جامعة قاصدي مرباح-ورقلة
كلية الرياضيات-علوم المادة
قسم الرياضيات

رقم الترتيب: ....
رقم التسلسل:.....

مذكرة

لإستكمال متطلبات الحصول على

شهادة الماستر أكاديمي

الميدان: رياضيات وإعلام آلي
الشعبة: الرياضيات
التخصص: تحليل دالي

من إعداد الطالبة: عبيدي آية

تحت عنوان

دراسة الخصائص الطيفية للتمديد الحقيقي للمؤثر الهرميتي عن طريق مفهوم الأعداد الناقصة

نوقشت يوم: 2020/09/28 من طرف لجنة المناقشة:

الأستاذ:	قوادري محمد	جامعة قاصدي مرباح	رئيسا
الأستاذ:	سعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح	مناقشا
الأستاذ:	عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح	مشرفا

السنة الجامعية 2020/2019

الإهـــــــداء

الحمد لله الذي بفضله تتم الصالحات وماتوفيقي الا بالله

A

أهدي ثمرة جهدي إلى ....
من تجرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة حب ، من حصد الأشواك
عن دربي ليمهد لي طريق العلم ... أبي الغالي ، أمي الحبيبة
من كانوا لي سندا لما قدماه لي من دعم طيلة مسيرتي
الدراسية حبيبات قلبي اخواتي ، أختي وحبيبتي ونور عيني
خديجة، وسند ظهري اخواني ، واخص بالذكر اخوي بدر
التمام و عماد الدين لما قدماه لي من دعم لي ، اداامهما الله
وكل عائلتي ....

A

استاذي المحترم الدكتور عسيلة مصطفى ...
كل صديقاتي وحبيباتي في الإقامة الجامعية وفي قسم
الرياضيات ، الى رفيقة دربي وتوأم روحي سارة بن طرية ....

A

★★★ عبيدي آية ★★★

تشكرات

اللهم لك الحمد أن وفقتني على إنجاز مذكرتي وأنرت دربي ، سبحانك لا علم لنا إلا ماعلمتنا إنك انت العليم الحكيم، والصلاة والسلام على على الحبيب المصطفى ...

اليوم نجني قطافنا ونودع أحبتنا، وها قد إنسدل الستار على عامنا الخامس من مسيرتنا الجامعية وبهذه المناسبة أتقدم بشكري ألى من علمني وأزال غيمة جهل مررت بها برياح العلم الطيبة وأعاد رسم ملامحي وتصحيح عثراتي أستاذي القدير الدكتور مصطفى عسيلة ، على وقته الثمين الذي وفره لي وعلى إقتراحه الموضوع ...

كما لا يفوتني توجيه شكري وتقديري إلى كل اساتذة قسم الرياضيات في جامعة قاصدي مرباح ...

شكرا لكل من ساعدني من قريب أو بعيد ...

الفهرس

دليل الرموز

الرمز	مدلوله
$\lVert x \rVert$	نظيم العنصر
$\mathbb{K}$	الحقل $\mathbb{K}$ ،(اما $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$)
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة
$(X, \langle\,,\rangle)$	فراغ شبه هلبرتي
$x \perp y$	العنصر x عمودي على y
$A^{\perp}$	مجموعة العناصر العمودية على A
$P_{X_0}x$	المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0
$f(z)$	الدالة المركبة
$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F
$\ker F$	نواة المؤثر F
$\Gamma(F)$	بيان المؤثر F
$L(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y
$l(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y
F^{*}	المؤثر القرين لـ F
$\delta(F,T)$	الإنفراج بين المؤثرين F و T

الرمز	مدلوله
$(X, \Vert\,\Vert)$	الفراغ الشعاعي النظيمي
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\langle\,,\rangle$	تطبيق الجداء السلمي
H	فراغ هلبار
$x \perp A$	x عمودي على المجموعة A
$X_0^{\perp}$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H
$X^{\perp}$	المتمم العمودي للفراغ X بالنسبة للفراغ H
C_0	فراغ المتتاليات الحقيقية
$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F
$F : X \to Y$	المؤثر F من X في Y
X^{*}	فراغ الأشكال الخطية على X
$L(x)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في نفسه
$l(X)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في نفسه
I	المؤثر الحيادي
S	مؤثر الجداء في المتغير المستقل

الرمز	مدلوله	الرمز	مدلوله
Φ	عناصر منضبطة	Φ_0	عناصر منضبطة تامة
$R(A^*)$	صورة المؤثر المنضبط A	$R(B^*)$	صورة المؤثر المنضبط B
F^{-1}	المؤثر العكسي للمؤثر F	$(F_n)_{n\geq 1}$	متتالية المؤثر
$F_n \xrightarrow{n} F$	F_n متقاربة بإنتظام نحو المؤثر F	$F_n \xrightarrow{s} F$	F_n متقاربة بقوة نحو المؤثر F
$F_n \xrightarrow{w} F$	F_n متقاربة بضعف نحو المؤثر F	V_λ	الفراغ الذاتي
M_λ	الفراغ الجذري	$\rho(F)$	مجموعة النقط النظامية للمؤثر F
$\sigma(F)$	طيف المؤثر F	$P_\sigma(F)$	الطيف النقطي للمؤثر F
$C_\sigma(F)$	الطيف المستمر للمؤثر F	$R_\sigma(F)$	الطيف الباقي للمؤثر F
$R_\lambda(F)$	مؤثر الحالة للمؤثر F	$f(F)$	دالة المؤثر F
$A(F)$	مجموعة الدوال التحليلية في جوار ما لـ $\sigma(F)$	E_φ	الدالة الطيفية للمؤثر F
P_σ	المسقط الطيفي	$\{E_\varphi\}$	تحليل الوحدة لـ F
$E(\cdot)$	القياس الطيفي	$l_0(X,Y)$	مجموعة المؤثرات المنتهية من X في Y
$l_\infty(X,Y)$	مجموعة المؤثرات المتراصة من X في Y	$l_1(X)$	صنف المؤثرات النووية من X في نفسه
$l_1(X)$	صنف مؤثرات شميد من X في نفسه	$\tilde{\rho}(A)$	مجموعة النقط الناظمية للمؤثر A
V	التشويش المنضبط (منضبط تام)		

مـــقـــدمـــة عـــــامـــــة

مفهوم المؤثرات الخطية من أهم مفاهيم التحليل الدالي، بل يعتبر العمود الفقري لهذا الفرع من الرياضيات وهو جاء تعميما لمفهوم الدالة في التحليل الرياضي.

دراسة المؤثرات الخطية بكل أنواعها (محدودة وغير محدودة) نتائجها هي تعميم لنتائج دراسة الجبر الخطي في الأبعاد غير المنتهية.

هذه النتائج سهلت الحصول على حلول المعادلات الدالية التي عواملها المؤثرات.

دراسة المؤثرات تكمن في دراسة الخصائص الطيفية لها ومدى إستقرارها في حالة تمديد المؤثر . في هذه المذكرة إعتمدنا نوع من التمديد لنوع من المؤثرات ، وهو التمديد الحقيقي للمؤثر الهرميتي

قسمت هذه المذكرة إلى قسمين :

- **الفصل الاول :** المفاهيم أساسية .
- **الفصل الثاني:**

الفصل

I

مفاهيم عامة حول المؤثرات الخطية

0.I مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التحليل الدالي والتحليل المركب وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية وكيفية تمديدها، هذه المفاهيم وردت مختصرة لأنها ليست هدف الدراسة بل يقدر إستعمالها في الفصل الثاني.

1.I الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 1.1.1 يُسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, ||\cdot||)$ ، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ احد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ ، و $||\cdot||$ تطبيق من X في $\mathbb{R}$ يُحقق الشروط التالية:

$$||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ||x||$$

1. $\forall x \in X,\ ||x||_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X,\ ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$.
3. $\forall x, y \in X,\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

الرمز $||\cdot||$ يُسمى نظيما ، والعدد $||x||$ يُسمى نظيم العدد x.

نتيجة 1.1.1

$$\forall x \in X \longrightarrow ||x|| \geq 0$$

1.1.I التقارب ومتتالية كوشي

ليكن (X, d) فراغا متريا و $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر X و x_0 نقطة من X.

تعريف 2.1.1 1. يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العنصر x_0 إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} d(x_0, x) = 0$$

أي

$$\forall \epsilon > 0 \;,\; \exists n_\epsilon \geq 1 \,/\, \forall n \geq n_\epsilon \to d(x_n, x) \leq \epsilon$$

ونكتب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

2. يقال إن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ لكوشي ، (أساسية) ، إذا كان

$$\forall \epsilon > 0 \;,\; \exists n_\epsilon \geq 1 \,/\, \forall n \geq n_\epsilon \,,\, \forall m \geq n_\epsilon \to d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

نتيجة 2.1.1 1. كل متتالية متقاربة تكون لكوشي.

2. نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ في الفراغ المتري إن وجدت تكون وحيدة.

3. $(a \in \bar{A}) \Leftrightarrow \left(\exists (x_n)_{n\geq 1} \subset A \,/\, \lim_{n\to\infty} x_n = a\right)$ حيث A مجموعة جزئية من X.

تعريف 3.1.1 1. يقال إن الفراغ (X, d) تام، إذا كانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

2. يقال إن المجموعة A من X تامة ، إذا كان الفراغ الجزئي (A, d_A) تاما.

نتيجة 3.1.1 1. إذا كانت A تامة، فهي مغلقة في X.

2. إذا كان X تاما و A مغلقة فيه ، فإن A تامة.

2.1.I فراغ بناخ

تعريف 4.1.1 يُقال ان X فراغ بناخ إذا كانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه. أي فراغ متري تام .

تعريف 5.1.1 يُعرف الإنفراج بين الفراغين الجزئيين X_1 و X_2 من الفراغ الشعاعي النظيمي X ويُرمز له بالرمز $\hat{\delta}(X_1, X_2)$ بالعلاقة التالية:

$$\hat{\delta}(X_1, X_2) = \max[\delta(X_1, X_2), \delta(X_2, X_1)]$$

حيث

$$\delta(X_1, X_2) = \sup_{||x||=1\, x\in X_1} d(x, X_2)$$
$$\delta(X_2, X_1) = \sup_{||x||=1\, x\in X_2} d(x, X_1)$$

نتيجة 4.1.1 يمكن تعريف $\delta(x, X_2)$ على انها اصغر الثوابت α التي تُحقق

$$d(x, X_2) \leq \alpha||x||,\ x \in X_1$$

2.I الفراغ الهلبرتي

1.2.I الجداء السلمي

ليكن X ف. ش. على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 1.2.1 يُعرف الجداء السلمي على X بأنه التطبيق من الجداء $X \times X$ نحو $\mathbb{K}$ أي

$$h:\ X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

يُحقق من أجل كل x ، y، z من X ومن أجل كل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

1. $h(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $h(x, x) = \alpha h(x, x)$.
3. $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$.
4. $h(x + y, z) = h(x, z) + h(y, z)$.

يُرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle\, ,\rangle$ عندها الزوج $(X,\langle,\rangle)$ يُسمى فراغا شبه هلبرتي.

نتيجة 1.2.1 كل فراغ شبه هلبرتي يكون فراغا نظيميا مع:

$$||x|| = \sqrt{h(x,x)}$$

2.2.I فراغ هيلبار

الفراغ الهلبرتي هو كل فراغ شبه هلبرتي تام، ويرمز له بالرمز H.

