جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماسترأكاديمي

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: تحليل دالي

الموضوع

لمحة عن الرياضيات الضبابية

من إعداد الطالب :

- كيحل سليمة

تحت إشراف الأستاذ :

- عباسي حسين

نوقشت يوم 29جوان 2019 من طرف أعضاء اللجنة :

▪ الأستاذ.محمد معمري	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
▪ الأستاذ.عبد الكريم بن الشيخ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
▪ الأستاذ.حسين عباسي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السنة الجامعية 2018-2019

شكر وعرفان

أحمد لله على إحسانه، وأشكره على توفيقه وإمتنانه، و أشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيما لشأنه، وأشهد أن سيدنا ونبينا محمد عبده ورسوله، الداعي إلى رضوانه، صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه وسلم.

بعد شكر الله سبحانه وتعالى على توفيقه لإتمام هذا البحث المتواضع، أتقدم بجزيل الشكر،إلى الوالدين العزيزين الذين أعانوني وشجعوني على الإستمرار في مسيرة العلم والنجاح، كما أتوجه بالشكر الجزيل إلى من شرفني بإشرافه على مذكرة بحثي الأستاذ "حسين عباسي" الذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره الكبير علي ،ولتوجيهاته العلمية التي لا تقدر بثمن، والتي ساهمت بشكل كبير في إتمام وإستكمال هذا العمل، كما أتقدم بالشكر والتقدير إلى أساتذة اللجنة المناقشة إلى كل من الأستاذ: "عبد الكريم بن الشيخ" و الأستاذ : "محمد معمري" والشكر موصول إلى كل أساتذة قسم الرياضيات ، و إلى كل زملائي بالأخص زميلتي وداد سعود .

إهـداء

أهدي بحثي هذا إلى التي وهبت فلذة كبدها كل العطاء و الحنان إلى التي صبرت على كل شيء إلى التي رعتني حق الرعّاية و كانت سندي في الشدائد ، و كانت دعواها لي بالتوفيق تتبعتني خطوة خطوة في عملي إلى التي كلما تذكرت إبتسامتها إرتحت ، نبع الحنان أمي حفظك الله ورعاك إلى الذي وهبني كل ما يملك حتى أحقق له آماله ،إلى من كان يدفعني قدما نحو الأمام لنيل المبتغى إلى الذي سهر على تعليمي بتضحيات جسام ، إلى مدرستي الأولى في الحياة أبي الغالي على قلبي أطال الله في عمره إليهما أهدي هذا العمل المتواضع ، لكي أدخل على قلبيهما شيئا من السعادةإلى إخوتي الأعزاء إلى أختي الوحيدة " آية " إلى كل عائلة " كيحل " إلى صديقتي العزيزة ورفيقة دربي "وداد سعود" كما أهدي ثمرة جهدي لأستاذي المحترم "حسين عباسي" الذي ساهم بشكل كبير في إتمام هذا البحث . إلي كل أساتذة وطلبة قسم الرياضيات

كيحل سليمة

الفهرس

مقدّمة 1

الفصل 1
المفاهيم الأساسية في علم المنطق الضبابي 3

1.1 مفاهيم أساسية 3
1.1.1 مفهوم المنطق الضبابي 3
1.1.2 المجموعات العادية (الكلاسكية) 3
1.1.3 المجموعة الضبابية 4
1.2 المجموعات الضبابية 4
1.2.1 درجة و دالة الإنتماء (العضوية) 4
1.2.2 تشكيل المجموعة الضبابية 5
1.2.3 أنواع المجموعات الضبابية 6
1.2.4 نقطة تحويل (توازن) المجموعة الضبابية 7
1.2.5 المجموعة الضبابية السوية 7
1.2.6 إرتفاع (قمة) المجموعة الضبابية 7
1.2.7 حامل المجموعة الضبابية 7
1.2.8 نواة المجموعة الضبابية 8
1.2.9 النقطة الضبابية 9
1.3 جبرالمجموعات 10
1.3.1 أصلي المجموعة الضبابية 10
1.3.2 تساوي مجموعتين ضبابيتين 10
1.3.3 المعايير الثلاثية 10
1.3.4 الأمثلة الأساسية للمعيار من النمط t 11
1.3.5 مكملات المعايير الثلاثية 11
1.3.6 الأمثلة الأساسية للمعيار المكمل من النمط t 12
1.3.7 إحتواء المجموعات الضبابية 12

1.3.8 إتحاد المجموعات الضبابية 12
1.3.9 تقاطع المجموعات الضبابية 13
1.3.10 الفرق والفرق التناظري بين مجموعتين ضبابيتين 14
1.3.11 متممة مجموعة ضبابية 14
1.3.12 المجموعة الضبابية المحدبة 15
1.3.13 الجداء الديكارتي لمجموعتين ضبابيتين 15
1.3.14 مجموعة القطع في المستوى ألفا $\alpha - levelSets$ 16

الفصل 2
الأعداد و الزمر الضبابية 17

2.1 الأعداد الضبابية 17
2.1.1 العدد الضبابي 17
2.1.2 أنواع الأعداد الضبابية 18
2.1.3 العمليات الحسابية الضبابية 21
2.2 الزمر الضبابية 25
2.2.1 الزمرة الضبابية 25
2.2.2 الزمر الضبابية الجزئية 25
2.2.3 العمليات الثنائية الضبابية 26
2.2.4 الزمرة الضبابية التبديلية 27
2.2.5 الزمرة الضبابية الجزئية السوية 28
2.2.6 الزمرة الناظمية الضبابية 28
2.2.7 تأثير زمرة ضبابية على مجموعة ضبابية 28
2.2.8 تشاكل الزمر الضبابية 29

الفصل 3
العلاقات و الدوال الضبابية 30

3.1 العلاقات الضبابية 30
3.1.1 العلاقة الضبابية 30
3.1.2 العلاقة الضبابية العكسية 32
3.1.3 العلاقة الضبابية المركبة 32
3.1.4 علاقة التكافؤ الضبابية 34

3.1.5 مجموعة القطع في المستوي ألفا للعلاقة الضبابية 35
3.2 الدوال الضبابية 36
3.2.1 الدالة الضبابية 36
3.2.2 تغيرات الدالة الضبابية 37
3.2.3 معكوس الدالة الضبابية 37
3.2.4 مشتق الدالة الضبابية 37
خـــاتمة 40
الملاحـــق i
دليـــــل المصطلحـات ii

الترميز

الرمز	مدلوله
X	مجموعة كيفية
$p(X)$	مجموعة كل المجموعات الجزئية من X
μ_A	دالة الإنتماء أو العضوية للمجموعة A
I^X	مجموعة القوى الضبابية في X
$H(A)$	إرتفاع المجموعة A
$S(A)$	حامل المجموعة A
$N(A)$	نواة المجموعة A
$\Omega(X,Y)$	مجموعة كل الدوال الضبابية من I^X إلى I^Y
$\Omega_m(X,Y)$	مجموعة كل الدوال الضبابية الرتيبة المتزايدة من I^X إلى I^Y
$\tilde{A}$	العدد الضبابي
$NI(G)$	مجموعة الزمر الضبابية السوية
$I(G)$	الزمر الضبابية الجزئية
$\mathcal{F}(X,Y)$	مجموعة العلاقات الضبابية من X إلى Y
$A_{[\alpha]}$	مجموعة القطع في المستوي α $(\alpha - level)$
$A_{[\alpha+]}$	مجموعة القطع - α القوي
$domR$	مجموعة تعريف R
$RanR$	مجموعة صور R
$I_{x\times y}$	علاقة ضبابية ذاتية على X
R^{-1}	علاقة ضبابية عكسية للعلاقة R
$\overline{A^*}$	لاصقة المجموعة A^*

مقدّمـــــة

إن العقل البشري ظل يصارع المستحيل و يبتكر ما يحل به مشكلاته منذ فجر الإنسانية ، و كل ما ظهر العجز في آلية إلا أوجد آلية أخرى أكثر مرونة مع متطلباته ، و نحن في هذه المذكرة أمام منطق جديد ، ألمته الحاجة إلى التعامل الآلي المنطقي مع الأحكام اللفظية ، مما نتج عنه الذكاء الاصطناعي. فمن اليسير أن نحكم على شخص أنه ذكر أو أنثى ، أو أمي أو ليس أمي، لكن من العسير أن نحكم على شخص أنه مثقف أو جميل. و نلاحظ أنه يمكننا أن نقول على شخصين أنهما تربان (لهما نفس العمر) رغم أن بين ميلادهما أياما بل أشهر و نعتبر أن ذلك منطقي و عادي .

إن النمذجة الرياضية التي تعتمد إعتماد كليا على الظواهر الثنائية و هي وجود حالتين لكل ظاهرة إحدى الحالتين الصحيحة فيها تعطى رمز 1 و الحالة الأخرى الخاطئة فيها تعطى رمز 0 و إنطلاقا من هذا التقسيم تم إنشاء المنطق و منه تشكلت الرياضيات الكلاسيكية المعروفة ، لكن الواقع أوسع من ذلك و قد لا يعتمد على حالتين فقط كما رأينا سابقا ، من ثم ظهرت الحاجة إلى منطق جديد يقبل التحقق الجزئي للظاهرة و يثمنها من هنا نشأ المنطق الضبابي أو ما يعرف بمنطق الغموض أو المنطق المشوش أو العائم على يد العالم الأذربجاني الأصل " لطفي زادة " سنة 1965 الذي إستعمل في الذكاء الإصطناعي و الأنظمة الخبيرة . على هذا الأساس إخترنا عنوان المذكرة :

"لمحة عن الرياضيات الضبابية"

حيث قسمنا هذه المذكرة إلى ثلاث فصول :

الفصل الاول : المفاهيم الأساسية في علم المنطق الضبابي حيث تناولنا فيها مفهوم المنطق الضبابي و المجموعات العادية ثم تطرقنا للمجموعات الضبابية وجبر المجموعات الضبابية .

الفصل الثاني : الأعداد الضبابية و الزمر الضبابية حيث تناولنا العدد الضبابي و أنواعه و العمليات الحسابية الضبابية ثم إنتقلنا للزمر الضبابية .

الفصل الثالث : العلاقات الضبابية و الدوال الضبابية .
قدمنا فيه العلاقة الضبابية و عكسيتها تم تطرقنا لتركيب علاقتين ثم علاقة التكافؤ وبعدها إنتقلنا للدوال الضبابية حيث أخذت مختصرة.

الفصل

1

المفاهيم الأساسية في علم المنطق الضبابي

1.1 مفاهيم أساسية

1.1.1 مفهوم المنطق الضبابي

تعريف 1.1.1

المنطق الضبابي هو مفهوم أوسع للمنطق الكلاسيكي الرقمي ثنائي القيم الذي يعتمد على القيمتي (0 و 1) حيث يرتكز المنطق الضبابي على التعابير ، و الألفاظ اللغوية من جمل و كلمات مثل طويل ، قصير، حار بارد ، سريع.... ، وهي قيم غير محددة تماما في المنطق الكلاسيكي الذي يعتمد على المتغيرات العددية .

1.1.2 المجموعات العادية (الكلاسكية)

تعريف 2.1.1

في المجموعات العادية نجد أن العنصر إما ينتمي أو لا ينتمي للمجموعة فمثلا X مجموعة كيفية ، و A مجموعة جزئية منها فالدالة μ_A تعطي لكل عنصر $x \in X$ درجة إنتمائه للمجموعة A

- إذا كانت $\mu_A(x) = 1 \Longrightarrow x \in A$
- إذا كانت $\mu_A(x) = 0 \Longrightarrow x \notin A$

أي الدالة $\mu_A : X \longrightarrow \{0,1\}$

1.1.3 المجموعة الضبابية

تعريف 3.1.1

المجموعة الضبابية هي مجموعة عناصرها مكونة من مركبتين . المركبة الأولى تمثل العنصر و الثانية هي درجة إنتماء هذا العنصر للمجموعة الجزئية .

