جامـــعة قاصـدي مرباح – ورقلـــة –

كـلية الريـاضيات وعلـوم المـادة

قســـم الـفـيزيـــاء

الميدان: علوم المادة

التخصص: فيزياء نظرية

مذكـرة مقدمة لنيل شهادة ماستر أكاديمي

من إعـداد الطالبتين: بشـرى عباسي و رميسة بن كريمة

بعنـوان:

تطبيقـات مـبدأ عدم اليقين المعمم على بعض الظـواهر الفيزيائية

نوقشت يوم:2019/07/02

امام لجنة المناقشة المكونة من :

الحاج بالشراير بلغيثار	أستاذ محاضر	أ	جــــامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيســــــا
الأمين خوجـــــــة	أستاذ محاضر	أ	جــــامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا ومقررا
زينب قريشـــــــي	أستاذ محاضرMAB		المدرسة العليا للأساتذة ورقـلة	منــاقشـــا

السنة الجامعية: 2019/2018

جامـــعة قاصـدي مـرباح – ورقلـــة –

كـلية الرياضيات وعلـوم المـادة

قســـم الـفـيزيـــاء

الميدان: علوم المادة

التخصص: فيزياء نظرية

مذكـرة مقدمة لنيل شهادة ماستر أكاديمي

من إعـداد الطالبتين: بشـرى عباسي و رميسة بن كريمة

بعنـوان:

تطبيقـات مبدأ عدم اليقين الـمعمم على بعض الظواهـر الفيزيـائية

نوقشت يوم:2019/07/02

امام لجنة المناقشة المكونة من :

الحاج بالشراير بلغيثار	أستاذ محاضر	أ	جــامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيســــا
الأمين خوجـــــة	أستاذ محاضر	أ	جــامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا ومقررا
زينب قريشـــــي	أستاذ محاضر	MAB	المدرسة العليا للأساتذة ورقـلة	منـــاقشـــا

السنـــة الجامعية: 2019/2018

الإهـداء

إلى من علمونا الحب و الوفاء إلى من حببوا لأنفسنا العلم و العلماء إلى من رفعوا أكفهم دوما لنا

بالدعاء إلى من يدعون لنا جهرا و في الخفاء إلى

من إنتظروا هذا اليوم ليروا ثمرة جهدهم " والدينا الكريمين ".

إلى كل افراد عائلتينا الذين شجعونا وأمدوا لنا يد العون والمساعدة

خاصة " نصرات وفطيمة ".

إلى كل زملائنا واصدقائنا الأعزاء .

إلى كل من تتلمذنا على ايديهم طيلة مشوارنا الدراسي .

و إلى من نسيهم القلم.

نهدي هذا العمل.

شكر و عرفان

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده مما لا بد منه أن لا يذمر احسان المحسنين

ومعروفهم امتنانا لقوله عليه الصلاة والسلام، «من صنع اليكم معروفا

فكافئوه فان لم تجدوا ما تكافئونه فادعوا له حتى تروا أنكم قد كافأتموه»

فكان لزاما علينا أن نتقدم بالشكر الجزيل الى أستاذنا الفاضل

"خوجة الأمين"، الذي قبل وتفضل بالإشراف على هذا العمل

ولم يأل جهدا في اسداء النصح والتوجيه في سبيل اتمامه.

كما لا يفوتنا ان نتقدم بخالص شكرنا إلى أستاذة قسم الفيزياء

وكل عمال و موظفي كلية الرياضيات وعلوم المادة.

نسأل الله أن يجعل ذلك في

ميزان حسناتهم وآخر دعوانا

أن الحمد لله رب العالمين.

قائمة المحتويات:

مقدمـــة :

إن فرضية وجود الطول الأصغري في الفيزياء قديمة ،وذلك لأسباب مفاهيمية وتقنية [1]. في هذا السياق فإن الدراسات الحديثة في نظرية الأوتار و نظرية الجاذبية الكمية تقترح تصحيحات بسيطة على علاقة عدم اليقين لـ "هايزنبرغ" [5،42،3] والتي تشير إلى وجود حد أدنى غير معدوم للموضع$(\Delta x)_{\min}$ الموافق لهذا الطول الأصغري .

يمكن رؤية هذا الحد الأدنى من عدم اليقين كمجال غير واضح في الفضاء الزمكاني للأبعاد من رتبة طول "بلانك"، $l_p = 10^{-35}m$ [6].

في الواقع أن الطابع النقطي للجسيمات هو مسلمة أساسية في ميكانيك الكم ، إحدى النتائج الأساسية لها هو تموقع الجسيمات في الطاقات الكبيرة بشكل كاف، يمكن حساب موضع الجسيم مع ارتياب صغير. وهذا يترجم من خلال علاقة عدم اليقين لـ "لهايزنبرغ" المعتادة [2]. في الحقيقة هذا التعبير مثالي ، فعلاقة عدم اليقين المعممة تقود إلى حد أدني من عدم اليقين غير المعدوم والتي ستكون أقرب إلى الواقع المادي ، وهذا ما دفع الفيزيائيين في السنوات الأخيرة إلى الاهتمام بفكرة الطول الأصغري و محاولة إدراجه في معالجة المسائل الفيزيائية في ميكانيك الكم من خلال تصحيحات للعلاقات التبديلية .

الشكل العام لجبر "لهايزنبرغ " المعدل الجديد تم دراسته من طرف kempf وآخرون [35،2].

نحاول تطبيق هذا الجبر المعدل على بعض الظواهر الفيزيائية ، ونقارن النتائج المتحصل عليها بالنتائج التجريبية .

1.1 مبدأ عدم اليقين المعمم (GUP)

في المراجع [7,8] توجد العديد من النظريات التي تقدم مفهوم الطول الأصغري؛ خاصة النظريات المعتمدة على مبدأ عدم اليقين المعمم (GUP) ،مع نسبية خاصة مشوهة (DSR) أو مع علاقات التشتت المعدلّة[7] لإظهار كيفية دمج مفهوم الطول الأصغري (الحد الأدنى) l_{m} في ميكانيك الكم.

في هذا السياق نفترض أنه عند زيادة كمية حركة الجسيم p ، فإن شعاع الموجة $\vec{\mathrm{k}}$ لايجب أن يتجاوز قيمة قصوى من رتبة $1/l_m$ [29]. وكنتيجة لذلك نحصل على انحرافات مرتبطة بعلاقة خطية $(\vec{p} = \hbar\vec{k})$عندما تقترب p من السلم $(\hbar/l_m)$.

وهذا ما يفسر فيزيائيا حقيقة أن الجسيمات لا يمكن أن تمتلك أطوال موجية صغيرة $(2\pi/k)$ ، وأن أبعاد المسافات الصغيرة لم يعد من الممكن تحديدها [9].

لتبسيط الأمر يمكن أن نفكر في بعد واحد آخذين بعين الاعتبار هذه المسلمة ،نفترض وجود علاقة $p = f(k)$ بينk و p هذه الدالة يجب أن تكون فردية بفعل التماثل والدالة العكسية يجب أن تقارب القيمة من رتبة $1/l_m$عندما p يؤول إلى مالا نهاية.

كما نفترض أيضا أن$f(k)$ محدد بشكل معطى في المراجع [11,10,8,7].

هناك أشكال عديدة للدالة f يمكن إيجادها مثل العلاقة المعطاة في ا لمراجع [11,10,8,7]

Hossenflder اختار f من الشكل [7] :

$$p = \frac{\hbar}{l_m} tanh^{-1}(l_m k)$$

يمكن أن نختار f من الشكل :

$$p = \frac{\hbar}{l_m}\tan(l_m k) \qquad (1.1)$$

باستخدام النشر:

$$\tan y = y + \frac{y^3}{3}\ldots,$$

حتى الرتبة الثانية لـ $lm\ ,p$ يمكن ان نكتب العبارة على النحو التالي :

$$p = \hbar\left(k + \frac{l_m^2}{3}k^3 + \cdots\right). \qquad (2.1)$$

بافتراض أن $\hat{k}$ و$\widehat{\mathrm{X}}$ يحققان المبدل $\left[\hat{X},\hat{k}\right] = i\delta_{ij}$،وباستخدام العلاقة العامة:

$$\left[\widehat{\mathrm{X}},\mathrm{A}\left(\hat{\mathrm{k}}\right)\right] = i\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\mathrm{k}},$$

نحصل على علاقة تعريف جبر" لهايزنبرغ" المعدّل:

$$\left[\widehat{\mathrm{X}},\widehat{\mathrm{P}}(\mathrm{k})\right] = i\frac{\partial\widehat{\mathrm{P}}}{\partial\mathrm{k}}. \qquad (3.1)$$

تركيب العلاقتين (2.1) و (3.1) تعطي:

$$i\frac{\partial\hat{p}}{\partial k} = i\hbar\left(1 + l_m^2\hat{k}^2 + \cdots\right).$$

الآن لدينا:

$$l_m^2\hat{k}^2 \approx \frac{l_m^2\hat{p}^2}{\hbar^2} + O(l_m^4).$$

إذا نجد :

$$\left[\widehat{\mathrm{X}},\widehat{\mathrm{P}}(\mathrm{k})\right] = i\hbar\left(1 + \left(\frac{l_m}{\hbar}\right)^2\hat{p}^2 + \cdots\right).$$

يمكننا أن نعرف المعامل β المتعلق بالطول الأصغري كالتالي :

$$\beta = \left(\frac{l_m}{\hbar}\right)^2 \qquad \text{من اجل} \qquad l_m = \hbar\sqrt{\beta}.$$

بالتعويض نحصل على علاقة التبديل التالية :

$$[\hat{X},\hat{P}] = i\hbar(1+\beta\hat{p}^2+\cdots\quad). \qquad (4.1)$$

في ميكانيك الكم علاقة التبديل مرتبطة مباشرة بعلاقة عدم اليقين من خلال الصيغة [12]:

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|.$$

يعطي :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\frac{\partial\hat{P}}{\partial k}\rangle\right|. \qquad (5.1)$$

عند أخذ المعامل β من الرتبة الأولى نحصل على عدم اليقين المعدلة من الشكل التالي:

$$(\Delta X)(\Delta P) = \frac{\hbar}{2}(1+\beta\langle\hat{p}^2\rangle).$$

حسب تعريف الانحراف التربيعي المتوسط (الانحراف المعياري) $(\Delta p)^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2$

يمكن لنا أن نكتب:

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}\{1+\beta(\Delta p)^2+\gamma\}. \qquad (6.1)$$

حيث $\gamma = \beta\langle\hat{p}\rangle^2$

تشير علاقة الشك (6.1) إلى أدنى حد من الشك غير المعدوم للموضع ؛ وقد درست بدقة من قبل Kempf واخرين[2 ، 3 ،13].

في الباب التالي سنركز في دراستنا أساسا على المرجع [2] ،لتقديم صياغة جبر ميكانيك الكم المعدل.

2.1 التمثيل النظري و نتائج علاقة عدم اليقين المعممة:

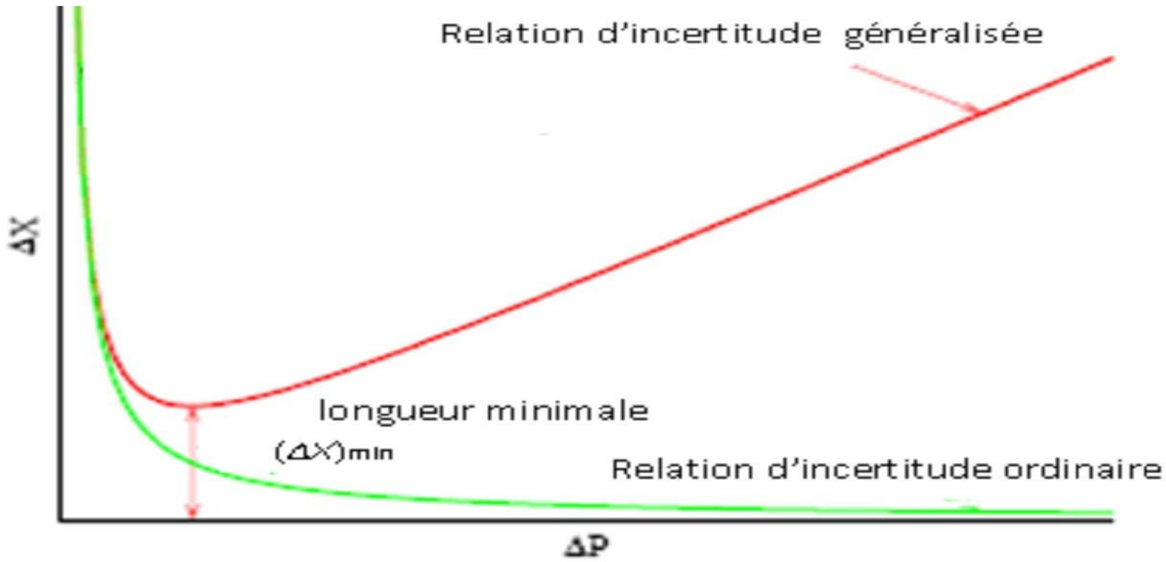
باعتبار علاقة عدم اليقين المعدّلة (6.1):

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}\{1+\beta(\Delta P)^2+\gamma\}. \qquad (7.1)$$

حيثβ و γ هي معاملات موجبة المعامل β مرتبط بالطول الأصغري من خلال العلاقة $l_m = \hbar\sqrt{\beta}$ ،

γ يعتمد على القيمة الوسطية لكمية الحركة من خلال الصيغة $\gamma = \beta\langle P\rangle^2$

في ميكانيك الكم العادي $(\beta = \gamma = 0)$, ΔX يمكن أن يكون صغيرا إذا كانت ΔP كبيرة بما يكفي، مما يعني أنه يمكننا حلها في أبعاد المسافات الصغيرة باستخدام جسيمات تملك طاقة كبيرة بالشكل الكافي . هذا ليس هو نفس الحال في العلاقة (7.1) بسبب وجود الحد $\beta(\Delta P)^2$ في الطرف الأيمن في المتراجحة ، حتى من أجل القيم الكبيرة لـ ΔP و ΔX أكبر دائما من الحد الأدنى للقيمة $(\Delta X)_{min}$ غير المعدومة والتي سنعرفها لاحقًا.



1.1 منحنى علاقة عدم اليقين المعممة بإدراج " الحد الأدنى للطول "

$$(\Delta X)_{min} > 0$$

من خلال منحنى علاقة عدم اليقين الممثلة في الشكل (1.1) نلاحظ أنه من أجل القيم الصغيرة من ΔP علاقة عدم اليقين المعممة وعلاقة عدم اليقين العادية متطابقان تقريبا و تصبح بشكل ملحوظ مختلفة عندما تكون ΔP كبيرة.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن أن يكون لدينا علاقة عدم اليقين بحد أدنى من عدم اليقين غير المعدوم على الموضع وعلى كمية الحركة $((\Delta x)_{min} \neq 0)$ و $((\Delta p)_{min} \neq 0)$

هذه العلاقة لها الشكل [2، 14، 15، 16].

تعطى علاقة الارتياب المعممة العامة بالعبارة التالية :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}\{1+\alpha(\Delta X)^2+\beta(\Delta P)^2+\gamma\}, \qquad (8.1)$$

$$\gamma = \alpha\langle\hat{X}\rangle^2+\beta\langle\hat{P}\rangle^2.$$

تقتصر دراستنا فقط على الحالة $\alpha = 0$ وهذا يعني أننا نعتبر وجود حد الأدنى على الموضع فقط تمثل هذه الحالة اهتماما خاصا في ميكانيك الكم لأن هذا الطول الأصغري ، يقدم علاقة فيزيائية في حالة الطبيعة غير النقطية للجسيمات [2]. إذن النظرية تنطلق من هذا المبدأ والتي يمكن أن تعطي وصفا أفضل للجسيمات المركبة مثل النيوكليونات في الكمونات النووية [5].