3.2.I التعامد

مفهوم التعامد :

ليكن X فراغا شبه هلبرتي ، A و B مجموعتان من X ، حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعاريف

1. يُقال ان العنصرين (الشعاعين) x ، y من X متعامدان (ونكتب $x \perp y$) إذا كان جداؤهما السلمي معدوما. أي

$$\langle x, y\rangle = 0$$

2. يُقال ان العنصر x من X عمودي على المجموعة A إذا كان عموديا على كل عنصر من A ونكتب

$$x \perp A \Leftrightarrow \{\forall y \in A \to \langle x, y\rangle = 0\}$$

يُرمز لمجموعة العناصر العمودية على A بـ $A^{\perp}$

3. يُقال ان A و B متعامدان إذا تحقق:

$$\forall x \in A, \forall y \in B \to \langle x, y\rangle = 0$$

ونكتب $A \perp B$.

قضية 1.2.1 ([1]) إذا كان X فراغا شبه هلبرتي، فإن:

1. $\forall x, y \in X \to |\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$ (متراجحة كوشي شوارتز).

2. $\forall x,y \in X \rightarrow ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ (قانون متوازي الاضلاع).

3. $\forall x,y \in X \rightarrow ||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 2(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle)$.

4. $\forall x,y \in X \; 4\langle x,y\rangle = ||x+y||^2 + ||x-y||^2 + i(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2)$

4.2.I الاسقاط العمودي

ليكن X فراغا لهيلبار.

نظرية 1.2.1 ([1]) إذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدبة من H و x من H ، حيث $x \notin A$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A يكون احسن تقريب للعنصر x في المجموعة A. أي

$$\forall x \in H,\; (x \notin A),\; \exists! y_0 \in A \;/\; d(x,y) = ||x-y|| = d_0(x,A)$$

نظرية 2.2.1 ([1]) إذا كان X_0 فراغا جزئيا مغلقا من H ، و x عنصرا من H ، حيث $x \notin X_0$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من X_0 يُمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0 ويُحقق:

$$x - y_0 \perp X_0$$

في هذه الحالة y_0 يُسمى المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0 ، ويُرمز له بالرمز $P_{X_0}x$

5.2.I التحليل العمودي

ليكن H فراغا ليهلبار ، و X_0 فراغا جزئيا مغلقا منه.

تعريف 2.2.1 يُعرّف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H بأنه مجموعة العناصر من H العمودية على X_0 ، أي أنه المجموعة $X_0^{\perp}$.

نتائج

نتيجة 2.2.1 1. $X_0^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.

2. كل عنصر x من H يُكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z \;/\; y \in X_0 \;,\; z \in X_0^{\perp}$$

3. $H = X_0 \bigoplus X_0^{\perp}$ عندها نقول ان X_0 و $X_0^{\perp}$ هما التحليل العمودي للتحليل H ، ونكتب

$$y = P_{X_0}x \;,\; z = P_{X_0^{\perp}}x$$

حيث P_{X_0} هو الإسقاط على الفراغ X_0 و $P_{X_0^{\perp}}$ هو الإسقاط على الفراغ $X_0^{\perp}$

قضية 2.2.1 ([1]) تطبيق الإسقاط P_{X_0} هو تطبيق خطي ومحدود يحُقق:

1. $P_{X_0}^2 = P_{X_0}$.
2. $P_{X_0} \leq 1$.
3. $\forall x, y \in H \ \rightarrow \langle P_{X_0}x, y\rangle = \langle x, P_{X_0 y}\rangle$.

3.I الجمع المباشر الجبري والتبولوجي

ليكن X ف. ش. ن. و X_1 ، X_2 فراغين جزئيين من X.

تعريف 1.3.1 يقُال ان الفراغ X يكُتب بشكل مباشر جبري للفراغيين X_1 و X_2 ونكتب $X = X_1 \dot{+} X_2$ إذا تحقق:

X_1، X_2 يسمى كل منهما متمما جبريا للآخر

$$\forall x \in X \, , \, \exists! x_1 \in X_1 \, , \, \exists! x_2 \in X_2 \ / \ x = x_1 + x_2$$

نتائج

1. المجموع $X = X_1 + X_2$ ، يكون جمع مباشر جبري، إذا وفقط إذا كان $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.
2. كل فراغ جزئي من X يمتلك على الاقل متمما جبريا بالنسبة للفراغ X.
3. الكتابة $X = X_1 + X_2$ تقتضي وجود تطبيق اسقاط P_{x_1} و P_{x_2} ، المعُرفين كالتالي:

$$P_{x_1} \ : \mapsto X_1 / P_{x_1}(x = x_1 + x_2) = x_1$$
$$P_{x_2} \ : \mapsto X_2 / P_{x_2}(x = x_1 + x_2) = x_2$$

التطبيقان p_{x_1} و P_{x_2} واضح انهما خطيان، لكن في الحالة العامة قد يكونا غير مستمرين.

4. إستمرار أحد التطبيقين P_{x_1} أو P_{x_2} ، يقتضي استمرار الآخر ذالك لان $x = P_{x_1}x + P_{x_2}x$

تعريف 2.3.1 الجمع المباشر الجبري $X = X_1 + X_2$ ، يسُمى جمع مباشر تبولوجي ، إذا كان على الأقل أحد التطبيقين P_{x_1} ، P_{x_2} مستمرا ، ونكتب $X = X_1 \bigoplus X_2$ ، عندها يقُال أن X_1 ، X_2 كلا منهما متمما تبولوجيا للآخر بالنسبة للفراغ X.

4.I الجملة المتعامدة والمتجانسة للأساس

ليكن X فراغا شبه هلبرتياو $A = \{x_i\,,\, i \in I\}$ جملة عناصرها من X ، مجموعة الدلائل كيفية I.

قضية 1.4.1 1. يُقال أن الجملة A متعامدة ، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى.

2. يُقال ان الجملة A متعامدة ومتجانسة، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى وتُحقق $\|x_i\| = 1$ ، $i \in I$

الأساس

ليكن X فراغا شبه هلبرتي و $A = \{x_i\,,\, i \in I\}$ جملة متعامدة ومتجانسة فيه .

تعريف 1.4.1 1. يُقال ان الجملة A كلية في X ، إذا كان الفراغ المولد عنها كثيف في X.

2. يُقال ان الجملة A أعظمية (تامة في X) إذا لم يوجد عنصر في X يختلف عن الصفر ويُعامد كل عناصرها .

تعريف 2.4.1 يُعرف الأساس في الفراغ شبه هلبرتي ، بأنه كل جملة متعامدة ومتجانسة وكلية فيه.

5.I المؤثرات ونظرية الأطياف

1.5.I المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|\cdot\|_X)$ و $(Y, \|\cdot\|_Y)$ فراغين شعاعين نظيمين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن D مجموعة غير خالية من X (D قد تساوي X).

تعريف 1.5.1 إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y ، يُقال إنه قد عرّف مؤثر من X في Y ، ويرمز له بالرمز F ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.

- المجموعة D تُسمى مجال تعريف المؤثر F ونرمز لها بـ $D(F)$.
- مجموعة العناصر من Y حيث $y = Fx$ و $x \in D(F)$ تُسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب:

$$E(F) = \{y \in Y \,/\, y = Fx\,,\, x \in D(F)\}$$

- مجموعة الازواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X \times Y$ حيث $x \in D(F)$ تُسمى بيان المؤثر F ويرُمز لها بالرمز Γ_F ونكتب :

$$\Gamma_F = \{(x, Fx) \,/ x \in D(F)\} \subset X \times Y$$

- مجموعة أصفار المؤثر F تُسمى نواة المؤثر F ويُرمز لها بالرمز $\ker F$ ونكتب:

$$\ker F = \{x \in D(F) \,/\, Fx = 0\}$$

قضية 1.5.1 إذا كان F و T مؤثرين من X في Y ، يُقال أن:

1. المؤثرين F و T منطبقان إذا تحقق مايلي :
   - $D(F) = D(T) = D$.
   - $\forall x \in D \to T(x) = F(x)$.
2. المؤثر T تمديد (توسيع) للمؤثر F ، أو إقتصار للمؤثر T إذا تحقق:
   - $D(F) \subset D(T)$.
   - $\forall x \in D(F) \to T(x) = F(x)$

في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(x,y) = L(X)$

قضية 2.5.1 المؤثر F من X في Y يقال أنه خطي إذا تحقق مايلي :

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $\forall x_1, x_2 \in D(F)\,, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \to F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2)$.

ويرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X,Y)$.

- في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(X,Y) = L(x)$.
- في حالة $Y = \mathbb{K}$ المجموعة $L(X,\mathbb{K})$ تُسمى مجموعة الأشكال الخطية على X و عناصرها تُسمى شكل أو دالي خطي ، ويرمز لها بالرمز X^* ، وتُسمى الثنوي الجبري للفراغ X.

قضية 3.5.1 من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1، F_2 من $L(X,Y)$ يُعرّف

1. جمع المؤثرين F_1 ، F_2 كالتالي :

$$(F_1 + F_2)x = F_1 x + F_2 x \ , \ x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. جداء المؤثر F_1 بالعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي :

$$(\alpha F_1)x = \alpha F x \,/\, x \in D(F_1)\,, \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة 1.5.1 **([5])** $L(X,Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

2.5.I مبدأ التمديد بالاستمرارية

ليكن X ف. ش. ن. و Y فراغا لبناخ.

نظرية 1.5.1 ([1]) كل تطبيق F من $l(D(F),Y)$ ، حيث $X = \overline{D(f)}$ له تمديد F' على X ، يُحقق $||F'|| = ||F||$ أي:

$$\exists F' \in l(X,Y) \,/\, F'(x) = F(x)\,,\, x \in D(F)||F'|| = ||F||$$

3.5.I نظرية بناخ شتاينهوس

لتكن $F_n \to f_n$ متتالية من $l(X,Y)$ حيث X بناخ.

قضية 4.5.1 ([1]) إذا وجد ثابت c و $F(x_0,r)$ (كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r) ، بحيث

$$\forall x \in F(x_0,r) \to ||F_n(x)|| < c$$

فإن المتتالية $(||F_n||)_{n\geq 1}$ محدودة ، أي يوجد ثابت M ، يُحقق $||f_n|| < M$ ، $n \geq 1$.

6.I المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y .

تعريف 1.6.1 يُقال ان F محدود على مجموعة تعريفه إذا تحقق :

$$\exists c > 0\,,\, \forall x \in D(F)\,,\, ||F(x)||_Y \leq c||x||_X \tag{I.1}$$

إذا تحققت الصيغة الاخيرة من أجل كل x من X يقال ان F محدود على X أو محدود.
نرمز لمجموعة المؤثرات المحدودة من X في Y حيث $D(F) = X$ بالرمز $l(X,Y)$ وهو فراغ جزئي من $L(X,Y)$.
إذا لم تحقق الصيغة (I.1) يقال أن المؤثر F غير محدود.

تعريف 2.6.1 يُعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بأحد الصيغ التالية :

1. $||F|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Fx||_Y}{||x||_X}$.
2. $||F|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Fx||_Y$.
3. $||F|| = \min\{c \,/\, ||Fx||_Y \leq c||x||_X\}$.

4. $||F|| = \sup_{||x||=1} ||Fx||_Y$

الفراغ $l(X,Y)$ في حالة $Y = \mathbb{K}$ يُسمى الفراغ الثنوي التبولوجي ويرمز له بالرمز X' أي

$$X' = l(X,Y) = l(X)$$

تعريف 3.6.1 1. يقال ان المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $D(F)$ إذا تحقق :

$$\forall \epsilon > 0\,,\, \exists \delta > 0\,/\,(\forall x \in D(F) \cap X\,/\,||x - x_0||_X < \delta) \rightarrow ||Fx - Fx_0|| < \epsilon$$

2. يُقال ان المؤثر F مستمر إذا كان مستمر في كل نقطة من نقاط مجموعة تعريفه.