1.2 المجموعات الضبابية

قدم لطفي زادة عام 1965 مفهوم المجموعات الضبابية كتعميم للمجموعات العادية ، و هي تعطي وصفا أكثر دقة للظواهر الطبيعية مثل درجة الحرارة . روطوبة الجو .... بدلا من الوصف الذي تعطيه المجموعات العادية .

1.2.1 درجة و دالة الإنتماء (العضوية)

و هي العنصر الأهم و حجر الزاوية في الرياضيات الضبابية و المكون الجديد الذي أضيف للعناصر و المجموعات التقليدية و التي من أجلها أخذ هذا النوع من العلوم الإستقلالية .
و يرتكز هذا المفهوم على عدم وجود إنتماء تام لعنصر في مجموعة فقط بل هناك إنتماء جزئي لعنصر ما في هذه المجموعة .
إن ذكر درجة إنتماء عنصر تحدد مدى قربه من العناصر ذات الإنتماء التام و تحدد هذه الدرجة بين الصفر و الواحد ، فإذا كانت درجة إنتماء العنصر صفر معنى ذلك أن هذا العنصر بعيد كل البعد عن العناصر ذات الإنتماء التام والتي تحدد درجة إنتماءها الواحد و كلما كانت درجة الإنتماء قريبة من الواحد كان قرب العنصر من العناصر ذات الإنتماء التام كبيرا . كما يمكن قياس درجة إنتماء العناصر لمجموعة بإستعمال دالة تسمى " دالة الإنتماء " .

تعريف 1.2.1

دالة الإنتماء هي دالة عددية تأخذ قيمتها في المجال $[0,1]$ يتم بواسطتها حساب درجة إنتماء عنصر ما للمجموعة الضبابية .

تعريف 2.2.1

لتكن X مجموعة غير خالية و A مجموعة جزئية منها وليكن $I=[0,1]$
يرفق بكل عنصر $x \in X$ قيمة عددية تكون بين 0 و 1 تمثل درجة إنتماء العنصر x للمجموعة A وكلما كانت درجة العضوية أكبر كان العنصر أكثر إنتماء للمجموعة A .

ملاحظة

يمكن أن نتعين درجة عضوية عنصر لمجموعة بواسطة دالة الإنتماء μ_A , $\mu_A : X \longrightarrow I$ التي تربط كل عنصر $x \in X$ بالعدد الحقيقي $\mu_A(x)$.

تعريف 3.2.1

X مجموعة غير خالية ، A مجموعة جزئية منها

- يقال عن عنصر $x \in X$ إنه يتمتع بعضوية كاملة في المجموعة A إذا كانت $\mu_A(x) = 1$
- يقال عن عنصر $x \in X$ إنه ليس عنصر في المجموعة A إذا كانت $\mu_A(x) = 0$

أمثلة

- إذا كانت $\mu_A(x) = 0.5$ فإن العنصر x ينتمي للمجموعة A بنسبة (0.5) و لا ينتمي لها بنسبة (0.5)
- إذا كانت $\mu_A(x) = 0.9$ فإن العنصر x ينتمي للمجموعة A بنسبة (0.9) و لا ينتمي لها بنسبة (0.1)

1.2.2 تشكيل المجموعة الضبابية

تعريف 4.2.1

إن المجموعات المزودة بدالة الإنتماء $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ تسمى مجموعات ضبابية .
تكتب المجموعات الضبابية بشكل مجموعة ثنائيات (المركبة الأولى هي العنصر و الثانية هي درجة الإنتماء)
أي : $A = \{(x, \mu_A(x)) \ : \ x \in X \ , \ 0 \leqslant \mu_A(x) \leqslant 1\}$ و يمكن أن نتعين بكسور حيث البسط يمثل درجة الإنتماء والمقام هو العنصر أي بالعبارة : $A = \{\frac{\mu_A(x)}{x} \ : \ x \in X\}$
سوف نرمز للمجموعة التي عناصرها جميع المجموعات الضبابية في المجموعة X بالرمز I^X و تسمى مجموعة القوى الضبابية في X .

ملاحظة

من خلال التعريف السابق يظهر أن الإختلاف الجوهري بين المجموعات العادية و المجموعات الضبابية هو إرفاق كل عنصر بدرجة الإنتماء ، بل يمكن في بعض الأحيان تعيين مجموعة ضبابية بدالة الإنتماء فقط دون ذكر العناصر بشكل مستقل .

أمثلة

① لتكن X مجموعة معرفة بالشكل $X = \{a, b, c\}$.
نسمي المجموعة $A = \{(a, 0.5), (b, 0.25), (c, 0.2)\}$ مجموعة ضبابية في X حيث كل عنصر مرفق بدرجة إنتماءه و يمكن كتابتها بالشكل : $A = \{\frac{0.5}{a}, \frac{0.25}{b}, \frac{0.2}{c}\}$
② لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعة .
إن المجموعة A المعرفة $A = \{(1, 0), (2, 0.25), (3, 0.5), (4, 0.7), (5, 0.8), (6, 0.7), (7, 1)\}$ تسمى مجموعة

ضبابية في X .

③ لتكن X مجموعة معرفة بالشكل $X = \{a, b, c\}$

الدالة $\mu_B : X \longrightarrow [0, 3]$ معرفة كالتالي :

$$\begin{aligned} \mu_B(a) &= 0.15 \\ \mu_B(b) &= 2.5 \\ \mu_B(c) &= 2 \end{aligned}$$

إن المجموعة B المعرفة بالشكل $B = \{(a, 0.15), (b, 2.5), (c, 2)\}$ لا تمثل مجموعة ضبابية في X .

④ لتكن X مجموعة معرفة بالشكل $X = \{a, b, c, d, e\}$

نسمي المجموعتان

$$\begin{aligned} A &= \{(a, 1), (b, 0.5), (c, 0.33), (d, 0), (e, 0.9)\} \\ B &= \{(a, 0), (b, 0.5), (c, 1), (d, 0.9), (e, 0.2)\} \end{aligned}$$

مجموعتان ضبابيتان مختلتان في X .

1.2.3 أنواع المجموعات الضبابية

المجموعة الضبابية المبعثرة

تعريف 5.2.1

المجموعات الضبابية المبعثرة وهي المجموعة الضبابية المتقطعة و التي دالة الإنتماء لها متقطعة . كما في المثال التالي : $X = \{a, b, c\}$ مجموعة منتهية (و قد تكون غير منتهية) $\mu_A : X \longrightarrow I$, $A = \{\frac{0.3}{a}, \frac{1}{b}, \frac{0.6}{c}\}$

المجموعة الضبابية المستمرة

تعريف 6.2.1

المجموعات الضبابية المستمرة ، وهي المجموعات التي دالة الإنتماء لها مستمرة أي $\mu_A : X \longrightarrow I$ تكون مستمرة .

مثلا الدالة $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow I$ المعرفة كمايلي :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.25x, & 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0.25(8 - x), & 4 \leqslant x \leqslant 8 \\ 0, & x \notin [0, 8] \end{cases}$$

ملاحظات

① إذا أردنا معرفة الفرق بين المجموعات الضبابية ، و المجموعات العادية نلاحظ إذا كانت A مجموعة عادية فإن درجة الإنتماء تأخذ فقط قيمتين هما 0,1 ، أي أن

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

② إذا كانت A مجموعة ضبابية في المجموعة X فإن $\forall\ x \in X\ :\ 1 \leqslant \mu_A(x) \leqslant 0$ و عليه المجموعة العادية تصبح حالة خاصة للمجموعة الضبابية .

1.2.4 نقطة تحويل (توازن) المجموعة الضبابية

تعريف 7.2.1

لتكن X مجموعة غير خالية . A مجموعة ضبابية من X

- يقال عن نقطة $x \in X$ بأنها نقطة تحويل للمجموعة الضبابية A إذا كانت $\mu_A(x) = 0.5$.

1.2.5 المجموعة الضبابية السوية

تعريف 8.2.1

X مجموعة غير خالية . A مجموعة ضبابية جزئية من X

- نقول عن A بأنها مجموعة ضبابية سوية إذا $\exists\ x_0 \in X\ :\ \mu_A(x_0) = 1$ ، أي أن $\{x \in X : \mu_A(x) = 1\} \neq \phi$

1.2.6 إرتفاع (قمة) المجموعة الضبابية

تعريف 9.2.1

إرتفاع أو قمة المجموعة الضبابية A يرمز لها بالرمز $H(A)$ و يعرف بالعبارة التالية :

$$H(A) = max\{\mu_A(x) : x \in X\}$$

و بصورة خاصة إذا كانت A سوية ، فإن $H(A) = 1$

1.2.7 حامل المجموعة الضبابية

تعريف 10.2.1

لتكن A مجموعة ضبابية في X .

حامل المجموعة الضبابية A يرمز له بالرمز A^* أو $S(A)$ ويعرف بالعبارة :

$$A^* = S(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} = \{x \in X : \mu_A(x) \neq 0\}$$

1.2.8 نواة المجموعة الضبابية

تعريف 11.2.1

لتكن A مجموعة ضبابية في X .
نعرف نواة المجموعة الضبابية A . $\{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$ ونرمز لها بالرمز $N(A)$ حيث :

$$N(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$$

مثال

لتكن $X = \{a, b, c\}$, A مجموعة ضبابية في X .
دالة إنتماء A معرفة كالتالي :

$$\begin{aligned}
\mu_A(a) &= 0.5 \\
\mu_A(b) &= 0.33 \\
\mu_A(c) &= 0
\end{aligned}$$

إن المجموعة $A = \{(a, 0.5), (b, 0.33), (c, 0)\}$ مجموعة ضبابية في X. $A^* = \{a, b\}$ هي حامل المجموعة الضبابية A
نلاحظ أن النقطة a تمثل نقطة تحويل للمجموعة الضبابية A . لأن $\mu_A(a) = 0.5$ ، و A غير سوية لأنه $\nexists\ x \in X\ :\ \mu_A(x) = 1$ ، و أن قمة المجموعة A تساوي 0.5 . لأن $H(A) = max\{0.5, 0.33, 0\} = 0.5$

ملاحظات

① قد تملك المجموعة الضبابية أكثر من نقطة تحويل . نرمز بالرمز $C(A)$ لمجموعة نقاط تحويل مجموعة ضبابية حيث $C(A) = \{x : \mu_A(x) = 0.5\}$
② نقول عن A بأنها منتهية إذا كانت A^* مجموعة منتهية ، وإذا كانت A^* غير منتهية فإن A غير منتهية .
③ $H(A) = 0$ إذا كان $A = \phi$

خـواص

① المجموعة الضبابية A التي دالة إنتمائها معرفة بالعبارة : $\mu_A(x) = 0$ لكل $x \in X$ تسمى مجموعة ضبابية خالية و يرمز لها بالرمز ϕ أو 0 .

② المجموعة الضبابية A و دالة إنتمائها معرفة بالعبارة : $\mu_A(x) = 1$ لكل $x \in X$ تسمى المجموعة الضبابية الشاملة و يرمز لها بالرمز X أو 1 (X بإعتبارها مجوعة العناصر 1 . بإعتباره قيمة الإنتماء).

③ نقول عن المجموعة الضبابية A بأنها غير خالية إذا وجد على الأقل $x \in X$ بحيث $\mu_A(x) \neq 0$.

1.2.9 النقطة الضبابية

تعريف 12.2.1

لتكن X مجموعة غير خالية ، $Y \subseteq X$, $t \in I$ فإن الدالة $Y_t : X \longrightarrow I$ المعرفة بالصيغة :

$$Y_t(x) = \begin{cases} t \;; & x \in Y \\ 0 \;; & x \notin Y \end{cases}$$

لكل $x \in X$ تكون Y مجموعة ضبابية في X .