1.2.1 الهرميتية والحالات الذاتية لمؤثر الموضع :

في ميكانيك الكم العادي يتم تمثيل المؤثرين $\hat{p}$ و $\hat{x}$اللذان يؤثران على الدوال الموجية في فضاء الإحداثيات أو كمية الحركة .

$$\left(\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad \text{أو} \qquad \psi(p) = \langle p|\psi\rangle\right)$$

$|x\rangle$ و$|p\rangle$ هي حالات ذاتية لـ $\hat{x}$ و$\hat{p}$

بالمعنى الدقيق $|p\rangle$ و $|x\rangle$ ليست حالات فيزيائية لأنها ليست قابلة للتنظيم ، وبالتالي لا تنتمي إلى فضاء "هيلبرت". ومع ذلك المؤثران $\hat{p}$ و$\hat{x}$ مرافقان هرميتيان وحالتهما الذاتية يمكن تقريبها بدقة كبيرة وكنتيجة فإن الارتياب يمكن اعطاؤه بالكتابة التالية [2] :

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta X)_{|\psi_n\rangle} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta P)_{|\psi_n\rangle} = 0,$$

حيث أن $|\psi_n\rangle$ تمثل الحالات الفيزيائية.

بإدخال الطول الأدنى يمكن كتابة الارتياب على النحو التالي :

$$(\Delta X)_{|\psi\rangle} = \left\langle \psi \middle| \left(\hat{X} - \langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle\right)^2 \middle| \psi \right\rangle \geq (\Delta X)_{min}\,, \forall |\psi\rangle. \quad (9.1)$$

وهذا يعني عدم وجود الحالات الذاتية للمؤثر $\hat{X}$ لأن الحالة الذاتية له يجب أن تملك ارتيابا معدوما.

بما أنه لا يوجد حالات ذاتية لـ $|x\rangle$ في تمثيل جبر "لهايزنبرغ" إذ من غير الممكن الحصول على تمثيل في فضاء هيلبرت من خلال الدوال الموجية $\langle x|\psi\rangle$ ومع ذلك فإننا سوف نرى في الفقرة (3.3.1) أن الحالات $(\Delta X)_{min}$والتي تعتبر حالات فيزيائية يمكن بعد ذلك استخدامها لتحديد "شبه تمثيل للمواضع" ، وهذا باختيار تمثيل مناسب يتوافق مع عبارة المبدل المعمم المعطى في العلاقة (4.1) .

2.2.1 التمثيل في فضاء كمية الحركة :

باعتبار جبر لهايزنبرغ الناتج عن المؤثرين $\hat{\mathrm{X}}\,, \hat{\mathrm{P}}$ واللذان يحققان علاقة التبديل التالية :

$$\left[\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathrm{P}}\right] = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2)\,, \beta > 0. \qquad (10.1)$$

والذي تقابله علاقة عدم اليقين:

$$(\Delta X)(\Delta \mathrm{P}) \geq \frac{\hbar}{2}\{1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma\}, \qquad (11.1)$$

$$\gamma = \beta\langle \hat{P}\rangle^2. \qquad (12.1)$$

بالنسبة لقيمة ثابتة (ΔX) المتراجحة (11.1) محققة في مجال $[\Delta P_-, \Delta P_+]$:

$$\Delta P_{\pm} = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma + 1}{\beta}} \qquad (13.1)$$

أصغر قيمة ΔX هي جذر مضاعف $\Delta P_- = \Delta P_+$ أي :

$$\left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma + 1}{\beta} = 0,$$

$$(\Delta X)_0 = \hbar\sqrt{\beta}(\gamma + 1)^{1/2} . \qquad (14.1)$$

الحد الأدنى للقيمة $(\Delta X)_{min}$ يتوافق مع $\gamma = 0$ و $\langle \hat{P} \rangle = 0$

$$(\Delta X)_{min} = \hbar\sqrt{\beta} . \qquad (15.1)$$

في فضاء كمية الحركة يؤثر $\hat{P}$ و $\hat{X}$ على الدوال $\psi(P) = \langle P|\psi \rangle$ هذه المؤثرات يمكن اعتبارها كدوال

كدوال للمؤثرات القديمة $\hat{x}$ و $\hat{p}$ اللذان يحققان العلاقة التبديلية: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

بعد ذلك يمكننا إيجاد تمثيل لـ $\hat{X}, \hat{P}$ الذي يحقق علاقة التبديل المعدّلة (10.1) العلاقة الأكثر بساطة تكتب [1]:

$$\hat{X} = (1 + \beta\hat{p}^2)\hat{x} \ , \qquad \hat{P} = \hat{p} . \qquad (16.1)$$

حيث لدينا:

$$\hat{p}\psi(p) = p\psi(p),$$
$$\hat{x}\psi(p) = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi(p).$$

إذن يمكننا كتابة $\hat{P}$ و $\hat{X}$ على الشكل :

$$\hat{X} = i\hbar(1 + \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} \quad , \hat{P} = p. \qquad (17.1)$$

من السهل التأكد من هذه العلاقة التي تحقق العلاقة التبديلية (10.1).

التمثيل الأكثر عمومية يكتب من الشكل الآتي :

$$\hat{X} = i\hbar(1 + \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} + \tilde{\gamma} f(p) \quad , \hat{P} = p.$$

حيث $\tilde{\gamma}$ هو ثابت و $f(p)$ هي دالة كيفية لـ p .

تكمن أهمية هذا التمثيل في حقيقة أنه يمكن اختيار قيمة $\widetilde{\gamma}$ لكي تجعل$\hat{X}$ مرافق هرميتي دون تغيير القيم الذاتية للمؤثرات الفيزيائية [16 ، 17].

أ. الجداء السلمي وعلاقة الانغلاق:

أهم شرط يجب أن يستوفيه التمثيل (17.1) هو الحفاظ على تناظر المؤثرين $\hat{X}$, $\hat{P}$ بحيث تكون قيمهما الذاتية حقيقية، طالما لم يتم تغيير $\hat{P}$ إذا تناظره واضح ليس كما هو الحال بالنسبة للمؤثر $\hat{X}$ في الواقع شرط التناظر مكتوب [2]:

$$\left(\langle\psi|\hat{X}\right)|\varphi\rangle = \langle\psi|\left(\hat{X}|\varphi\rangle\right). \tag{18.1}$$

من السهل أن نرى أن هذا الشرط غير محقق بالنسبة لجداء سلمي عادي :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\psi^*(p)\varphi(p)\,.$$

ليكن المؤثر $\hat{X}$ متناظرا من الضروري تعديل الجداء السلمي بالطريقة التالية :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\varphi(p). \tag{19.1}$$

المعامل$(1+\beta\hat{p}^2)$ مهم للقضاء على المعامل المتعلق بالمؤثر$\hat{X}$ و في الحقيقة :

$$\langle\psi|(\hat{X}|\varphi\rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\left[i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\varphi(p)\right]$$
$$= i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dp\psi^*(p)\frac{\partial}{\partial p}\varphi(p)\,.$$

بالتكامل بالتجزئة و باعتبار$\varphi(p)$ و$\psi(p)$ معدومتين عند المالانهاية نجد :

$$\langle\psi|(\hat{X}|\varphi\rangle) = -i\,\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dp\left(\frac{\partial}{\partial p}\psi^*(p)\right)\varphi(p)\,.$$

من ناحية أخرى لدينا :

$$(\langle\psi|\hat{X})|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}\left[i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\,\psi(p)\right]^{*}\varphi(p)$$

$$= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dp\left(\frac{\partial}{\partial p}\psi^{*}(p)\right)\varphi(p).$$

هذا يدل على أن $\widehat{\mathrm{X}}$ متناظرة بالنسبة لجداء سلمي (19.1).

تعديل الجداء السلمي يعني علاقة انغلاق جديدة يصبح هذا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}|p\rangle\langle p| = 1. \qquad (20.1)$$

من خلال إدخال هذه العلاقة الأخيرة في الجداء السلمي لشعاعين ذاتيين لمؤثر كمية الحركة نحصل على:

$$\langle p''|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\langle p''|p\rangle\langle p|p'\rangle.$$

ومنه نستنتج علاقة التعامد التالية:

$$\langle p|p'\rangle = (1+\beta p^2)\,\delta(p-p'). \qquad (21.1)$$

ب. الدوال الذاتية لمؤثر الموضع :

في فضاء كمية الحركة القيم الذاتية لمؤثر الموضع $\widehat{\mathrm{X}}$ تكتب :

$$i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\psi_x(p) = x\psi_x(p), \qquad (22.1)$$

حيث $\psi(x) = \langle p|x\rangle$ ، $|x\rangle$ أشعة ذاتية للمؤثر $\hat{X}$ الدوال$\psi_x(p)$ ستعتبر إذا "كدوال ذاتية منظمة " لمؤثر الموضع .

حل المعادلة (22.1) بواسطة الصيغة التالية:

$$\psi_x(\mathrm{p}) = c\;exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}}\tan^{-1}\sqrt{\beta}p\right)$$

C هو ثابت التنظيم ، يتم حسابه باستخدام العلاقة (19.1) نحصل على:

$$cc^*\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}=\frac{cc^*\pi}{\sqrt{\beta}}=1,$$

$$c=\sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}$$

إذا الدوال الذاتية المنظمة لمؤثر الموضع لها الشكل:

$$\psi_x(p)=\sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}}tan^{-1}\sqrt{\beta}p\right). \qquad (23.1)$$

باستخدام العلاقات (21.1) و (23.1) يمكننا أن نكتب علاقة الانغلاق للأشعة $|x\rangle$ لديها الشكل التالي :

$$\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,|x\rangle\langle x|=1. \qquad (24.1)$$

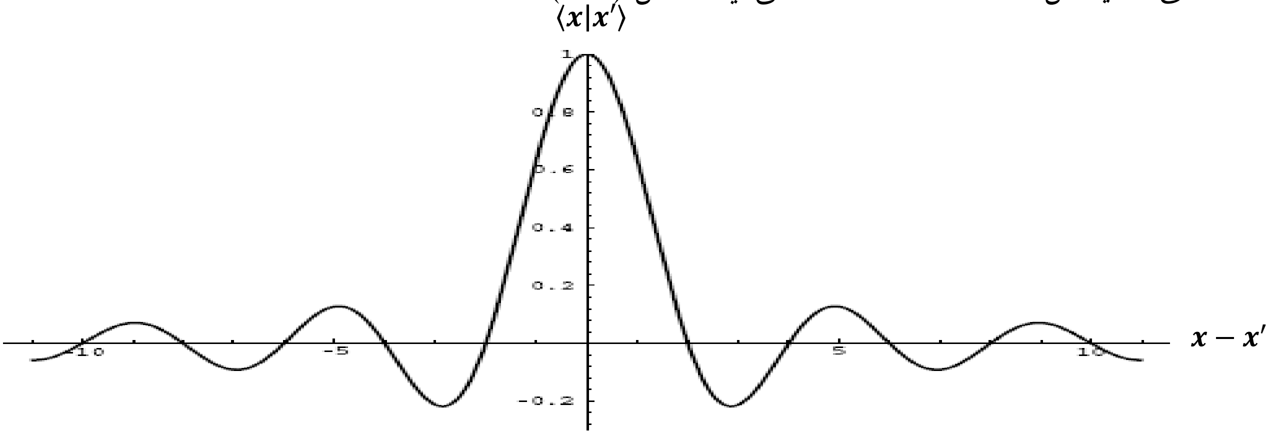
الآن بحساب الجداء السلمي بين الحالتين التنظيميتين $|x\rangle$و $|x'\rangle$:

$$\langle x'|x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\psi_{x'}^*(p)\psi_x(p)$$

$$=\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}exp\left[-i\frac{(x-x')}{\hbar\sqrt{\beta}}\tan^{-1}\sqrt{\beta}p\right]$$

$$=\frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(x-x')}\sin\left(\frac{(x-x')}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right). \qquad (25.1)$$

المنحنى الذي يمثل هذه العلاقة السابقة يعطى في الشكل (2.1).



2.1 منحنى الجداء السلمي للحالات المنتظمة $\langle x|x'\rangle$ بدلالة $x-x'$ في وحدة $(\Delta x)_{min}=\hbar\sqrt{\beta}$

في الواقع لدينا:

العلاقة (25.1) تظهر بوضوح أن الحالات المنظمة لمؤثر الموضع ليست بشكل عام متعامدة، هذا لأن $\hat{X}$ كذلك ليس مرافقا ذاتيا ومع ذلك فإن:

$$\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi=n\pi\,,\qquad n=\pm1,\pm2\,...$$

أو

$$x-x'=2n\hbar\sqrt{\beta}.$$

في هذه الحالة لدينا:

$$\left\langle (\,x+2\mathrm{n})\hbar\sqrt{\beta}\,\middle|(\,x+2\mathrm{n}')\hbar\sqrt{\beta}\right\rangle=\delta_{n,n'}. \qquad (26.1)$$

الأشعة الذاتية $\left\{\left|(x+2n)\hbar\sqrt{\beta}\right\rangle_n=\pm1{,}2\,...\right\}$ تشكل مجموعة مركبة و متعامدة والمؤثر $\hat{\mathrm{X}}$ يمكن أن يكون قطريا و في هذه القاعدة يمكن تفسير هذه النتيجة من خلال حقيقة أننا نتعامل مع فيزياء الشبكات في فضاء الإحداثيات [2]، ومع ذلك هذه ليست هي الحالة لأنه كما سبق أن أشرنا فإن (les kets) :

$\left|(x+2n)\hbar\sqrt{\beta}\right\rangle$ ليست فيزيائية.

$$\left\langle x\left|\frac{p^2}{2m}\right|x\right\rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi m}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\,\frac{p^2}{1+\beta p^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi m}\left[\frac{p}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\beta}tan^{-1}(\sqrt{\beta}p)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \infty$$

هذه النتيجة مهمة للغاية، حيث كل الحالات $|\psi\rangle$ التي يوجد بها عدم اليقين على الموضع $(\Delta x)_{|x\rangle}$ موجودة خارج المجال المحصور بين $0 \leq (\Delta x)_{|x\rangle} \leq (\Delta x)_{min}$ لا يمكن أن تملك طاقة محدودة [2].

وذلك على عكس ميكانيك الكم العادي الحالات المنظمة $|x\rangle$ التي يوجد بها عدم اليقين معدوم للموضع لا يمكن أن تقترب من سلسلة الحالات الفيزيائية حيث تقدر درجة عدم اليقين إلى الصفر بسبب وجود حد للموقع .

لهذا من المفيد تقديم ما يسمى بـ "حالات تموقع الأعظمية" .