نتيجة 1.6.1 إذا كان المؤثر F من $L(X,Y)$ فإن F مستمر يكافئ F محدود.

نتيجة 2.6.1 إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ فإن :

1. $\forall x \in X\,,\, ||Fx|| \leq ||F||||x||$.

2. $\forall \epsilon, \exists x_\epsilon \in X\,/\,||Fx_\epsilon|| > (||F|| - \epsilon)||x_\epsilon||$.

7.I المؤثر الهرميتي

تعريف 1.7.1 يُقال أن المؤثر F هرميتي إذا تحقق:

$$\langle Ff, g\rangle = \langle f, Fg\rangle \;\; f, g \in D(F)$$

المؤثر الهرميتي يسمى أيضا متناظر.

قضية 1.7.1 يكون المؤثر F متناظرا إذا وفقط إذا كان $F \subset F^*$ أي اذا كان F^* تمديدا لـ F

نتيجة 1.7.1 كل مؤثر قرين لنفسه يكون هرميتي.

8.I المؤثر المغلق

ليكن F مؤثر من $L(H)$ $(D(F) \neq H)$ و F غير محدود على مجموعة تعريفه .

تعريف 1.8.1 المؤثر F يُقال أنه مغلق إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. بيأنه Γ_F مغلق في $H \bigoplus H$.

2. من أجل كل متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من $D(F)$ حيث

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \ , \ Ff_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$$

يكون

$$g = Ff \ , \ f \in D(F)$$

نتيجة 1.8.1 كل مؤثر محدود يكون مغلقا.

قضية 1.8.1 إذا كان $F \in L(H)$ حيث $\exists F^{-1} \in L(H)$ فإن المؤثر F مغلق.

1.8.I الانفراج بين المؤثرات المغلقة

تعريف 2.8.1 ([6]) إذا كان F و T مؤثرين مغلقين $F, T \in \Im(X, Y)$ فإن الانفراج بين المؤثرين F و T يعرف على أنه الانفراج بين بيانهما Γ_F و Γ_T، باعتبار انهما فراغين جزئيين مغلقين من الفراغ $X \times Y$ ، ونكتب

$$\delta(F,T) = \delta(\Gamma_F, \Gamma_T)$$
$$\hat{\delta}(F,T) = \hat{\delta}(\Gamma_F, \Gamma_T) = \max[\delta(F,T), \delta(T,F)]$$

قضية 2.8.1 ([6]) إذا كان $F \in l(X, Y)$ و $T \in \Im(X, Y)$ حيث

$$\delta(T, F) < (1 + ||F||)^{-\frac{1}{2}} \qquad (I.2)$$

فإن T يكون من $l(X, Y)$ عندها يكون الفراغ $D(F)$ مغلق.

قضية 3.8.1 ([6]) ليكن $F \in \Im(X, Y)$ إذا كان $T \in \Im(X, Y)$ و $\delta(F,T) < (1 + ||F||)^{-1/2}$ فإن T معرف بكثافة.

نظرية 1.8.1 ([6]) ليكن $F \in l(X, Y)$ إذا كان $T \in \Im(X, Y)$ و قريب من T حيث $\delta(F,T) <$ $(1 + ||F||)^{-1/2}$ فإن $T \in l(X, Y)$.

9.I المؤثرات نصف المحدودة

تعريف 1.9.1 نقول ان المؤثر A محدود نسبيا (أو T محدود) حيث T مؤثر متناظر ومغلق إذا كان :

- $D(T) \subset D(A)$
-

$$||Au|| \leq a||u|| + b||Tu|| \ , \ u \in D(T) \tag{I.3}$$

شرط مكافئ هو

$$||Au||^2 = a'^2||u||^2 + b'^2||Tu||^2 \ , \ u \in D(T) \tag{I.4}$$

حيث الثوابت a' و b' تختلف بشكل عام عن الثوابت a و b.

كما هو واضح ان (I.4) تستلزم (I.3) مع $a = a'$ و $b = b'$ بينما (I.3) تستلزم (I.4) مع $a' = (1+\epsilon^{-1})a$ و $b' = (1+\epsilon^{-1})b$ مع $\epsilon > 0$ نتيجة لذالك $T-$ محدود بـ A (يُعرف بأنه الحد الأكبر للقيم المحتملة لـ b) كما يمكن تعريفها على انها أكبر الحدود الدنيا من القيم المحتملة لـ b'.

10.I المؤثر القرين

تعريف 1.10.1 يُسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F ، المؤثر F^* المعرف من H_2' في H_1' ، بحيث من أجل كل (x, y) من $H_1 \times H_2$ يكون

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_2 \longrightarrow \langle Fx, y \rangle = \langle x, F^*y \rangle$$

نظرية 1.10.1 ([5]) إذا كان $F \in l(H_1, H_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من $l(H_1', H_2')$ ويُحقق:

$$||F|| = ||F^*||$$

خواص مؤثر القرين

إذا كان $F, T \in l(H_1, H_2)$ و α من $\mathbb{K}$ فإن:

1. $(F+T)^* = F^* + T^*$.
2. $(\alpha F)^* = \bar{\alpha} F^*$.
3. $(F^*)^* = F$.
4. $I^* = I$.

1.10.I المؤثر القرين لنفسه

خواص المؤثر القرين لنفسه

ليكن F و T مؤثرين قرينين لنفسهما من $l(H)$ لدينا:

1. من أجل كل α ، β من $\mathbb{R}$ يكون المؤثر $\alpha F + \beta T$ قرين لنفسه.
2. إذا كان $FT = TF$ فإن المؤثر FT قرين لنفسه.
3. العدد $\langle Fx, x \rangle$ من $\mathbb{R}$ مهما يكن x من H.
4. $\|F\| = \max(|M_F|, |m_F|)$ حيث

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x \rangle \,, \;\; m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x \rangle$$

نظرية 2.10.1 ([6]) إذا كان F مؤثر قرين لنفسه فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث كل مؤثر متناظر مغلق T يحُقق $\hat{\delta}(T, F) < \delta$ يكون قرينا لنفسه.

2.10.I المؤثر أساسيا قرينا لنفسه

تعريف 2.10.1 ليكن $(T, D(T))$ مؤثر متناظر غير محدود في الفراغ الهلبرتي H مع $\overline{D(T)} = H$ ، نقول عن T أنه أساسيا قرينا لنفسه إذا كان $\bar{T}$ قرينا لنفسا أو $(\bar{T})^* = \bar{T} = T^*$

3.10.I المؤثر غير السالب

تعريف 3.10.1 يُسمى المؤثر F من $l(H)$ مؤثرا غير سالب إذا كان قرينا لنفسه ويُحقق $\langle Fx, X \rangle \geq 0$ من أجل كل $x \in H$.

نتيجة 1.10.1 كل مؤثر F من $l(X, Y)$ يمكن كتابته على الشكل

$$F = F_1 + iF_2$$

حيث

$$F_1 = \frac{1}{2}(F + F^*)$$

و

$$F_2 = \frac{1}{2i}(F - F^*)$$

F_1، F_2 قرينان لنفسهما يُسميان مركبات المؤثر F .

نتيجة 2.10.1 المؤثر F يمتلك

1. مركبة تخيلية غير سالبة إذا كان $F_2 \geq 0$ أي F_2 مؤثر غير سالب .
2. مركبة حقيقية غير سالبة إذا كان $F_1 \geq 0$ أي F_1 مؤثر غير سالب .

4.10.I المؤثر المتقايس

تعريف 4.10.1 يُسمى المؤثر F في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس إذا كان $||Fx|| = ||x||$ ، وذالك من أجل كل $x \in H$.

5.10.I المؤثر العكسي

ليكن F مؤثرا من X في Y ، $D(F)$ مجموعة تعريفه و $E(F)$ مجموعة قيمه.

تعريف 5.10.1 يُقال ان المؤثر F قابل للقلب إذا كانت المعادلة $y = Fx$ تقبل حلا وحيدا x من $D(F)$ وذالك من أجل كل y من $E(F)$.

يُسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ y العنصر x مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

6.10.I قابلية القلب بإستمرار

تعريف 6.10.1 المؤثر F من $L(X,Y)$ يُقال أنه قابل للقلب بإستمرار إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ أي $\exists F^{-1} \in l(Y,X)$.

نتيجة 3.10.1 (نظرية بناخ للمؤثر العكسي) إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا حيث X ، Y لبناخ ، فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

نتيجة 4.10.1 ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ حيث X ، Y لبناخ . إذا وجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يُحقق: $TF = I_Y$ و $FT = I_X$ فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار عندها يكون $F^{-1} = T$.

نظرية 3.10.1 ([5]) أذا كان المؤثر F من $l(X)$ حيث X بناخ و $||F|| < 1$ ، فإن المؤثر $I - F$ قابل للقلب باستمرار ، عندها يكون

$$||(I-F)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||F||} \quad , \quad ||I-(I-F)^{-1}|| \leq \frac{||F||}{1-||F||}$$

قضية 1.10.1 ([5]) يكون المؤثر F ، $(F \in L(X,Y))$ مؤثرا عكسيا محدودا على $E(F)$ إذا وفقط إذا وجد عدد ثابت $c(c>0)$ يُحقق

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow ||Fx|| \geq c||x||$$

نظرية 4.10.1 ([5]) ليكن f ، g من $l(X,Y)$ ، حيث Y, X لبناخ. إذا كان f قابلا للقلب باستمرار، والمتراجحة $||(g-f)f^{-1}|| < 1$ محققة، فإن التطبيق g يكون قابلا للقلب باستمرار ويكون عندها

$$||g^{-1} - f^{-1}|| \leq \frac{||f^{-1}||||(g-f)f^{-1}||}{1 - ||(g-f)f^{-1}||} \ ; \ ||g^{-1}|| \leq \frac{||f^{-1}||}{1 - ||(g-f)f^{-1}||}$$

نظرية 5.10.1 ([6]) إذا كان $F, T \in \Im(X,Y)$ و $A \in l(X,Y)$ فإن :

$$\hat{\delta}(T+A, F+A) \leq 2(1+||A||^2)\hat{\delta}(T,F) \tag{I.5}$$

نظرية 6.10.1 ([6]) ليكن $F \in \Im(X,Y)$ ، تقابل حيث $F^{-1} \in l(X,Y)$ إذا كان $T \in \Im(X,Y)$ و $\hat{\delta}(T,F) < (1+||F||^2)^{-\frac{1}{2}}$ فإن T تقابل و $T^{-1} \in l(X,Y)$.

11.I الفراغات الذاتي ، الجذري، الثابت

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ حيث X ف. ش. على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 1.11.1 العدد λ من $\mathbb{K}$ يُقال أنه قيمة ذاتية للمؤثر F إذا كان للمعادلة $y = Fx$ حلا غير معدوم. عندها الحل غير المعدوم يُسمى الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F.

تعريف 2.11.1 يعرف الفراغ الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F بأنه مجموعة كل الأشعة الذاتية λ مضافا إليها الشعاع الصفري ويرمز له بالرمز V_λ ، أي :

$$V_\lambda = \ker(F - \lambda I)$$

بُعد الفراغ V_λ يُسمى التضعيف الذاتي أو الهندسي للقيمة الذاتية λ .