① إذا كانت المجموعة Y تحتوي على عنصر واحد فقط وليكن $Y = \{P\}$ ، فإن الدالة Y_t تكتب بالشكل

$$Y_t(x) = \begin{cases} t \;; & x = P \\ 0 \;; & x \neq P \end{cases}$$

لكل $x \in X$

وتسمى Y نقطة ضبابية أو مجموعة ضبابية أحادية .

② إذا كانت $t = 1$ فإن $Y_t = \chi_Y$ حيث χ تمثل الدالة المميزة

$$\chi_{\{p\}}(x) = \begin{cases} 1 \;; & x = P \\ 0 \;; & x \neq P \end{cases}$$

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1 \;; & x \in Y \\ 0 \;; & x \notin Y \end{cases}$$

تعريف 13.2.1

لتكن كل من p , q نقطتين ضبابيتين في المجموعة X .

يقال عن Y_t , Z_t مختلفتين (يكتب $Y_t \neq Z_t$) إذا كانت $p \neq q$ حيث أن Y_t, Z_t دالتي إنتماء المجموعتين $Y = \{p\}, Z = \{q\}$ على التوالي .

تعريف 14.2.1

لتكن p نقطة ضبابية في المجموعة X و A مجموعة ضبابية في X .
يقال عن p بأنها تنتمي إلى A إذا كان $\forall\ x \in X\ :\ Y_t(x) \leqslant \mu_A(x)$ حيث Y_t هي دالة إنتماء المجموعة التي تحتوي على العنصر p فقط .

1.3 جبرالمجموعات

1.3.1 أصلي المجموعة الضبابية

تعريف 1.3.1

لتكن A مجموعة ضبابية في X.
أصلي المجموعة الضبابية A يرمز له بالرمز $|A|$ و يعرف بالعبارة التالية :

$$|A| = card(A) = \sum_{x \in S(A)} \mu_A(x)$$

1.3.2 تساوي مجموعتين ضبابيتين

تعريف 2.3.1

لتكن كل من A , B مجموعة ضبابية في X .
نقول عن A ، B بأنهما متساويتين إذا كانت $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ لكل $x \in X$ (μ_B دالة إنتماء العنصر x للمجموعة B).

1.3.3 المعايير الثلاثية

تستخدم بعض الدوال لتقاطع المجموعات الضبابية و تسمى هذه الدوال بالمعايير ثلاثية .

تعريف 3.3.1

لتكن T عملية ثنائية على المجموعة I ، أي أن $T : I \times I \longrightarrow I$ دالة .

- يقال عن I بأنها معيار ثلاثي على المجموعة I إذا تحققت البديهيات التالية :

① $\forall a \in I \quad T(a,1) = a$ (الشرط الحدودي)

① $\forall a,b \in I \quad T(a,b) = T(b,a)$ (التبديلية)

③ إذا كان $b_1 \leqslant b_2$ فإن $T(a,b_1) \leqslant T(a,b_2) \quad \forall a \in I$ (الرتابة)

④ $\forall a,b,c \in I \quad T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$ (التجمعية)

1.3.4 الأمثلة الأساسية للمعيار من النمط t

- الدالة $I \longrightarrow I \times I : T_m$ المعرفة بالصيغة : $\forall a,b \in I \ , \ T_m(a,b) = min\{a,b\}$ تكون معيار ثلاثي ويسمى بالتقاطع القياسي .
- الدالة $I \longrightarrow I \times I : T_b$ المعرفة بالصيغة : $\forall a,b \in I \ , \ T_b(a,b) = max\{0, a+b-1\}$ تكون معيار ثلاثي ويسمى باجمع المقيد .
- الدالة $I \longrightarrow I \times I : T_p$ المعرفة بالصيغة : $\forall a,b \in I \ , \ T_p(a,b) = ab$ تكون معيار ثلاثي يسمى بالضرب الجبري .
- الدالة $I \longrightarrow I \times I : T^*$ والتي صيغتها :

$$T^*(a,b) = \begin{cases} a \ , & b = 1 \\ b \ , & a = 1 \\ 0 \ , & o.w.(otherwise) \end{cases}$$

تكون معيار ثلاثي يسمى التقطع المصادم .

1.3.5 مكملات المعايير الثلاثية

إن الدوال التي تستخدم لإتحاد المجموعات الضبابية تسمى المكملات الثلاثية .

تعريف 4.3.1

لتكن C عملية ثنائية على المجموعة I ، أي أن $C : I \times I \longrightarrow I$ دالة .

- يقال عن C بأنها معيار مكمل ثلاثي على المجموعة I إذا تحققت البديهيات التالية :

① $\forall a \in I \ , \ C(a,0) = a$ (الشرط الحدودي)

② $\forall a,b \in I \ , \ C(a,b) = C(b,a)$ (التبديلية)

③ إذا كان $b_1 \leqslant b_2$ فإن $C(a,b_1) \leqslant C(a,b_2) \quad \forall a \in I \ ,$ (الرتابة)

④ $\forall a,b,c \in I \ , \ C(a,C(b,c)) = C(C(a,b),c)$ (التجمعية)

1.3.6 الأمثلة الأساسية للمعيار المكمل من النمط t

- الدالة $C_m : I \times I \longrightarrow I$ المعرفة بالصيغة: $\forall a, b \in I \ , \ C_m(a,b) = max\{a,b\}$ تكون معيار مكمل ثلاثي ويسمى بالإتحاد القياسي .
- الدالة $C : I \times I \longrightarrow I$ المعرفة بالصيغة : $\forall a, b \in I \ , \ C_b(a,b) = min\{0, a+b\}$ تكون معيار مكمل ثلاثي ويسمى بالجمع المقيد .
- الدالة $C_p : I \times I \longrightarrow I$ المعرفة بالصيغة : $\forall a, b \in I \ , \ T_p(a,b) = a+b-ab$ تكون معيار ثلاثي ويسمى بالضرب الجبري .
- الدالة $C^* : I \times I \longrightarrow I$ المعرفة بالصيغة :

$$C^*(a,b) = \begin{cases} a & , \quad b = 0 \\ b & , \quad a = 0 \\ 1 & , \quad o.w. \end{cases}$$

تكون معيار مكمل ثلاثي يسمى الإتحاد المصادم .

1.3.7 إحتواء المجموعات الضبابية

تعريف 5.3.1

لتكن A, B مجموعتين ضبابيتين .

A مجموعة جزئية من B نكتب $A \subseteq B$ إذا كان $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$ لكل $x \in X$.

1.3.8 إتحاد المجموعات الضبابية

إتحاد مجموعتين ضبابيتين B, A يساوي أصغر مجموعة ضبابية تحوي B, A .

تعريف 6.3.1

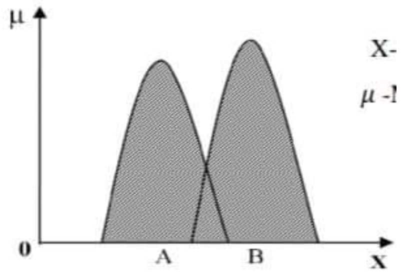
لتكن كل من A , B مجموعة ضبابية في المجموعة X .

إتحاد المجموعتين A , B يرمز له بالرمز $A \cup B$ و نعرف دالة الإنتماء للإتحاد المجموعتين A , B و التي دالة الإنتماء لهما على التوالي μ_A , μ_B بالصيغة :

$$\forall \ x \in X \ : \ \mu_{A \cup B}(x) = C_m(\mu_A(x), \mu_B(x)) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

أي

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) : x \in X\}$$



شكل 1.1: إتحاد مجموعتين ضبابيتين

1.3.9 تقاطع المجموعات الضبابية

تقاطع مجموعتين ضبابيتين A, B يساوي أكبر مجموعة ضبابية محتواة في A, B .

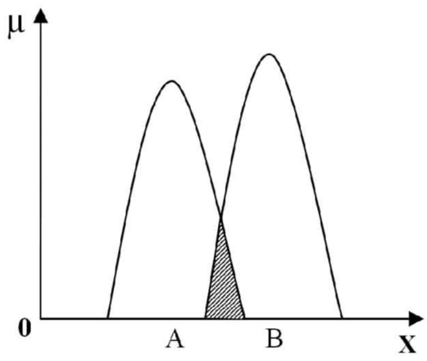
تعريف 7.3.1

لتكن كل من A , B مجموعة ضبابية في المجموعة X .
تقاطع مجموعتين A , B رمزه $A \cap B$ و دالة الإنتماء له صيغتها :

$$\forall\ x \in X \ :\ \mu_{A\cap B}(x) = T_m(\mu_A(x), \mu_B(x)) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

و عليه

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A\cap B}(x)), x \in X\}$$



شكل 1.2: تقاطع مجموعتين ضبابيتين

ملاحظة

كل من $A \cup B$, $A \cap B$ مجموعتان ضبابيتان في X . (يمكن إثباتها بإستخدام خواص كل من T_m, C_m)
.

خواص

لتكن كل من A, B مجموعة ضبابية في المجموعة X .

① $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \quad , \quad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

② $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \quad , \quad A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subseteq B$

③ $A \cup A = A \quad , \quad A \cup \phi = A \quad , \quad A \cup X = X \quad , \quad A \cap A = A \quad , \quad A \cap \phi = \phi \quad , \quad A \cap X = A$

④ $A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A$

⑤ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

⑥ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.3.10 الفرق والفرق التناظري بين مجموعتين ضبابيتين

تعريف 8.3.1

لتكن كل من A , B مجموعة ضبابية في X . الفرق بين المجموعتين A , B يرمز له بالرمز $A|B$ أو $A-B$

$$A|B = \{(x, \mu_{A|B}(x)) : x \in X\}$$

حيث دالة الإنتماء لفرق المجموعتين A , B (دالة الإنتماء لهما على التوالي μ_A , μ_B)

$$\forall x \in X : \mu_{A|B}(x) = min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

تعريف 9.3.1

الفرق التناظري بين المجموعتين A , B يرمز له بالرمز $A \vartriangle B$, $A \vartriangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ ودالة الإنتماء للفرق التناظري بين المجموعتين A , B تعرف كالتالي :

$$\forall x \in X : \mu_{A \vartriangle B}(x) = max\{\ \mu_{A|B}(x), \mu_{B|A}(x)\}$$

1.3.11 متممة مجموعة ضبابية

تعريف 10.3.1

متممة المجموعة A بالنسبة للمجموعة الكيفية X . هي $X|A$ و يرمز لها بالرمز A^c ودالة الإنتماء لمتممة المجموعة A .(μ_X دالة إنتماء X)

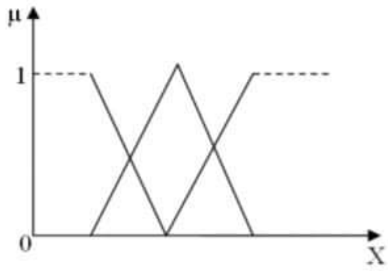
$$\forall x \in X : \mu_{A^c}(x) = min\{\mu_X(x), 1 - \mu_A(x)\} = min\{1, 1 - \mu_A(x)\} = 1 - \mu_A(x)$$

و بالتالي

$$A^c = \{(x, \mu_{A^c}(x)), x \in X\}$$

خواص

لتكن كل من A, B, C مجموعات ضبابية في X .



شكل 1.3: متممة مجموعة ضبابية

① $A\backslash B = A \cap B^c$

② $X^c = \phi \quad , \quad \phi^c = X$

③ $(A^c)^c = A$

④ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad , \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

⑥ إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $B^c \subseteq A^c$

ملاحظة

إذا كانت A مجموعة ضبابية في X .

$A \cup A^c \neq X \quad , \quad A \cap A^c \neq \phi$ لأن

$$\mu_{A\cup A^c}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\} = max\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x)\} \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\mu_{A\cap A^c}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_{A^c}(x)\} = min\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x)\} \leqslant \frac{1}{2}$$

1.3.12 المجموعة الضبابية المحدبة

تعريف 11.3.1

لتكن A مجموعة ضبابية في X .