3.2.1 تمثيل تقريبي للتصنيف :

أ. حالات التموقع الاعظمي :

حالات التموقع الاعظمي المرتبطة بالموضع x هي حالات $|\psi_x^{lm}\rangle$

التي تحقق الشرطين التاليين :

$$\langle \psi_x^{lm}|\widehat{\mathrm{X}}|\psi_x^{lm}\rangle = x, \qquad (27.1)$$

$$(\Delta X)_{|\psi_x^{lm}\rangle} = (\Delta \mathrm{X})_{\min}$$

نذكر أن $(\Delta X)_{\min}$ يمثل أصغر قيمة لعدم اليقين الأصغري $(\Delta X)_0$ هذه القيمة تعتمد على $\langle\hat{P}\rangle = 0$

نعلم في ميكانيك الكم أن علاقة عدم اليقين يمكن أن تكون مبنية على اساس أن معيار شعاع الحالة موجب.

$$\left\|\left(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle + \frac{\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle}{2(\Delta P)^2}\left(\hat{P} - \langle\hat{P}\rangle\right)\right)|\psi\rangle\right\| \geq 0, \qquad (28.1)$$

بما ان $\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle$ تخيلي نتحصل [12] :

$$\left\langle\psi\left|\left(\hat{X}-\langle\hat{X}\rangle\right)^2-\left(\frac{\left|\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle\right|}{2(\Delta P)^2}\right)^2\left(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle\right)^2\right|\psi\right\rangle\geq 0,$$

الذي يحقق علاقة عدم اليقين :

$$\Delta X.\Delta P\geq\frac{1}{2}\left|\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle\right|. \qquad (29.1)$$

من الواضح أنه من أجل الحالة $|\psi\rangle$ تتحقق المعادلة $\Delta X.\Delta P\geq\frac{1}{2}\left|\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle\right|$

ويجب أن يتحقق الشرط:

$$\left(\hat{X}-\langle\hat{X}\rangle+\frac{\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle}{2(\Delta P)^2}\left(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle\right)\right)|\psi\rangle=0, \qquad (30.1)$$

الحالة $|\psi\rangle$ موجودة في نهاية منطقة الحالات الموضحة في الشكل (1.1) في فضاء كمية الحركة هذه المعادلة الأخيرة تأخذ الصيغة التالية :

$$\left(i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}-\langle\hat{X}\rangle+i\hbar\frac{1+\beta(\Delta P)^2+\beta\langle\hat{P}\rangle^2}{2(\Delta P)^2}\left(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle\right)\right)\psi(p)=0\,.$$

حل هذه المعادلة يكتب من الشكل :

$$\psi(p)=N\frac{exp\left[\left(\frac{\langle\hat{X}\rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}}-\frac{\left(1+\beta(\Delta P)^2+\beta\langle\hat{P}\rangle^2\right)\langle\hat{P}\rangle}{2(\Delta P)^2\sqrt{\beta}}\right)arctan\sqrt{\beta}p\right]}{(1+\beta p^2)^{\frac{1+\beta(\Delta P)^2+\beta\langle\hat{P}\rangle^2}{4\beta(\Delta P)^2}}}. \qquad (31.1)$$

حالات التموقع العظمى تعتمد على $\langle\hat{P}\rangle=0$ أو $\Delta X=(\Delta X)_{min}=\hbar\sqrt{\beta}$ التي تحقق $\Delta P=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$

إذا نعوض في المعادلة (31.1) نحصل على وصف لحالات التموقع العظمى :

$$\psi_x^{lm}(p)=N(1+\beta p^2)^{-\frac{1}{2}}exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}}arctan\left(\sqrt{\beta}p\right)\right). \qquad (32.1)$$

ثابت التنظيم N يحسب باستعمال الصيغة (19.1):

$$N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}. \qquad (33.1)$$

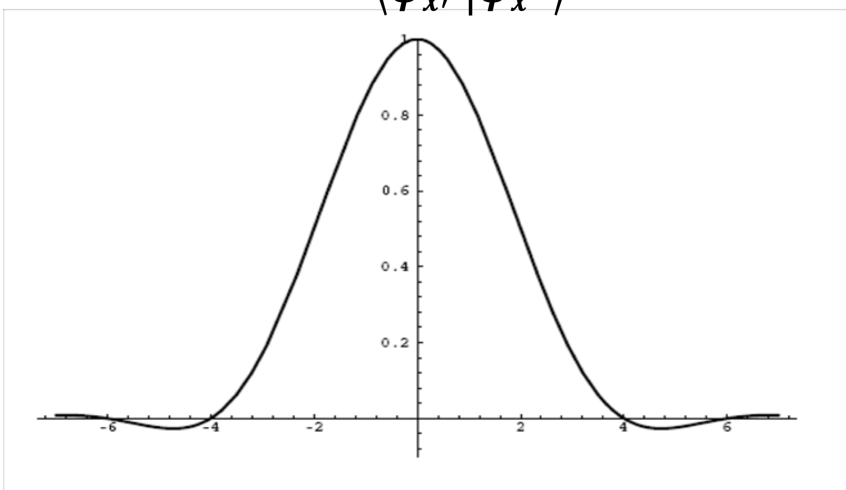
الحالات (32.1) هي تعمم للأمواج المستوية (الدوال δ) في فضاء كمية الحركة (الإحداثيات) التي تمثل حالات التموقع العظمى في ميكانيك الكم العادي.

الآن الحالات $|\psi_x^{lm}\rangle$ هي حالات فيزيائية والقيم الوسطية للطاقة ليست منتهية في الحقيقة :

$$\left\langle \psi_x^{lm} \left| \frac{\hat{P}^2}{2m} \right| \psi_x^{lm} \right\rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1+\beta p^2)} \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m\beta}\,. \qquad (34.1)$$

ان حالات التموقع العظمى ليست عموما متعامدة وكذا باستخدام تعريف الجداء السلمي المعدل (19.1) و العلاقة (32.1) لدينا :

$\langle \psi_{x'}^{lm} | \psi_x^{lm} \rangle$



$x - x$

3.1 منحنى الجداء السلمي لحالات التوطين الأعظمي $\langle \psi_{x'}^{lm} | \psi_x^{lm} \rangle$ بدلالة $x - x'$ في وحدة

$$(\Delta x)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$$

$$\langle \psi_{x'}^{lm} | \psi_x^{lm} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1+\beta p^2)} exp\left[-i\, \frac{(x-x')arctan\left(\sqrt{\beta}p\right)}{\hbar\sqrt{\beta}} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right)^3\right]^{-1} sin\left(\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right). \qquad (35.1)$$

المنحنى يمثل الجداء السلمي المعطى في الشكل (3.1).

ب. **تمثيل تقريبي للتصنيف** :

كما ذكر سابقا . تقديم حد أدنى من عدم اليقين محدد للموضع كان كنتيجة لوجود أساس مركب,$\{|x\rangle\}$ الحالات الذاتية لمؤثر الموضع $\widehat{\mathrm{X}}$.لكن يمكن استعمال حالات التموقع العظمى $|\psi_x^{lm}\rangle$ لإنتاج حالات عشوائية $|\varphi\rangle$ الإسقاطات $\varphi(x) = \langle\psi_x^{lm}|\varphi\rangle$ ستعتبر كدوال موجية في إعادة تقديم ما يسمى بـ " تمثيل تقريبي للتصنيف " $|\varphi(x)|^2$ ستفسر كسعة احتمال من أجل الجسيم المتموضع بعدم اليقين $(\Delta x)_{\min}$ جوار النقطة x .

إذا باستعمال العلاقتين (20.1) و(32.1) يمكن أن نكتب:

$$\varphi(x) = \langle\psi_x^{lm}|\varphi\rangle = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\varphi(p)}{(1+\beta p^2)^{3/2}} exp\left[i\frac{x\, arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right]. \quad (36.1)$$

هذه العلاقة تمثل تحويل" فوري " المعمم التي تسمح بمرور تمثيل كمية الحركة في التمثيل التقريبي للتصنيف.

الدوال الموجية $\varphi_{p_0}(x)\big(\delta(p-p_0)\big)$ في فضاء كمية الحركة . الحالات الذاتية للمؤثر $\hat{X}$يمكن حسابها من خلال العلاقة الأخيرة :

$$\varphi_{p_0}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}}{(1+\beta p_0^2)^{3/2}} exp\left[i\frac{x\, arctan(\sqrt{\beta}p_0)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right], \qquad (37.1)$$

حيث : $p_0 = \sqrt{2mE}$ علاقة التشتت المعدلة التي تعود لهذه "الموجة المستوية المعممة":

حيث:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{arctan(\sqrt{\beta}p_0)}{\hbar\sqrt{\beta}}. \qquad (38.1)$$

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{arctan\left(\sqrt{2m\beta E}\right)} . \quad (39.1)$$

العلاقة (38.1) تتزامن تماما مع العلاقة (1.1) التي طرحت كمسلمة لتقديم الطول الأصغري .

تحويل "فوري" المعاكس يمكن تقديمه كالآتي بضرب طرفي (36.1) في :

$$exp\left[-i\frac{x\, arctan\left(\sqrt{\beta}p'\right)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right],$$

وبالتكامل بالنسبة للمتغير x نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\varphi(x)exp\left[-i\frac{x\, arctan\left(\sqrt{\beta}p'\right)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\varphi(p)}{(1+\beta p^2)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\;\; exp\left[ix\frac{arctan\left(\sqrt{\beta}p\right) - arctan\left(\sqrt{\beta}p'\right)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right.$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp\varphi(p)}{(1+\beta p^2)^{3/2}}2\pi\delta\left[\frac{arctan\left(\sqrt{\beta}p\right) - arctan\left(\sqrt{\beta}p'\right)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right].$$

باستخدام العلاقة:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{f'(x_i)},$$

x_{i} هو جذر لـ $f(x)$, نحصل أيضا على النتيجة التالية :

$$\varphi(p) = \frac{1}{\hbar\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\, exp\left[-i\frac{x\, arctan\left(\sqrt{\beta}p\right)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right]. \quad (40.1)$$

بالنسبة لنا الحالات في التموقع الاعظمي لا تحقق علاقة الانغلاق كتلك الحالات $|x\rangle$ في ميكانيك الكم العادي.

في الحقيقة نستخدم العلاقتين (32.1) و (40.1) نجد العلاقة المعدلة التالية :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \ |\psi_x^{lm}\rangle\langle\psi_x^{lm}| = 4\hbar\sqrt{\beta}\,(1+\beta p^2)^{-1}\,. \qquad (41.1)$$

من خلال (40.1) يتبين في حال تمثيل مؤثر كمية الحركة في ذلك الفضاء التصنيفي :

$$\hat{P}\,\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} tan\left(-i\hbar\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\,. \qquad (42.1)$$

عند التأثير بمؤثر الموضع على الدوال $\psi(x)$ يمكن أن يظهر باستعمال المعادلتين (17.1) و (40.1) :

$$\hat{X}\,\psi(x) = \left[x + \hbar\sqrt{\beta}\, tan\left(-i\hbar\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi(x) \qquad (43.1)$$

4.1 التعميم في عدة أبعاد :

في هذا الجزء سنمدد الصياغة المدروسة في عدة أبعاد المبدأ هو نفسه في حالة بعد واحد سنقدم الأدوات اللازمة دون توسع.

1.4.1 علاقة عدم اليقين المعممة في N بعد :

التعميم طبيعي لعلاقة التبديل (10.1) نحافظ على التناظر الدوراني وتكتب [2] :

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}(1+\beta\hat{p}^2)\,, \qquad (44.1)$$

$$\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{N}\hat{P}_i^2\,.$$

وبافتراض أن :

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \qquad (45.1)$$

علاقة جاكوبي تعطى :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \frac{2\beta i\hbar}{1+\beta\hat{P}^2}\left(\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i\right) \qquad (46.1)$$

مما يؤدي إلى جبر لهايزنبرغ غير التبديلي .

انطلاقا من العلاقة (44.1) يمكن أن نكتب علاقة عدم اليقين على النحو التالي :

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left(1+\beta\sum_{k=1}^{N}[(\Delta P_k)^2+\langle p_k\rangle^2]\right) \quad ,(47.1)$$

N هو بعد الفضاء

يمكن أن نبين بسهولة أن :

$$(\Delta X_i)_{min} = \hbar\sqrt{N\beta}\,, \qquad \forall i \;. \qquad (48.1)$$

في فضاء كمية الحركة التمثيل بسيط ويحقق العلاقة (1.44) بالصيغة :

$$\hat{X}_i = i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p_i}\,, \qquad \hat{P}_i = p_i \;. \qquad (49.1)$$

بالنسبة للجداء السلّمي فإنه يكتب من الشكل [2] :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^N p}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\varphi(p). \qquad (50.1)$$

علاقة التبديل الأكثر تعميما تكتب :

$$[\hat{X}_i,\hat{P}_j] = i\hbar[\delta_{ij}(1+\beta\hat{P}^2)+\beta'\hat{P}_i\hat{P}_j] \quad ,(\beta,\beta')>0. \qquad (51.1)$$

بافتراض :

$$[\hat{P}_i,\hat{P}_j]=0, \qquad (52.1)$$

إذا علاقة جاكوبي تحقق جبر " غير التبديلي" المعرف كالتالي :

$$[\hat{X}_i,\hat{X}_j] = i\hbar\frac{(2\beta-\beta')+\beta(2\beta+\beta')\hat{P}^2}{1+\beta\hat{P}^2}(\hat{P}_i\hat{X}_j-\hat{P}_j\hat{X}_i)\,. \qquad (53.1)$$

بافتراض أن ΔP لايتعلق ب j يمكن أن نبين بسهولة علاقة عدم اليقين وانطلاقا من التبديل (51.1) :

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left[1+(N\beta+\beta')(\Delta P_j)^2+\gamma\right], \qquad (54.1)$$

$$\gamma = \beta \sum_{k=1}^{N} \langle P_k \rangle^2 + \beta' \langle P_i \rangle^2 .$$

$$(\Delta X_i)_{min} = \hbar\sqrt{(N\beta + \beta')}, \qquad \forall\, i \tag{55.1}$$

توجد عدة تمثيلات لـ$\hat{P}_j$ و $\hat{X}_i$ في فضاء كمية الحركة :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + \beta\, \frac{\hat{p}^2\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{p}^2}{2} + \beta' \frac{\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{x}_j + \hat{x}_j\hat{p}_i\hat{p}_j}{2}, \hat{P}_i = p_i, \tag{56.1}$$

$$\hat{x}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i}\ , \qquad \hat{p}_i = p_i .$$

الشكل الصريح ل (56.1) استخدم للمرة الأولى في المرجع [6] نكتب :

$$\hat{X}_i = i\hbar\left[(1 + \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \left(\beta + \frac{N+1}{2}\beta'\right) p_i\right],$$

$$\hat{P}_i = p_i\ . \tag{57.1}$$

شكل آخر مشابه في (56.1) أعطي في المرجعين [23.38] بتقديم معامل العشوائية$\tilde{\gamma}$.

$$\hat{X}_i = i\hbar\left[(1 + \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \tilde{\gamma} p_i\right],\ \ \hat{P}_i = p_i\ , \tag{58.1}$$

حيث:

$$\hat{X}_i = (1 + \beta\hat{p}^2)\hat{x}_i + \beta'\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{x}_j + \tilde{\gamma}\hat{p}_i \quad , \ \hat{P}_i = p_i \quad , \tag{59.1}$$

المعامل الموجب $\tilde{\gamma}$ لا يؤثر على العلاقات التبديلية بالنسبة للجداء السلّمي المعدل يمكن كتابته على النحو التالي :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N p}{[1 + (\beta + \beta')p^2]^{1-\alpha}} \psi^*(p)\varphi(p), \tag{60.1}$$

$$\alpha = \frac{\tilde{\gamma} - \beta'\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\beta + \beta'} .$$

نذكر أن التمثيل (57.1) يرجع إلى $\alpha = 1$ المبرهن في [22] ، اذن القيمة $\tilde{\gamma} = (0)$ ستكون الخيار الأقرب لتبسيط الحساب.

2.4.1 التمثيل تقريبي للموضع :

حلول معادلة شرودينجر باستعمال التمثيل (58.1) نادرا ما تكون بسيطة ، خصوصا عندما يتعلق الكمون بمؤثرات الموضع بطريقة كبيرة كما في كمون "كولوم"، متناسب عكسا مع الجذر التربيعي للمؤثرات $\hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 + \hat{X}_3^2$. لهذا السبب لجأ العديد من المؤلفين [6]إلى التمثيل التقريبي للموضع . أين تم إيجاد عدة عبارات للمؤثرين $\hat{X}_i$ و $\hat{P}_j$ تحقق علاقة التبديل المعدّلة (51.1) .في المرجع [19]المؤلف اعتبر الحالة $\beta' = 2\beta$ فيها المبدلات بين مؤثرات الموضع (53.1) مع أخذ التقريب الأول لـ β في هذه الحالة :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i \,, \qquad \hat{P}_i = \hat{p}_i(1 + \beta\hat{p}^2)\,, \qquad (61.1)$$

مع :

$$\hat{x}_i = x_i \,, \qquad \hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i} \,.$$

هذا التمثيل سهل جدا وذلك باستخدام نظرية الاضطرابات.

في المرجع [22] تمثيل معمم (61.1) للحالة $\beta' = 2\beta$ المعطاة ولها الشكل التالي :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + \frac{2\beta - \beta\prime}{4}(\hat{p}^2\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{p}^2)\,, \hat{p}_i = \hat{p}_i\left(1 + \frac{\beta\prime}{2}\hat{p}^2\right). \quad (62.1)$$

هذا التمثيل صالح فقط في الرتبة الأولى لـ β .

بشكل أعم نستطيع تقديم معامل δ واعتبار التمثيل التالي :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + (\beta - \delta)\frac{\hat{p}^2\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{p}^2}{2} + (\beta' - 2\delta)\frac{\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{x}_j + \hat{x}_j\hat{p}_i\hat{p}_j}{2}$$

$$\hat{P}_i = \hat{p}_i(1 + \delta\hat{p}^2)\,. \qquad (63.1)$$

هذه العائلة من التمثيل صالحة من الدرجة الأولى لـ β' و β .