تعريف 3.11.1 العنصر x من X يُسمى شعاعا جذريا للمؤثر F مرفقا بالقيمة الذاتية λ إذا وجد عدد طبيعي m ، من أجله يكون:

$$(F - \lambda I)^m x = 0 \tag{I.6}$$

أصغر الأعداد m التي تُحقق (I.6) يُسمى علو الشعاع الجذري x.

تعريف 4.11.1 يعرف الفراغ الجذري المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F بأنه مجموعة كل الأشعة الجذرية المرفقة بالقيمة الذاتية λ مضافا إليها الشعاع الصفري ويرمز له بالرمز M_λ ، أي:

$$M_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ker(F-\lambda I)^m$$

بُعد الفراغ M_λ يُسمى التضعيف الجبري للقيمة الذاتية λ.

نتيجة 1.11.1 1. الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية مثنى مثنى مختلفة تكون مستقلة خطيا.

2. الأشعة الذاتية التي علوها مثنى مثنى مختلف ومرفقة بنفس القيم الاذتية تكون مستقلة خطيا.

3. كل شعاع ذاتي للمؤثر F يكون شعاعا جذريا علوه واحد.

4. $V_\lambda \subset M_\lambda\,,\ \dim V_\lambda \leq \dim M_\lambda$.

تعريف 5.11.1 الفراغ الجزئي M من X يقال أنه ثابت بالنسبة للمؤثر F إذا كان:

$$M \subset D(F)\,,\ \ FM \subset D(F)$$

نتيجة 2.11.1 الفراغ الذاتي والفراغ الجذري للمؤثر F ثابتين بالنسبة للمؤثر $F-\mu I$ من أجل كل μ من $\mathbb{K}$. في الحالة الخاصة يكونا ثابتين بالنسبة للمؤثر F ، أي:

$$FV_\lambda \subset V_\lambda\ ,\ \ FM_\lambda \subset M_\lambda$$

قضية 1.11.1 ([5]) إذا كان F,T مؤثرين من $L(X)$ ، حيث $FT=TF$ فإن كل فراغ ذاتي لأحدهما يكون ثابتا بالنسبة للآخر.

قضية 2.11.1 ليكن F ، F_n مؤثرات متناظرة مغلقة وليكن $\{F_n\}$ متقاربة نحو F في الشكل العام. إذا كان F قرين لنفسه فإن F_n ، من أجل n كبير بما فيه الكفاية

12.I نظرية الأطياف

1.12.I مفهوم الطيف والحالة للمؤثر الخطي

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ ، حيث X فراغ بناخ مركب $(\mathbb{K}=\mathbb{C})$.
مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F له علاقة بقابلية حل المعادلة الدالية التالية:

$$Fx-\lambda I=y \tag{I.7}$$

أو إختصارا نكتب :

$$F_\lambda x=y\,/\;F_\lambda\equiv F-\lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$ و y معطى من X و λ وسيط مركب . في حالة $y=0$ المعادلة (I.7) تُسمى متجانسة.

تعريف 1.12.1 العدد المركب λ يُقال أنه نقطة نظامية للمؤثر F إذا كان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار ، أي $\exists(F_\lambda)^{-1}\in l(X)$ يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$ ، ونكتب

$$\rho(F)=\{\lambda\in\mathbb{C}\,/\;(F_\lambda)^{-1}\in l(X)\}$$

من أجل $\lambda\in\rho(F)$ يرمز للمؤثر $(F_\lambda)^{-1}$ بالرمز $R_\lambda(F)$ ويسمى مؤثر الحالة لـ F.

تعريف 2.12.1 يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$ بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب، أي :

$$\sigma(F)=\mathbb{C}/\rho(F)$$

ينقسم الطيف إلى ثلاثة اقسام:

1. مجموعة الاعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ لا يقبل مؤثرا عكسيا، (أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F) تُسمى بالطيف النقطي ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$ ، ونكتب:

$$P_\sigma(F)=\{\lambda\in\mathbb{C}\,/\;\ker F_\lambda\neq 0\}$$

2. مجموعة الاعداد λ التي من أجلها المؤثر F يقبل مؤثرا عكسيا، مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F)$ كثيفة في X ، لكنه غير محدود . تُسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر ويرمز له بالرمز $C_\sigma(F)$ ونكتب

$(F_\lambda)^{-1}$ غير محدود.

$$C_\sigma(F) = \{\lambda \in \complement P_\sigma(F) \,/\, E(F_\lambda) \neq \overline{E(F_\lambda)}\}$$

3. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا، (محدود أو غير محدود) مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ ليست كثيفة في X . تُسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي ونرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$ ، ونكتب:

$$R_\sigma(F) = \{\lambda \in \complement P_\sigma(F) \,/\, \overline{E(F_\lambda)} \neq X\}$$

نتائج

1. $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.
2. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > ||F||\} \subset \rho(F)$
3. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \leq ||F||\} \supset \rho(F)$.

نظرية 1.12.1 ([6]) ليكن $F \in \Im(X)$ وليكن Γ مجموعة جزئية متراصة من الحالة $\rho(F)$ ، إذا وجد $\delta > 0$ يُحقق: $T \in \Im(X)$ و $\hat{\delta}(T, F) < \delta$ فإن $\Gamma \subset P(T)$.

نظرية 2.12.1 ([6]) $R_\xi(F)$ مستمر بالنسبة لـ ξ و $F \in \Im(X)$ أي:

$$\forall\epsilon > 0\,,\, \exists\delta > 0 \,/\, \frown \epsilon \in \rho(T)\,,\, |\epsilon - \epsilon_0| < \delta \to ||R_\xi(T) - R_\xi(F)|| < \epsilon$$

13.I طيف مؤثر القرين

قضية 1.13.1 ([5]) ليكن $F \in l(H)$.

1. إذا كان المؤثر F قابلا للقلب باستمرار فإن المؤثر F^* ايضا قابلا للقلب باستمرار . عندها يكون

$$(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$$

2. $\sigma(F^*) = \{\bar{\lambda} \,/\, \lambda \in \sigma(F)\}$.

14.I طيف المؤثر القرين لنفسه

إذا كان F قرينا لنفسه فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقة.

2. $F = F^* \Leftrightarrow \sigma(F) \subset [m_F, M_F]$ ، حيث

$$M_F = \sup_{||x||=1} \langle Fx, x\rangle \ , \ m_F = \inf_{||x||=1} \langle Fx, x\rangle$$

3. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين.

4. إذا كان الفراغ الجزئي M ثابت بالنسبة للمؤثر F ، فإن متممه العمودي $M^{\perp}$ يكون كذالك.

قضية 1.14.1 ([5]) العدد λ يكون قيمة ذاتية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان : $\overline{E(F_\lambda)} \neq H$

نتيجة 1.14.1 $F = F^* \Rightarrow R_\xi(F) = \emptyset$

نظرية 1.14.1 ([5]) ليكن المؤثرين T, F من $l(X)$

1. إذا كانت λ, ξ من $\rho(F)$ فإن :

$$R_\lambda(F) - R_\xi(F) = (\lambda - \xi)R_\lambda(F)R_\xi(F) \qquad (I.8)$$

الصيغة (I.8) تُسمى المتطابقة الأولى للحالة أو متطابقة هيلبار للحالة.

نظرية 2.14.1 ([5]) العدد λ يكون نقطة نظامية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان : $E(F_\lambda) = H$.

نظرية 3.14.1 ([5]) العدد λ يكون نقطة نظامية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا تحققت الصيغة التالية :

$$\exists K > 0 \,/\, \forall x \in H \longrightarrow ||F_\lambda x|| \geq K||x||$$

قضية 2.14.1 إذا كان F من $l(H)$ ، فإن

$$F = F^* \Rightarrow \sigma \subset \mathbb{R}$$

15.I تحليلية الحالة

نظرية 1.15.1 ([5]) حالة المؤثر F أي $R_\lambda(F)$ دالة تحليلية في كل مجال تعريفها بمافيها المالانهاية .
عندها يكون :

- من أجل λ_0 ثابت من $\rho(F)$ يكون:

$$R_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}^{n+1}$$

- من أجل $\lambda_0 = \infty$ يكون:

$$R_\lambda(F) = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}F^n$$

- من أجل λ_0 ثابت من $\rho(F)$

$$R(\xi, x) = R(\xi_0)[1 - (\xi - \xi_0) - A(x)R(\xi_0)]^{-1}$$

حيث

$$A(x) = T(x) - T = \sum_{n=1}^{\infty} x^n T^{(n)}$$
$$R(\xi, x) = (T(x) - \xi)^{-1}$$

- في حالة المؤثر F قرين لنفسه نعرف نظيم الحالة كمايلي:

$$||R(\xi)|| = \frac{1}{\mathrm{dist}(\xi, \sigma(F))} = \frac{1}{|\mathrm{Im}\xi|}$$

- من أجل $F \in l(X)$ ومنه

$$R((\lambda - \lambda_0)^{-1}, R(\lambda_0)) = -(\lambda - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0)^2 R(\lambda)$$

16.I دالة المؤثر

ليكن F مؤثر من $l(B)$.
معلوم أنه إذا كانت f دالة كثير حدود ، أي $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ فإن دالة المؤثر F تعرف كالتالي:

$$f(F) = \sum_{k=0}^{n} a_k F^k$$

يمكن تعميم التعريف السابق على الدوال الصحيحة (تحليلية على $\mathbb{C}$) ، أي إذا كانت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

فإن

$$f(F)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF^n$$

عندها يكون $f(F)\in l(B)$.

يمكن تعميم التعريف إلى صنف الدوال التحليلية في جوار ما للطيف، هذا الصنف يرمز له بـ $A(F)$.

تعرف دالة المؤثر F لدوال الصنف $A(F)$ بأحد الصيغ التالية:

$$f(F)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}f(\lambda)R_\lambda(F)\mathrm{d}\lambda$$

أو

$$f(F)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}F^n\oint_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\mathrm{d}\lambda$$

حيث Ω جوار مفتوح للطيف $\overline{\Omega}=\partial\Omega\cup\Omega$ واقع في نطاق تحليلية f.

Γ دائرة مركزها الصفر حاوية تماما للطيف $\sigma(F)$.

نتيجة 1.16.1 (نظرية تحويل الطيف) إذا كانت الدالة f من الصنف $A(F)$ فإن : $f(\sigma(F))=\sigma(f(F))$

نظرية 1.16.1 ([5]) إذا كانت الدالتان g,f من $A(F)$ فإن المعادلة التالية : $f(F)=g(F)$ محققة إذا وفقط إذا تحققت المعادلة : $f(\lambda)=g(\lambda)$ في مجموعة ما حاوية لكل الطيف $\sigma(F)$ باستثناء عدد منته $\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_k\}$ من اقطاب المؤثر F ومن أجل كل $j(1\leq j\leq k)$ الدالة $f-g$ تملك النقطة λ_i صفرا درجته أكبر أو تساوي درجة القطب λ_i.

الـفـصـل

II

الخصائص الطيفية للتمديد الحقيقي للمؤثر الهرميتي

1.II قابلية الإغلاق والتمديد المغلق

نعتبر المؤثر F غير مغلق، انبحث عن إمكانية إغلاقه أي توسيعه أو تمديده إلى مؤثر S يكون مغلقا. هذا يعني إضافة الى مجموعة تعرفه $D(F)$ العناصر f من H التي تمكننا من إيجاد متتالية $(f_n)_{n\geq n}$ من $D(F)$ تؤول اليه وتحقق

$$\exists g \in H \ / \ g = \lim_{n\to\infty} Ff_n$$

عندها نضع $Sf = g$.

لكن هذه الطريقة في الحالة العامة غير صحيحة لأن وجود العنصر g قد يكون له علاقة بالمتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$.