- نقول عن A مجموعة ضبابية محدبة إذا تحقق :

$$\forall\ x,y \in X\ .\ \forall\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad \mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

1.3.13 الجداء الديكارتي لمجموعتين ضبابيتين

تعريف 12.3.1

لتكن A, B مجموعتين ضبابيتين . نعرف الجداء الديكارتي للمجموعتين A, B بالشكل

$A \times B = \{(x, y, \mu_{A\times B}(x,y)) \ :\ x \in A\ ,\ y \in B\}$.

و دالة إنتمائه معرفة كالتالي : $\mu_{A\times B}(x,y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$

1.3.14 مجموعة القطع في المستوي ألفا $\alpha - levelSets$

تعريف 13.3.1

لتكن A مجموعة ضبابية في X ، $\alpha \in I$.
مجموعة القطع في المستوي α $(\alpha - level)$ أو $(\alpha - cut)$ للمجموعة الضبابية A و يرمز لها بالرمز $A_{[\alpha]}$ و يعرف بالصيغة :

$$A_{[\alpha]} = \{x \in X : \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$$

و مجموعة القطع- α القوي $(\alpha - cut \;\; Strong)$ للمجموعة الضبابية A يرمز لها $A_{[\alpha+]}$ ، أي أن

$$A_{[\alpha+]} = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}$$

مثال

① لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ و لتكن $A = \{\frac{0}{a}, \frac{0.7}{b}, \frac{1}{c}, \frac{0.5}{d}, \frac{0.2}{e}\}$ مجموعة ضبابية في X .
حساب $A_{[\alpha]}$ ،, $A_{[\alpha+]}$ حيث $\alpha = 0.5$

$A_{[\alpha]} = \{b, c, d\}$

$A_{[\alpha+]} = \{b, c\}$

ملاحظات

① $A_{[0]} = X$ لأن $\{x \in X : \mu_{A(x)} \geqslant 0\} = X$. ، $A_{[1+]} = \phi$

② $A_{[1]} = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = N(A)$

③ إذا كانت $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ فإن $A_{[\beta]} \subseteq A_{[\alpha]}$

④ إذا كانت A مجموعة ضبابية في $\mathbb{R}$ فإن $A_{[0]} = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geqslant 0\} = \overline{A^*}$

خواص

لتكن كل من B,A مجموعة ضبابية في X و لتكن $\alpha, \beta \in I$ فإن

① $A_{[\alpha+]} \subseteq A_{[\alpha]}$

② $(A^c)_{[\alpha]} = (A_{[\alpha]})^c = (A_{[(1-\alpha)+]})^c$

③ إذا كانت $\alpha \leqslant \beta$ فإن $A_{[\beta+]} \subseteq A_{[\alpha+]}$, $A_{[\beta]} \subseteq A_{[\alpha]}$

④ $(A \cup B)_{[\alpha]} = A_{[\alpha]} \cup B_{[\alpha]}$, $(A \cup B)_{[\alpha+]} = A_{[\alpha+]} \cup B_{[\alpha+]}$

⑤ $(A \cap B)_{[\alpha]} = A_{[\alpha]} \cap B_{[\alpha]}$, $(A \cap B)_{[\alpha+]} = A_{[\alpha+]} \cap B_{[\alpha+]}$

نتيجة

- $(A^c)_{[\alpha]} \neq (A_{[\alpha]})^c$
- $(A^c)_{[\alpha+]} \neq (A_{[\alpha+]})^c$

الفصل

2

الأعداد و الزمر الضبابية

2.1 الأعداد الضبابية

الأعداد الضبابية هي مجموعات ضبابية خاصة جدا في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، و لها أهمية كبيرة في الأنظمة الضبابية .

2.1.1 العدد الضبابي

تعريف 1.1.2

لتكن A مجموعة ضبابية في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. أي أن الدالة $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow I$

- نقول عن A بأنها عدد ضبابي إذا تحققت البديهيات الأتية :

① A سوية (بعبارة أخرى $\exists x_0 \in \mathbb{R} \ : \ \mu_A(x_0) = 1$)

② A مجموعة ضبابية محدبة

③ A شبه مستمرة من الأعلى بعبارة أخرى المجموعة $\{x \in \mathbb{R} \ : \ \mu_A(x) \leqslant \lambda\}$ تكون مغلقة في $\mathbb{R}$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$

④ المجموعة $\overline{A^*}$ تكون متراصة في $\mathbb{R}$

نرمز للعدد الضبابي A بالرمز $\tilde{A}$.

2.1.2 أنواع الأعداد الضبابية

العدد الضبابي المثلثي

تعريف 2.1.2

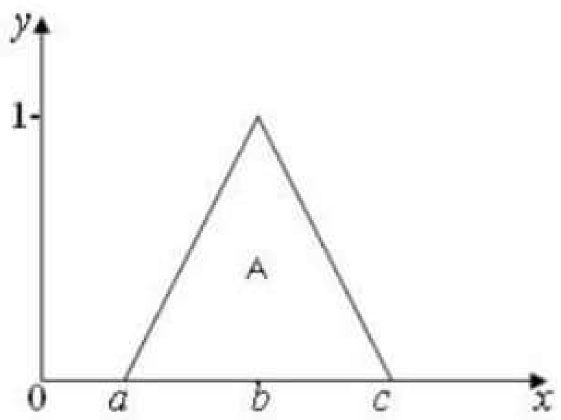
يقال عن العدد الضبابي $\tilde{A}$ بأنه مثلثي إذا كان $\tilde{A}$ يعرف بثلاث أعداد $a < b < c$ حيث رأس المثلث يكون عند النقطة $x = b$ $(\mu_{\tilde{A}}(b) = 1)$ و قاعدته تكون المجال $[a, c]$ $(\mu_{\tilde{A}}(a) = 0\ ,\ \mu_{\tilde{A}}(c) = 0)$ ، و نكتب العدد الضبابي بالشكل : $\tilde{A} = (a/b/c)\ ,\ \tilde{A} = [a, b, c]\ ,\ \tilde{A} = (a, b, c)$

تعريف 3.1.2

إذا كان $\tilde{A} = (a/b/c)$ فإن دالة الإنتماءالمثلثية تكون بالصيغة التالية :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}\ , & a \leqslant x \leqslant b \\ \dfrac{c-x}{c-b}\ , & b \leqslant x \leqslant c \\ \quad 0\ , & o.w \quad (otherwise) \end{cases}$$

و $\tilde{A}_{[\alpha]} = [a + (b-a)\alpha\ ,\ c + (b-c)\alpha]\ ,\ \tilde{A}_{[0]} = [a, c]$ تسمى قاعدة العدد الضبابي $\tilde{A}$.



شكل 2.1: عدد ضبابي مثلثي

العدد الضبابي الرباعي (شبه منحرف)

تعريف 4.1.2

يقال عن العدد الضبابي $\tilde{A}$ بأنه رباعي (أو شبه منحرف) إذا كان $\tilde{A}$ يعرف بأربع أعداد $a < b < c < d$ بحيث $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ على المجال $[b, c]$ ، و قاعدته المجال $[a, d]$ $(\mu_{\tilde{A}}(a) = 0\ ,\ \mu_{\tilde{A}}(d)) = 0)$ ، و يكتب العدد الضبابي بالشكل :

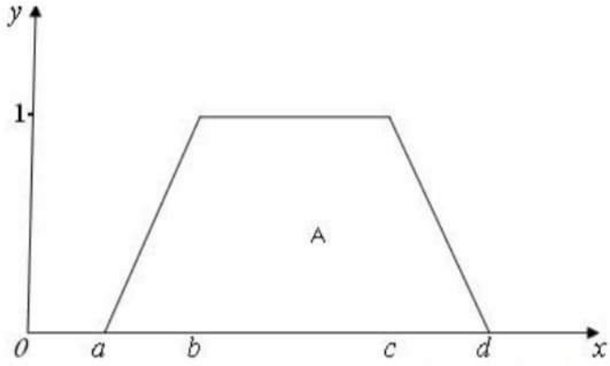
$\tilde{A} = (a/b, c/d)\ ,\ \tilde{A} = [a, b, c, d]\ ,\ \tilde{A} = (a, b, c, d)$.

تعريف 5.1.2

إذا كان $\tilde{A}=(a/b,c/d)$. فإن الدالة الإنتماء له معرفة بالصيغة :

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\ , & a\leqslant x\leqslant b\\ 1\ , & b\leqslant x\leqslant c\\ \dfrac{d-x}{d-c}\ , & c\leqslant x\leqslant d\\ 0\ , & o.w\end{cases}$$

و $\tilde{A}_{[\alpha]}=[a+(b-a)\alpha\ ,\ d+(c-d)\alpha]$ ، $\tilde{A}_{[0]}=[a,d]$ تسمى قاعدة العدد الضبابي $\tilde{A}$.



شكل 2.2: عدد ضبابي رباعي

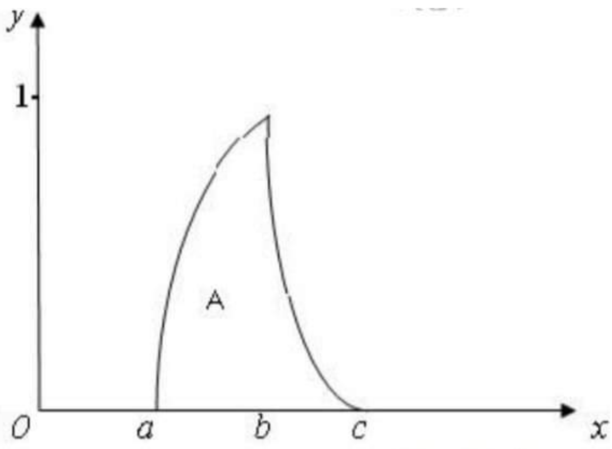
ملاحظات

① العدد الضبابي المثلثي $\tilde{A}$ يعرف بثلاثة أعداد $a<b<c$ قد تكون أضلاعه أقواس مستمرة ، و يكتب بالشكل $\tilde{A}\approx(a/b/c)$ $(\tilde{A}\approx(a,b,c))$ ، $\tilde{A}\approx[a,b,c]$).

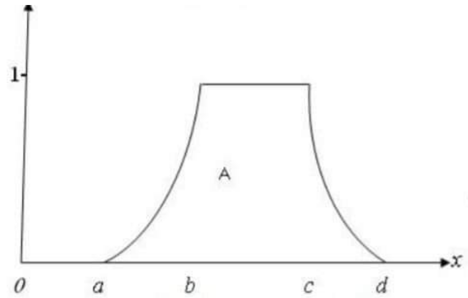
② العدد الضبابي الرباعي(أو شبه منحرف) $\tilde{A}$ يعرف بأربعة أعداد $a<b<c<d$ و قد تكون أضلاعه أقواس مستمرة ، و يكتب $\tilde{A}\approx(a/b,c/d)$.

③ مجموعة القطع في المستوي ألفا للعدد الضبابي المثلثي $\tilde{A}$ يكتب بالشكل : $\tilde{A_{[\alpha]}}=[a^{(\alpha)},b^{(\alpha)},c^{(\alpha)}]$ ، $\tilde{A_{[\alpha]}}=(a(\alpha),b(\alpha),c(\alpha))$.

④ مجموعة القطع في المستوي ألفا للعدد الضبابي الرباعي $\tilde{A}$ يكتب بالشكل : $\tilde{A_{[\alpha]}}=[a^{(\alpha)},b^{(\alpha)},c^{(\alpha)},d^{(\alpha)}]$ $\tilde{A_{[\alpha]}}=(a(\alpha),b(\alpha),c(\alpha),d(\alpha))$.