3.4.1 تمثيل مجموعة الدوران:

بالنسبة لمؤثرات الدوران يمكن تعميمها من الشكل التالي :

$$\hat{L}_{ij} = \frac{\hat{X}_i\hat{P}_j - \hat{X}_j\hat{P}_i}{1+\beta\hat{P}^2}. \qquad (64.1)$$

هذه المؤثرات تحقق العلاقات التبديلية التالية :

$$\begin{aligned}
&[\hat{X}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{X}_j - \delta_{ij}\hat{X}_k),\\
&[P_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{P}_j - \delta_{ij}\hat{P}_k)\ , \qquad (65.1)\\
&[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{L}_{jl} + \delta_{jl}\hat{L}_{ik} - \delta_{il}\hat{L}_{jk} - \delta_{jk}\hat{L}_{il})\ .
\end{aligned}$$

في 3 أبعاد مؤثر العزم الزاوي المعمم يكتب من الشكل:

$$\hat{L}_i = \frac{1}{1+\beta\hat{P}^2}\varepsilon_{ijk}\hat{X}_j\hat{P}_k\ . \qquad (66.1)$$

يمكننا أن نبرهن أن هذه المؤثرات تحقق نفس الجبر العادي (ميكانيك الكم العادي).

$$\begin{aligned}
&[\hat{X}_i\ , \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{X}_k\ ,\\
&[\hat{P}_i\ , \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{P}_k\ , \qquad (67.1)\\
&[\hat{L}_i\ , \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k\ .
\end{aligned}$$

الفصل الثاني: تطبيق (GUP)على معادلة شرودينجر بالنسبة للهزاز التوافقي وذرة الهيدروجين

1.2 مقدمة :

في هذا الفصل نقترح حساب تصحيح طيف الطاقة لهزاز توافقي في إطار مبدأ عدم اليقين المعمم لهايزنبرغ ، ثم نطبق هذا المبدأ على طيف ذرة الهيدروجين ونبرهن على أن الحالات المتوالدة لمستويات الطاقة قد زالت وهذا ما يتوافق مع النتائج التجريبية .

تعطى العلاقات التبديلية لجبر لهايزنبرغ المعدل بالعبارة التالية :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\left(\delta_{ij} + \beta\delta_{ij}\hat{P}^2 + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\right).$$
$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0. \tag{1.2}$$

$\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{3}\hat{P}_i\hat{P}_i$ حيث $\beta, \beta' > 0$ وهي كقيم صغيرة من الدرجة الأولى في هذه الحالة ناخذ $\beta' = \beta 2$

التي تترك العلاقات التبديلية بين المؤثرات $\hat{X}_i$غير متغيرة $\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = 0$

لحساب طيف الكمون المعطى يجب أن نجد تمثيل المؤثرات $\hat{X}_i$ و $\hat{P}_i$ التي تتعلق بمتغير الموضع x والاشتقاق الجزئي مع احترام متغيرات الموضع التي تحقق العلاقة (1.2) .

معادلة شرودينجر

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + V\left(\vec{\hat{X}}\right)\right]\psi(\bar{x}) = E\psi(\vec{x}). \tag{2.2}$$

يمكن أن نتحقق أن التمثيل الموالي يحقق العلاقة (1.2) حتى الدرجة الأولى لـ β

$$\hat{X}_i\psi(\vec{x}) = x_i\psi(\vec{x}), \hat{P}_i\,\psi(\vec{x}) = p_i\left(1 + \beta\hat{P}^2\right)\psi(\vec{x}) \tag{3.2}$$

$$p_i = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \hat{P}^2 = \hat{P}^2 + \beta 2\hat{P}^4.$$

بالتعويض في (2.2) فإن معادلة شرودينجر تأخذ الشكل التالي :

$$\hat{P}^2 = \hat{P}^2 + \beta 2\hat{P}^4$$

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{\beta}{m}\hat{P}^4 + V\left(\hat{\vec{X}}\right)\right]\psi(\bar{x}) = E\psi(\vec{x}). \qquad (4.2)$$

هذه معادلة شرودينجر المعتادة مع معامل إضافي يتناسب مع $\hat{P}^4$ مع افتراض أن هذا التصحيح صغير(لأن المعامل β صغير) .

باستعمال نظرية الاضطرابات من الدرجة الأولى نحسب التأثيرات على طيف الطاقة ، هذا التغير في الطاقة من الدرجة الأولى للمعامل المتغير β يقود إلى

$$E_k = E_k^0 + \Delta E_k \qquad (5.2)$$

حيث k ترمز إلى عدد كمي مميز للمستوى الطاقوي و ΔE_k هي القيمة الذاتية للمصفوفة .

$$\frac{\beta}{m}\left\langle \psi_k^0(\vec{x}) \middle| \hat{P}^4 \middle| \psi_{k'}^0(\vec{x}) \right\rangle \equiv \frac{\beta}{m}\left\langle k \middle| \hat{P}^4 \middle| k' \right\rangle \qquad (6.2)$$

حيث$\psi_k^0(\vec{x})$ حل للمعادلة (4.2) مع $\beta = 0$

بما أننا نعلم أن تأثير$\vec{P}^2$ من المعادلة (4.2) على الدوال الموجية غير المضطربة فإن عناصر مصفوفة الكمون المركزي يمكن أن تكتب بالشكل التالي :

$$4m\beta\left(\left(E_{n,l}^0\right)^2 \delta_{nn'} - \left(E_{n,l}^0 + E_{n',l}^0\right)\left\langle nlm \middle| V(r) \middle| n'lm \right\rangle + \left\langle nlm \middle| V(r)^2 \middle| n'lm \right\rangle\right)\delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad (7.2)$$

في الحالات المدروسة هنا لا توجد حالات توالد لمستويات للعزم الزاوي l والعدد الكمي m .

إذن المصفوفة (6.2) قطرية وتصحيح الطيف يمكن أن يكتب .

$$\Delta E_{n,l} = 4m\beta\left(\left(E_{n,l}^{0}\right)^{2} - 2E_{n,l}^{0}\langle nlm|V(r)|nlm\rangle + \left\langle \mathrm{nlm}\middle|\mathrm{V(r)}^{2}\middle|\mathrm{nlm}\right\rangle\right) \quad (8.2)$$

هذه العبارة ستسمح بإيجاد تصحيح للهزاز التوافقي وطيف الهيدروجين وذلك بحساب القيمة الأساسية لطيف الكمون فقط .

2.2 الهزاز التوافقي :

في حالة الهزاز التوافقي فإن حلول معادلة شرودينجر (2.2) معروفة وتعطى بالعبارة التالية :

$$\psi_{nlm}^{0}(\vec{r}) = \lambda^{3/2}\sqrt{\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}}\left(\lambda r\right)^{l} e^{-(\lambda r)^{2}/2} L_{n}^{l+1/2}((\lambda r)^{2}) Y_{lm}(\theta,\varphi). \quad (9.2)$$

حيث: $L_{n}^{\alpha}(x)$ كثيرات حدود Laguerre[24] و $V(r) = m\omega r^{2}$ و $\lambda = \sqrt{m\omega}$

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = \int \psi^{*}(\vec{r})\psi(\vec{r})V(r)\, sin\,\theta\; d\theta d\varphi r^{2} dr$$

$$= \left[\lambda^{3/2}\sqrt{\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}}\left(\lambda r\right)^{l} e^{-(\lambda r)^{2}/2} L_{n}^{l+1/2}((\lambda r)^{2})\right]^{2} m\omega r^{2} Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta\; d\theta d\varphi r^{2} dr \quad (10.2)$$

لدينا : $\int Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi)\, sin\,\theta\; d\theta d\varphi = \pi 2$

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle$$

$$= \lambda^{5+2l}\left(\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}\right) r^{2(l+2)} e^{-(\lambda r)^{2}}\left[L_{n}^{l+1/2}((\lambda r)^{2})\right]^{2} dr\,, \quad (11.2)$$

باستعمال تغيير المتغير $x = (\lambda r)^{2} \Leftarrow r^{2(l+2)} = \frac{x^{l+2}}{\lambda^{2(l+2)}}\,; dr = \frac{x^{-1/2}dx}{2\lambda}$

بالتعويض نجد :

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = A\int_0^{\infty} x^{l+3/2}\, e^{-x}\left[L_n^{l+1/2}(x)\right]^2 dx. \qquad (12.2)$$

$$A = \pi\left(\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}\right).$$

نضع $l + {}^{1}\!/_{2} = \alpha \Rightarrow l + {}^{3}\!/_{2} = \alpha + 1$

نكتب المعادلة (12.2) من الشكل التالي :

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = A\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}\, e^{-x}[L_n^{\alpha}(x)]^2 dx, \qquad (13.2)$$

باستخدام خواص كثيرات حدودLaguerre[24]

- $L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^{\alpha}(x) - L_{n-1}^{\alpha}(x)$
- $L_n^{\alpha}(x) = L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$

تصبح المعادلة (13.2) من الشكل التالي :

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = A\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}\, e^{-x}L_n^{\alpha}(x)[L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x)]dx\,, \qquad (14.2)$$

وباستخدام التكامل الآتي [25]

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-x}L_k^{\alpha}(x)L_n^{\beta}(x) = \frac{\Gamma(n-k+\beta-\alpha)\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(k+1)}. \qquad (15.2)$$

وبعض الخصائص الرياضية :

- $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$
- $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} = n - 1$

نكتب المعادلة (14.2) من الشكل :

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = A\left[\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)}+\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2\Gamma(n)}\right]. \qquad (16.2)$$

نحسب $\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle$

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle = \int \psi^*(\vec{r})V(r)^2\psi(\vec{r})dr\sin\theta\, d\theta d\varphi r^2 dr$$

$$= \int\left[\lambda^{3/2}\sqrt{\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}}(\lambda r)^l e^{-(\lambda r)^2/2}L_n^{l+1/2}((\lambda r)^2)\right]^2(m\omega)^2 r^4$$

$$Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta d\varphi r^2 dr, \qquad (17.2)$$

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle$$

$$= \lambda^{7+2l}\left(\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}\right)r^{2(l+3)}e^{-(\lambda r)^2}\left[L_n^{l+1/2}((\lambda r)^2)\right]^2 dr\,, \qquad (18.2)$$

بتغير متغير $x=(\lambda r)^2 \Leftarrow r^{2(l+3)}=\frac{x^{l+3}}{\lambda^{2(l+3)}}$ تصبح المعادلة (18.2) من الشكل الآتي :

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle$$

$$= \pi\left(\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}\right)\int x^{l+\frac{5}{2}}e^{-x}\left[L_n^{l+1/2}(x)\right]^2 dx, \qquad (19.2)$$

نضع $l+{}^{1}\!/_{2}=\alpha \Leftarrow l+{}^{5}\!/_{2}=\alpha+2$

نكتب المعادلة (19.2)من الشكل التالي :

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle = B\int_0^\infty x^{\alpha+2}e^{-x}[L_n^\alpha(x)]^2 dx. \qquad (20.2)$$

حيث $B = \pi\left(\frac{2n!}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}\right)$.

باستخدام خواص كثير الحدود Laguerre[24]

- $L_n^{\alpha+1} = x^{-1}[(n+\alpha+1)L_n^{\alpha} - (n+1)L_{n+1}^{\alpha}]$
- $L_n^{\alpha} = x^{-1}[(n+\alpha)L_n^{\alpha-1} - (n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}]$

$$\langle nlm|V(r)^2|nlm\rangle =$$

$$B\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{\alpha}[(n+\alpha)L_n^{\alpha-1} - (n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}]dx, \qquad (21.2)$$

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle =$$

$$B\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}[L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x)]\,[(n+\alpha)L_n^{\alpha-1} - (n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}]dx$$

$$\langle nlm|V(r)^2|nlm\rangle = B(n+\alpha)\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{\alpha-1}(x)\,L_n^{\alpha+1}(x)dx$$

$$-B(n+\alpha)\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\,L_n^{\alpha-1}(x)dx$$

$$-\,B(n+1)\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\,L_n^{\alpha+1}(x)dx$$

$$+\;B(n+1)\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\,L_{n+1}^{\alpha+1}(x)dx$$

نستخدم تكامل (15.2) ونفس الخصائص الرياضة المذكورة سابقا نحصل على :

$$\langle nlm|V(r)^2|nlm\rangle = B\left\{(n+\alpha)\left[\frac{2\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n)}+\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)}\right] + (n+1)\left[\frac{2\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+2)}+\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n)}\right]\right\}. \tag{22.2}$$

بتعويض (16.2) و (22.2) في (8.2) نحصل على تعبير طيف الهزاز التوافقي لجبر لهايزنبرغ المعدّل

$$E_{n,l} = \omega\left(2n+l+\frac{3}{2}\right) + (\Delta x_0)^2\frac{1}{5}m\omega^2\left(6n^2+9n+6nl+l^2+4l + \frac{15}{4}\right). \tag{23.2}$$

حيث $\Delta x_0 = \sqrt{\beta 5}$ هذه الصيغة تعطي بدقة التصحيحات المحسوبة في [24].

3.2 ذرة الهيدروجين:

في حالة ذرة الهيدروجين فإن الدوال الموجية غير المضطربة والمنظمة تكتب على الشكل :

$$\psi^0_{nlm}(\vec{r}) = (2\gamma_n)^{3/2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}(2\gamma_n r)^l e^{-\gamma_n r}L^{2l+1}_{n-l-1}(2\gamma_n r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{24.2}$$

حيث $\gamma_n = m\alpha$ و α ثابت البنية الدقيقة وn العدد الكمي الرئيسي وl محصور بين 0 و n-1

نحسب$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle$ حيث $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$:

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = \int \psi^{*}(r)V(r)\psi(r)dr\sin\theta\, d\theta d\varphi r^2 dr$$

$$= \int \left[(2\gamma_n)^{3/2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+1)!}}(2\gamma_n r)^l e^{-\gamma_n r}L_{n-l-1}^{2l+1}(2\gamma_n r)\right]^2 Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta d\varphi\frac{-\alpha}{r}r^2 dr,$$

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle$$

$$= \frac{-2\pi\alpha(2\gamma_n)^{2l+3}}{(2\gamma_n)^{2l+2}}\left(\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right)\int_0^\infty r^{2l+1}e^{-2\gamma_n r}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(2\gamma_n r)\right]^2 dr. \quad (25.2)$$

بتغيير متغير $x = 2\gamma_n r \Leftarrow r^{2l+1} = \left(\frac{x}{2\gamma_n}\right)^{2l+1}$ ، $dr = \frac{dx}{2\gamma_n}$

بالتعويض في المعادلة (25.2) نحصل على:

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle$$

$$= \frac{-2\pi\alpha(2\gamma_n)^{2l+3}}{(2\gamma_n)^{2l+2}}\left(\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right)\int_0^\infty x^{2l+1}e^{-x}[L_n^{2l+1}(x)]^2 dx\,, (26.2)$$

نضع $\alpha = 2l+1$:

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = C\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}[L_n^{\alpha}(x)]^2 dx \quad (27.2)$$

$$C = \frac{-2\pi\alpha(2\gamma_n)^{2l+3}}{(2\gamma_n)^{2l+2}}\left(\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right).$$

باستخدام تكامل (15.2) تصبح المعادلة (27.2) من الشكل التالي:

$$\langle nlm|V(r)|nlm\rangle = C\,\frac{(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}\,. \quad (28.2)$$

نحسب $\langle nlm|V(r)^2|nlm\rangle$ حيث $V(r)^2=-\frac{\alpha^2}{r^2}$

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle=\int\psi^{*}(\vec{r})\psi(\vec{r})V(r)^2\sin\theta\,d\theta d\varphi r^2dr$$

$$=\int\left[(2\gamma_n)^2\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+1)!}}(2\gamma_nr)^le^{-\gamma_nr}L_{n-l-1}^{2l+1}(2\gamma_nr)\right]^2Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta d\varphi\frac{-\alpha^2}{r^2}r^2dr.\qquad(29.2)$$