تعريف 1.1.2 يقال أن المؤثر F قابل للإغلاق إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. وجود العنصر g من H غير متعلق بإختيار المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من $D(F)$ حيث :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} Ff_n = h$$

فإن $h = 0$

3. إذا كانت غلاقة بيانه Γ_F (أي المجموعة $\overline{\Gamma}_F$) تمثل بيان مؤثر خطي ما.

نظرية 1.1.2 التعاريف الثلاثة متكافئة.

نتيجة 1.1.2 إذا كانت $\bar{F}$ موجود فإنه:

1. المؤثر $\bar{F}$ مغلق.
2. المؤثر $\bar{F}$ تمديد للمؤثر F.
3. المؤثر $\bar{F}$ أصغر تمديد مغلق للمؤثر F

عندها يكتب المؤثر $\bar{F}$ كالتالي:

$$\bar{F}x = \begin{cases} Fx & , x \in D(F) \\ y & , x \notin D(F) \end{cases}$$

حيث $y = \lim_{n\to\infty} Fx_n$ و $D(F) \ni x_n \to x$.
$\bar{F}$ يُسمى التمديد المغلق لـ F.

تنبيه: المجموعة $\overline{\Gamma}_F$ قد لا تمثل دوما بيانا لمؤثر ما من $L(H)$.

مثـال ليكن F من $L(e^2)$ حيث $D(F)$ هي مجموعة المتتاليات $x = \{x_1, x_2, ...,\}$ من e^2 حيث عدد منته فقط من الحدود x_n يختلف عن الصفر ، معرف كالتالي

$$Fe_n = ne_1 \qquad , e_n = (0, 0, ..., \underbrace{1}_{n}, 0, ...)$$

لاحظ أن العنصر $(e_n/n, e_1)$ من Γ_F ومنه نستنتج ان العنصر $0, e_1$ من $\overline{\Gamma}_F$ هذا يؤدي إلى ان المجموعة $\overline{\Gamma}_F$ لاتمثل بيانا لمؤثر ما من $L(e^2)$ لأنه إن وجد المؤثر تكون صورة الصفر هي e_1 وهذا مستحيل كون المؤثر خطي.

نتيجة 2.1.2 يكون المؤثر F قابلا للإغلاق إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\{x_n, x'_n \in D(F) \ / \ x_n \to x \leftarrow x'_n\, , Fx_n \to y \ , \ Fx'_n \to y'\} \Rightarrow y = y'$$

نتيجة 3.1.2 كل مؤثر F من $L(H)$ محدود على مجموعة تعريفه $D(F)$ يكون قابلا للإغلاق . عندها تكون غلاقته هي تمديد بإستمرارية (محدودة به) على $\overline{D(F)}$

نظرية 2.1.2 لتكن H ، H_1 و H_2 فراغات هيلبار F_1 و F_2 مؤثرين من $L(H, H_1)$ و $L(H, H_2)$ على التوالي. حيث $D(F_1) \subset D(F_2) \subset H$ ، إذا كان F_1 مغلقا و F_2 قابلا للإغلاق فإنه يوجد ثابت C حيث

$$||F_2 f|| \leq C\Big(||F_1 f||^2 + ||f||^2\Big)^{1/2} \quad , \quad f \in D(F_1)$$

2.II التمديد المتناظر

تعريف 1.2.2 يُقال أن المؤثر F متناظر إذا تحقق الشرط

$$\langle Ff, g\rangle = \langle f, Fg\rangle\,, \qquad f, g \in D(F) \tag{II.1}$$

المؤثر المتناظر يسمى ايضا المؤثر الهرميتي.

قضية 1.2.2 يكون المؤثر F متناظر إذا وفقط إذا كان $F \subset F^*$ أي F^* تمديدا لـ F.

تعريف 2.2.2 يقال أن المؤثر S تمديد متناظر للمؤثر F
إذا كان S تمديدا لـ F و المؤثر S متناظر.

نتيجة 1.2.2 1. إذا كان F مؤثرا متناظرا أو S تمديدا متناظرا له فإن

$$F \subset S \subset S^* \subset F^*$$

2. كل تمديد متناظر للمؤثر F هو اقتصار لـ F^*.

تعريف 3.2.2 المؤثر المتناظر F يُسمى اعظمي إذا لم يوجد له تمديد متناظر يختلف عنه.

نتيجة 2.2.2 المؤثر القرين لنفسه أعظمي.

قضية 2.2.2 إذا كان المؤثر F متناظرا فإنه يكون قابل للإغلاق ويكون $\bar{F}$ مؤثرا متناظرا.

تعريف 4.2.2 المؤثر المتناظر F يسمى رئيسيا قرينا لنفسه إذا كان $\bar{F}$ قرينا لنفسه أي $(\bar{F})^* = F$.

قضية 3.2.2 إذا كان F رئيسيا قرينا لنفسه فإن التمديد الوحيد له القرين لنفسه هو $\bar{F}$.

نظرية 1.2.2 يكون المؤثر F المتناظر قرينا لنفسه إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. F مغلق و $\ker(F^* \pm iI) = \{0\}$.
2. $E(F \pm iI) = H$

قضية 4.2.2 من أجل المؤثر المتناظر F إذا وجد عدد λ بحيث يكون من اجل f من $D(F)$ العنصران $(F^* - \lambda I)f$ و $(F^* - \bar{\lambda} I)f$ يمسحان كل H عندها f تمسح $D(F)$ فإن F يكون قرينا لنفسه.

نظرية 2.2.2 إذا كان المؤثر F مغلق من $L(H)$ و $D(F) = H$ فإن كل من المؤثرين FF^* و F^*F قرينين لنفسهما و المؤثرين $\left\{(I + FF^*),\, (I + F^*F)\right\}$ قرينين لنفسهما كل منهما له مقلوب محدود.

3.II الفراغات الناقصة

1.3.II النقط من الصنف النظامي والدليل الناقص

ليكن F مؤثرا من $l(X)$ $(D(F) \neq H)$ و λ عددا كيفيا من $\mathbb{K}$ ، نرمز بالرمز M_λ و $M_{\bar{\lambda}}$ للمجموعتين $E(F-\lambda I)$ و $E(F-\bar{\lambda} I)$ على التوالي. نرمز للمتمم العمودي في H بالنسبة للمجموعتين M_λ و $M_{\bar{\lambda}}$ بـ N_λ و $N_{\bar{\lambda}}$ أي أن

$$M_\lambda^\perp = N_\lambda = H \ominus M_\lambda \quad , \quad M_{\bar{\lambda}}^\perp = N_{\bar{\lambda}} = H \ominus M_{\bar{\lambda}} \tag{II.2}$$

تعريف 1.3.2 العدد λ من $\mathbb{K}$ يُسمى نقطة من الصنف النظامي للمؤثر F إذا وجد عدد $k = \mathbb{K}(\lambda) > 0$ بحيث من أجل كل f من $F(F)$ يكون

$$||F_\lambda f|| \geq k||f|| \quad / \, F_\lambda = F - \lambda I$$

مجموعة كل النقط من الصنف النظامي للمؤثر F تسمى الحقل النظامي للمؤثر F ويرمز له بالرمز $P_0(F)$.

نتيجة 1.3.2 1. المؤثر F_λ قابل للقلب باستمرار على مجموعة تعريفه.

2. كل نقطة نظامية هي من الصنف النظامي

$$P(F) \subset P_0(F)$$

3. مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F لاتكون نقطة من الصنف النظامي.

قضية 1.3.2 الحقل $\rho_0(F)$ مجموعة مفتوحة.

البرهان نبرهن ان $\rho_0(F)$ جوار لكل نقطة من نقاطه ، لتكن λ_0 كيفية من $\rho_0(F)$ لتكن λ من $\mathbb{K}$ حيث

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \delta \leq \frac{1}{2}k(\lambda)$$

و $f \in D(F)$ لاحظ

$$\begin{aligned} ||F_\lambda f|| &\geq ||F_{\lambda_0} f|| - |\lambda - \lambda_0| \geq (k(\lambda_0) - \delta)||f|| \\ &\geq \frac{1}{2}k(\lambda_0)||f|| = k(\lambda)||f|| \quad / \, k(\lambda) = \frac{1}{2}k(\lambda_0) \end{aligned}$$

أي λ من $\rho_0(F)$ ومنه $\rho_0(F)$ مجموعة مفتوحة.

قضية 2.3.2 $F \in l(H)$ ، $(D(F) \neq H)$

1. إذا كان F مؤثرا مغلقا $(D(F) \neq H)$ و λ نقطة من الصنف النظامي له فإن المجموعة $E(F-\lambda I)$ فراغ جزئي مغلق من H.

2. إذا كان F قابلا للاغلاق فإن كل نقطة λ من الصنف النظامي له تكون نقطة من الصنف النظامي لغلاقته $\bar{F}$. عندها يكون

$$E(\bar{F}-\lambda I) = \overline{E(F-\lambda I)}$$

البرهان 1. لتكن $(g_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من $E(F-\lambda I)$ حيث $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ نبرهن ان $g \in E(F-\lambda I)$ لاحظ

$$g_n \in E(F-\lambda I) \Rightarrow \exists f \in D(F) \ /(F-\lambda I)f_n = g_n$$

من ناحية ثانية من اجل كل m, n من $\mathbb{N}$

$$||g_n - g_m|| = ||F(f_n - f_m)|| \geq k||f_n - f_m|| \qquad (II.3)$$

بما أن $(g_n)_{n\geq 1}$ أساسية (متقاربة) فانه حسب (II.3) المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ تكون أساسية أيضا في H ومنه

$$\exists f = \lim_{n\to+\infty} f_n$$

بما أن $Ff_n = g_n + \lambda f_n \to g + \lambda f$ و F مغلقا فإنه :

$$f \in D(F) \quad , \quad Ff = g + \lambda f$$

وبالتالي $g \in E(F-\lambda I)$.

2. إذا كانت $\lambda \in \rho_0(F)$ فإن $\lambda \in \rho_0(\bar{F})$ هذا واضح من تعريف النقط من الصنف النظامي وتعريف المؤثر F .
نبرهن ان $\overline{E(F-\lambda I)} \subset E(\bar{F}-\lambda I)$ ؟
لدينا $F \subset \bar{F}$ ومنه $E(F-\lambda I) \subset E(\bar{F}-\lambda I)$

بما أن $\bar{F}$ مغلق فان $E(\bar{F}-\lambda I)=\overline{E(F-\lambda I)}$ ومنه يكون

$$\overline{E(F-\lambda I)} \subset E(\bar{F}-\lambda I) \tag{II.4}$$

نبرهن أن $E(\bar{F}-\lambda I) \subset \overline{E(F-\lambda I)}$
ليكن g كيفي من $E(\bar{F}-\lambda I)$

$$g \in E(F-\lambda I) \Rightarrow \exists f \in D(\bar{F}) \ / \ g=(\bar{F}-\lambda I)f$$

من تعريف F نستنتج وجود متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من $D(F)$ تُحقق :

$$f_n \longrightarrow f \quad , \quad Ff_n \longrightarrow \bar{F}f$$

لاحظ $(\bar{F}-\lambda I)f_n \to (\bar{F}-\lambda I)f$
أي أن : $(F-\lambda I)f_n \in E(F-\lambda I) \rightarrow g$ ومنه $g \in \overline{E(F-\lambda I)}$ وبالتالي يكون

$$E(\bar{F}-\lambda I) \subset \overline{E(F-\lambda I)} \tag{II.5}$$

من (II.4) و (II.5) نستنتج ان $E(\bar{F}-\lambda I)=\overline{E(F-\lambda I)}$.

