à définir toutes les positions de toutes les particules à chaque instant t matérialisées par M . les inconnues de Lagrange sont les coordonnées, à l'instant t de la position

$$\vec{r}_0(\vec{r}_0, t) = O\vec{M}_0 = \begin{pmatrix} x(\vec{r}_0, t) \\ y(\vec{r}_0, t) \\ z(\vec{r}_0, t) \end{pmatrix}$$

Plus simplement notée

$$\vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de Lagrange sont le vecteur position initiale \vec{r}_0 et le temps t : la seule variable est donc le temps, les dérivées partielles ou totales sont ainsi identiques (les dérivées partielles n'ont pas vraiment de sens).

1.1.2 Description eulérienne

Plus pratique, cette approche est très utilisée en mécanique des fluides, ainsi qu'en mécanique des milieux continus pour de grandes déformation. Pour une position donnée, on observe ce qui rentre et ce qui sort à chaque instant, les inconnues d'Euler sont les vitesses des particules pour l'ensemble des point M :

$$\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}, t) \\ v_y(\vec{r}, t) \\ v_z(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

Par la suite, on pourra utiliser la notation suivante (variables implicites) : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ en posant : $dx = v_x dt, dy = v_y dt, dz = v_z dt$

1.2 Fluides et la surface libre

Le fluide est un milieu continu déformable, sans rigidité pouvant s'écouler, c'est-à-dire qui subit de grosses variations de forme sous l'action de la force, plus la force est faible plus les variations et plus lentes sont dans le matériau à former.

La notion de fluide s'oppose à celle de solide, cependant on considère les fluides et les solides comme des ensembles de particules matérielles infiniment petites.

- Solidement liées entre elles dans le cas des solides.

- Libres de se déplacer les unes par rapport aux autres dans le cas des fluides.

La surface libre :

Qu'est-ce qu'une surface libre ?

Un liquide contenu dans un récipient est en contact avec ses parois mais aussi avec l'air. On appelle aussi surface libre la surface du liquide en contact avec l'air.

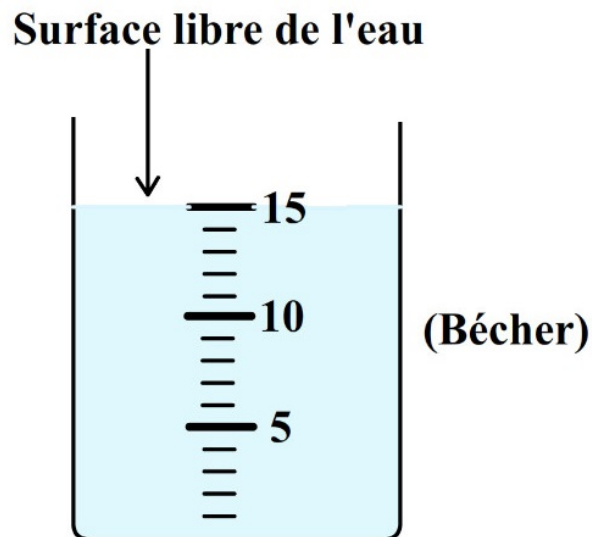


FIGURE 1.1 : La surface libre

1.3 Écoulement des fluides

1.3.1 Écoulement bidimensionnel

On dit qu'un écoulement est bidimensionnel ou plat, si ces caractéristiques dépendent de deux variables (x, y) et du temps t

1.3.2 Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si l'écoulement est de vitesse constante

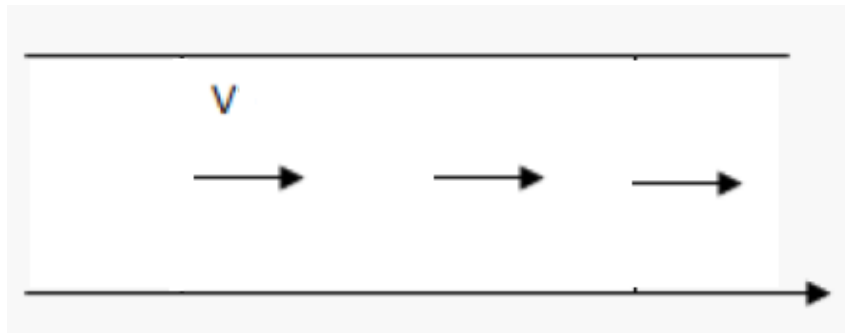


FIGURE 1.2 : Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

1.3.3 Écoulement stationnaire

On dit également qu'il est permanent, si les composantes de la vitesse sont indépendantes de la variable de temps.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

1.3.4 Fluide incompressible

Un liquide est dit incompressible quand la quantité de chaque particule de liquide ne change pas en cours de mouvement et que le résultat est l'équation suivante

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

1.3.5 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si

$$\vec{Rot}(\vec{V}) = 0$$

1.3.6 Potentiel de vitesse

Si un écoulement est irrotationnel, on peut définir une fonction ϕ scalaire telle que :

$$\vec{V} = \text{grad}(\phi) = \nabla\phi$$

Le symbole ϕ représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien, en considérant un écoulement plan ($\vec{V} = (u, v)$) on peut donc écrire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \implies \Delta\phi = 0$$

où ϕ vérifie l'équation de Laplace.

1.4 Quelques équations en mécanique des fluides

1.4.1 Lignes de courant

De plus, la description eulérienne conduit à une illustration du champ de vitesse, à un instant t , en forme de famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, appelées lignes courantes. Cette définition permet de dériver directement l'équation des lignes courantes en l'écrivant : Un petit déplacement $d\vec{x}$ sur la ligne courante est colinéaire

au vecteur vitesse.

$$\vec{V} \wedge d\vec{x} = 0$$

En explicitant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} v_2 dx_3 - v_3 dx_2 = 0 \\ v_3 dx_1 - v_1 dx_3 = 0 \\ v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = 0 \end{cases}$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)}$$

Dans lequel t a la valeur fixée. Les lignes de courant ne peuvent pas se couper.