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle$$

$$=-2\pi\alpha^2\left(2\gamma_n\right)^{2l+3}\left(\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right)\int_0^\infty r^{2l}e^{-2\gamma_nr}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(2\gamma_nr)\right]^2dr$$

بالتعويض في المعادلة (29.2) نحصل على:

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle=$$

$$\frac{-2\pi\alpha^2(2\gamma_n)^{2l+3}}{(2\gamma_n)^{2l+2}}\left(\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right)\int_0^\infty x^{2l}e^{-x}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(x)\right]^2dx,\ (30.2)$$

نضع $m=n-l-1$ و $\alpha=2l+1\Leftarrow 2l=\alpha-1$

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle=D\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}[L_m^{\alpha}(x)]^2dx\qquad(31.2)$$

$$D=\frac{-2\pi\alpha^2(2\gamma_n)^{2l+3}}{(2\gamma_n)^{2l+2}}\left(\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right)$$

باستخدام كثيرات الحدود Laguerre

- $L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} F(-n; \alpha + 1; x)$

بالتعويض نجد:

$$\langle nlm|V(r)^2|nlm\rangle = D\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\left[\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\propto+1)}\ F(-m;\alpha+;x)\right]^2 dx$$

$$= D\left[\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha+1)}\right]^2\int_0^\infty x^{\propto-1}e^{-x}[\ F(-m;\alpha+;x)]^2 dx \qquad (32.2)$$

وباستخدام التكامل التالي:

$$\int_0^\infty dx e^{-x}x^{\alpha-1}\,[F(-n;\gamma;x)]^2 \quad = \frac{n!\,\Gamma(\alpha)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$$

$$\left\{1+\frac{n(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha)}{1^2\gamma}\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(\gamma-\alpha-2)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{1^2 2^2\gamma(\gamma+1)}\ldots$$

$$\left.+\frac{n(n-1)\ldots 1(\gamma-\alpha-n)\ldots(\gamma-\alpha+n-1)}{1^2 2^2\ldots\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\right\} \ (33.2)$$

تصبح المعادلة (32.2) من الشكل التالي:

$$\langle nlm|V(r)^2|\mathrm{n}lm\rangle \ = B\left[\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha+1)}\right]^2$$

$$\times\left[\frac{m!\,\Gamma(\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+1+m-1)}\left\{1+\frac{m(\alpha+1-\alpha-1)(\alpha+1-\alpha)}{1^2(\alpha+1)}+0+\cdots\right\}\right] \qquad (34.2)$$

الحد الأول معدوم معناه باقي الحدود معدومة نكتب المعادلة (34.2) من الشكل :

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle = D\left[\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha+1)}\right]^2\left[\frac{m!\,\Gamma(\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}\right], \qquad (35.2)$$

بعد التبسط تكتب

$$\left\langle nlm\middle|V(r)^2\middle|\mathrm{n}lm\right\rangle = D\left[\frac{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\alpha}\right]. \qquad (36.2)$$

$$D=-2\pi\alpha^2(2\gamma_n)^{2l+2}\left(\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right)$$

نعوض معادلة (28.2) و (36.2) في عبارة الطاقة نحصل على طيف الهيدروجين من الدرجة الأولى

$$E_{nl}=-\frac{m\alpha^2}{2n^2}+\left(\Delta x_0\right)^2\frac{m^3\alpha^4}{5}\frac{\left(4n-3\left(l+\frac{1}{2}\right)\right)}{n^4\left(l+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (37.2)$$

تجدر الإشارة أنه عند تطبيق مبدأ عدم اليقين العادي على معادلة شرودنجر بالنسبة للهزاز التوافقي وذرة الهيدروجين فإن الطاقة تتعلق بالعدد الكمي الرئسي "n" فقط ، أي أن هناك توالد في مستويات الطاقة بعكس النتائج التجريبية .

فمثلا في حالة ذرة الهيدروجين لو نأخذ $n=2$ فإن l يأخذ القيمتين 0 و 1 لأن $(n-1<l<0)$

اذا الطاقة تحسب كالتالي :

$$n = 2 \rightarrow \begin{cases} l = 1 \ \rightarrow \ E = \dfrac{-13.6}{2^2} \\ l = 0 \ \rightarrow \ E = \dfrac{-13.6}{2^2} \end{cases}$$

الحالتين $l = 0$ و $l = 0$ لهما نفس الطاقة ، أي أن هناك توالد في مستويات الطاقة .

خلاصة الفصل:

في هذا الفصل قمنا بحساب تصحيحات في الطاقة بالنسبة للهزاز التوافقي وكذلك بالنسبة لطيف ذرة الهيدروجين وبينا أن هذه التصحيحات تتعلق بالرقم الكمي l مما يؤدي إلى رفع حالات التوالد لمستويات الطاقة وبالتالي يعطي نتائج أقرب إلى القيم التجريبية .

الفصل الثالث : حل معادلة شرودينجر في وجود الكمون $V(r) = \frac{-\alpha}{r^2}$

1.3 مقدمة :

في هذا الفصل نحاول تطبيق مبدأ عدم اليقين المعمم على معادلة شرودينجر للكمون $V(r) = \frac{-\alpha}{r^2}$ ونحاول إيجاد الحلول باستخدام تمثيلات مختلفة لنظرية الطول الأصغري .

قبل تطبيق مبدأ عدم اليقين نحاول إيجاد الحلول في ميكانيك الكم العادي :

2.3 الكمون $-\alpha/\mathrm{r}^2$ في 3 ابعاد في ميكانيك الكم العادي :

1.2.3 معادلة شرودينجر :

نريد دراسة جسيم في وجود الكمون$-\frac{\alpha}{r^2}$ حيث α ثابت موجب تكتب معادلة شرودينجر بالشكل:

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{\vec{r}^2}\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \tag{1.3}$$

كما نفعل في ذرة الهيدروجين [26.20]نضرب طرفي هذه المعادلة في$2\mu\vec{r}^2$ نحصل على :

$$(\vec{r}^2\vec{p}^2 - 2\mu\alpha)|\psi\rangle = 2\mu E\vec{r}^2|\psi\rangle\,. \tag{2.3}$$

في فضاء كمية الحركة دالة الموجة تكتب [17]:

$$\psi(\vec{p}) = Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

المؤثران $\vec{p}^2$ و$\vec{r}^2$ يؤثران على الدوال الموجية $\psi(p)$ كالتالي :

$$\vec{r}^2\psi(p) = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{l(l+1)}{p^2}\right)\psi(p)\,, \vec{p}^2\psi(p) = p^2\psi(p).$$

إذن بالتعويض في (2.3) تأخذ معادلة شرودينجر ،في فضاء كمية الحركة الشكل التالي:

$$\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2}(p^2\psi) + \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial p}(p^2\psi) - \frac{l(l+1)}{p^2}(p^2\psi)\right] - 2\mu\alpha\psi$$
$$+(2\mu E\hbar^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \frac{2}{p}(2\mu E\hbar^2)\frac{\partial\psi}{\partial p} - (2\mu E\hbar^2)\frac{l(l+1)}{p^2}\psi = 0,$$

بالاشتقاق نجد:

$$\hbar^2 \left[2\psi + 4p\frac{d\psi}{dp} + p^2\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \frac{2}{p}\left(2p\psi + p^2\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - l(l+1)\psi + 2\mu\alpha/\hbar^2\,\psi\right.$$
$$\left. - (2\mu E)\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} - \frac{2}{p}(2\mu E)\frac{\partial\psi}{\partial p} + (2\mu E)\frac{l(l+1)}{p^2}\psi\right] = 0\,,$$

بالتبسيط نحصل على:

$$\hbar^2 \left[(p^2 - 2\mu E)\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \frac{2}{p}(3p^2 - 2\mu E)\frac{d\psi}{dp}\right.$$
$$\left. + (6 + 2\mu\alpha/\hbar^2 - l(l+1)(1 - 2\mu E/p^2))\psi\right] = 0\,,$$

نقسم على $-\hbar^2(p^2 - 2\mu E)$ نحصل على :

$$\frac{d^2\psi}{dp^2} + \frac{2}{p}\left(\frac{3p^2 + k^2}{p^2 + k^2}\right)\frac{d\psi}{dp} + \left(\frac{6 + k - l(l+1)(1 + k^2/p^2)}{p^2 + k^2}\right)\psi = 0\,, \qquad (3.3)$$

حيث:

$$k^2 = -2\mu E, \qquad k = 2\mu\alpha/\hbar^2\ .$$

2.2.3 الدالة الموجية :

نعتبر التحويل:

$$\psi(p) = p^l\varphi(p)\,,$$

الدالة الجديدة تحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2\left(p^l\varphi(p)\right)}{dp^2} + \frac{2}{p}\left(\frac{3p^2+k^2}{p^2+k^2}\right)\frac{d\left(p^l\varphi(p)\right)}{dp} + \left(\frac{6+k-l(l+1)(1+k^2/p^2)}{p^2+k^2}\right)\left(p^l\varphi(p)\right) = 0\,,$$

بالاشتقاق نجد:

$$(p^l)\frac{d^2\varphi}{dp^2} + (2lp^{l-1})\frac{d\varphi}{dp} + (l(l-1)p^{l-2})\varphi + \frac{2}{p}\left(\frac{3p^2+k^2}{p^2+k^2}\right)\left((lp^{l-1})\varphi + (p^l)\frac{d\varphi}{dp}\right) + \left(\frac{6+k-l(l+1)(1+k^2/p^2)}{p^2+k^2}\right)(p^l\varphi) = 0,$$

نقسم على p^l نحصل على :

$$\frac{d^2\varphi}{dp} + \frac{2}{p}\left(l + \frac{3p^2+k^2}{p^2+k^2}\right)\frac{d\varphi}{dp} + \left[(l\,(l-1)/p^2) + \frac{2l}{p^2}\left(\frac{3p^2+k^2}{p^2+k^2}\right) + \frac{6+k-l(l+1)(1+k^2/p^2)}{p^2+k^2}\right]\varphi = 0,$$

بالتبسيط نجد:

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{p}\left(\frac{l(p^2+k^2)+3p^2+k^2}{p^2+k^2}\right)\frac{d\varphi}{dp} + \left[(p^2+k^2)(l(l-1)/p^2) + \frac{2l}{p^2}(3p^2+k^2) + 6 + k - l(l+1)(1+k^2/p^2)\right]\varphi = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dp^2}+\frac{2}{p}\left(\frac{(l+3)p^2+(l+1)k^2}{p^2+k^2}\right)\frac{d\varphi}{dp}$$

$$+\left(\frac{4l+6+k}{p^2+k^2}\right)\varphi=0\ . \qquad (4.3)$$

نضع

$$y=-\frac{p^2}{k^2}$$

لدينا إذا:

$$\frac{d}{dp}=\frac{dy}{dp}\frac{d}{dy}=\frac{-2p}{k^2}\frac{d}{dy}\ .$$

$$\frac{d^2}{dp^2}=\frac{4p^2}{k^4}\frac{d^2}{dy^2}-\frac{2}{k^2}\frac{d}{dy}.$$

بتعويض المشتقات $\frac{d^2}{dp^2}$ و $\frac{d}{dp}$ في المعادلة (4.3) نحصل على:

$$(p^2+k^2)\left(\frac{4p^2}{k^4}\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\frac{2}{k^2}\frac{d\varphi}{dy}\right)$$

$$+\frac{2}{p}((l+3)p^2+(l+1)k^2)\left(\frac{-2p}{k^2}\frac{d\varphi}{dy}\right)+(4l+6+k)\varphi=0\ ,$$

بالتبسيط نجد:

$$\left(\frac{4p^4}{k^4}+\frac{4p^2}{k^2}\right)\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\left[-6-\frac{4lp^2}{k^2}-\frac{14p^2}{k^2}-4l\right]\frac{d\varphi}{dy}+(4l+6+k)\varphi$$
$$=0\ , \qquad (5.3)$$

بتعويض $y=-\frac{p^2}{k^2}$ في (5.3) نحصل على:

$$(4y^2-4y)\frac{d^2\varphi}{dy^2}+[-6+4ly+14y-4l]\frac{d\varphi}{dy}+(4l+6+k)\varphi=0\ ,$$

نقسم على (-4) نحصل على :

$$y(1-y)\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\left[\frac{3}{2}+l-\left(\frac{7}{2}+l\right)y\right]\frac{d\varphi}{dy}-\left(l+\frac{3}{2}+\frac{k}{4}\right)\varphi=0\,.(6.3)$$

هذه المعادلة لها شكل معادلة الدوال فوق الهندسية " hypergéométrique " [27]:

$$y(1-y)\frac{d^2\varphi}{dy^2}+[c-(a+b+1)y]\frac{d\varphi}{dy}-ab\varphi=0\,,$$

بالمطابقة يمكننا حساب المعاملات c , b, a :

$$ab=l+\frac{3}{2}+\frac{k}{4}\ ,a+b+1=\frac{7}{2}+l$$

$$\Rightarrow\ a=l+\frac{5}{2}-b\quad,\ \ c=\frac{3}{2}+l$$

$$\Rightarrow\ l+\frac{3}{2}+\frac{k}{4}=\mathrm{b}\left(l+\frac{5}{2}-b\right)$$

$$=b^2-\left(l+\frac{5}{2}\right)b+l+\frac{3}{2}+\frac{k}{4}=0$$

$$\Delta=\left(l+\frac{5}{2}\right)^2-4\left(l+\frac{3}{2}+\frac{k}{4}\right)$$

$$\Delta=l(l+1)+\frac{1}{4}-k=(iv)^2$$

$$\Rightarrow\ b=\frac{\left(l+\frac{5}{2}\right)-iv}{2}=\frac{l}{2}+\frac{5}{4}-\frac{i}{2}v$$

$$a=l+\frac{5}{2}-b$$

$$\Rightarrow\ a=\ l+\frac{5}{2}-\left(\frac{l}{2}+\frac{5}{4}-\frac{i}{2}v\right)$$

$$a = \frac{5}{4} + \frac{l}{2} + \frac{i}{2}\nu \, , b = \frac{5}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i}{2}\nu \quad , c = \frac{3}{2} + l \qquad (7.3)$$

حيث: $\nu = \sqrt{k - 1/4 - l(l+1)}$ مع $k = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}$

حل معادلة شرودينجر(1.3) في فضاء كمية الحركة من أجل كمون $\frac{-}{r^2}$ يكتب [27] :

$$\psi(p) = Ap^l F\left(a, b, c; -\frac{p^2}{k^2}\right). \qquad (8.3)$$

3.2.3 تعامد الدوال الموجية:

باعتبار الدالتين الموجيتين $\psi_1(p)$ و $\psi_2(p)$ المقابلتين لقيمتين مختلفتين من الطاقة E_1 و E_2.

$$\psi_1(p) = A_1 F\left(a, b, c; -\frac{p^2}{k_1^2}\right),$$

$$\psi_2(p) = A_2 F\left(a, b, c; -\frac{p^2}{k_2^2}\right).$$

الجداء السلّمي لـ $\psi_1(p)$ و$\psi_2(p)$ يكتب :

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = A_1 A_2^* \int_0^\infty p^2 dp F\left(a, b, c; -\frac{p^2}{k_1^2}\right) F\left(a, b, c; -\frac{p^2}{k_2^2}\right).$$

بإجراء تغيير المتغير $x = p^2 \Leftarrow dp = dx/2\sqrt{x}$ نحصل على :

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} A_1 A_2^* \int_0^\infty x^{1/2} dx \, F\left(a, b, c; -\frac{x}{k_1^2}\right) F\left(a, b, c; -\frac{x}{k_2^2}\right).$$

قيمة هذا التكامل تعطى بالعبارة التالية [28]:

$$\int_0^\infty x^{c-1} dx F(a, b, c; -\sigma x) F(a', b', c; -\omega x)$$
$$= \sigma^{-a} w^{a-c} \frac{\Gamma^2(c)\Gamma(a + a' - c)\Gamma(a + b' - c)\Gamma(a' + b - c)\Gamma(b + b' - c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a')\Gamma(b')\Gamma(a + a' + b + b' - 2c)}$$

$$F\left(a + a' - c, a + b - c, a + a' + b + b' - 2c; 1 - \frac{\omega}{\sigma}\right),$$