قضية 3.3.2 إذا كان F متناظر فإن

$$\lambda \notin \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in P_0(F)$$

البرهان لتكن $\lambda=\alpha+i\beta$ ، $(\beta\neq 0)$.
لدينا من أجل كل f من $D(F)$

$$\begin{aligned}
||(F-\lambda I)f||^2 &= ||(F-\alpha I-i\beta I)f||^2 = ||F_\alpha f-i\beta If||^2\\
&\langle F_\alpha f-i\beta If, F_\alpha - i\beta If\rangle\\
&\langle F_\alpha f, F_\alpha f\rangle + i\beta\Big[\langle F_\alpha f, f\rangle - \langle f, F_\alpha f\rangle\Big] + \beta\langle f, f\rangle\\
&= ||F_\alpha f||^2+\beta^2||f||^2 \geq \beta^2||f||^2
\end{aligned}$$

ومنه λ من $\rho_0(F)$.

نتيجة 2.3.2 النصف الاعلى والنصف الاسفل من المستوي المركب يعتبران مركبتين مترابطتبن لحقل نظامية أي مؤثر متناظر.

قضية 4.3.2 إذا كان F تقايسيا فإن حقل نظاميه يتكون من مركبتين مترابطتين هما داخل دائرة الوحدة وخارجها

البرهان • حالة $|\lambda| < 1$

$$||(F-\lambda I)f|| \geq ||Ff|| - |\lambda|||f|| = (1-|\lambda|)||f||$$

• حالة $|\lambda| > 1$

$$||(F-\lambda I)f|| \geq |\lambda|||f|| - ||Ff|| = (|\lambda|-1)||f||$$

نظرية 1.3.2 إذا كانت φ_0 مركبة مترابطة لحقل نظامية المؤثر F فإن بُعد الفراغ N_λ غير متعلق بإختيار λ من φ_0.

البرهان ليكن P_λ الإسقاط على الفراغ $N_\lambda = M_\lambda^\perp$ حسب نظرية الإنفراج لبرهان النظرية يكفي البرهان أن

$$\forall\, \lambda_1\,,\, \lambda_2 \in \varphi_0 \longrightarrow ||P_{\lambda_1} - P_{\lambda_2}|| \leq 1 \tag{II.6}$$

بما أن φ_0 مترابطة فإنه لبرهان الصيغة (II.6) يكفي أن نبرهن أن

$$\forall \lambda_0 \in \varphi_0\,,\, \exists \delta(\lambda_0) > 0 \;\; / \, |\lambda - \lambda_0| < \delta \longrightarrow ||P_\lambda - P_{\lambda_0}|| < 1$$

نأخذ $\delta = \delta(\lambda_0) \leq \frac{1}{3}k(\lambda_0)$. بما أن

$$k(\lambda_0)||f|| \leq ||(F-\lambda I)f|| \leq ||(F-\lambda I)f|| + |\lambda - \lambda_0|||f||$$

أي

$$||(F-\lambda I)f|| \geq k(\lambda_0)||f|| - |\lambda - \lambda_0|||f||$$

فإنه اذا كان $|\lambda - \lambda_0| = \delta$ يكون

$$||(F-\lambda I)f|| \geq \frac{2}{3}k(\lambda_0)||f||$$

من ناحية ثانية بما أن P_{λ_0} الإسقاط على N_λ فإن: $(I - P_{\lambda_0})$ الإسقاط على M_{λ_0} ومنه نستنتج من أجل كل

g من N_λ حيث $||g|| = 1$ يكون:

$$\begin{aligned} ||(I - P_{\lambda_0})g|| &= \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{|\langle g, (F - \lambda_0 I)f\rangle|}{||(F - \lambda_0 I)f||} \\ &= \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{|\langle g, (F - \lambda I)f + (\lambda - \lambda_0)f\rangle|}{||(F - \lambda_0 I)f||} \\ &= \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{|\lambda - \lambda_0|\langle g, f\rangle}{||(F - \lambda_0 I)f||} \leq \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{\frac{1}{3}k(\lambda_0)||f||}{||(F - \lambda_0 I)f||} \\ &\leq \frac{\frac{1}{3}k(\lambda_0)||f||}{k(\lambda_0)||f||} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{II.7}$$

بنفس الطريقة إذا اخذنا g من N_{λ_0} يكون:

$$\begin{aligned} ||(I - P_{\lambda})g|| &= \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{|\langle g, (F - \lambda I)f\rangle|}{||(F - \lambda I)f||} \\ &= \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{|\langle g, (F - \lambda_0 I)f + (\lambda_0 - \lambda)f\rangle|}{||(F - \lambda I)f||} \\ &= \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{|\lambda_0 - \lambda|\langle g, f\rangle}{||(F - \lambda I)f||} \leq \sup_{0\neq f\in D(F)} \frac{\frac{1}{3}k(\lambda_0)||f||}{||(F - \lambda I)f||} \\ &\leq \frac{\frac{1}{3}k(\lambda_0)||f||}{\frac{2}{3}k(\lambda_0)||f||} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{II.8}$$

من (II.7) و (II.8) حسب النتيجة (نظرية الانفراج) نجد :

$$\theta(N_\lambda, N_{\lambda_0}) = ||P_\lambda - P_{\lambda_0}|| \leq \frac{1}{2} < 1$$

حسب النظرية (الإنفراج) يكون $\dim N_\lambda = \dim N_{\lambda_0}$.

□

تعريف 2.3.2 في الحالة العامة يعرف العدد الناقص لفراغ جزئي X من H بأنه بُعد المتمم العمودي له في H ويرمز له بالرمز $\text{déf}\, X$ ونكتب :

$$\text{déf}\, X = \dim Y \ / Y = H \ominus X \ Y = X^\perp$$

ملاحظة 1.3.2 $\text{déf}\, X$ قد يكون غير منته.

تعريف 3.3.2 يعرف العدد الناقص للمؤثر F بأنه العدد الناقص للفراغ M_λ حيث λ تنتسب إلى مركبة من المركبات المترابطة من حقل نظامية المؤثر F.

$$\text{déf}\, F = \text{déf}\, M_\lambda = \dim N_\lambda \ / \lambda \in \varphi_0$$

الفراغ N_λ يسمى الفراغ الجزئي الناقص للمؤثر F المرفق بالقيمة λ . عناصر N_λ المختلفة عن الصفر تسمى عناصر ناقصة.

نتيجة 3.3.2 من التعريف 3.3.2 والنتيجة 2.3.2 نستنتج أنه إذا كان F مؤثر متناظر فإنه يوجد له عددان ناقصان n^+ مرفق بقيم λ من النصف الاعلى للمستوي المركب و n^- مرفق بقيم λ من النصف الاسفل للمستوي المركب .

تنبيه : إذا اوجد على المستقيم الحقيقي نقطة من الصنف النظامي للمؤثر F فإن $n^- = n^+$ ونكتب

$$\text{déf}\, M_\lambda = \dim N_\lambda = \begin{cases} n^- & \text{Im}\lambda < 0 \\ n^+ & \text{Im}\lambda > 0 \end{cases}$$

نتيجة 4.3.2 إذا كان المؤثر F تقايس يكون

$$\text{déf} M_\lambda = \dim N_\lambda = \begin{cases} n^- & |\lambda| > 1 \\ n^+ & |\lambda| < 1 \end{cases}$$

تعريف 4.3.2 يعرف الدليل الناقص للمؤثر المتناظر بأنه الزوج (n^-, n^+)

نتيجة 5.3.2 من النظرية 1.3.2 وتعريف الدليل الناقص نستنتج : إذا كانت λ حيث $(\text{Im}\lambda > 0)$ فإن

$$\dim N_{\bar{\lambda}} = \dim N_{-i} \quad , \quad \dim N_\lambda = \dim N_i$$

نتيجة 6.3.2 يعرف الدليل الناقص للمؤثر المتناظر أنه الزوج (n^-, n^+) حيث :

$$n^- = \dim N_{-i}$$
$$n^+ = \dim N_i$$

قضية 5.3.2 الفراغات الناقصة $N_\lambda, N_{\bar{\lambda}}$ للمؤثر المتناظر F هي الفراغات الذاتية للمؤثر F^* المرفقة بالقيمة الذاتية $\lambda, \bar{\lambda}$ على التوالي.

البرهان إذا كان f كيفي من N_λ فإنه من أجل كل g من $D(F)$ يكون :

$$\langle Fg - \lambda g, f \rangle = 0 \tag{II.9}$$

أي

$$\langle Fg, f\rangle = \langle g, \bar{\lambda} f\rangle \tag{II.10}$$

من تعريف المؤثر F^* ومن (II.10) نستنتج أن

$$f \in D(F^*) \quad , \quad F^* g = \bar{\lambda} f$$

أي ان f عنصر من الفراغ الذاتي للمؤثر F^* المرفق بالقيمة الذاتية $\bar{\lambda}$.
نفرض أن f من الفراغ الذاتي للمؤثر F^* المرفق بالقيمة الذاتية $\bar{\lambda}$ أي $F^* f = \bar{\lambda} f$.
من أجل كل g من $D(F)$ تكون (II.10) صحيحة ومنه (II.9) صحيحة اي ان f من N_λ.
بنفس الطريقة نبرهن ان $N_{\bar{\lambda}}$ هو فراغ ذاتي للمؤثر F^* المرفق بالقيمة الذاتية λ.

□

نظرية 2.3.2 إذا كان F مؤثرا مغلقا ومتناظرا فإن الفراغات $N_\lambda, N_{\bar{\lambda}}, D(F)$ مستقلة خطيا وتحقق:

$$D(F^*) = D(F) \oplus N_{\bar{\lambda}} \oplus N_\lambda \tag{II.11}$$

البرهان (نذكر أن الفراغات $x_1, ..., x_n$ تسمى مستقلة خطيا إذا كانت المعادلة

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad , \quad x_n \in X_k \;\; k = 1, .., n$$

محققة فقط في حالة $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$)
نبرهن الآن ان الفراغات $D(F)$ ، N_λ ، $N_{\bar{\lambda}}$ مستقلة خطيا.
نضع

$$f + g + h = 0 \quad / \quad f \in D(F)\ , \ g \in N_{\bar{\lambda}}\ , \ h \in N_\lambda \tag{II.12}$$

نركب المعادلة (II.12) المؤثر $F^* - \bar{\lambda} I$ نحصل على

$$(F^* - \bar{\lambda} I) f + (F^* - \bar{\lambda} I) g + (F^* - \bar{\lambda} I) h = 0 \tag{II.13}$$

لاحظ

$$h \ni N_\lambda \Rightarrow (F^* - \bar{\lambda}I)h = 0 \quad (F^* = \bar{\lambda}I)$$
$$g \in N_{\bar{\lambda}} \Rrightarrow F^* g = \lambda g$$
$$f \in D(F) \Rrightarrow F^* f = Ff$$

ومنه (II.13) تكتب كالتالي:

$$(F - \bar{\lambda}I)f + (\lambda - \bar{\lambda})Ig = 0 \tag{II.14}$$

لاحظ $(F - \bar{\lambda}I)f \in M_{\bar{\lambda}}$ ، $(\lambda - \bar{\lambda})Ig \in N_{\bar{\lambda}}$.
بما أن $N_{\bar{\lambda}} \perp M_{\bar{\lambda}}$ فان المعادلة (II.14) محققة فقط في حالة

$$(F - \lambda I)f = 0 \quad , \quad (\lambda - \bar{\lambda})Ig = 0$$

أي عندما $g = 0$, $f = 0$. ومنه حسب (II.12) يكون $h = 0$.
نبرهن الآن الصيغة (II.11).
واضح أن $D(F), N_\lambda, N_{\bar{\lambda}} \subset D(F^*)$ ، ومنه $D(F) \oplus N_\lambda \oplus N_{\bar{\lambda}} \subset D(F^*)$.
نبرهن الآن أن كل عنصر u من $D(F^*)$ يكتب بشكل وحيد من الشكل

$$u = f + g + h \qquad / \quad f \in D(F)\ ,\ g \in N_{\bar{\lambda}}\ ,\ h \in N_\lambda$$