شكل 2.3: عدد ضبابي مثلثي أضلاعه أقواس مستمرة



شكل 2.4: عدد ضبابي رباعي أضلاعه أقواس مستمرة

أمثلة

① لتكن $\mu_{\tilde{A}}$ دالة إنتماء معرفة كالتالي :

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{2}, & 4\leqslant x\leqslant 6\\ \dfrac{7-x}{3}, & 6<x\leqslant 7\\ 0, & o.w\end{cases}$$

$\tilde{A}=(4/6/7)$ عدد ضبابي مثلثي .

② لتكن $\mu_{\tilde{A}}$ دالة إنتماء معرفة كالتالي :

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 1, & 2<x\leqslant 3\\ 4-x, & 3<x\leqslant 4\\ 0, & o.w\end{cases}$$

$\tilde{A}=(1/2,3/4)$ عدد ضبابي رباعي .

خـواص

① $\tilde{A}$ عدد ضبابي موجب $(\tilde{A} > 0)$ إذا كان $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ $\forall x < 0$.

② $\tilde{A}$ عدد ضبابي سالب $(\tilde{A} < 0)$ إذا كان $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ $\forall x > 0$.

③ $\tilde{A}$ عدد ضبابي صفري $(\tilde{A} = 0)$ إذا كان $\tilde{A} = (0,0,0)$ $(\tilde{A} = (0,0,0,0))$.

④ ليكن $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3], \tilde{B} = [b_1, b_2, b_3]$ عددين ضبابيين مثلثين .

- يقال عن العددين $\tilde{A}, \tilde{B}$ متساويين إذا كان $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$, $(\forall x \in \mathbb{R} \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x))$
- يقال أن $\tilde{A} \leqslant \tilde{B}$ إذا كان $a_1 \leqslant b_1, a_2 - a_1 \leqslant b_2 - b_1, a_3 - a_2 \leqslant b_3 - b_2$ ($a_4 - a_3 \leqslant b_4 - b_3$ في حالة العدد الضبابي الرباعي)
- يقال عن $\tilde{A} \geqslant \tilde{B}$ إذا كان $a_1 \geqslant b_1, a_2 - a_1 \geqslant b_2 - b_1, a_3 - a_2 \geqslant b_3 - b_2$ ($a_4 - a_3 \geqslant b_4 - b_3$ في حالة العدد الضبابي الرباعي)

⑤ نظير العدد الضبابي $\tilde{A}$ يرمز له $(-\tilde{A})$, $-\tilde{A} = (-a_3, -a_2, -a_1)$ $(-\tilde{A} = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1))$

⑥ مقلوب العدد الضبابي $\tilde{A}$ يرمز له بالرمز $\tilde{A}^{-1}$, $\tilde{A}^{-1} = [1/a_3, 1/a_2, 1/a_1]$ $(\tilde{A}^{-1} = [1/a_4, 1/a_3, 1/a_2, 1/a_1])$

2.1.3 العمليات الحسابية الضبابية

يمكن إجراء العمليات الحسابية(الجمع ، الطرح ، الضرب ، القسمة) على الأعداد الضبابية .

العمليات على الأعداد الضبابية المثلثية

ليكن $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3]$, $\tilde{B} = [b_1, b_2, b_3]$ عددين ضبابين مثلثين .

$$\begin{aligned}
\tilde{A} + \tilde{B} &= [a_1, a_2, a_3] + [b_1, b_2, b_3] \\
&= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\
\tilde{A} - \tilde{B} &= [a_1, a_2, a_3] - [b_1, b_2, b_3] \\
&= [a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1] \\
\tilde{A} \times \tilde{B} &= \tilde{A}.\tilde{B} \\
&= [a_1, a_2, a_3].[b_1, b_2, b_3] \\
&= [\alpha, a_2.b_2, \beta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= min\{a_1.b_1, a_1.b_3, a_3.b_1, a_3.b_3\}\\
\beta &= max\{a_1.b_1, a_1.b_3, a_3.b_1, a_3.b_3\}\\
\tilde{A} \div \tilde{B} &= \tilde{A}.\tilde{B}^{-1}\\
&= [a_1, a_2, a_3].[1/b_3, 1/b_2, 1/b_1]
\end{aligned}$$

مثال

ليكن $\tilde{A} = [2,4,6]$ ، $\tilde{B} = [1,2,3]$ عددين ضبابين مثلثين .

$$\begin{aligned}
\tilde{A} + \tilde{B} &= [2,4,6] + [1,2,3]\\
&= [2+1, 4+2, 6+3] = [3,6,9]\\
\tilde{A} - \tilde{B} &= [2,4,6] - [1,2,3]\\
&= [2-3, 4-2, 6-1] = [-1,2,5]\\
\tilde{A} \times \tilde{B} &= [2,4,6].[1,2,3]\\
&= [\alpha, 4 \times 2, \beta]
\end{aligned}$$

حيث :

$\alpha = min\{2,6,6,18\}$

$\beta = max\{2,6,6,18\}$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \times \tilde{B} &= [2,8,18]\\
\tilde{A} \div \tilde{B} &= [2,4,6].[1/3,1/2,1]\\
&= [2/3,2,6]
\end{aligned}$$

العمليات على الأعداد الضبابية الرباعية أو شبه المنحرف

ليكن $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ ، $\tilde{B} = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ عددين ضبابين رباعيين .

$$\begin{aligned}
\tilde{A} + \tilde{B} &= [a_1, a_2, a_3, a_4] + [b_1, b_2, b_3, b_4] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4]\\
\tilde{A} - \tilde{B} &= [a_1, a_2, a_3, a_4] - [b_1, b_2, b_3, b_4] = [a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \times \tilde{B} &= \tilde{A}.\tilde{B}\\
&= [a_1, a_2, a_3, a_4].[b_1, b_2, b_3, b_4]\\
&= [\alpha, \beta, \sigma, \gamma]
\end{aligned}$$

حيث :

$$\begin{aligned}
\alpha &= min\{a_1.b_1, a_1.b_2, a_2.b_1.a_2.b_2\} \\
\beta &= max\{a_1.b_1, a_1.b_2, a_2.b_1.a_2.b_2\} \\
\sigma &= \alpha - min\{(a_1-a_3)(b_1-b_3), (a_1-a_3)(b_2+b_4), (a_2+a_3)(b_1-b_3), (a_2+a_4)(b_2+b_4)\} \\
\gamma &= max\{(a_1-a_3)(b_1-b_3), (a_1-a_3)(b_2+b_4), (a_2+a_3)(b_1-b_3), (a_2+a_4)(b_2+b_4)\} - \beta \\
\tilde{A} \div \tilde{B} &= \tilde{A}.\tilde{B}^{-1} \\
&= [a_1, a_2, a_3, a_4].[1/b_4, 1/b_3, 1/b_2, 1/b_1]
\end{aligned}$$

مثال

$\tilde{B} = [1,2,3,4]$ ، $\tilde{A} = [5,6,7,8]$ عددين ضبابين رباعيين .

$$\begin{aligned}
\tilde{A} + \tilde{B} &= [5,6,7,8] + [1,2,3,4] = [6,8,10,12] \\
\tilde{A} - \tilde{B} &= [5,6,7,8] - [1,2,3,4] = [5-4, 6-3, 7-2, 8-1] = [1,3,5,7] \\
\tilde{A} \times \tilde{B} &= [\alpha, \beta, \sigma, \gamma] \\
&= [5, 12, 31, 72]
\end{aligned}$$

حيث :

$$\begin{aligned}
\alpha &= min\{5, 10, 6, 12\} = 5 \\
\beta &= max\{5, 10, 6, 12\} = 12 \\
\sigma &= \alpha - min\{4, -12, -26, 84\} = 31 \\
\gamma &= max\{4, -12, -26, 84\} - \beta = 72
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \div \tilde{B} &= \tilde{A}.\tilde{B}^{-1} \\
&= [5,6,7,8].[1/4, 1/3, 1/2, 1] \\
&= [5/4, 29/2, 50/3]
\end{aligned}$$

حيث :

$$\begin{aligned}\alpha &= min\{5/4, 5/3, 6/4, 2\} = 5/4\\ \beta &= max\{5/4, 5/3, 6/4, 2\} = 2\\ \sigma &= \alpha - min\{1/2, -8/3, -13/4, 56/3\} = 9/2\\ \gamma &= max\{1/2, -8/3, -13/4, 56/3\} - \beta = 50/3\end{aligned}$$

خـواص

لتكن $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ أعداد ضبابية .

① $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$ $\qquad \tilde{A} + \tilde{A} = 2\tilde{A}$

② $\tilde{A} + 0 = \tilde{A}$ $\qquad \tilde{A} - 0 = \tilde{A}$

③ $\tilde{A} - \tilde{A} \neq 0$ $\qquad \dfrac{\tilde{A}}{\tilde{A}} \neq 1$

④ إذا كان $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{C}$ فإن

$\tilde{A} - \tilde{C} \neq -\tilde{B}$, $\tilde{C} - \tilde{A} \neq \tilde{B}$, $\tilde{C} - \tilde{B} \neq \tilde{A}$

⑤ $\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \times \tilde{B} = \tilde{B} \times \dfrac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \tilde{A}$ $\qquad \dfrac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \dfrac{\tilde{A}}{\tilde{C}} \Longrightarrow \tilde{B} = \tilde{C}$

⑥ λ عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lambda \geqslant 0$ فإن $\lambda.\tilde{A} = [\lambda.a_1, \lambda.a_2, \lambda.a_3]$ $([\lambda.a_1, \lambda.a_2, \lambda.a_3, \lambda.a_4])$
- إذا كانت $\lambda < 0$ فإن $\lambda.\tilde{A} = [\lambda.a_3, \lambda.a_2, \lambda.a_1]$ $([\lambda.a_4, \lambda.a_3, \lambda.a_2, \lambda.a_1])$

حيث أن العمليات الحسابية بين الأعداد الضبابية تعتمد على عضوية هذه الأعداد ، ليكن كل من $\tilde{A}, \tilde{B}$ عددين ضبابين ودالة الإنتماء لهما $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}$ على التوالي .

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(z) = max\{min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\} : \ x + y = z\}$$

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(z) = max\{min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\} : \ x - y = z\}$$

$$\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(z) = max\{min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\} : \ x.y = z\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\div\tilde{B}}(z) = max\{min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\} : \ x \div y = z\}$$

مثال

$$\tilde{A} = \{(1, 0.6), (3, 1), (2, 0.8), (4, 0.6)\}$$

$$\tilde{B} = \{(0, 0.5), (3, 1), (1, 0.7), (4, 0.4)\}$$

حساب كل من $\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(4)$, $\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(2)$ و الجدولين التاليين يبينان كيفية الحساب .

جدول يبين كيفية حساب $\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(2)$

x	y	$z=x+y$	$\mu_{\tilde{A}}(x)$	$\mu_{\tilde{B}}(y)$	$min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$
1	1	2	0.6	0.7	0.6
2	0	2	0.8	0.5	0.5

$max\{0.6,0.5\}=0.6 \Longrightarrow \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(2)=0.6$

جدول يبين كيفية حساب $\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(4)$

x	y	$z=x.y$	$\mu_{\tilde{A}}(x)$	$\mu_{\tilde{B}}(y)$	$min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$
4	1	4	0.6	0.7	0.6
1	4	4	0.6	0.4	0.4

$max\{0.6,0.4\}=0.6 \Longrightarrow \mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(4)=0.6$

2.2 الزمر الضبابية

2.2.1 الزمرة الضبابية

تعريف 1.2.2

لتكن $(G,.)$ زمرة A مجموعة ضبابية في G .

- نقول عن A أنها زمرة ضبابية إذا كانت A زمرة و تحقق الشرطين الآتين :

① $\forall\ x,y \in G\ \mu_A(x.y) \geqslant min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}$

② $\mu_A(x)=\mu_A(x^{-1})$

2.2.2 الزمر الضبابية الجزئية

تعريف 2.2.2

لتكن $(G,.)$ زمرة و A مجموعة جزئية ضبابية من G .