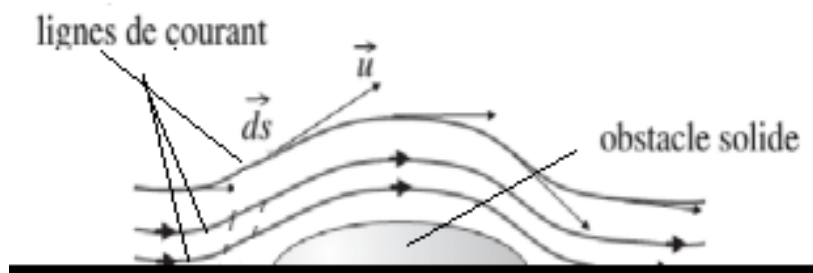


FIGURE 1.3 : Illustration de lignes de courant à un instant donné pour un fluide s'écoulant autour d'un solide

1.4.2 Équation d'Euler

Dans le cas d'un écoulement idéal, il n'y a qu'une seule force $p(x,t)$ appelée pression, si l'écoulement est irrotationnel et non la viscosité l'équation de Navier-Stokes est réduite à l'équation d'Euler

$$\rho \left(\frac{DV}{Dt} + V \text{grad } V \right) = -\text{grad } p$$

1.4.3 Équation de Bernoulli

Dans le cas présent, l'équation d'Euler possède une intégrale première qui traduit le fait que l'énergie mécanique totale d'une particule fluide se conserve au cours du temps, car il n'y a pas de frottements.

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(P + \rho\vartheta)$$

$$\rho v \frac{d\vec{v}}{dt} = -v \text{ grad}(P + \rho\vartheta)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (P + \rho\vartheta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{d}{dt} (P + \rho\vartheta)$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} + \vartheta + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

Et ainsi on a pour chaque particule fluide que l'on suit, donc sur chaque trajectoire

$$\frac{P}{\rho} + \vartheta + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

Or l'écoulement étant stationnaire, cette relation est vraie sur chaque ligne de courant.

Dans un écoulement stationnaire, incompressible, de fluide parfait soumis à des forces de masse dérivant du potentiel g , on a, sur chaque ligne de courant :

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{const}$$

On verra que cette constante est la même sur chaque ligne de courant car l'écoulement est irrotationnel.

1.5 Etude dans le plan complexe

Pour les écoulement plan, Les points $M(x, y)$ du plan peuvent être repérés par le complexe $z = x + iy$, Le vecteur vitesse en M représenté par le complexe $V = u + iv$, et le potentiel complexe $f(z) = \phi + i\psi$.

Pour que la fonction $f(z)$ soit *holomorphe* (dérivable par rapport à z), il faut que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{array} \right.$$

Alors :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - iv$$

Chapitre 2

Représentations et transformations conformes

Dans ce chapitre, on va présenter des concepts généraux concernant les transformations conformes, en particulier la transformation de Schwarz-Christoffel

2.1 Généralités sur les transformation conformes

Conservation des angles et point singuliers

La fonction $g(z)$ étant holomorphe dans D , la transformation conserve les angles. plus précisément, si deux courbes γ et γ' passent par un point $z_0 \in D$ et se coupent sous l'angle α , leurs transformées Γ et Γ' passent par le point transformé Z_0 et se coupent en général dans le plan (Z) sous le même angle α

En effet, un développement au voisinage de z_0 s'écrit, sous réserve que $g(z)$ soit holomorphe en z_0 et $g'(z_0)$ soit non nul :

$$dZ = g'(z_0)dz$$

ce qui montre que l'on passe du voisinage de z_0 au voisinage de Z_0 par une similitude définie par le nombre complexe $g'(z_0) = 0$.

En étendant le domaine de définition de $g(z)$ à tout le plan complexe, on donc le résultat suivant : Une transformation $g(z)$ conserve les angles en tout point du plan complexe où $g'(z)$ n'est ni nul ni infini.

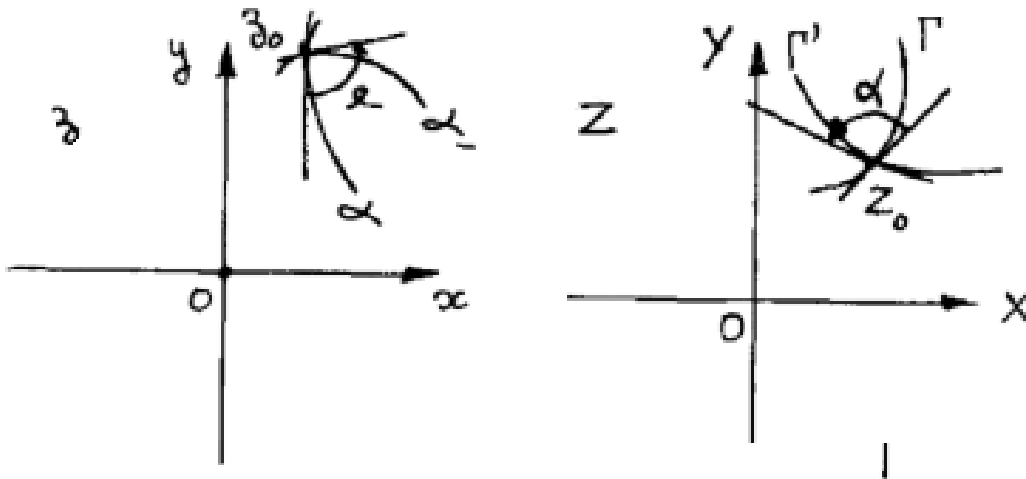


FIGURE 2.1 : Conservation d'angle α de plan- z vers le plan- Z

Les points où $g'(z)$ est nul ou non défini sont dits point singuliers de la transformation.