بما أن المؤثر F مغلق فان $M_{\bar{\lambda}}$ فراغ جزئي من H يكون مغلقا ، ومنه حسب التحليل العمودي لـ H يكون

$$H = M_{\bar{\lambda}} \oplus N_{\bar{\lambda}}$$

اي

$$\forall v \in H\ ,\ \exists v_1 \in M_{\bar{\lambda}}\ ,\ \exists v_2 \in N_{\bar{\lambda}} \quad / \ v = v_1 + v_2$$

من أجل u كيفي من $D(F^*)$ العنصر $v = (F^* - \bar{\lambda}I)u$ معرف جيدا كعنصر من H ، وهذا يعني أن

$$v = (F^* - \lambda I)u = v_1 + v_2 \quad / \quad v_1 \in M_{\bar{\lambda}}\ ,\ v_2 \in N_{\bar{\lambda}} \tag{II.15}$$

لاحظ

$$v_1 \in M_{\bar{\lambda}} \Rightarrow \exists f \in D(F) \quad / v_1 = (F - \bar{\lambda}I)f$$
$$v_2 \in N_{\bar{\lambda}} \Rightarrow \exists g \in N_{\bar{\lambda}} \quad / v_2 = (\lambda - \bar{\lambda})g$$

ومنه الصيغة (II.15) تكتب كالتالي

$$(F^* - \bar{\lambda}I)u = (F - \bar{\lambda}I)f + (\lambda - \bar{\lambda})g \tag{II.16}$$

بما أن $F^*g = \lambda g$ و $F^*f = Ff$ فإن (II.16) تكتب كالتالي

$$(F^* - \bar{\lambda}I)U = ((F^* - \bar{\lambda}I))(f + g)$$

ومنه يكون

$$(F^* - \bar{\lambda}I)(u - f - g) = 0$$

أي ان $u - f - g$ عنصر من الفراغ الذاتي لـ F^* مرفق بالقيمة الذاتية $\bar{\lambda}$ ومنه هو عنصر من N_λ

$$\exists h = u - f - g \in N_\lambda$$

وعليه يكون $u = f + g + h$. بما ان الفرغات مستقلة خطيا فان الكّابة الوحيدة ، وبالتالي يكون

$$D(F^*) = D(F) \oplus N_\lambda \oplus N_{\bar{\lambda}}$$

□

نتيجة 7.3.2 1. $F^*u = Ff + \lambda g + \bar{\lambda}h$.

2. المؤثر المغلق المتناظر يكون قرينا لنفسه إذا وفقط إذا كان دليل الناقص (n^-, n^+) معدوما

$$(n^-, n^+) = (0, 0)$$

قضية 6.3.2 من أجل كل u من $D(F^*)$ حيث F مغلق ومتناظر و λ $(\mathrm{Im}\lambda > 0)$ يكون

$$\mathrm{Im}\langle F^*u, u\rangle = \mathrm{Im}\lambda(||g||^2 - ||h||^2) \tag{II.17}$$

حيث $g \in N_{\bar{\lambda}}$ و $h \in N_{\lambda}$.

الصيغة (II.17) تسمى صيغة فون نيومان.

البرهان عندنا من النظرية 2.3.2

$$D(F^*) = D(F) \oplus N_{\bar{\lambda}} \oplus N_{\lambda}$$

$$u = f + g + h \quad / \, f \in D(F) \, , \, g \in N_{\bar{\lambda}} \, , \, h \in N_{\lambda}$$

$$F^*u = Ff + \lambda g + \bar{\lambda} h$$

هذا يعني :

$$\begin{aligned}
\langle F^*u, u\rangle &= \langle Ff + \lambda g + \bar{\lambda}h, f + g + h\rangle \\
&= \langle Ff, f\rangle + \langle Ff, g + h\rangle + \langle \lambda g + \bar{\lambda}h, f\rangle + \langle \lambda g + \bar{\lambda}h, g + h\rangle \\
&= \langle Ff, f\rangle + \langle Ff, g + h\rangle + \langle F^*g + F^*h, f\rangle + \langle \lambda g + \langle \lambda g + \bar{\lambda}h, g + h\rangle \\
&= \langle Ff, f\rangle + 2\mathrm{Re}\langle Ff, g + h\rangle + \lambda||g||^2 + \bar{\lambda}||h||^2 + \lambda\langle g, h\rangle + \bar{\lambda}\langle h, g\rangle \\
&= \langle Ff, f\rangle + 2\mathrm{Re}\langle Ff, g + h\rangle + \lambda||g||^2 + \bar{\lambda}||h||^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda\langle g, h\rangle \\
&\Rightarrow \mathrm{Im}\langle F^*u, u\rangle = \mathrm{Im}\lambda(||g||^2 - ||h||^2)
\end{aligned}$$

□

نتيجة 8.3.2 من صيغة فون نيومان نستنتج أنه يمكن تقسيم المجموعة $D(F^*)$ إلى ثلاث مجموعات وهي :

$$D^+ = \{u \in D(F^*) \, / \, \mathrm{Im}\langle Fu, u\rangle > 0\} = \{u \in D(F^*) \; / \, ||g|| > ||h||\}$$

$$D^- = \{u \in D(F^*) \, / \, \mathrm{Im}\langle Fu, u\rangle < 0\} = \{u \in D(F^*) \; / \, ||g|| < ||h||\}$$

$$D^0 = \{u \in D(F^*) \, / \, \mathrm{Im}\langle Fu, u\rangle = 0\} = \{u \in D(F^*) \; / \, ||g|| = ||h||\}$$

نتيجة 9.3.2 .1 $D(F) \subset D^+ \, , \, N_{\lambda} \subset D^- \cup \{0\} \quad , \, N_{\bar{\lambda}} \subset D^+ \cup \{0\}$

.2 $\dim D(F^*) = (n^- + n^+)[\mod D(F)]$.

.3

$$\begin{cases} \dim D^+ = n^-[\mod D(F)] \\ \dim D^- = n^+[\mod D(F)] \end{cases}$$

تذكيـــــر: اذا كان $Y \subset X$ ، Y ف. ش ، X ف. ش. ج .
الأشعة $y_1, ..., y_n$ من Y تسمى مستقلة خطيا بترديد X إذا كانت الصيغة

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_n \neq 0 \Leftarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \in X$$

إذا كان γ هو أكبر عدد من أشعة Y التي تحقق الصيغة السابقة فإنه يسمى بعد Y بترديد X ونكتب $\dim Y = \gamma[\mod X]$

قضية 7.3.2 إذا كان F مؤثرا مغلقا ومتناظرا و S مؤثر محدود أو قرينا لنفسه فإن المؤثرين F و $F+S$ لهما نفس الدليل الناقص.

البرهان لدينا $(F+S)^* = F^* + S^*$ هذا يعني أنه:

$$D\Big((F+S)^*\Big) = D(F^*)$$

ومنه نكتب من أجل كل f من $D(F^*)$

$$\langle (F+S)^* f, f\rangle = \langle (F^* + S) f, f\rangle = \langle F^* f, f\rangle + \langle Sf, f\rangle$$

بما أن $\langle Sf, f\rangle$ حقيقي فإن

$$\mathrm{Im}\langle (F+S)^* f, f\rangle = \mathrm{Im}\langle F^* f, f\rangle$$

هذا يعني أن المجموعة D^+ للمؤثرين F و $F+S$ متساوية وكذالك المجموعة D^-

$$D_F^- = D_{F+S}^- \quad , \quad D_F^+ = D_{F+s}^+$$

ومنه حسب النتيجة السابقة الدليل الناقص للمؤثرين F و $F+S$ منطبقين

□

4.II التمديد الحقيقي صيغة فون نيومن

ليكن T مؤثر خطي معرف على فراغ هيلبار H ، الفراغ الجزئي ε_T المعرف كالتالي

$$\varepsilon_T = \{f \in D(T) \,/ \langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle \,, \forall g \in D(T)\}$$

يسمى مجموعة التعريف الهرميتية للمؤثر T ، والمؤثر $T_0 = T\Big|_{\varepsilon_T}$ يسمى الجزء الهرميتي له.
نقول أن T هرميتي إذا كانت $T = T_0$.

تعريف 1.4.2 نسمي T تمديد حقيقي للمؤثر الهرميتي F، إذا كان $F \subset T_0$، أي

$$\forall x \in D(F) \quad , Fx = T_0 x$$

ε_T.

في الحالة عندما يكون المؤثر المرافق T^* موجود يكون

$$F \subset T_0 \Leftrightarrow F \subset T^* \wedge F \subset T$$

المؤثر المغلق T الذي يُحقق الشرط الأخير ، أحيانا يسمى التمديد شبه قرين لنفسه للمؤثر F.
نرمز لمجموعة التمديدات الحقيقية للمؤثر F بـ $\mathcal{P}(F)$ حيث مجموعة النقط النظامية لها غير خالية $\rho(T) \neq \emptyset$.
أي تمديد قرين لنفسه للمؤثر F إن وجد يُعتبر عنصر من $\mathcal{P}(F)$.

تعريف 2.4.2 يعرف تحويل كايلي للمؤثر T من $P(A)$ ويرمز له بالرمز T_{μ_λ} كالتالي

$$T_{\mu_\lambda} = (T - \mu I)(T - \lambda I)^{-1} \qquad , \lambda \in \rho(A) \tag{II.18}$$

نتيجة 1.4.2 $T_{\mu\lambda} : N_{\bar{\mu}} \longrightarrow N_{\bar{\lambda}}$ حيث N_z الفراغات الناقصة للمؤثر F.

خصائص التحويل كايلي :

1. إذا كان : $\{T, \tilde{T}\} \subset \mathcal{P}(F)$ و $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(\tilde{T})$ فإن

$$R_{\bar{\lambda}}(\tilde{T}) - R_{\lambda}(T) f \begin{cases} = 0 & f \in M_{\lambda} \\ \in N_{\bar{\lambda}} & f \in N_{\bar{\mu}} \, , \, \mu \neq \lambda \end{cases}$$

حيث $N_z = M_z^{\perp}$ و $M_{\lambda} = (F - \lambda I) D(F)$.

2. إذا تحقق الشرط $\mu \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$ و $\dim N_{\bar{\mu}} = r < \infty$ فإن :

$$R_{\lambda}(\tilde{T}) = R_{\lambda}(T) - \sum_{k,m=1} P_{mk}(\lambda) \Big(\cdot, g_m(\lambda) \Big) g_k(\bar{\lambda}) \tag{II.19}$$

حيث $g_z(z) = T_{\mu \bar{z}} g_k(\bar{\mu})$ و $z \in \{\bar{\lambda}, \lambda\}$، $\{g_k(\bar{\mu})\}_{k=1}^{r}$ اساس معين للفراغ الناقص $N_{\bar{\mu}}$.