- نقول عن A أنها زمرة ضبابية جزئية من G . إذا تحقق الشرطان الآتيان :

① $\forall x,y \in G \quad \mu_A(x.y) \geqslant min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}$

② $\forall x \in G \quad \mu_A(x) \geqslant \mu_A(x^{-1})$

نرمز لمجموعة جميع الزمر الضبابية الجزئية من الزمرة $(G,*)$ بالرمز $I(G)$.

مثال

لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},+)$ زمرة . و لتكن A مجموعة ضبابية في $\mathbb{Z}$. نعرف الدالة $\mu_A:\mathbb{Z}\longrightarrow[0,1]$ كالآتي :

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x\in\{0,\pm2,\pm4,....\}\\ 0.5 & x\in\{\pm1,\pm3,\pm5.....\}\end{cases}$$

A زمرة ضبابية جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}$.

2.2.3 العمليات الثنائية الضبابية

$(G,.)$ زمرة .(سوف نكتب G بدلا من $(G,.)$ و ab بدلا من $a.b$ لكل $a,b\in G$).

تعريف 3.2.2

لتكن A,B مجموعتين ضبابيتين من I^G (μ_A,μ_B دالتي إنتمائهما على التوالي) نعرف العمليتين $A*B$, A^{-1} لكل $x\in G$ كالتالي :

①

$$\mu_{A*B}(x)=\begin{cases}sup\{min\{\mu_A(y),\mu_B(z)\}:x=yz,y,z\in G\}, & x\in Im(.)\\ 0 & ,o.w\end{cases}$$

② $\mu_A^{-1}(x)=\mu_A(x^{-1})$

من الواضح أن كل من $A*B$, A^{-1} مجموعة ضبابية في G . أي أن $A^{-1}\in I^G$, $A*B$.

$A*B$ تسمى عملية ضرب A,B .

A^{-1} يسمى نظير (معكوس) A .

نتيجة

❖

$$\begin{aligned}\forall\ x\in G\ \mu_{A*B}(x) &= sup\{min\{\mu_A(y),\mu_B(y^{-1}*x)\}:y\in G\}\\ &= sup\{min\{\mu_A(x*z^{-1}),\mu_B(z)\}:z\in G\}\end{aligned}$$

❖ $(A^{-1})^{-1}=A$

مثال

لتكن $(G,.)$ زمرة .

$G=\{-1,1,-i,i\}$ و لتكن كل من $\mu_A,\mu_B:G\longrightarrow[0.1]$ معرفتين كالآتي :

$$\mu_A(-1)=\frac{1}{2} \qquad \mu_B(-1)=\frac{1}{3}$$
$$\mu_A(1)=\frac{1}{4} \qquad \mu_B(1)=\frac{1}{5}$$
$$\mu_A(-i)=\frac{1}{3} \qquad \mu_B(-i)=0$$
$$\mu_A(i)=0 \qquad \mu_B(i)=\frac{1}{2}$$

حساب $\mu_{A*B}(-1)$

$$\begin{aligned}\mu_{A*B}(-1) &= sup\{min\{\mu_A(-1),\mu_B(1)\},min\{\mu_A(1),\mu_B(-1)\},min\{\mu_A(-i),\mu_B(-i)\}\}\\ &= sup\{min\{\frac{1}{2},\frac{1}{5}\},min\{\frac{1}{4},\frac{1}{3}\},min\{\frac{1}{3},0\}\}\\ &= sup\{\frac{1}{5},\frac{1}{4},0\}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

بالمثل نحسب $\mu_{A*B}(i)$, $\mu_{A*B}(-i)$, $\mu_{A*B}(1)$

ومنه $A*B=\{(-1,\frac{1}{4}),(1,\frac{1}{2}),(-i,\frac{1}{2}),(i,\frac{1}{2})\}$

2.2.4 الزمرة الضبابية التبديلية

تعريف 4.2.2

لتكن G زمرة و A زمرة جزئية من G .

- نقول عن A بأنها زمرة تبديلية إذا كان $\forall\ x,y\in G \quad \mu_A(x.y)=\mu_A(y.x)$

مثال

لتكن $G=\{1,2,3,4,5,6\}$ زمرة مزودة بالعملية $\sharp$ كما في الجدول الآتي :

$\sharp$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	3	1	2
6	6	4	5	2	3	1

$(G,\sharp)\Longleftarrow$ زمرة

نعرف الدالة $\mu_A: G\longrightarrow I$ كمايلي : $\forall x\in G \quad \mu_A(x)=0.5$

A زمرة ضبابية تبديلية في G .

الدالة $I \longrightarrow G \;:\; \mu_B$ معرفة كالتالي : $\forall x \in G \quad \mu_B(x) = \dfrac{x}{x+1}$
B زمرة ضبابية في G ولكنها ليست تبديلية لأن

$$\mu_B(4\sharp 3) \neq \mu_B(3\sharp 4) \Longleftarrow \begin{cases} \mu_B(4\sharp 3) = \mu_B(6) = \dfrac{6}{6+1} = \dfrac{6}{7} \\ \mu_B(3\sharp 4) = \mu_B(5) = \dfrac{5}{5+1} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

ملاحظة

إذا كانت G زمرة تبديلية و $A \in I^G$ ، فإن A تكون زمرة ضبابية تبديلية في G .

2.2.5 الزمرة الضبابية الجزئية السوية

تعريف 5.2.2

لتكن $A \in I(G)$

- نقول عن A بأنها زمرة ضبابية جزئية سوية من الزمرة G . إذا كانت A زمرة ضبابية تبديلية في G .

نرمز للمجموعة جميع الزمر الضبابية السوية من G بالرمز $NI(G)$.

2.2.6 الزمرة الناظمية الضبابية

تعريف 6.2.2

لتكن G زمرة . A زمرة ضبابية جزئية من G .

- نقول عن A بأنها زمرة ناظمية إذا تحقق الشرط الآتي : $\forall\ x, y \in G \quad \mu_A(x.y.x^{-1}) \geqslant \mu_A(y)$

خواص

لتكن $A, B \in I^G$

① $A \subseteq A^{-1}$ إذا وفقط إذا كانت $A^{-1} \subseteq A$

② $A \subseteq B$ إذا وفقط إذا كانت $A^{-1} \subseteq B^{-1}$

③ $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$

2.2.7 تأثير زمرة ضبابية على مجموعة ضبابية

تعريف 7.2.2

لتكن G زمرة ضبابية مزودة بالعملية $(*)$ و لتكن S مجموعة ضبابية من G (e_G العنصر الحيادي للزمرة

. $(G$

نعرف تأثير G على S بأنه التطبيق φ بحيث :

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ G \times S &\longrightarrow S \\ (g,s) &\longmapsto \varphi(g,s) = g * s \end{aligned}$$

يحقق الشروط :

① $e_G * s = s$

② $(g.g') * s = g * (g' * s)$

③ $\mu_S(g * s) \geqslant \mu_S(s)$

2.2.8 تشاكل الزمر الضبابية

تعريف 8.2.2

لتكن A, B زمرتين ضبابيتين و ليكن $F \ : \ A \longrightarrow B$ تطبيق

- نقول عن F تشاكل زمري إذا تحقق الشرط الآتي : $F(x.y) = F(x).F(y)$. من الواضح أنه إذا كان F تشاكل زمريا فإن : $\mu_B(F(x.y)) = \mu_B(F(x), F(y)) \geqslant min\{\mu_B(F(x)), \mu_B(F(y))\}$

الفصل

3

العلاقات و الدوال الضبابية

3.1 العلاقات الضبابية

3.1.1 العلاقة الضبابية

تعريف 1.1.3

لتكن كل من X,Y مجموعتين غير خاليتين .

R مجموعة ضبابية في $X \times Y$, $R = \{((x,y),\mu_R(x,y))/(x,y) \in X \times Y\}$

(أي أن الدالة I $\mu_R : X \times Y \longrightarrow I$ و $R \in I^{X\times Y}$) فإن R علاقة ضبابية من X إلى Y .

$(R : X \longrightarrow Y)$

- إذا كان $X = Y$ تسمى R علاقة ضبابية ثنائية في X .

سنرمز للمجموعة التي عناصرها جميع العلاقات الضبابية من X إلى Y بالرمز $\mathcal{F}(X,Y)$

بصورة خاصة نستخدم $\mathcal{F}(X^2)$ بدلا من $\mathcal{F}(X,X)$.

- إذا كانت كل من X,Y مجموعة منتهيه فإن R يمكن أن تمثل بمصفوفة أو مخطط ، بعبارة أخرى إذا كانت $Y = \{y_1,y_2,......,y_n\}$ وكانت $X = \{x_1,x_2,......,x_n\}$ تعرف الدالة μ_R بالصيغة $\mu_R(x_i,y_j) = r_{ij}$ بحيث $j = 1,2,.......,m$ $i = 1,2,......,n$ و علية يمكن أن تمثل R بمصفوفة من الرتبة $n \times m$ ، أي أن $R = [r_{ij}]$ تسمى مصفوفة الإنتماء أو مصفوفة ضبابية .

أمثلة

① إذا كانت $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$

$$\mu_R(x_1,y_1) = 0.7 \qquad \mu_R(x_1,y_2) = 0.4$$
$$\mu_R(x_2,y_1) = 1 \qquad \mu_R(x_2,y_2) = 0.2$$
$$\mu_R(x_3,y_1) = 0.5 \qquad \mu_R(x_3,y_2) = 0.8$$

فإن

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$$

② لتكن $X = \{1,2,3\}$. و لتكن الدالة $\mu_R \ : \ X \times X \longrightarrow I$ معرفة كمايلي :

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0.8, & |x-y| = 1 \\ 0.3, & |x-y| = 2 \end{cases}$$

$$\mu_R(1,1) = 1 \qquad \mu_R(1,2) = 0.8 \qquad \mu_R(1,3) = 0.3$$
$$\mu_R(2,1) = 0.8 \qquad \mu_R(2,2) = 1 \qquad \mu_R(2,3) = 0.8$$
$$\mu_R(3,1) = 0.3 \qquad \mu_R(2,3) = 0.8 \qquad \mu_R(3,3) = 1$$

فإن

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف 2.1.3

لتكن R علاقة ضبابية من المجموعة X إلى Y .

مجموعة تعريف R هي مجموعة ضبابية في X يرمز لها بالرمز $domR$ تعرف بالعبارة التالية :

$$\forall \ x \in X \quad (domR)(x) = max\{\mu_R(x,y) \ \ : \ \ y \in Y\}$$

صور R هو مجموعة ضبابية في Y يرمز لها بالرمز $RanR$ تعرف بالصيغة :

$$\forall \ y \in Y \quad (RanR)(y) = max\{\mu_R(x,y) \ \ : \ \ x \in X\}$$

إرتفاع R صيغته كالتالي : $H(R)(y) = max\{max\{\mu_R(x,y) : \ y \in Y\} : \ y \in Y\}$

- يقال عن R بأنها سوية إذا كان $H(R) = 1$

- يقال عن R بأنها علاقة ضبابية ذاتية على X إذا كان

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ 0, & x\neq y\end{cases}$$

ويرمز لها بالرمز $I_{x\times y}$

3.1.2 العلاقة الضبابية العكسية

تعريف 3.1.3

لتكن R علاقة ضبابية من المجموعة X إلى Y .

العلاقة الضبابية العكسية يرمز لها بالرمز R^{-1}, $R^{-1}=[r_{ij}^{-1}]$ و تعرف دالة الإنتمائه بالصيغة :

$$\forall x\in X, \forall y\in Y \quad : \quad \mu_R(x,y)=\mu_R^{-1}(y,x)$$

مبرهنة 3.1.1

إذا كانت R علاقة ضبابية على المجموعة X ، فإن $(R^{-1})^{-1}=R$

البرهان

ليكن

$$x,y\in X \Longrightarrow \mu_R(x,y)=\mu_R^{-1}(y,x)=(\mu_R^{-1})^{-1}(x,y)\Longrightarrow(\mu_R^{-1})^{-1}=\mu_R$$.