بالمطابقة نجد :

$$c = 3/2 \qquad , \sigma = 1/k_1^2 \quad , \omega = 1/k_2^2$$

بالتالي نحصل على ما يلي

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \Omega \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{i\nu} F\left(1 + i\nu, 1,2; 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right),$$

حيث:

$$\Omega = \frac{1}{2} A_1 A_2^* k_1^{5/2} k_2^{1/2} \frac{\Gamma^2(3/2)\Gamma^2(1)\Gamma(1 + i\nu)\Gamma(1 - i\nu)}{\Gamma(2)\Gamma^2\left(\frac{5}{4} + i\frac{\nu}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2}\right)}$$

نستعمل مرة أخرى التعريفات [27] :

$$F(a, b, c; z) = \frac{1}{b - 1 - (c - a - 1)z}\left[(b - c)F(a, b - 1, c; z) + (c - 1)(1 - z)F(a, b, c - 1; z)\right],$$

$$\Rightarrow F\left(1 + i\nu, 1,2; 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) = \frac{1}{i\nu\left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)}\left[-F\left(1 + i\nu, 0,2; 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) + \frac{k_1^2}{k_2^2} F\left(1 + i\nu, 1,1; 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\right]$$

لدينا :

$$F(a, b, b; z) = (1 - z)^{-a} \Rightarrow F\left(1 + i\nu, 1,1; 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right), \quad F(0, b, c; z) = F(a, 0, c; z) = 1 \Rightarrow F\left(1 + i\nu, 1,2; 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) = 1,$$

إذن:

$$F\left(1+i\nu,1,2;1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right) = \frac{1}{i\nu\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)}\left[-1+\frac{k_1^2}{k_2^2}\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^{-1-i\nu}\right]$$

$$\Rightarrow \langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{\Omega\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{i\nu}}{i\nu\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)}\left[-1+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-2i\nu}\right]$$
$$= \frac{\Omega}{i\nu\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}-1\right)}\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{i\nu}-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-i\nu}\right]$$

نضع $\beta = \frac{k_1}{k_2}$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{\Omega}{i\nu\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}-1\right)}\left[\beta^{i\nu}-\beta^{-i\nu}\right] = \frac{2\Omega}{\nu\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}-1\right)}\frac{\left[e^{i\nu ln\beta}-e^{-i\nu ln\beta}\right]}{2i}$$

أخيرًا نحصل على الجداء السلّمي :

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{2\Omega}{\nu\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}-1\right)} sin\left[\nu\ \ ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\right]. \tag{9.3}$$

اذن الحلان ψ_1 و ψ_2 متعامدان اذا تحقق الشرط التالي : $\nu\ \ ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = n\pi\ ,$

حيث . $n = 0 \pm 1, \ldots$

3.3 الكمون $V(r)\frac{-\alpha}{r^2}$ مع طول أصغري :

سنحاول في هذا القسم دراسة الكمون $V(r) = \frac{-\alpha}{r^2}$ بالتفصيل [29] ، في ثلاثة أبعاد مع مبدأ عدم اليقين المعمم

1.3.3 معادلة شرودينجر

لدينا علاقات التبديل المعممة التالية :

$$\left[\hat{X}_i,\hat{P}_j\right]=i\hbar\left[\left(1+\beta\hat{P}^2\right)\delta_{ij}+\beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\right],(\beta,\beta')>0\,, \qquad (10.3)$$

$$\left[\hat{P}_i,\hat{P}_j\right]=0\,, \qquad (11.3)$$

$$\left[\hat{X}_i,\hat{X}_j\right]=i\hbar\frac{2\beta-\beta'+\beta(2\beta+\beta')\hat{P}^2}{1+\beta\hat{P}^2}\left(\hat{P}_i\hat{X}_j-\hat{P}_j\hat{X}_i\right). \qquad (12.3)$$

لنعتبر التمثيل التالي :

$$\hat{X}_i=i\hbar\left(\left(1+\beta\hat{P}^2\right)\frac{\partial}{\partial p_i}+\beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\frac{\partial}{\partial p_j}+\gamma p_i\right),\hat{P}_i=p_i\,. \quad (13.3)$$

في هذا الجبر المعدل معادلة شرودينجر في فضاء كمية الحركة تكتب :

$$\left(\frac{p^2}{2\mu}-\frac{\alpha}{R^2}\right)\psi(p)=E\psi(p)\,. \qquad (14.3)$$

بضرب طرفي هذه المعادلة في المؤثر R^2 نحصل على :

$$\left(R^2\frac{p^2}{2\mu}-\alpha\right)\psi(p)=ER^2\psi(p). \qquad (15.3)$$

حيث المؤثر $\hat{R}^2$ يعطى في الاحداثيات الكروية يعطى على الشكل :

$$R^2=(i\hbar)^2\left\{[1+(\beta+\beta')p^2]^2\frac{d^2}{dp^2}\right.$$
$$\left.+[1+(\beta+\beta')p^2]\left(2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right)\frac{d}{dp}\right\}. \qquad (16.3)$$

باستخدام هذه الصيغة تأخذ المعادلة (14.3) الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&\hbar^2\Bigg\{[1+(\beta+\beta')p^2]^2\frac{d^2}{dp^2}\big(p^2\psi(p)\big)\\
&+[1+(\beta+\beta')p^2]\left[2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right]\frac{d}{dp}\big(p^2\psi(p)\big)\\
&+\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\psi(p)-2\mu E[1+(\beta+\beta')p^2]^2\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}\\
&-2\mu E[1+(\beta+\beta')p^2]\left[2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right]\frac{d\psi(p)}{dp}\Bigg\}=0\,,
\end{aligned}$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$\begin{aligned}
&[1+(\beta+\beta')p^2]^2\left[2\psi(p)+4p\frac{d\psi(p)}{dp}+p^2\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}\right]\\
&+[1+(\beta+\beta')p^2]\left[2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right]\left[2p\psi(p)+p^2\frac{d\psi(p)}{dp}\right]\\
&+\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\psi(p)-2\mu E\,[1+(\beta+\beta')p^2]^2\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}\\
&-2\mu E[1+(\beta+\beta')p^2]\left[2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right]\frac{d\psi(p)}{dp}=0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[1+(\beta+\beta')p^2]^2\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}\\
&-2\mu E[1+(\beta+\beta')p^2]\left[2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right]\frac{d\psi(p)}{dp}=0\,,
\end{aligned}$$

بالتبسيط نجد:

$$[1+(\beta+\beta')p^2]^2(p^2-2\mu E)\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}$$
$$+[1+(\beta+\beta')p^2]\Bigg[4p[1+(\beta+\beta')p^2]$$
$$+(p^2-2\mu E)\left[2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right]\Bigg]\frac{d\psi(p)}{dp}$$
$$+\Bigg\{\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}+(1+(\beta+\beta')p^2)$$
$$\times\left[2[1+(\beta+\beta')p^2]+2p\left(2(2\beta+\beta')p+\frac{2}{p}\right)\right]\Bigg\}\psi(p)=0\,,$$
$$\Rightarrow[1+(\beta+\beta')p^2]^2(p^2-2\mu E)\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}$$
$$+[1+(\beta+\beta')p^2]\frac{2}{p}\{2p^2[1+(\beta+\beta')p^2]$$
$$+(p^2-2\mu E)[(2\beta+\beta')p^2+1]\}\frac{d\psi(p)}{dp}$$
$$+\left[\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}+(1+(\beta+\beta')p^2)(6+6\beta'p^2+10\beta p^2)\right]\psi(p)=0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{d^2\psi(p)}{dp^2}+\frac{2}{p}\left\{4\left[\frac{p^2-\mu E}{p^2-2\mu E}\right]-\frac{1+\beta'p^2}{1+(\beta+\beta')p^2}\right\}\frac{d\psi(p)}{dp}$$
$$+\left\{\frac{6+(10\beta+6\beta')p^2}{[1+(\beta+\beta')p^2]}+\frac{2\mu\alpha/\hbar^2}{[1+(\beta+\beta')p^2]^2}\right\}\frac{\psi(p)}{(p^2-2\mu E)}$$
$$=0\,,\qquad(17.3)$$

بعد التبسيط تحصلنا على هذه المعادلة الأخيرة وهي تمثل معادلة شرودينجر لجسيم ذو كتلة μ في وجود الكمون $V(r)=-\alpha/\mathrm{r}^2$ حيث الطول الاصغري يعطى بـ $(\Delta x)_{min}=\sqrt{3\beta+\beta'}$.

نضع التحويل التالي:

$$z = \frac{(\beta + \beta')p^2 - 1}{(\beta + \beta')p^2 + 1}\,. \tag{18.3}$$

اذن p يكتب من الشكل :

$$p = \frac{1}{\sqrt{\beta + \beta'}}\sqrt{\frac{1 + z}{1 - z}}\ \ , \tag{19.3}$$

مع علاقات الاشتقاق التالية:

$$\frac{d}{dp} = \frac{dz}{dp}\frac{d}{dz}$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\beta + \beta'}}\left(\frac{(1 - z) + (1 + z)}{(1 - z)^2}\right)\left(\frac{\sqrt{(1 - z)}}{2\sqrt{(1 + z)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta + \beta'}}(1 - z)^{\frac{-3}{2}}(1 + z)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{dz}{dp} = \sqrt{\beta + \beta'}(1 - z)^{\frac{3}{2}}(1 + z)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp} = \sqrt{\beta + \beta'}(1 - z)^{\frac{3}{2}}(1 + z)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\,, \tag{20.3}$$

$$\frac{d^2}{dp^2} = \frac{d}{dp}\frac{d}{dp}$$

$$= \sqrt{\beta + \beta'}(1 - z)^{\frac{3}{2}}(1 + z)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[\sqrt{\beta + \beta'}(1 - z)^{\frac{3}{2}}(1 + z)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\right]$$

$$=\sqrt{\beta+\beta'}(1-z)^{\frac{3}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\frac{d}{dz}\sqrt{\beta+\beta'}(1-z)^{\frac{3}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{d}{dz}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\beta+\beta'}(1-z)^{\frac{3}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dz}\frac{d}{dz}\right]\right\}$$
$$=\sqrt{\beta+\beta'}(1-z)^{\frac{3}{2}}(1-z)^{\frac{3}{2}}\left\{\left[\sqrt{\beta+\beta'}\left(\frac{-3}{2}(1-z)^{\frac{1}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(1-z)^{\frac{3}{2}}(1+z)^{\frac{-1}{2}}\right)\right]\frac{d}{dz}+\sqrt{\beta+\beta'}(1-z)^{\frac{3}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dz^2}\right\}$$
$$=(\beta+\beta')\left\{\left(\frac{-3}{2}(1-z)^2(1+z)^1+\frac{1}{2}(1-z)^3\right)\frac{d}{dz}\right.$$
$$\left.+(1-z)^3(1+z)\frac{d^2}{dz^2}\right\}$$
$$\frac{d^2}{dp^2}=-(\beta+\beta')(1-z)^2(1+2z)\frac{d}{dz}$$
$$+(\beta+\beta')(1-z)^3(1+z)\frac{d^2}{dz^2}\ . \qquad (21.3)$$

بعد تعويض (20.3) و (21.3) في معادلة شرودينجر (17.3) نحصل على :

$$(1-z)^2(1+z)\frac{d^2\psi}{dz^2}$$
$$+(1+z)\left\{8\frac{(1+z)-\mu E(\beta+\beta')(1-z)}{(1+z)-2\mu E(\beta+\beta')(1-z)}\right.$$
$$\left.-\frac{(\beta+2\beta')z+2\beta+3\beta'}{\beta+\beta'}\right\}\frac{d\psi}{dz}$$
$$+\left\{\frac{6+\frac{2\beta}{\beta+\beta'}(1+z)+\frac{\mu\alpha}{2\hbar^2}(1-z)^2}{(1+z)-2\mu E(\beta+\beta')(1-z)}\right\}\psi$$
$$=0\ . \qquad (22.3)$$

نعرف المعاملات التالية :

$$\omega_1=\beta+\beta',\quad \omega_2=\beta+2\beta\ ,\quad \omega_3=2\beta+3\beta',$$

$$\omega_4=\frac{\beta}{\beta+\beta'}\quad ,\omega=-\mu(\beta+\beta')E\quad ,k=\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}=4k_0\,. \qquad (23.3)$$

تصبح المعادلة (22.3) من الشكل التالي:

$$\begin{aligned}&(1-z)^2(1+z)\frac{d^2\psi}{dz^2}\\&+(1-z)\left\{8\frac{(1+z)+\omega(1-z)}{(1+z)+2\omega(1-z)}\right.\\&\left.-\frac{1}{\omega_1}(\omega_2 z+\omega_3)\right\}\frac{d\psi}{dz}\left\{\frac{6+2\omega_4(1+z)+k_0(1-z)^2}{(1+z)+2\omega(1-z)}\right\}\psi\\&=0,\end{aligned}$$

بالتبسيط نحصل على:

$$\begin{aligned}&(1-z^2)(1-z)\frac{d^2\psi}{dz^2}\\&+(1-z)\left\{8\frac{(1+\omega)+(1-\omega)z}{(1+2\omega)+z(1-2\omega)}-\frac{1}{\omega_1}(\omega_2 z+\omega_3)\right\}\frac{d\psi}{dz}\\&+\left\{\frac{k_0z^2+2(\omega_4-k_0)z+(6+2\omega_4+k_0)}{(1+2\omega)+z(1-2\omega)}\right\}\psi=0,\end{aligned}$$

بالقسمة على$(1-z)$ نجد :

$$\begin{aligned}&(1-z^2)\frac{d^2\psi}{dz^2}\\&+\left\{8\frac{(1+\omega)+(1-\omega)z}{(1+2\omega)+(1-2\omega)z}-\frac{1}{\omega_1}(\omega_2 z+\omega_3)\right\}\frac{d\psi}{dz}\\&+\left\{\frac{k_0z^2+2(\omega_4-k_0)z+(6+2\omega_4+k_0)}{(-1+2\omega)z^2-4\omega z+(1+2\omega)}\right\}\psi\\&=0\,.\end{aligned} \qquad (24.3)$$

في هذا الاختيار ، وجدنا صعوبة في ايجاد حل لهذه المعادلة في فضاء الحركة p ، نحاول استعمال تمثيل اخر لايجاد حل للمعادلة (14.3) .