Définition 1 Une transformation d'un domaine D qui conserve toutes les angles en grandeur et en sens est dite transformation conforme de D

Théorème 2.1.1 Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D telle que $f'(z) \neq 0$ en tout point de D . Alors la transformation réalisée par cette fonction est une transformation conforme de D .

2.1.1 Quelques transformations classique

Transformation linéaire

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est une double transformation : expansion/contraction liée au coefficient a et rotation d'un angle α

Transformation inverse

Une transformation linéaire $w = z^{-1}$ pour z non nul transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

2.1.2 Exemples élément d'application

Les champs élémentaires correspondant aux singularités des fonctions analytiques peuvent être obtenus à partir du champ uniforme à l'aide de transformation conformes convenables.

Par exemple, l'écoulement $f(z) = z^2$ se déduit de l'écoulement uniforme $F(Z) = Z$ au moyen de la transformation conforme $Z = z^2$, qui conserve les angles en tout point du plan, sauf à l'origine où la dérivée $2z$ de la transformation s'annule. si on pose $z = r.e^{i\theta}$. $Z = R.e^{i\lambda}$, on voit qu'autour de l'origine les angles sont divisés par deux (figure ci-dessous).

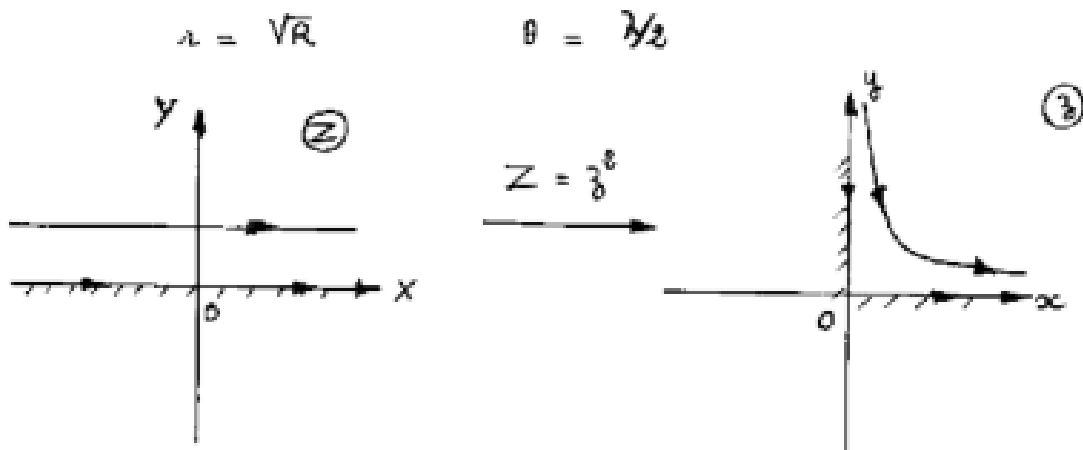


FIGURE 2.2 : Transformation entre plan(Z) et plan (z)

2.2 Quelques types des transformations conformes

2.2.1 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel réalise une transformation du demi-plan supérieur(ou inférieur) vers un polygone simple quelconque. Elle constitue un analogue de la transformation de *Helmholtz – Kirchhoff* utilisée dans le cadre des quasi-contours. On définit la transformation de *Schwarz – Christoffel* par la formule :

$$\Omega = k \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + M \quad (2.1)$$

où k et M sont des constantes complexes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone. La transformation $\Omega(\lambda)$ est conforme sauf aux points λ_i .

Le point anguleux est transformé en point non anguleux.

Notons que si dans la transformation $\alpha_i \rightarrow \infty$, alors on omet le facteur $(\lambda - \lambda_n)$ dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0, on dit que le polygone est dégénéré en ce point.

On peut choisir trois points arbitraires parmi les n points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$