إذن $(R^{-1})^{-1}=R$

■

مثال

$$R=\begin{bmatrix}0.7 & 0.4\\ 1 & 0.2\\ 0.5 & 0.2\end{bmatrix} \qquad R^{-1}=\begin{bmatrix}0.7 & 1 & 0.5\\ 0.4 & 2 & 0.2\end{bmatrix}$$

3.1.3 العلاقة الضبابية المركبة

تعريف 4.1.3

لتكن R علاقة ضبابية من المجموعة X إلى Y . و T علاقة ضبابية من المجموعة Y إلى Z .

توجد علاقة ضبابية S من X إلى Z . تعرف دالة الانتمائها بالعبارة الآتية :

$$\forall \quad (x,z)\in X\times Z \quad \mu_S(x,z)=max\{min\{\mu_R(x,y),\mu_T(y,z)\}:\ y\in Y\}$$

أي أن S تسمى العلاقة الضبابية المركبة $R.T$ و يرمز لها بالرمز $R \circ T$

و عليه $\forall \quad (x,z) \in X \times Z \quad \mu_{R \circ T}(x,z) = max\{min\{\mu_R(x,y), \mu_T(y,z)\} : \ y \in Y\}$

مثال

لتكن $Z = \{z_1, z_2\}$ $Y = \{y_1, y_2\}$ $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ و لتكن R علاقة ضبابية من X إلى Y ، T علاقة ضبابية من Y إلى Z .

حيث أن :

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 01 & 0.3 \end{bmatrix}$$

حساب $R \circ T$

الحل :

$$\mu_{(R \circ T)}(x_i, z_l) = max\{min\{r_{i1}, t_{1l}\}, ..., min\{r_{im}, t_{ml}\}\}$$

$$\mu_{(R \circ T)}(x_1, z_1) = max\{min\{r_{11}, t_{11}\}, min\{r_{12}, t_{21}\}\}$$
$$= max\{min\{0.7, 0.4\}, min\{0.4, 0\}\}$$
$$= max\{0.4, 0\} = 0.4$$

$$\mu_{(R \circ T)}(x_1, z_2) = max\{min\{r_{11}, t_{12}\}, min\{r_{12}, t_{22}\}\}$$
$$= max\{min\{0.7, 1\}, min\{0.4, 0.3\}\}$$
$$= max\{0.7, 0.3\} = 0.7$$

$$\mu_{(R \circ T)}(x_2, z_1) = max\{min\{r_{21}, t_{11}\}, min\{r_{22}, t_{21}\}\}$$
$$= max\{min\{1, 0.4\}, min\{0.2, 0\}\}$$
$$= max\{0.4, 0\} = 0.4$$

$$\mu_{(R \circ T)}(x_2, z_2) = max\{min\{r_{21}, t_{12}\}, min\{r_{22}, t_{22}\}\}$$
$$= max\{min\{1, 1\}, min\{0.2, 0.3\}\}$$
$$= max\{1, 0.2\} = 1$$

$$\mu_{(R \circ T)}(x_3, z_1) = max\{min\{r_{31}, t_{11}\}, min\{r_{32}, t_{21}\}\}$$
$$= max\{min\{0.5, 0.4\}, min\{0.2, 0\}\}$$
$$= max\{0.4, 0\} = 0.4$$

$$\mu_{(R \circ T)}(x_3, z_2) = max\{min\{r_{31}, t_{12}\}, min\{r_{32}, t_{22}\}\}$$
$$= max\{min\{0.5, 1\}, min\{0.2, 0.3\}\}$$
$$= max\{0.5, 0.2\} = 0.5$$

و منه

$$R\circ T=\begin{bmatrix}0.4 & 0.7\\ 0.4 & 1\\ 0.4 & 0.5\end{bmatrix}$$

ملاحظات

① لتكن كل من R,T علاقة ضبابية على المجموعة X . فإنه ليس من الضروري أن تكون $R\circ T=T\circ R$

② إذا كانت كل من X,Y,Z مجموعة منتهية فإنه يمكن تمثيل العلاقة المركبة بشكل مصفوفة

ليكن $X=\{x_1,x_2,......,x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2,......,y_m\}$, $Z=\{z_1,z_2,.....,z_k\}$ ، و R علاقة ضبابية من X إلى Y ، و لتكن T علاقة ضبابية من Y إلى Z .

إذا كانت $R=[r_{ij}]$, $i=1,2,.....,n$, $j=1,2,...,m$ ، و كانت $T=[t_{jl}]$

$j=1,2,.....,m$, $l=1,2,...,k$

فإن $R\circ T=[s_{il}]$, $i=1,2,.....,n$, $l=1,2,...,k$

حيث $\mu_{(R\circ T)}(x_i,z_l)=max\{min\{r_{i1},t_{1l}\},...,min\{r_{im},t_{ml}\}\}$

إن ضرب المصفوفة في العلاقة الضبابية هو $r_{ij}t_{jl}=min\{r_{ij},t_{jl}\}$ ، و الجمع $r_{ij}+t_{jl}=max\{r_{ij},t_{jl}\}$

3.1.4 علاقة التكافؤ الضبابية

تعريف 5.1.3

لتكن R علاقة ضبابية على المجموعة X .

- يقال عن R بأنها

① إنعكاسية إذا كان $\mu_R(x,x)=1$ $\forall\ x\in X$.

② ضد إنعكاسية إذا كان $\mu_R(x,x)\neq 1$ $\exists\ x\in X$.

③ متناظرة إذا كان $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$ $\forall\ x,y\in X$.

④ ضد متناظرة إذا تحقق الشرط الآتي

$\mu_R(x,y)>0$, $\mu_R(y,x)>0$ فإن $x=y$

⑤ متعدية إذا كان $R\circ R\subseteq R$

- يقال عن R بأنها علاقة تكافؤ ضبابية إذا كانت R علاقة ضبابية إنعكاسية ، متناظرة و متعدية .

مثال

لتكن $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ولتكن R,T علاقة ضبابية على X . لدينا المصفوفتين الضبابيتين التاليتين :

$$T=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

تحقق من أن R,T علاقة تكافؤ .

① بما أن

$\mu_R(x_1,x_1)=\mu_R(x_2,x_2)=\mu_R(x_3,x_3)=\mu_R(x_4,x_4)=1$ فإن R إنعكاسية .

بما أن

$$\begin{cases}\mu_R(x_1,x_2)=\mu_R(x_2,x_1)=1,\mu_R(x_1,x_3)=\mu_R(x_3,x_1)=0\\ \mu_R(x_1,x_4)=\mu_R(x_4,x_1)=1,\mu_R(x_2,x_3)=\mu_R(x_3,x_2)=0\\ \mu_R(x_2,x_4)=\mu_R(x_4,x_2)=1,\mu_R(x_3,x_4)=\mu_R(x_4,x_3)=1\end{cases} \Longleftarrow R$$ متناظرة .

R ليست متعدية لأن

$$R\circ R=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\nsubseteq R$$

و منه R ليست علاقة تكافؤ .

② بنفس الطريقة نجد T علاقة تكافؤ .

3.1.5 مجموعة القطع في المستوي ألفا للعلاقة الضبابية

تعريف 6.1.3

لتكن R علاقة ضبابية على المجموعة X . مجموعة القطع في المستوي α للعلاقة R يرمز لها بالرمز $R_{[\alpha]}$ و تعرف بالصيغة التالية :

$$0\leqslant\alpha\leqslant1\ \ ,\ R_{[\alpha]}=\{(x,y)\in X^2\ :\mu_R(x,y)\geqslant\alpha\}$$

تكون R علاقة تكافؤ ضبابية إذا وفقط إذا كانت $R_{[\alpha]}$ علاقة تكافؤ على المجموعة X لكل $0\leqslant\alpha\leqslant1$.

3.2 الدوال الضبابية

3.2.1 الدالة الضبابية

تعريف 1.2.3

لتكن كل من X,Y مجموعتين غير خاليتين. الدالة الضبابية F هي الدالة المعرفة كالتالي : $F\ :\ I^X \longrightarrow I^Y$
أي إذا كانت A مجموعة ضبابية في X فإن $F(A)$ مجموعة ضبابية في Y . أي $F(A) \in I^Y$
نرمز لمجموعة كل الدوال الضبابية من I^X إلى I^Y بالرمز $\Omega(X.Y)$.

أمثلة

① ليكن $X = Y = \mathbb{R}$
A_2, A_1 عددين ضبابين رباعيين . نعرف الدالة الضبابية F كالآتي :

$$\begin{aligned} F\ :\ I^{\mathbb{R}} &\longrightarrow I^{\mathbb{R}} \\ A &\longmapsto F(A) = B \end{aligned}$$

$F(A) = (A \cap A_1) \cup (A^c \cap A_2)$ أي أن $\forall\ A\ \in I^{\mathbb{R}}\ \ , B = (A \cap A_1) \cup (A^c \cap A_2)$

② ليكن $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $\qquad Y = \{y_1, y_1, y_3\}$
و لتكن $f\ :\ X \longrightarrow Y$ دالة عادية معرفة كالآتي :

$$f(x_1) = f(x_3) = y_2$$
$$f(x_2) = f(x_5) = y_1$$
$$f(x_4) = y_3$$

F دالة ضبابية تعرف كالتالي :

$$\begin{aligned} F\ :\ I^X &\longrightarrow I^Y \\ A &\longmapsto F(A) = B \end{aligned}$$

$A = \{\frac{0}{x_1}, \frac{0.3}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0.8}{x_4}, \frac{0.5}{x_5}\}$ $\qquad B = \{\frac{b_1}{y_1}, \frac{b_2}{y_2}, \frac{b_3}{y_3}\}$ مجموعتيين ضبابيتين في Y, X على التوالي .

إيجاد المجموعة الضبابية B بحيث $\mu_B(y) = max\{\mu_A(x), f(x) = y\}$

$$b_1 = \mu_B(y_1) = max\{\mu_A(x), f(x) = y_1\} = max\{\mu_A(x_2), \mu_A(x_5)\} = max\{0.3, 0.5\} = 0.5$$
$$b_2 = \mu_B(y_2) = max\{\mu_A(x), f(x) = y_2\} = max\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_3)\} = max\{0, 1\} = 1$$
$$b_3 = \mu_B(y_3) = max\{\mu_A(x), f(x) = y_3\} = max\{\mu_A(x_4)\} = \max\{0.8\} = 0.8$$

و منه

$$B = \{\frac{0.5}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{0.8}{y_3}\}$$

3.2.2 تغيرات الدالة الضبابية

تعريف 2.2.3

لتكن $F \in \Omega(X, Y)$ و u_1, u_2 مجموعتين ضبابيتين من X .

- تكون F متزايدة إذا كانت $u_1 \subseteq u_2$ فإن $F(u_1) \subseteq F(u_2)$
- تكون F متناقصة إذا كانت $u_1 \subseteq u_2$ فإن $F(u_2) \subseteq F(u_1)$

نرمز لمجموعة الدوال الرتيبة المتزايدة بالرمز $\Omega_m(X, Y)$.

ملاحظة

$\Omega_m(X, Y) \subseteq \Omega(X, Y)$

3.2.3 معكوس الدالة الضبابية

تعريف 3.2.3

لتكن X, Y مجموعتين ضبابيتين . F, G دالتين ضبابيتان . و لتكن $F(X) = Y$.
نقول عن F, G أحدهما معكوس للأخر و نكتب $G = F^{-1}$ إذا كان $G(F(X)) = X$
وكذلك $F(G(Y)) = Y$.