نختار التمثيل التالي (نفس التمثيل الذي أخترناه في الفصل الثاني) :

$$\hat{X}_i=x_i\ ,\quad \hat{P}_i=p_i\left(1+\beta\hat{P}^2\right)\ . \qquad (25.3)$$

في هذه الحالة تكتب معادلة شرودينجر على النحو التالي :

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2\mu}+\frac{\beta}{\mu}\vec{P}^4+V(r)\right]\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r}). \qquad (26.3)$$

باستعمال التحويل التالي :

$$\psi(\vec{r})=(1-2\beta\hat{p}^2)\varphi(\vec{r})\,. \qquad (27.3)$$

فان المعادلة (26.3) يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2\mu}+\frac{\beta}{\mu}\vec{P}^4+V(r)\right](1-2\beta\hat{p}^2)\varphi(\vec{r})=E(1-2\beta\hat{p}^2)\varphi(\vec{r}).$$

$$\frac{\hat{P}^2}{2\mu}\,\varphi(\vec{r})-\frac{\beta\hat{P}^4}{\mu}\,\varphi(\vec{r})-\frac{2\beta^2\hat{P}^6}{\mu}\,\varphi(\vec{r})+\frac{\beta\hat{P}^4}{\mu}\,\varphi(\vec{r})$$
$$+V(r)\,\varphi(\vec{r})-2\beta\hat{p}^2\,V(r)\,\varphi(\vec{r})-\,E\varphi(\vec{r})+2\beta\hat{p}^2E\varphi(\vec{r})$$
$$=0\,,$$

نأخذ الرتبة الأولى لـβ :

$$\left[(1+4\mu\beta[E-V(r)])\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+V(r)-E\right]\varphi(\vec{r})=0 \qquad (28.3)$$

يمكن كتابة دالة الموجة على شكل جداء (فصل المتغيرات) ،بالتعويض في المعادلة (28.3) نحصل على:

$$\left[(1+4\mu\beta[E-V(r)])\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-V(r)]\right]R(r)$$
$$=0\,. \qquad (29.3)$$

حيث:

$$\varphi(\vec{r})=Y_l^m(\theta,\varphi)R(r)$$

و $\alpha<0,\ V(r)=\frac{-\alpha}{r^2}$

نعوض $V(r)$ في المعادلة (29.3) نجد :

$$\left[\left(1-\Omega-\frac{\alpha\Omega}{Er^2}\right)\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\left(1-\Omega-\frac{\alpha\Omega}{Er^2}\right)\frac{d}{dr}-\left(1-\Omega-\frac{\alpha\Omega}{Er^2}\right)\frac{L}{r^2}+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\left(\frac{\alpha}{Er^2}+1\right)\right]R(r)=0, \qquad (30.3)$$

حيث : $L=l(l+1) \quad , \; \Omega=-4\mu\beta E$

نضع: $x=-\frac{Er^2}{\alpha}$

لدينا إذا المشتقات التالية :

$$\frac{d}{dr}=\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}=\frac{-2\mathrm{Er}}{\alpha}\frac{d}{dx}.$$
$$\frac{d^2}{dr^2}=\frac{-2Er}{\alpha}\frac{d}{dx}\left[\frac{-2Er}{\alpha}\frac{d}{dx}\right],$$

بتعويض قيمة r في عبارة $\frac{d^2}{dr^2}$ نحصل على:

$$\frac{d^2}{dr^2}=\frac{-2E}{\alpha i}\sqrt{\frac{x\alpha}{E}}\left[\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{-2E}{\alpha i}\sqrt{\frac{x\alpha}{E}}\right)\right]\frac{d}{dx}-\frac{2E}{\alpha i}\sqrt{\frac{x\alpha}{E}}\frac{d^2}{dx^2}\right]$$
$$=\frac{-2}{i}\sqrt{\frac{Ex}{\alpha}}\left[\left(\frac{-1}{i}\sqrt{\frac{E}{\alpha x}}\right)\frac{d}{dx}\right]-\frac{4Ex}{\alpha}\frac{d^2}{dx^2}=\frac{-2E}{\alpha}\frac{d}{dx}-\frac{4Ex}{\alpha}\frac{d^2}{dx^2}$$

بتعويض المشتقات في المعادلة (30.3) نحصل على :

$$\left[\left(\varepsilon+\frac{\Omega}{x}\right)\left(\frac{-2E}{\alpha}\right)\frac{d}{dx}-\left(\varepsilon+\frac{\Omega}{x}\right)\left(\frac{4Ex}{\alpha}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\varepsilon+\frac{\Omega}{x}\right)\left(\frac{4E}{\alpha}\frac{x\propto}{E}\right)\frac{d}{dx}+\left(\varepsilon+\frac{\Omega}{x}\right)\frac{LE}{x\alpha}+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\left(\frac{-1}{x}+1\right)\right]R(x)=0,$$

نضرب في x نحصل :

$$\left[(\varepsilon x+\Omega)\left(\frac{-4xE}{\alpha}\right)\frac{d^2}{dx^2}-(\varepsilon x+\Omega)\left(\frac{-6E}{\alpha}\right)\frac{d}{dx}+(\varepsilon x+\Omega)\frac{lE}{x\alpha}+\frac{2EK}{\alpha}(x+1)\right]R(x)=0$$

بالقسمة على $\left(\frac{-4xE}{\propto}\right)$ نجد:

$$\left[(\varepsilon x+\Omega)\frac{d^2}{dx^2}+\frac{3}{2}\frac{(\varepsilon x+\Omega)}{x}\frac{d}{dx}-\frac{L}{4}\frac{(\varepsilon x+\Omega)}{x^2}+k\frac{(1-x)}{x}\right]R(x)=0\,. \qquad (31.3)$$

حيث : $k=\frac{\mu\alpha}{2\hbar^2}$ $,\varepsilon=1-\Omega$

بأخذ التحويل :

$$R(x)=x^{-\frac{1}{4}\sqrt{4L+1}-\frac{1}{4}}\ f(x)=x^{-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}}f(x)\,, \qquad (32.3)$$

لدينا المشتقات التالية :

$$\frac{dR(x)}{dx}=\left(-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\right)f(x)x^{-\frac{1}{2}l-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}}\ \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2}=x^{-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}}\ \frac{d^2f}{dx^2}+(-l-1)x^{-\frac{1}{2}l-\frac{3}{2}}\ \frac{df}{dx}+\left(\frac{L^2}{4}l+l+\frac{3}{4}\right)\ x^{-\frac{1}{2}l-\frac{5}{2}}f(x)$$

بتعويض المشتقات $\frac{d^2R(x)}{dx^2}$ و $\frac{dR(x)}{dx}$ في المعادلة (31.3) نحصل على:

$$(\varepsilon x+\Omega)\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{(l-1)}{x}\frac{df}{dx}+\frac{\left(\frac{L^2}{4}+l+\frac{3}{4}\right)}{x^2}f\right]+\frac{3}{2}(\varepsilon x+\Omega)\left[\left(\frac{-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}}{x^2}\right)f+\frac{df}{dx}\right]\left[-\frac{l}{4}\frac{(\varepsilon x+\Omega)}{x^2}k\frac{(1-x)}{x}\right]f(x)=0,$$

بالتبسيط نجد:

$$(\varepsilon x+\Omega)\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{df}{dx}\left(\frac{l-1+3/2}{x}+\frac{3}{2}\right)+k\frac{(1-x)}{x}\right]f(x)=0,$$

بالقسمة على $(\varepsilon x+\Omega)$ نحصل على :

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1/2-l}{x}\frac{d}{dx}-\frac{k}{x}\frac{(1-x)}{(\varepsilon x+\Omega)}+\right]f(x)=0\,. \qquad (33.3)$$

يمكننا أن نضع المتغير الجديد y على النحو التالي :

$$y=-\frac{\varepsilon}{\Omega}x\,, \qquad (34.3)$$

لدينا إذا :

$$\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}=\frac{-\varepsilon}{\Omega}\frac{d}{dy}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}=\frac{-\varepsilon}{\Omega}\frac{d}{dy}\left[\frac{-\varepsilon}{\Omega}\frac{d}{dy}\right]=\left(\frac{-\varepsilon}{\Omega}\frac{d}{dy}\right)^2$$

بتعويض المشتقات $\frac{d}{dx},\frac{d^2}{dx^2}$ و $y=-\frac{\varepsilon}{\Omega}x$ في المعادلة(33.3)نجد:

$$\left[\frac{\varepsilon^2}{\Omega^2}\frac{d^2}{dy^2}-\frac{(1/2-l)\varepsilon}{y\Omega}\left(\frac{-\varepsilon}{\Omega}\frac{d}{dy}\right)+\frac{k\varepsilon}{y\Omega}\frac{\left(1-\frac{y\Omega}{\varepsilon}\right)}{\left(\varepsilon\frac{y\Omega}{\varepsilon}+\Omega\right)}\right]f(x)=0\,.$$

بالتبسيط نحصل على:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1/2-l}{y}\frac{d}{dy}+\frac{\frac{k}{\varepsilon}\left(\frac{\Omega}{\varepsilon}y+1\right)}{y(y-1)}\right]f(y)=0\,. \qquad (35.3)$$

نأخذ تحويل آخر:

$$f(y)=(y-1)g(y)\,, \qquad (36.3)$$

نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}+\left[\frac{1/2-l}{y}+\frac{2}{(y-1)}\right]\frac{d}{dy}+\frac{\frac{k}{\varepsilon}\left(\frac{\Omega}{\varepsilon}y+1\right)+1/2-l}{y(y-1)}\right]g(y)$$
$$=0. \qquad (37.3)$$

هذه المعادلة لها شكل معادلة " Heun " والمعرفة بالعلاقة التالية:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}+\left(a+\frac{b+1}{y}+\frac{c+1}{(y-1)}\right)\frac{d}{dy}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}a(b+c+2)+d\right)y+e+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}(c-a)(b+1)}{y(y-1)}\right]g(y)$$
$$=0, \qquad (38.3)$$

بالمطابقة بين العبارتين (37.3) و(38.3) نحصل على المعاملات التالية :

$$a=o\ ,b=-1/2-l\ ,c=1\ ,d=\frac{k\Omega}{\varepsilon^2}\ ,e=\frac{k}{\varepsilon}+1/2 \quad (39.3)$$

ومنه الحل النهائي يكتب على الشكل :

$$\psi(r,\theta,\varphi)=Y_l^m(\theta,\varphi)R(r) \qquad (40.3)$$

حيث:

$$R=x^{-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}}f(x)\,,$$
$$f(y)=(y-1)g(y),$$
$$g(y)=H(a,b,c,d,e;y)\,,$$
$$f(y)=(y-1)H(a,b,c,d,e;y),$$
$$R=x^{-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}}\left(\frac{-\varepsilon x}{\Omega}-1\right)H_c\left(0,\frac{1}{2}+l,1,\frac{k\Omega}{\varepsilon^2},\frac{k}{\varepsilon}-\frac{1}{2};\frac{-\varepsilon x}{\Omega}\right).$$

خلاصة الفصل:

في هذا الفصل قمنا بحل معادلة شرودينجر في وجود الكمون $V(r) = \frac{-\propto}{r^2}$ في 3 أبعاد ضمن فضاء الحركة حيث تمكنا بعد القيام بتحويلات وخصائص رياضية من إيجاد حل لها، والذي هو عبارة عن دالة فوق هندسية وعند القيام بحل معادلة شرودينجر في وجود الطول الأصغري وجدنا صعوبة في إيجاد حل نهائي لها في فضاء الحركة لذا قمنا بحلها في فضاء الموضع وباستعمال بعض التحويلات الرياضية تحصلنا على حل من شكل كثير حدود Heun.

الفصل الرابع :حل معادلة كلاين غوردن في وجود حقل سلمي وحقل شعاعي

1.4 مقدمة :

في هذا الفصل نطبق مبدأ الارتياب المعمم على معادلة كمية نسبية ، نختار معادلة كلاين غوردن في بعدين تحت تأثير حقلين سلمي وشعاعي في وجود الطول الأصغري .

2.4 معادلة كلاين غوردن تحت تأثير حقل سلمي وحقل شعاعي في وجود الطول الأصغري:

تعطى معادلة "كلاين غوردن" لجسيم ذو كتلة m في وجود كمون سلمي $S(X)$ وآخر شعاعي $V(X)$:

$$\{c^2P^2+[mc^2+S(X)]^2-[E-V(X)]^2\}\psi=0\,. \tag{1.4}$$

حيث :

$$S(X)=\lambda\hat{X}\,,\;\; V(X)=k\hat{X} \tag{2.4}$$

λ و k ثابتان موجبان.

نعتبر التمثيل التالي [30] :

$$\hat{X}=i\hbar\left[(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p\right],\quad \hat{P}=p\,, \tag{3.4}$$

في هذه الحالة المعادلة (1.4) تكتب من الشكل :

$$\left\{c^2P^2+\left[mc^2+\lambda i\hbar\left[(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p\right]\right]^2\right.$$
$$\left.-\left[E-ki\hbar\left[(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p\right]\right]^2\right\}\psi=0,$$

نضع $\gamma=0$ لتبسيط الحساب لأنه لايؤثر على العلاقات التبديلية .

$$\left\{c^2P^2+m^2c^4+2\lambda i\hbar mc^2(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\right.$$
$$+\lambda i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\left[\lambda i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\right]-E^2$$
$$-\left[-2kEi\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\right.$$
$$\left.\left.-ki\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\left[-ki\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\right]\right]\right\}\psi(p)=0\,,$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$\left\{\mathrm{c}^2\mathrm{P}^2+\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4-E^2+2i\hbar(1+\beta p^2)(\lambda mc^2+kE)\frac{\partial}{\partial p}\right.$$
$$-2\hbar^2\lambda^2\beta p(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}-\hbar^2\lambda^2(1+\beta p^2)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}$$
$$+2\hbar^2k^2\beta p(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}$$
$$\left.+\hbar^2k^2(1+\beta p^2)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right\}\psi(p)=0,$$

بالتبسيط نحصل على:

$$\left[-\hbar^2(\lambda^2-k^2)(1+\beta p^2)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right.$$
$$+\left[2i\hbar(\lambda mc^2+kE)-2\hbar^2(\lambda^2-k^2)\beta p\right]$$
$$\left.\times(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}+c^2p^2+m^2c^4-E^2\right]\psi(p)$$
$$=0\,. \qquad (4.4)$$

نعتبر التحويل التالي :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\beta}} arctan\left(\sqrt{\beta}p\right), \tag{5.4}$$

$$\sqrt{\beta}\rho = arctan\left(\sqrt{\beta}p\right) \Rightarrow \sqrt{\beta}p = \tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right).$$

حيث : $p \in (-\infty, \infty)$ و $\rho \in \left(-\pi/2\sqrt{\beta}\ ,\ \ \pi/2\sqrt{\beta}\right)$

اذن يمكن كتابة المشتقات من الشكل :

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{1+\beta p^2}\frac{\partial}{\partial \rho}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{1+\beta p^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{1+\beta p^2}\right]\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{1+\beta p^2}\left[\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial \rho}\right]$$

$$= \frac{-2\beta p}{(1+\beta p^2)^2}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{1+\beta p^2}\left[\frac{1}{1+\beta p^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} = \frac{-2\beta p}{(1+\beta p^2)^2}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{(1+\beta p^2)^2}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\ .$$

بتعويض المشتقات$\frac{\partial}{\partial p}$ و $\frac{\partial^2}{\partial p^2}$ في المعادلة (4.4) نحصل على :

$$\begin{aligned}\Bigg[-\hbar^2(\lambda^2-k^2)(1+\beta p^2)^2\left[\frac{-2\beta p}{(1+\beta p^2)^2}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{(1+\beta p^2)^2}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right] \\ + \left[2i\hbar(\lambda mc^2+kE) - 2\hbar^2(\lambda^2-k^2)\beta p\right](1 \\ + \beta p^2)\left[\frac{1}{1+\beta p^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\right] + c^2p^2 + m^2c^4 - E^2\Bigg]\psi(\rho) = 0,\end{aligned}$$

بالنشر نحصل على:

$$\left\{2\hbar^2(\lambda^2-k^2)\beta p\frac{\partial}{\partial\rho}-\hbar^2(\lambda^2-k^2)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+2i\hbar(\lambda mc^2+kE)\frac{\partial}{\partial\rho}-2\hbar^2(\lambda^2-k^2)\beta p\frac{\partial}{\partial\rho}+c^2p^2+m^2c^4-E^2\right\}\psi(\rho)=0\,,$$

بالتبسيط نجد:

$$\left\{-\hbar^2(\lambda^2-k^2)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+2i\hbar(\lambda mc^2+kE)\frac{\partial}{\partial\rho}+c^2p^2+m^2c^4-E^2\right\}\psi(\rho)=0\,,$$

نقسم على $-\hbar^2(\lambda^2-k^2)$ نحصل على :

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{2i(\lambda mc^2+kE)}{\hbar(\lambda^2-k^2)}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{c^2p^2}{\hbar^2(\lambda^2-k^2)}-\frac{m^2c^4-E^2}{\hbar^2(\lambda^2-k^2)}\right\}\psi(\rho)=0\,,$$

بتعويض قيمة p^2 نحصل على:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{2i\sqrt{\beta}(\lambda mc^2+kE)}{\hbar\sqrt{\beta}(\lambda^2-k^2)}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{c^2\beta tan^2(\sqrt{\beta}\rho)}{\hbar^2\beta^2(\lambda^2-k^2)}-\frac{\beta(m^2c^4-E^2)}{\beta\hbar^2(\lambda^2-k^2)}\right\}\psi(\rho)=0\,,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-2i\alpha\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}-\beta\delta tan^2(\sqrt{\beta}\rho)-\beta\varepsilon\right]\psi(\rho)=0\,. \qquad (6.4)$$

حيث ان المعاملات: $\alpha, \varepsilon, \delta$ تعطى بالعبارات التالية :

$$\varepsilon=\frac{m^2c^4-E^2}{\hbar^2(\lambda^2-k^2)\beta}\,,\alpha=\frac{\lambda mc^2+kE}{\hbar(\lambda^2-k^2)\sqrt{\beta}},\delta=\frac{c^2}{\hbar^2(\lambda^2-k^2)\beta^2}\,. \qquad (7.4)$$