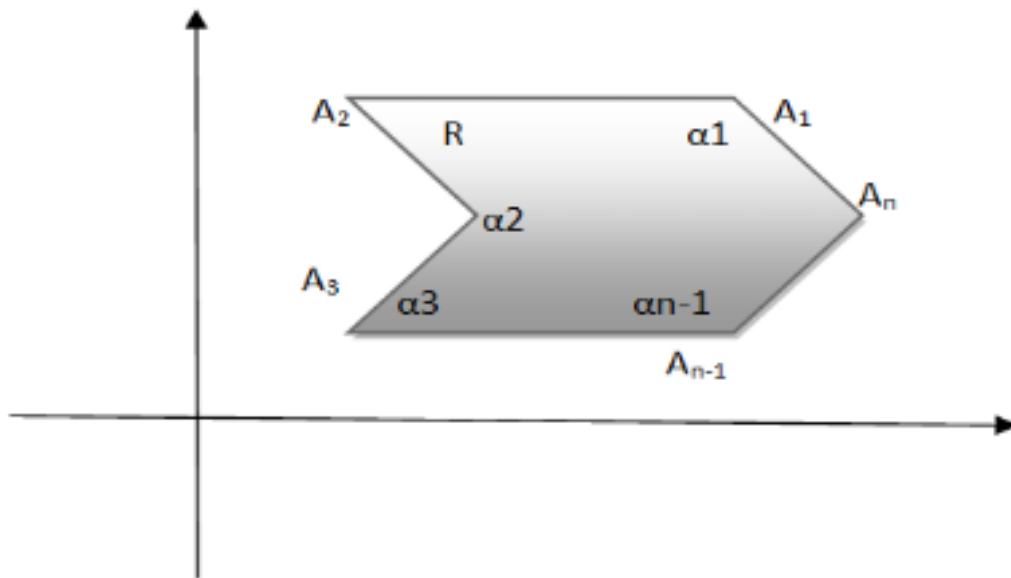


FIGURE 2.3 : Plan de variable Ω

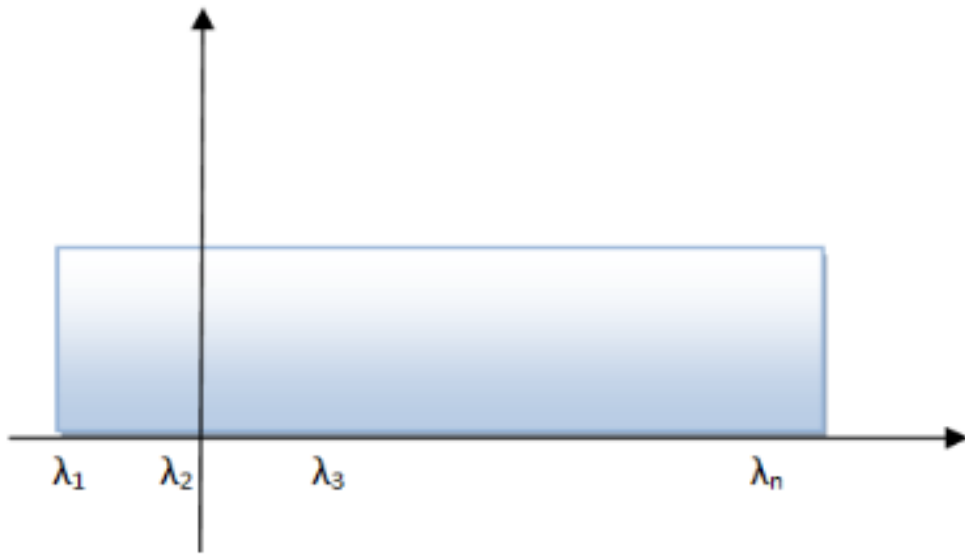


FIGURE 2.4 : Plan de variable λ

2.2.2 Méthode des lignes de courant libre

La théorie des lignes de courant est étudié le problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel, bornés par des parois rectilignes et des lignes de courant libre de forme inconnue, sur lesquelles la pression est supposée constante. Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte. L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta.$$

où $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y , respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse.

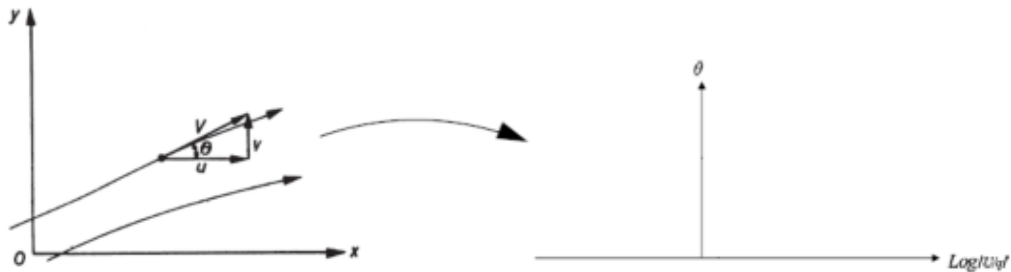


FIGURE 2.5 : Transformation d'hodographe

On note que La fonction Ω possède les propriétés suivantes :

.La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log\left(\frac{U}{q}\right) = const.$

.La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = const.$

Par conséquent, dans le plan Ω , le domaine d'écoulement est présenté par une figure plane de côtés rectilignes (polygone).

C'est aussi le cas de la transformation f , qui transforme le plan physique z en polygone. Il est vient que, si nous pouvons transformer le plan Ω vers la moitié supérieure (reps. inférieure) d'une certaine variable complexe λ , alors la relation entre z et f ou entre df/dz et f est paramétriquement déterminées.

Chapitre 3

La solution exact de notre problème

Dans ce chapitre, on étudie le problème d'un écoulement bidimensionnel et irrotationnel à surface libre sans effet de gravité et la tension de surface. On peut utiliser les propriétés des transformations conformes, ainsi que la transformation d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte du problème.

3.1 Position du problème

On considère un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre autour d'un obstacle rectangulaire de hauteur L ou $(T = 0, g = 0)$ (voir figure 2.1). On suppose l'écoulement est uniforme à l'infini et la pression est constante sur la ligne de courant libre.

Nous choisissons comme repaire de référence la ligne OB sur l'axe xox' et la surface libre est ABC .

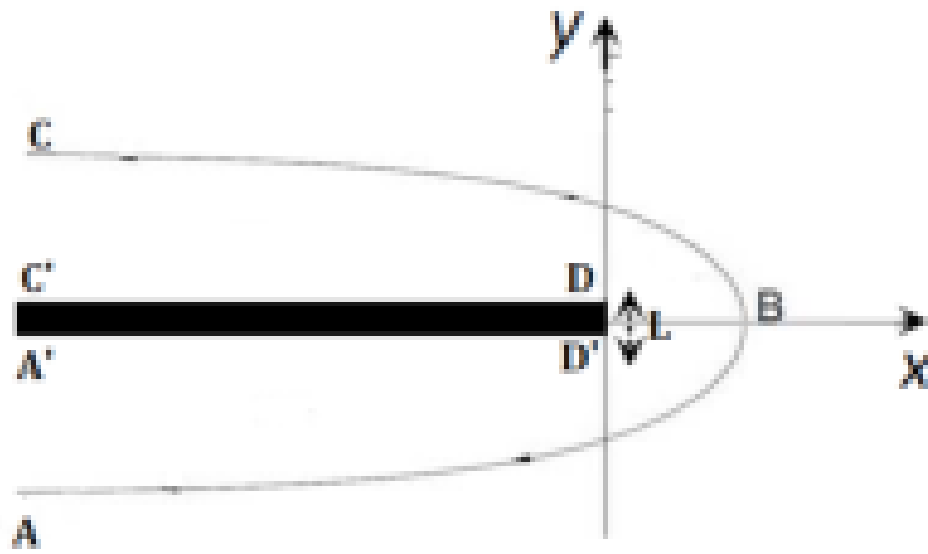


FIGURE 3.1 : Le plan z

Nous nous intéressons à des écoulement potentiels, irrotationnels et bidimensionnelle, nous pouvons définir un potentiel complexe :

$$f = \phi + i\psi$$

Où ϕ et ψ représentent la fonction potentiel et la fonction de courant respectivement, la dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe

$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

Puisque l'effet de la surface tension et l'effet de gravité sont négligés l'équation *Bernoulli* sur la surface libre écrire comme suite

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} = c^{te} \quad (3.1)$$

Où q est le module de vecteur vitesse, P est la pression et ρ la densité de fluide

On a la densité et la pression sont des constantes sur la surface libre de l'écoulement, donc la forme de l'équation de *Bernoulli* devient

$$q = c^{te} \quad \text{sur } ABC \quad (3.2)$$

3.2 Solution Analytique

Dans ce section, on s'intéresse à la résolution analytique du problème considéré. En négligeant l'effet de gravité et les tensions de surface, le problème admet une solution exacte qu'on peut la calculer en utilisant la théorie des lignes de courant libres et la transformation de Schwarz-Christoffel, en utilisant La technique utilisée par Kirchhoff.

1^{er} étapes

En utilisant la transforme le domaine d'écoulement réel (x,y) figure(2, 1) en un domaine d'écoulement de frontière polygonale du plan $(\log(\frac{U}{q}), \theta)$ figure(3, 2) par la transformation de hodographe Ω comme suit :

Plan z	Plan Ω
$A = (-\infty, H + \frac{L}{2})$	$A = (0, 0)$
$B = (H, 0)$	$B = (0, \frac{\pi}{2})$
$C = (-\infty, -(\frac{L}{2} + H))$	$C = (0, \pi)$
$D = (0, \frac{L}{2})$	$D = (\pi, +\infty)$
$D' = (0, -\frac{L}{2})$	$D' = (0, +\infty)$

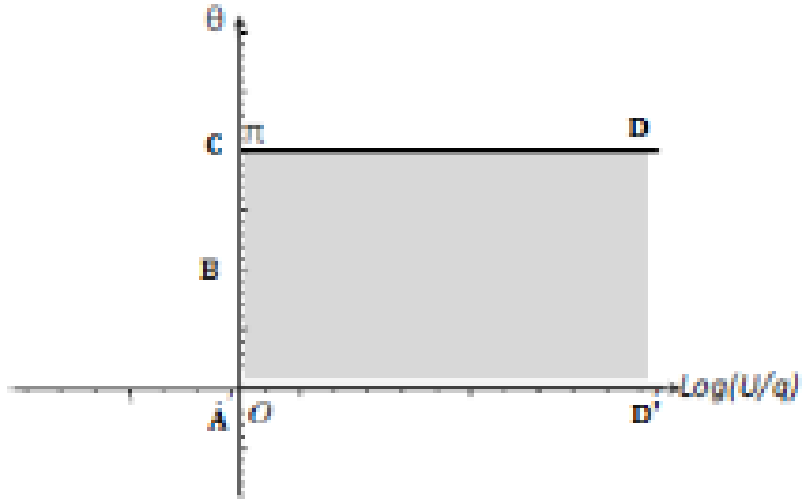


FIGURE 3.2 : Le plan Ω

2^{eme} étape

domaine d'écoulement réel, dans le plan z est transformé à une bonde de largeur HU dans le plan de la variable $f = \phi + i\psi$ (figure 2.3) puis que ψ est constante pour chaque ligne de courant, le transformation est donnée par le tableau suivant :

Plan z	Plan f
$A = (-\infty, H + \frac{L}{2})$	$A = (-\infty, HU)$
$B = (H, 0)$	$B = (0, HU)$
$C = (-\infty, -(\frac{L}{2} + H))$	$C = (\infty, HU)$
$D = (0, \frac{L}{2})$	$D = (0, UHL)$
$D' = (0, -\frac{L}{2})$	$D' = (0, -UHL)$

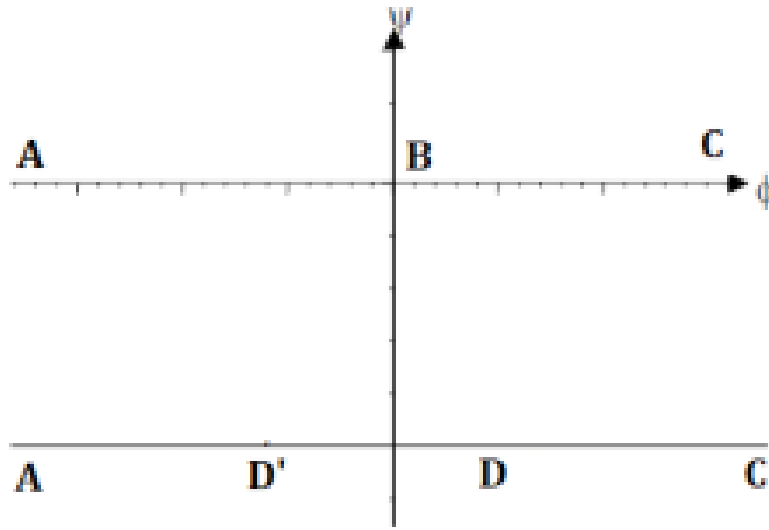


FIGURE 3.3 : Le plan f

3^{eme} étapes

Nous utilisons la transformation Schwarz-Christoffel pour transformés le domaine d'écoulement Ω (figure 2, 2) en un demi-plan supérieur de variable λ (figure 2, 4).