3.2.4 مشتق الدالة الضبابية

تعريف 4.2.3

لتكن F دالة ضبابية معرفة كالتالي : $F : I^R \longrightarrow I^R$ و ليكن $t \in \mathbb{R}$. مشتقة الدالة الضبابية F بالنسبة إلى t يرمز لها بالرمز $\frac{dF}{dt}$ و تعرف كالتالي :

$$\frac{dF(t)_{[\alpha]}}{dt} = [\frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial t}, \frac{\partial x_2(t, \alpha)}{\partial t}]$$

حيث :

x عدد ضبابي مستمر • $F(t)_{[\alpha]} = x = [x_1(t,\alpha), x_2(t,\alpha)]$

أمثلة

① لتكن الدالة F المعرفة كالتالي : $F(t) = \tilde{A}t + \tilde{B}$

$\tilde{B}$,$\tilde{A}$ عددين ضبابيين رباعيين $t \geqslant 0$ حيث :

$\tilde{A} = (-10/-8, -7/-5) \quad \tilde{B} = (16/20, 22/26)$

حساب $\frac{dF}{dt}$

الحل :

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{[\alpha]} &= [a + (b-a)\alpha, d + (c-d)\alpha] \\
&= [-10 + (-8+10)\alpha, -5 + (-7+5)\alpha] \\
&= [-10 + 2\alpha, -5 - 2\alpha] \\
\tilde{B}_{[\alpha]} &= [16 + 4\alpha, 26 - 4\alpha] \\
F(t)_{[\alpha]} &= [(-10+2\alpha)t + 16 + 4\alpha, (-5-2\alpha)t + 26 - 4\alpha] \\
\frac{dF(t)_{[\alpha]}}{dt} &= [-10 + 2\alpha, -5 - 2\alpha]
\end{aligned}
$$

② لتكن الدالة F المعرفة كالتالي : $F(t) = \frac{\tilde{A}t}{t + \tilde{B}}$

$\tilde{B}$,$\tilde{A}$ عددين ضبابيين مثلثين $t \geqslant 0$ حيث :

$\tilde{A} = (10/20/30) \quad \tilde{B} = (6/7/8)$

حساب $\frac{dF}{dt}$

الحل :

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{[\alpha]} &= [a + (b-a)\alpha, c + (b-c)\alpha] \\
&= [10 + (20-10)\alpha, 30 + (20-30)\alpha] \\
&= [10 + 10\alpha, 30 - 10\alpha] \\
\tilde{B}_{[\alpha]} &= [6 + \alpha, 8 - \alpha] \\
F(t)_{[\alpha]} &= [\frac{(10+10\alpha)t}{t + 6\alpha}, \frac{(30-10\alpha)t}{t + (6+\alpha)}] \\
\frac{dF(t)_{[\alpha]}}{dt} &= [\frac{(10+10\alpha)(8-\alpha)}{(t + (8-\alpha))^2}, \frac{(30-10\alpha)(6+\alpha)}{(t + (6+\alpha))^2}]
\end{aligned}
$$

ملاحظات

① $\dfrac{\partial x_1(t,\alpha)}{\partial t}$ دالة مستمرة متزايدة لكل $1 \leqslant \alpha \leqslant 0$ و $t \in D$ وعلية $\dfrac{\partial^2 x_1(t,\alpha)}{\partial\alpha\partial t} > 0$

② $\dfrac{\partial x_2(t,\alpha)}{\partial t}$ دالة مستمرة متناقصة لكل $1 \leqslant \alpha \leqslant 0$ و $t \in D$ وعلية $\dfrac{\partial^2 x_2(t,\alpha)}{\partial\alpha\partial t} < 0$

③ $\dfrac{\partial x_2(t,\alpha)}{\partial t} \leqslant \dfrac{\partial x_1(t,\alpha)}{\partial t}$ لكل $t \in D$

خـــــاتمة

نحمد الله سبحانه و تعالى الذي وفقنا لإتمام هذه المذكرة التي توجت نهاية مسارنا الدراسي في الماستر و الذي يحمل عنوان " لمحة عن الرياضيات الضبابية " ، إن هذا العمل يهدف للتعريف بالرياضيات الضبابية حديثة الوجود سنة 1965 م ، و الفرق بينها وبين الرياضيات الكلاسيكية و قد أخذ منا هذا البحث جهدا كبيرا ووقتا طويلا في الإنجاز رغم ذلك فإننا لا نزعم أننا أوفيا الموضوع حقه أو ألممناه من جميع جوانبه إلا أننا وضعنا أمام الباحثين بعدنا خاصة الذين يرغبون في البحث في مواضيع الرياضيات الضبابية ما يعينهم على فهمها و ما يتعلق بالمجموعات و الأعداد و العمليات و العلاقات الضبابية في هذا الميدان كما نوصي الطلبة الباحثين بهذا المجال بالتوصيات التالية :

- الإهتمام بالرياضيات الضبابية و تقديمها في الجامعات .
- العمل على إنشاء المعادلات التفاضلية الضبابية و حلها .
- و كذلك العمل على تكوين المعادلات التكاملية الضبابية و حلها .
- دراسة الإحصاء و الإحتمالات الضبابية .

كما نجدد حمدنا لله عز وجل الذي أعننا على تجاوز العقبات من نقص المصادر والمراجع و قلة المذكرات في موضوع البحث إضافة لحداثته مما أثر على تشعب المصطلحات الخاصة بالموضوع لذلك أرفقنا ملحق خاص بالمصطلحات ، و قد عرضنا لكم ما وفقنا إليه و نرحب بكل الملاحظات و التصويبات وشكرا .

شكل 3.1: لطفي زادة

الجنسية : أذربجاني
الإقامة : الولايات المتحدة الأمريكية
عضو في : الأكادمية الوطنية للهندسة و رابطة المكائن والأكادمية البولندية للعلوم
موظف في : جامعة كاليفورنيا وجامعة كولومبيا
مجال العمل : رياضيات ، هندسة كهربائية ، ذكاء إصطناعي
الوفاة : 6 سبتمبر 2017

وُلد زادة في العاصمة الأذربيجانية، باكو، لأبٍ تركي وأُم روسية يهودية . عندما كان في العاشرة من عمره إنتقلوا إلى طهران ، حيث درس بالمدرسة الأمريكية ، وهي مدرسة تبشيرية كان معظم أساتذته أعضاءً بالكنيسة المشيخية من وسط غرب الولايات المتحدة ، فكتب زادة "وقعت في حب الولايات المتحدة والمبادئ الأمريكية عن بُعد". تخرج زادة من جامعة طهران عام 1942 وحصل على شهادة في مجال الهندسة الكهربائية ، ثم ذهب إلى معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا ، ثم إلى كولومبيا ، ثم إلى معهد الدراسات المتقدمة في برينستون بولاية نيوجيرسي، وأخيرً إنتقل عام 1959 إلى جامعة كاليفورنيا في بيركلي ، حيث ظلّ هناك حتى نهاية حياته المهنية. تزوج لطفي زادة في طهران في مطلع ذات العام، وأنجب طفلين .و حصل لطفي زادة على 72 شهادة دكتراه فخرية في جامعة بريكلي في كاليفورنيا و لقد إشتغل في التدريس بنفس الجامعة ، كما أنه طرح نظرية المجموعات الضبابية سنة 1965 التي هي أساس الرياضيات الضبابية .

دليـــــــــل المصطلحــــــــــات			
اللغة العربية	اللغة الإنجليزية	اللغة العربية	اللغة الإنجليزية
ضبابي	Fuzzy	إرتفاع	Height
العضوية	The membership	حامل	Support
شبه منحرف	Trapezoidal	مثلثي	Triangular
علاقة ضبابية	Fuzzy Relation	مجموعة ضبابية	Fuzzy Set
الأعداد الضبابية	Fuzzy Numbers	مركبة	Composite
الدوال الضبابية	Fuzzy Function	الزمر الضبابية	Fuzzy Group
سوية	Normal	نقطة ضبابية	Fuzzy Point
مجموعة ضبابية أحادية	Fuzzy Singleton Set	الرتابة	Monotonicity
التبديلية	Commutativity	التجميعية	Associativity
محدبة	Conex	شبه مستمرة من الأعلى	Upper Semi Continuous
جبري	Algebraic	عكسي	Inverse
مشتقات	Derivatives	ثنائية	Binary
زمرة جزئية	Subgroup	تشاكل	Isomorphism
تماثل	Homomorphism	إنعكاسية	Reflexive
متناظرة	Symmetric	متعدية	Transitive
ضد متناظرة	Ant Symmetric	ضد إنعكاسية	Ant Reflexive

قائمة المراجع

[1] مجلة العلوم الإقتصادية والإدارية - المجلد 22 - العدد 87 -الضفحات 391 -454

[2] مجلة الإدارة والإقتصاد - العدد 114 - سنة 2008

[3] محاضرات الدكتور نوري فرحان المياحي في الرياضيات الضبابية

[4] مجلة تكوين العلوم الإدارية والإقتصادية -المجلد 5- العدد 14 - سنة 2009

[5] مجلة تكريت - كلية الإدارة و الإقتصاد -المجلد 5 - العدد 14- 2009

[6] المجلة العراقية للعلوم الإقتصادية - 21 -2012

[7] مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية - المجلد 28 - العدد 2 -2012

[8] نظم التحكم الغامض - إعداد الدكتور عوض الله طيفور علي

[9] مشكلات البرمجة الخطية الضبابية م.مروان عبد الحميد عاشور العبيدي جامعة بغداد - كلية الإدارة و الإقتصاد

[10] المجلة العراقية للعلوم الإحصائية - 21 - 2012 الصفحات 316 - 345

[11] مقارنة طرائق حل مشكلات النقل الضبابية مع طريقة مقترحة بإستعمال المحاكاة م.م.نصيف عبد اللطيف نصيف - كلية الإدارة و الإقتصاد الجامعة العراقية

[12] مجلة العلوم الإقتصادية و الإدارية - المجلد 21 - العدد 84 - 2015

[13] Fuzzy sets and systems 24 (1987) 279 - 300.

[14] Kangweom - Kyungkimath.jon 11 (2003) , No.1 , pp 1 - 7

[15] Journal of Al - Naharain univirsity vol . 10(1) ,june ,2007 , pp 111 - 114 .

[16] International J.Math. conbim vol . 1 (2014) , 01 - 05

[17] Fuzzy logic with engineering applications tinothy.J - Ross University of New Mexico , USA .

[18] Fuzzy sets and systems 24 (1987) 279 - 300.

[19] Eng Tech . Journal , vol 32 ; part (B) ; No . 2 , 2014

[20] International J.Math. conbim vol . 1 (2014) , 01 - 05

[21] Mémoire de FCS2 - Raisonnement La logique flone : entre raisonnement humain et intelligence antificielle .

[22] Comcepts Fondamentaux de la theorie des ensemble flous et la logique flous

لمحة عن الرياضيات الضبابية

ملخص

هذا العمل في مجمله يهدف إلى التعريف بالرياضيات الضبابية عن طريق تقديم المفاهيم الأساسية في هذا العلم إبتداءا من المنطق الضبابي ، و مرورا للمجموعات الضبابية إلى غاية الدوال الضبابية ، و نعتمد في ذلك على دراسة دالة الإنتماء و العضوية .

الكلمات المفتاحية :

المنطق الضبابي -دالة الإنتماء – المجموعة الضبابية – الدوال الضبابية .

An overview of blurry mathematics

Abstract

This work , in its entirety , aims to introduce the mathematics of fog through the introduction of basic concepts in this science , from the foggy logic and through the blurry groups to the ofbuscation function , and we rely on the study of the function of belonging and membership .

key words:

Fuzzy Logic - Function of belonging - Fuzzy Set -Fuzzy Functions .

Un aperçu des mathématiques floues

Résumé

Ce travail dans son ensemble est conçu pour brouiller la définition des mathématiques en présentant les concepts de base de cette science à partir de la logique floue et par groupes pour brouiller des fonctions extrêmement floues et reposent sur l'étude de l'affiliation et la fonction d'appartenance .

Mots-clés:

Logique Floue - Fonction D'appartenance - L'ensemble Flou - Functions Floues .