لتبسيط لحل الرياضي نختار التحويل التالي :

$$\varphi(\rho) = e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi(\rho)\,, \tag{8.4}$$

الدالة الجديدة (8.4) تحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$\left[\frac{\partial^2\left(e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi(\rho)\right)}{\partial\rho^2} - 2i\alpha\sqrt{\beta}\frac{\partial\left(e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi(\rho)\right)}{\partial\rho}\right.$$

$$\left. - \beta\delta tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\left(e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi(\rho)\right) - \beta\varepsilon\left(e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi(\rho)\right)\right] = 0\,,$$

بالاشتقاق نجد:

$$\left[e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + 2i\alpha\sqrt{\beta}e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \alpha^2\beta e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi\right.$$

$$- 2i\alpha\sqrt{\beta}\left(i\alpha\sqrt{\beta}e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi + e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)$$

$$\left. - \beta\delta tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi - \beta\varepsilon e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}\varphi\right] = 0\,,$$

بالقسمة على $e^{i\alpha\sqrt{\beta}\rho}$ نحصل على :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \beta\delta tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right) + \beta(\alpha^2 - \varepsilon)\right]\varphi(\rho) = 0\,. \tag{9.4}$$

نضع :

$$\varphi(\rho) = cos^v\left(\sqrt{\beta}\rho\right)f(\rho)\,, \tag{10.4}$$

وبالتالي فان المشتقات تكتب على الشكل :

$$\frac{\partial\varphi(\rho)}{\partial\rho}=\left[-vcos^{v-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\,sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\right]f(\rho)+cos^{v}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\ .$$

$$\frac{\partial^{2}\varphi(\rho)}{\partial\rho^{2}}=v(v-1)cos^{v-2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\beta sin^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)f(\rho)-vcos^{v-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\beta$$

$$cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)f(\rho)-vcos^{v-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\,sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}$$

$$-vcos^{v-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\,sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}+cos^{v}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial^{2}f(\rho)}{\partial\rho^{2}}\ .$$

بتعويض المشتقات في المعادلة (9.4) نحصل على :

$$\begin{aligned}\Bigg\{cos^{v}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial^{2}f(\rho)}{\partial\rho^{2}}&-2vcos^{v-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\,sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\\&-vcos^{v-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\beta\,cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\ f(\rho)\\&+v(v-1)cos^{v-2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\beta sin^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)f(\rho)\\&-\beta\delta tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)cos^{v}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)f(\rho)\\&+\beta(\alpha^{2}-\varepsilon)cos^{v}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)f(\rho)\Bigg\}=0\,,\end{aligned}$$

بالقسمة على $cos^{v}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)$ نحصل على:

$$\begin{aligned}\Bigg\{\frac{\partial^{2}f(\rho)}{\partial\rho^{2}}&-2v\sqrt{\beta}\frac{sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}{cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}-v\beta\,f(\rho)\\&+v(v-1)\beta\frac{sin^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}{cos^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}\ f(\rho)-\beta\delta tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)f(\rho)\\&+\beta(\alpha^{2}-\varepsilon)f(\rho)\Bigg\}=0\,,\end{aligned}$$

بالتبسيط نجد:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2v\sqrt{\beta}tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho} + \beta[v(v-1) - \delta]tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right) + \beta(\alpha^2 - \varepsilon - v)\right]f(\rho) = 0, \quad (11.4)$$

نختار v لالغاء الحد $tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)$:

$$v(v-1) - \delta = 0 \quad (12.4)$$

نأخذ

$$v = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \delta}\,. \quad (13.4)$$

و بالتالي المعادلة (11.4) تصبح :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2v\sqrt{\beta}tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho} + \beta(\alpha^2 - \varepsilon - v)\right]f(\rho) = 0\ . \quad (14.4)$$

نعتبر التحويل التالي :

$$z = \frac{1}{2}\left[1 - sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\right]. \quad (15.4)$$

لدينا إذا :

$$\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial z} \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} = \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\sqrt{\beta}\,cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\right]\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sqrt{\beta}\,cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$= +\frac{1}{2}\beta\, sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sqrt{\beta}\, cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\left[\frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$= +\frac{1}{2}\beta\, sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{4}\beta cos^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (17.4)$$

حيث المتغير الجديد. $-1 < z < 1$

إذن بالتعويض (16.4) و(17.4)في المعادلة (14.4) نحصل على :

$$\left\{\frac{1}{4}\beta cos^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\beta\, sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial z} - 2v\sqrt{\beta} tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\, cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial z}\right] + \beta(\alpha^2 - \varepsilon - v)\right\} f(z) = 0 \ ,$$

بالقسمة على β نحصل على:

$$\left\{\frac{1}{4}cos^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{2} + v\right) sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial z} + (\alpha^2 - \varepsilon - v)\right\} f(z) = 0 \ . \qquad (18.4)$$

من المعادلة (15.4) لدينا :

$$z = \frac{1}{2}\left[1 - sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\right] \Rightarrow 1 - 2z = sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \qquad (19.4)$$

ونعلم أن:

$$\cos^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right) = 1 - \sin^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \Rightarrow \cos^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right) = 1 - (1 - 2z)^2 = 4z(1 - z) \qquad (20.4)$$

إذا وبتعويض المعادلتين (19.4) و (20.4) في المعادلة (18.4) نجد :

$$\left\{\frac{1}{4}\big(4z(1-z)\big)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left(\frac{1}{2}+v\right)(1-2z)\frac{\partial}{\partial z}+(\alpha^2-\varepsilon-v)\right\} f(z)=0\,,$$

$$\left\{z(z-1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left[v+\frac{1}{2}-(2v+1)z\right]\frac{\partial}{\partial z}+\alpha^2-\varepsilon-v\right\}f(z)$$
$$=0\,. \qquad (21.4)$$

هذه المعادلة لها شكل معادلة الدالة الفوق الهندسية "hypergéometrique "

$$z(1-z)\frac{\partial^2 f(z)}{\partial \mathrm{z}^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{\partial f(z)}{\partial z}-abf(z)=0\,.$$

إذن بالمطابقة يمكننا حساب المعاملات a,b,c :

$$ab=-\alpha^2+\varepsilon+v\ \text{،}\ 2v=a+b\ \Rightarrow\ b=2v-a\ \text{،}\quad c=v+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ -\alpha^2+\varepsilon+v=a(2v-a)=a^2-2va-\alpha^2+\varepsilon+v=0$$

$$\Rightarrow\ \Delta=4v^2-4(-\alpha^2+\varepsilon+v)=4[v(v-1)+\alpha^2-\varepsilon]$$

باستخدام المعادلة (12.4) نجد:

$$a=\frac{2v-2\sqrt{v(v-1)+\alpha^2-\varepsilon}}{2}=v-\sqrt{\delta+\alpha^2-\varepsilon}$$

$$b=2v-a\ \Rightarrow\ 2v-\left(v-\sqrt{\delta+\alpha^2-\varepsilon}\right)=v+\sqrt{\delta+\alpha^2-\varepsilon}$$

اذن الحل العام للمعادلة (21.4) يعطى بـ :

$$f(z)=\mathrm{A}F(a,b,c;z)\,, \qquad (22.4)$$

حيث A ثابت تنظيم والمعاملات a,b,c تعطى بـ:

$$a=v-\sqrt{\delta+\alpha^2-\varepsilon},\qquad b=v+\sqrt{\delta+\alpha^2-\varepsilon}\,,\qquad c=v+\frac{1}{2}$$

خلاصة الفصل:

في هذا الفصل قمنا بدراسة معادلة كلاين غوردن في بعدين في وجود حقلين سلمي وآخر شعاعي في وجود مبدأ عدم اليقين المعمم وقد تمكنا بعد القيام بعدة تحويلات وبعض الخصائص الرياضية من إيجاد الحل النهائي لمعادلة كلاين غوردن والذي هو عبارة عن دالة "hypergéométrique " والذي يمكننا من إيجاد التصحيح في الطاقة بدلالة الطول الأصغري.

خـــاتمة

في هذه المذكرة قمنا بالتعريف بنظرية الطول الأصغري ومبدأ عدم اليقين المعمم لهايزنبرغ وقدمنا البناء الرياضي لهذه الميكانيك الكمي المشوه ومختلف التقريبات والنماذج المقترحة ، ثم قمنا بتطبيق هذا المبدأ المعمم على بعض النماذج الكمية المعروفة وكانت التطبيقات على النحو التالي :

درسنا معادلة شرودينجر بالنسبة لحقل مركزي (اخترنا هزاز توافقي وذرة الهيدروجين كأمثلة)، وباستعمال نظرية الارتياب من الدرجة الأولى لمعامل التشوه β استنتجنا عبارات الطاقة والتي تتعلق بالرقم الكمي المداري l مما يسمح برفع بعض حالات التوالد ويعطينا نتائج أقرب للقيم التجريبية ، ومن خلال هذه النتائج يمكننا استخلاص قيمة الطول الأصغري $(\Delta x)_{min}$ تجريبيا.

في دراسة أخرى قمنا بتطبيق مبدأ لهايزنبرغ المعمم على معادلة شرودينجر في وجود الكمون $\frac{-\alpha}{r^2}$ وحاولنا إيجاد حلول للمعادلة في فضاء كمية الحركة p ولكننا وجدنا صعوبات في إيجاد الحل وذلك باتباع طريقة الحل العادية (في ميكانيك الكم العادي) ، لذلك قمنا بحلها ولكن في فضاء الموضع x واستطعنا باستعمال بعض التحويلات الرياضية للوصول إلى حل على شكل كثير حدود Heun .

وفي الأخير قمنا بتطبيق هذا المبدأ على معادلة كمية نسبية واخترنا معادلة كلاين غوردن في بعدين لتبسيط الحساب، وفي وجود حقلين سلمي وآخر شعاعي .

في فضاء كمية الحركة وباستعمال بعض التحويلات والخصائص الرياضية استطعنا إيجاد حلول تحليلية دقيقة على شكل دوال فوق هندسية تتعلق بمعامل التشوه β .

إن ميكانيك الكم المشوه رغم بعض المشاكل الرياضية فإنه يعطينا نتائج تكون أقرب للقياسات التجريبية،

ويمكننا من تعميم وإيجاد حلول ربما كانت عالقة في ميكانيك الكم العادي.

المشاكل الرياضية:

- صعوبة حل بعض المعادلات.
- عدم التمكن من تكوين أو إنشاء نظرية حقول تسمح لنا بالحصول على المعادلة الكمية النسبية المشوهة.

قائمــة المراجع

[1] Achim. Kempf , Phys. Rev. D 54, 5174 (1996).

[2] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D52, 1108 (1995).

[3] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37 ,2121-2137 (1996).

[4] M. Magiore, Phys. Lett. B 319, 83 (1993).

[5] Achim. Kempf , Phys. Rev. D 55, 7909 (1997).

[6] Achim. Kempf, J. Phys. A : Math. Gen. 30, 2093 (1997).

[7] Sabine. Hossenfelder, Class. Quantum Grav. 23, 1815 (2006).

[8] of the Nuclear Physics, Winter Meeting, U. Harbach, S. Hossenfelder, M. Bleicher and H. Stoecker, Proceedings Bormio, Italy ; e-print arXiv :hep-ph/0404205 ,(2004).

[9] U. Harbach and S. Hossenfelder, M. Bleicher, and H. Stöcker, Phys. Lett. B 584, 109 (2004).

[10] S. Hossenfelder, Phys. Lett. B 598, 92 (2004).

[11] S. Hossenfelder, Mod. Phys. Lett. A 37, 379-383 (2004).

[12] K. Gottfried, Quantum Mechanics, Vol.1: Fundamentals, (Academic Press Inc, New York, p. 213 (1966).

[13] Achim. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994).

[14] Achim. Kempf, J. Math. Phys. 38, 1344 (1997).

[15] Achim. Kempf , Phys. Rev. D 54, 5174 (1996).

[16] C. Quesne et al, J. Phys. A : Math. Gen. 38, 1747-1765 (2005).

[17] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65, 125027 (2002).

[18] Kh. Nouicer, J. Phys. A : Math. Gen. 39, 5125 (2006).

[19] F. Brau, J. Phys. A : Math. Gen. 32, 7691 (1999).

[20] M. M. Stetsko, Phys. Rev. A 74, 062105 (2006).

[21] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65, 125027 (2002).

[22] S. Z. Benczik, Investigations on the minimal-length uncertainty relation, PhD Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University (2007).

[23] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A 74, 012101 (2006).

[24] Gradshteyn I S and Ryzhik Table of Integrals, Series and Products (New York: Academic) (corrected and enlarged edition) I M (1980).

[25] G.Andrews,R.Askey and R.Roy, Special functions, Cambridge (2000).

[26] E. V. Ivash, AJP, V. 40, 1095 (1972).

[27] Milton Abramowitz and Irene A. Stegum, Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 5th Printing S. Government Printing Office, Washington D. C., (1966).

[28] mayer, Phys. Rev. Lett, A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O.I. Marichev, Integrals and Series (Translated from the Russian by G. G. Gould) Vol. 3, p. 330, (Gordon and Breach science publishers, New York, (1998).

[29] D. Bouaziz and M. Bawin, Phys. Rev. A 76, 032112 (2007).

[30] Kempf A, Mangano G and Mann R B phys .Rev.D52 1108.

ملخص :

في هذه المذكرة قمنا بتقديم مبدأ عدم اليقين المعمم لهايزنبرغ وكيفية بناء ميكانيك كمي مشوه انطلاقا من وجود حد أدنى للموضع $(\Delta x)_{min}$ قمنا بتطبيق هذا المبدأ على الحالات التالية :

- معادلة شرودينجر بالنسبة للهزاز التوافقي وذرة الهيدروجين باستعمال نظرية الاضطرابات من الدرجة الأولى حصلنا على تصحيحات في طيف الطاقة .
- معادلة شرودينجر بالنسبة للكمون $\frac{-\alpha}{r^2}$ و ذلك باستعمال تمثيلين واستطعنا إيجاد الحلول التحليلية للمعادلة.
- معادلة كلاين غوردن تحت تأثر حقلين سلمي وشعاعي تمكنا من إيجاد الحل التحليلي للمعادلة والذي يتعلق بالتشوه β.

الكلمات المفتاحية : مبدأ عدم اليقين المعمم ، معادلة شرودينجر، معادلة كلاين غوردن ، الطول الأصغري.

Résumé:

Dans ce mémoire, nous a vans présenté le principe d'incertitude généralisé de Heisenberg, et nous a vans construit une mécanique quantique déformée basée sur la présence d'une longueur minimale$(\Delta x)_{min}$.

Nous a vans appliqué le principe dans les cas suivants:

- Equation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique et l'atome d'Hydrogène . En utilisant la Théorie des perturbations au premier ordre, nous a vans obtenu des corrections dans le sporotric d'énergie.
- Equation de Schrödinger pour le potential $\frac{-\propto}{r^2}$, nous a vans utilisé deux representation et nous a vans abstenu des solutions analytiques de l'équation.
- Equation de Klein –Gordon en présence de deux champs: scalaire et vectoriel , et nous a vans trouvé une solution de cette équation qui dépond du paramétré de déformation β.

Mots-clés : Principe d'incertitude généralisé , équation de Schrödinger, équation de Klein Gordon , longueur minimale .

Abstract:

In this Mastér thesis , we have present the generalized un certanity princeple , which gave a deformed quantum mechanes based on presence of a minimal length $(\Delta x)_{min}$.

We have applied this princple in the following cases:

- Schrödinger equation for harmonic oscillator and Hydrogen atom using the pertubation theory at the first order of β , we have abtained correction of energy spectrun.
- Schrödinger equation for the potenitale $\frac{-\propto}{r^2}$, we have used 2 representations and have obteiuned an analytcal soluition of the equation.
- Klein-Gordon equation in the prcence of twe fields: scalar and vectoriel field , we shown a solution of this equation whieh depend on the parameter of deformetion β.

Keywords: Generalzed un certainty princple , Schrödinger equation ,

Klein-Gordon eqation, minimal length.