Plan Ω	Plan λ
$A = (0, 0)$	$A = (1, 0)$
$B = (0, \frac{\pi}{2})$	$B = (0, 0)$
$C = (0, \pi)$	$C = (-1, 0)$
$D = (\pi, +\infty)$	$D = (+\infty, 0)$
$D' = (0, +\infty)$	$D' = (-\infty, 0)$

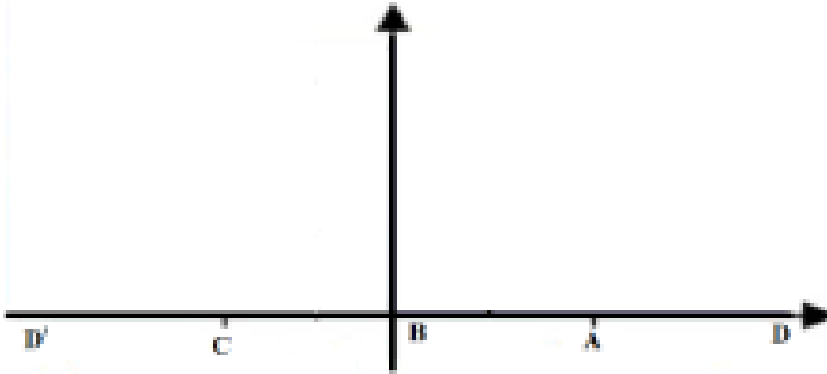


FIGURE 3.4 : Le plan λ

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} + \dots(\lambda - \lambda_n)^{p_n} \quad \text{avec } p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1 \quad (3.3)$$

les points A, D, C dans λ -plan se transforment aux points $A(0, 0), B(0, \pi/2), C(0, \pi)$ dans le plan Ω .

Les angles dans le plan Ω entre les n ?uds du polygone sont : $\alpha_A = \pi/2, \alpha_C = \pi/2, \alpha_D = \pi$.

D'où l'on tire : $p_A = -1/2, p_C = -1/2, p_B = 0$

on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\lambda} &= k(\lambda - \lambda_D)^0(\lambda - \lambda_A)^{\frac{-1}{2}}(\lambda - \lambda_C)^{\frac{-1}{2}} \\ \implies \frac{d\Omega}{d\lambda} &= k(\lambda - 0)^0(\lambda - 1)^{\frac{-1}{2}}(\lambda + 1)^{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - 1)^{\frac{-1}{2}}(\lambda + 1)^{\frac{-1}{2}} \quad (3.4)$$

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{k}{(\sqrt{\lambda - 1})(\sqrt{\lambda + 1})} \quad (3.5)$$

$$\implies \int d\Omega = k \int \frac{d\lambda}{(\sqrt{\lambda - 1})(\sqrt{\lambda + 1})}$$

Après l'intégration, nous obtenons :

$$\Omega - \Omega_0 = k \ln(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda)$$

alors :

$$\Omega = \Omega_0 + k \ln(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda) \quad (3.6)$$

Pour déterminer les constantes Ω_0 et k on a :

Lorsque $A(\lambda = 1, \Omega = 0)$, $\Omega = 0$, alors $\Omega_0 = 0$

Lorsque $B(\lambda = 0, \Omega = i\pi/2)$ on a :

$$i\pi/2 = 0 + k \ln(\sqrt{0 - 1} + 0)$$

$$\implies i\pi/2 = k \ln(\sqrt{-1})$$

$$\implies i\pi/2 = 2k \ln(\sqrt{i^2})$$

$$\implies i\pi/2 = k \ln(-i\pi/2)$$

$$\implies i\pi/2 = k(-i\pi/2)$$

$$\implies i\pi/2 = ki\pi/2$$

$$\implies k = (i\pi/2)/(i\pi/2)$$

donc $k = 1$

Alors :

$$\Omega = \ln(\sqrt{\lambda^2 + 1} + \lambda) \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) devient :

$$\Omega = \ln(\sqrt{\lambda^2 + 1} + \lambda)$$

$$\implies \Omega = \operatorname{argsh}(\lambda)$$

$$\implies \operatorname{sh}(\Omega) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(\lambda))$$

$$\implies sh(\Omega) = \lambda$$

donc :

$$\lambda = sh(\Omega)$$

4^{eme} étapes

On utilise la transformation Schwarz-Christoffel pour transformer le domaine d'écoulement f (figure 2, 3) en un demi-plan supérieur de variable λ (figure 2, 4)

Plan f	Plan λ
A	$A = (1, 0)$
B	$B = (0, 0)$
C	$C = (-1, 0)$
D	$D = (+\infty, 0)$
D'	$D' = (-\infty, 0)$

La transformation de *Christoffel – Schwarz* définie par :

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - \lambda_3)^{p_3}(\lambda - \lambda_4)^{p_4} \dots (\lambda - \lambda_n)^{p_n} \quad \text{avec} \quad p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1$$

la correspondance des points A, B et C est donnée par $\lambda = 1, \lambda = 0, \lambda = -1$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= M(\lambda - 1)^{-1}(\lambda - 0)^{-1} = \frac{M}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} & (3.8) \\ \implies \frac{df}{d\lambda} &= \frac{M}{(\lambda^2 - 1)} \end{aligned}$$

donc :

$$\int df = M \int \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1)}$$

$$\implies f - f_0 = \frac{M}{2} [\ln(\lambda - 1) - \ln(\lambda + 1)]$$

Alors :

$$f = f_0 + \frac{M}{2} \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \quad (3.9)$$

f_0 et M sont des constantes à déterminer.

Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ (ou point D), $f = -UHL$

l'utilisation de l'équation (3.7) nous obtenons :

$$-UHL = \frac{M}{2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) + f_0$$

Il est clair que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) = 0$$

alors $f_0 = -UHL$

Lorsque $B(\lambda = 0, f = iHU)$:

$$iHU = \frac{M}{2} \ln(-1) - UHL$$

$$\implies iHU + UHL = \frac{M}{2} \ln(i^2)$$

$$\implies iHU + UHL = M \ln(i)$$

$$\implies iHU + UHL = M \ln(e^{i\pi/2})$$

$$\implies HU(i - (iL)^2) = \frac{iM\pi}{2}$$

$$\implies iHU(1 - iL^2) = \frac{iM\pi}{2}$$

$$\implies HU(1 - iL^2) = \frac{M\pi}{2}$$

$$\implies \boxed{M = \frac{2HU}{\pi}(1 - iL^2)}$$

Alors l'équation (3.9) est :

$$f = \frac{HU}{\pi}(1 - iL^2) \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)$$

donc

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{2HU}{\pi}(1 - iL^2) \left(\frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) \quad (3.10)$$

L'équation (3.9) devient :

$$f = \frac{HU}{\pi}(1 - iL^2) \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) - UHL$$

$$\implies \frac{(f + UHL)\pi}{HU(1 - iL^2)} = \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)$$

$$\implies e^c = \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)$$

$$\implies (\lambda + 1).e^c = \lambda - 1$$

$$\implies \lambda.e^c + e^c = \lambda - 1$$

$$\implies \lambda.e^c - \lambda = -(e^c + 1)$$

$$\implies \lambda.(e^c - 1) = -(e^c + 1)$$

donc :

$$\lambda = -\frac{e^c + 1}{e^c - 1}$$

quand

$$c = \frac{(f + UHL)\pi}{HU(1 - iL^2)}$$

5^{eme} étapes

Dans cette étape on recherchons sur la transformation qui transforme la demain d'écoulement z à le demain d'écoulement f

Nous utilisons la fonction de Kirchhoff :

$$\Omega = \log\left(U \cdot \frac{dz}{df}\right) \quad (3.11)$$

$$\implies e^\Omega = U \cdot \frac{dz}{df}$$

Alors :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^\Omega \quad (3.12)$$

de l'équation (3.7) on trouve

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^{\ln(\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda)} \quad (3.13)$$

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot (\ln(\sqrt{\lambda^2+1} + \lambda)) \quad (3.14)$$

6^{eme} étapes

Pour la solution de notre problème en utilisant la relation suivante

$$U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda} \quad (3.15)$$

On remplace (3.10) et (3.14) dans (3.15)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{df} &= \frac{1}{U} \cdot (\sqrt{\lambda^2-1} + \lambda) \times \frac{2HU}{\pi} (1 - iL^2) \left(\frac{1}{\lambda^2-1} \right) \\ \implies \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{2H}{\pi} (1 - iL^2) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} + \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \right) \\ \implies \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{2H}{\pi} (1 - iL^2) \left(\frac{1}{\sqrt{i^2(1-\lambda^2)}} - \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{2H}{\pi}(1 - iL^2) \left(\frac{-(-1)}{\sqrt{i^2(1 - \lambda^2)}} - \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \right) \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{2H}{\pi}(1 - iL^2) \left(\frac{-i^2}{i\sqrt{1 - \lambda^2}} - \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \right) \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{2H}{\pi}(1 - iL^2) \left(\frac{-i}{\sqrt{1 - \lambda^2}} - \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \right) \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{H}{\pi}(1 - iL^2) \left(\frac{-2\lambda}{1 - \lambda^2} - i \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right)
\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{dz = \frac{H}{\pi}(1 - iL^2) \left(\frac{-2\lambda.d\lambda}{1 - \lambda^2} - i \frac{2d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right)} \quad (3.17)$$

En intégrant l'équation (3.17)

$$\int dz = \frac{H}{\pi}(1 - iL^2) \left(\int \frac{-2\lambda.d\lambda}{1 - \lambda^2} - i \int \frac{2d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow z &= \frac{H}{\pi} \left[\int \frac{-2\lambda.d\lambda}{1 - \lambda^2} - i \int \frac{2d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} + i \int \frac{2^2}{1 - \lambda^2} + i^2 \int \frac{2L^2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right] \\
\Rightarrow z &= \frac{H}{\pi} \left[\left(- \int \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} - \int \frac{2L^2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) + i \left(\int \frac{2^2}{1 - \lambda^2} - \int \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) \right]
\end{aligned}$$

On pose :

$$I_1 = \left(- \int \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} - \int \frac{2L^2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right)$$

et

$$I_2 = \left(\int \frac{2^2}{1 - \lambda^2} - \int \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right)$$

On calcule I_1 :

$$I_1 = \ln(1 - \lambda^2) - 2L^2 \arcsin \lambda$$

On va calculer I_2 :

$$I_2 = -L^2 \ln(1 - \lambda^2) - 2 \arcsin \lambda$$

donc l'équation (3.18) est :

$$z - z_0 = \frac{H}{\pi} [(\ln(1 - \lambda^2) - 2L^2 \arcsin \lambda) + i(-L^2 \ln(1 - \lambda^2) - 2 \arcsin \lambda)]$$

on choisit le point $B(x_0, 0)$ du plan Z ou :

$$z_0 = (x_0, y_0) = (x_0, 0) \text{ et } \lambda = 0$$

$$\implies x + iy - x_0 - iy_0 = \frac{H}{\pi} [\ln(1 - 0) - 2L^2 \arcsin(0) + i(-L^2 \ln(1 - 0) - 2 \arcsin(0))]$$

$$\implies x - x_0 + i(y - 0) = 0$$

$$\implies x + iy = x_0$$

$$\implies \begin{cases} x = x_0 + \frac{1}{\pi} (\ln(1 - \lambda^2) - 2L^2 \arcsin(\lambda)) & , -1 \leq \lambda \leq 1 \\ y = \frac{1}{\pi} (-L^2 \ln(1 - \lambda^2) - 2 \arcsin(\lambda)) \end{cases}$$

qui est l'équation paramétrique de la surface libre

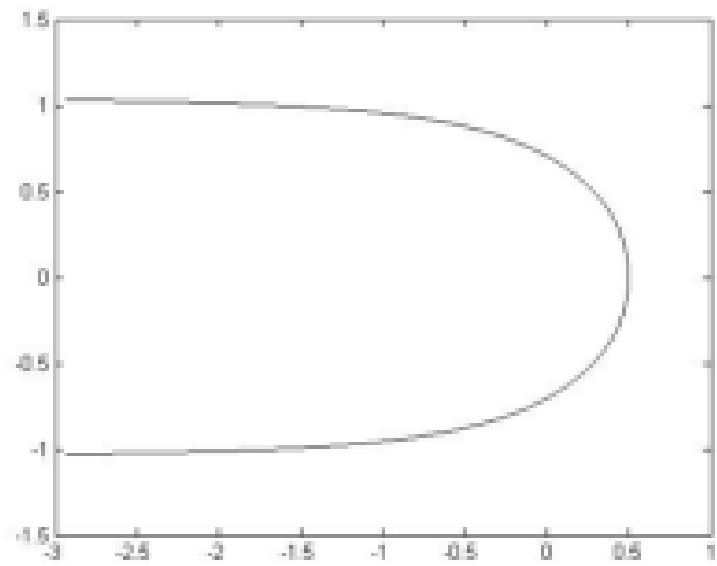


FIGURE 3.5 : Forme de surface libre pour $L = 0.3$

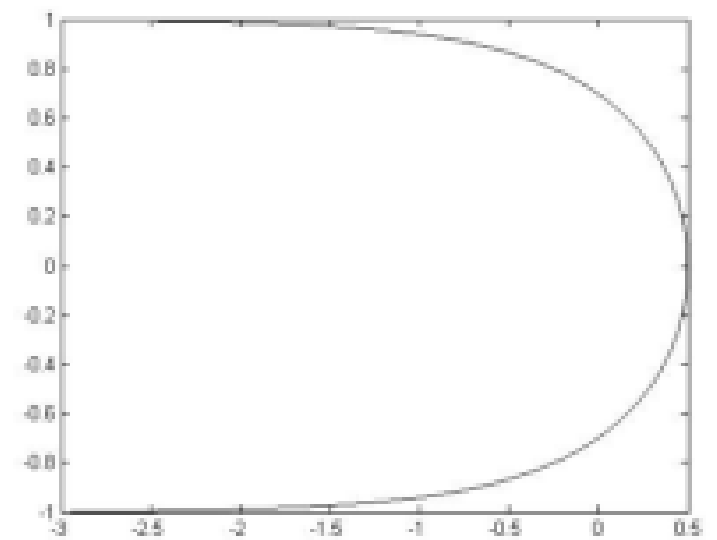


FIGURE 3.6 : Forme de surface libre pour $L = 0$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème d'un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux à surface libre. Lorsque les effets de la force de la tension superficielle et de la gravité sont négligés. La solution du problème est obtenue explicitement et la forme de la surface libre est déterminée de façon paramétrique en utilisant la théorie des lignes de courant libre et des transformations conformes.

Bibliographie

- [1] **A. Abdelkader** *Calcul numérique d'un jet bidimensionnel d'un fluide devant un mur de forme quelconque* , Thèse doctorat de université de M'sila(2018)
- [2] **L. Abdelkader** *Effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles*, Thèse magistère de université de Ouargla(2012)
- [3] **S. Amiroudine, J.L. Battaglia**, *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris, 2011
- [4] **G. Birkhoff, E. H. Zarantonello**, *Jets Wakes and Cavities*, New York, Academic Press, Inc. (1957).
- [5] **M. Christelle** , *Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables*, Université Joseph Fourier de Grenoble, 2011/2012.
- [6] **A. Christophe** , *Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [7] **D. Daboussi, F. Dias, J.M. Vanden Broeck**, *Gravity flows with a free surface of finite extent*, Eur. J. Mech B-Fluids.17 (1998).
- [8] **A. Kurt, Alfred Wohlhauser**, *Variables complexes*, Presses Polytechniques Et Universitaires Romandes.
- [9] **S. Murray R**, *Variables complexes cours et problèmes* ,Série schaum, France Mac Graw Hill (2000)

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بإيجاد الحل الدقيق لمسألة ثنائية الأبعاد لجريان سائل أمام حول جدار ذو شكل مستطيل، نعتبر أن السائل غير قابل للانضغاط وغير لزج كما أن تأثيرات الجاذبية و التوتر السطحي مهملة. تتميز هذه المسألة بالشرط غير الخطي المعطى بمعادلة برنولي على السطح الحر وكذلك الشكل المجهول لهذا الجريان، يمكن الحصول على الحل الدقيق باستخدام نظرية خطوط الكمون الحرة. وتعتمد هذه الطريقة على نظرية التحويلات المتطابقة

الكلمات المفتاحية: جريان ذو سطح حر - سائل غير قابل للانضغاط - التحويلات المتطابقة

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à la résolution analytique d'un problème d'un jet bidimensionnel autour un mur de forme rectangulaire, le fluide est considéré comme incompressible, non visqueux et l'effet de la gravité et tension de surface sont négligés. Ce problème est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la frontière libre et de la forme inconnue de ce jet. Dans le cas où l'effet de la tension de surface est négligé, la solution exacte est obtenue en utilisant la théorie des lignes de courant libre. Cette méthode est basée sur les transformations conformes

Mots-clés : Ecoulements à surface libre - Incompressible -- Transformations conformes

Abstract

In this memoir we are interested in the analytical resolution of a problem of a two-dimensional jet around a rectangular wall, the fluid is considered incompressible, non-viscous and the effect of gravity and surface tension are neglected. This problem is characterized by the non-linear condition given by the Bernoulli equation on the free boundary and the unknown form of this jet. In the case where the effect of surface tension is neglected, the exact solution is obtained using the theory of free current lines. This method is based on the conforming transformations

Keywords: Free surface flow - Incompressible - Conformal transformation