ملاحظة : عندها قيمة المصفوفة $P() = ||P_{mr}()||$ في النقطة μ و λ تربطهما العلاقة :

$$T^*P(\lambda) = P(\mu) + (\lambda - \mu)P(\mu)G(\bar{\mu}, \lambda)P(\lambda) \tag{II.20}$$

حيث

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta) &= |\langle g_k(\alpha), g_m(\beta)\rangle \\ T &= \frac{\mu - \lambda}{\mu - \bar{\lambda}}\Big[G(\lambda, \mu) + G(\lambda, \bar{\mu})\Big]G^{-1}(\mu, \mu) \end{aligned}$$

3. من خلال الشرط $D(T) \cap D(\tilde{T}) = D(F)$ المصفوفة $P(\lambda)$ حيث $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(\tilde{T})$ تكون قابلة للقلب، عندها من الخاصية 2 نستنتج أن:

$$P^{-1}(\lambda) = P^{-1}(\mu)T^* - (\lambda - \mu)G(\bar{\mu}, \lambda)$$

4. إذا كان T و $\tilde{T}$ تمديدان قرينان لنفسيهما للمؤثر F فإن $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}^*(\lambda)$ والعكس إذا كانت المعادلة الاخيرة صحيحة و $T^* = T$ (أو $\tilde{T}^* = \tilde{T}$) فإن $\tilde{T}^* = \tilde{T}$ أو $T^* = T$.

تعريف 3.4.2 من أجل $T \in P(F)$ و $\alpha \in \rho(T)$ و $\bar{\alpha} \neq \alpha$ نعرف المؤثر B_α كالتالي

$$B_\alpha = iR_\alpha(T) - iR^*_\alpha(T) + i(\bar{\alpha} - \alpha)R^*_\alpha(T)R_\alpha(T)$$

واضح ان B_α قرين لنفسه ويحقق:

1. الفراغ الناقص N_z للمؤثر F ثابت بالنسبة للمؤثر B_α.
2. من أجل كل $z \in \mathbb{C}$ المؤثر B_α يحول M_z إلى $B_\alpha\varepsilon_T$ ، حيث $B_\alpha\varepsilon_T$ هي صورة ε_T وفق المؤثر B_α ، على الفراغ M_z المؤثر B_α معدوم .

نتيجة 2.4.2 باستعمال خصائص المؤثر B_α نستنتج أن:

1. إذا وجدت $\lambda \in \rho(T)$ من أجلها يكون $N_\lambda = D(T) \cap D(T^*)$ فإن $D(T) = D(T^*)$.
2. $\Big\{D(T^*) = D(T)\ ,\ T_0 = F\ ,\ \dim N_\lambda < \infty\ ,\ \lambda \in \rho(T)\Big\} \Rightarrow N_\lambda \subset D(T)$.

نتيجة 3.4.2 إذا كان $\dim N_\lambda = r < \infty$ فإن المؤثر B_α يمكن كتابته كالتالي :

$$B_\alpha = \sum_{i,s=1}^{n} \Big(\cdot, g_i\Big) J_{is} g_s \tag{II.21}$$

حيث $n \geq r$ ، $\{g_k\}_{k=1}^{n}$ مجموعة أشعة . الغلاف الخطي لها يحوي الفراغ الناقص N_α ، والمصفوفة $||J_{ki}||$ هرميتية.

تعريف 4.4.2 نعرف الدالة المصفوفية للمؤثر T ويرمز لها بـ ω_T كالتالي:

$$\omega_T(\lambda) = J + i(\lambda - \alpha)||(g_k, T_{\alpha\bar{\lambda}} g_m) \qquad , \bar{\lambda} \in \rho(T)$$

حيث الأشعة $\{g_k\}_{k=1}^{n}$ والمصفوفة $J = ||J_{ki}||(= J^*)$ تربطهما الصيغة (II.21) . والمؤثر $T_{\alpha\bar{\lambda}}$ معرف بالصيغة (II.18) . الدالة ω_T تسمى أيضا الدالة المصفوفية المميزة للمؤثر T

نتيجة 4.4.2 ليكن T و $\tilde{T}$ تمديدان حقيقيان للمؤثر F مع دليله الناقص (r, r).
باستعمال الصيغة (II.19) نصل إلى أن الدالة المصفوفية $\omega_T(\lambda)$ و $\omega_{\tilde{T}}(\lambda)$ تربط بينهما العلاقة التالية :

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \omega(\lambda) - i\omega(\lambda)\mathcal{P}^*(\bar{\lambda})\omega^*(\bar{\lambda})$$

حيث $\omega(\lambda) = \omega_T(\lambda) - \omega_T(\bar{\alpha})$ و $\tilde{\omega}(\lambda)\omega_{\tilde{T}}(\lambda) - \omega_{\tilde{T}}(\bar{\alpha})$ و المصفوفة $\mathcal{P}(\lambda)$ معرفة بالصيغة (II.19) و (II.20)

نتيجة 5.4.2 الدالة المصفوفية المميزة للمؤثر $\tilde{T}$ من $P(F)$ تكتب من خلال دالة مصفوفية مميزة لمؤثر ما يعني T من $P(F)$ والمصفوفة المرفقة به $P(\lambda)$.

الآن نعميم لصيغة فون نيومن للتمديد المتناظر للمؤثر المتناظر إلى يحالة التمديد الحقيقي للمؤثر الهرميتي .
في كل مايلي نعتبر F مؤثر هرميتي و $T \in \mathcal{P}(F)$

نظرية 1.4.2 [[1]] إذا كان $T \in \mathcal{P}(F)$ ، $\lambda \notin \rho(T)$ و $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ فإن أي شعاع من $D(T)$ يكتب على الشكل:

$$f = \varphi + g_\lambda + \phi_{g_\lambda} \tag{II.22}$$

حيث $\varphi \in D(F)$ و $g_\lambda \in D(\phi)$ و ϕ مؤثر خطي معرف من N_λ في $N_{\bar{\lambda}}$ ، حيث $-1 \notin \sigma_p(\phi)$ فإن المؤثر T تكون صيغته كالتالي:

$$B(\varphi + g_\lambda + \phi_{g_\lambda}) = F\varphi + \bar{\lambda} g_\lambda + \lambda \phi g_\lambda \tag{II.23}$$

بالإضافة الى ذالك تكون $D(F)$ و $(\phi + I)D(\phi)$ مستقلين خطيا .

نظرية 2.4.2 إذا كان كل عنصر f من $D(T)$ يمثل بالشكل (II.22) والمؤثر T يؤثر بالصيغة (II.23) ، حيث ϕ مؤثر خطي معرف من N_λ في $N_{\bar{\lambda}}$ و $-1 \notin \sigma_P(\phi)$ و $D(F)$، $(\phi + 1)D(\phi)$ مستقلين خطيا فإن:

$$0 \in \sigma_p(\phi) \Leftrightarrow T \in \mathcal{P}(F), \quad \lambda \notin \sigma_p(T) \text{ و } \bar{\lambda} \in \sigma_p(T)$$

تعريف 5.4.2 المؤثر $\tilde{T} \in P(F)$ يقال انه شبه قرين لنفسه بالنسبة للمؤثر T إذا كان:

$$(Tf, g) = (f, \tilde{T}g), \quad (\forall f \in D(T), g \in D(\tilde{T}) \tag{II.24}$$

نتيجة 6.4.2 إذا كان $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ ، $\lambda \notin \sigma_P(T)$ و $\lambda \in \sigma_p(\tilde{T})$
فإن f و Tf يمثلان على التوالي بالصيغة (II.22) و (II.23).
والشعاع g و $\tilde{T}g$ في الصيغة المماثلة التالية:

$$\begin{cases} g = \psi + \tilde{g}_\lambda + \tilde{\phi}\tilde{g}_\lambda \\ \tilde{T}g = F\psi + \bar{\lambda}\tilde{g}_\lambda + \tilde{\phi}\tilde{g}_\lambda \end{cases} \tag{II.25}$$

حيث $\tilde{g}_\lambda \in D(\tilde{\phi})$، $\psi \in D(F)$ ، ($\tilde{\phi}$ معرفة في النظرية 1.4.2)

في مثل هذه الحالة الصيغة (II.24) صحيحة إذا وفقط إذا تحقق من أجل g_λ و $g_{\bar{\lambda}}$ من $D(\phi)$ و $D(\tilde{\phi})$ العلاقة

$$(\phi_{g_\lambda}, \tilde{\phi}_{\tilde{g}_\lambda}) = (g_\lambda, \tilde{g}_\lambda) \tag{II.26}$$

في الحالة الخاصة: إذا $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(\tilde{T})$ فإن حسب النظرية 2.4.2 $o \notin \sigma_p(\tilde{\phi})$.
في هذه الحالة المعادلات (II.25) و (II.26) تكتب على الشكل:

$$g = \varphi + g_{\bar{\lambda}} + \tilde{\phi}^{-1}\tilde{g}_\lambda \quad , \quad \tilde{T}_g = F\psi + \lambda g_{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}\tilde{\phi}^{-1}g_\lambda$$
$$(\phi g_\lambda, g_{\bar{\lambda}}) = (g_\lambda, \tilde{\phi}^{-1}g_{\bar{\lambda}}) \quad /(g_{\bar{\lambda}}D(\tilde{\phi}^{-1}) \subset N_{\bar{\lambda}})$$

على هذا الأساس نقول إذا كان المؤثر T معرف بكثافة و مغلق، $\lambda \notin \sigma_P(T^*)$ فإن T^* تعرفه الصيغة (II.25) حيث $\tilde{\phi}$ و ϕ تربطهما العلاقة (II.26). إذا كان بالإضافة الى ذالك $\bar{\lambda} \notin \sigma_P(T^*)$ فإن

$$\tilde{\phi}^{-1} = \phi^*$$

ومنه g و T^*g يمثلان كالتالي:

$$g = \psi + g_{\bar{\lambda}} + \phi^* g_{\bar{\lambda}}$$
$$T^*g = F\psi + \lambda g_{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}\tilde{\phi}^* g_{\bar{\lambda}}$$

وهي تعميم لصيغة فون نيومن في حالة التمديد الحقيقي للمؤثر الهرميتي.

5.II طيف المؤثر الخطي الخطي T

كما سبق وذكرنا في الفصل الاول أن طيف المؤثر T ينقسم $\sigma(T)$ الى ثلاثة اقسام في الحالة العادية:

- الطيف النقطي $\sigma_p(T)$.
- الطيف المستمر $\sigma_c(T)$.
- الطيف الباقي $\sigma_r(T)$

في حالة المؤثر

- طيف نقطي مستقر $\sigma_\rho(T) = \sigma_P(T) \cap \sigma_P(T^*)$
- طيف نقطي غير مستقر $\sigma_\mu(T) = \sigma_P(T)/\overline{\sigma_P(T^*)}$

في حالة المؤثر المغلق المعرف بكثافة يكون لدينا :

$$\rho(T^*) = \overline{\rho(T)} \quad ; \quad \sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$$
$$\sigma_s(T^*) = \overline{\sigma_s(T)} \quad ; \quad \sigma_c(T^*) = \overline{\sigma_c(T)}$$

بالإضافة الى ذالك

$$H = [E(T)] \oplus \ker T^* \tag{II.27}$$

حيث $[E(T)] = \overline{E(T)}$. وتحقق النظريات التالية:

نظرية 1.5.2 إذا كان المؤثر T مؤثر مغلق ومعرف بكثافة فإن :

$$\sigma_\mu(T^*) = \overline{\sigma_r(T)} \tag{II.28}$$
$$\sigma_r(T^*) = \overline{\sigma_\mu(T)} \tag{II.29}$$

البرهان 1. برهان **(II.28)**

من أجل برهان (II.28) ، نفترض $\lambda \in \sigma_\mu(T^*)$ ونبرهن أن $\lambda \in \overline{\sigma_r(T)}$

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_\mu(T^*) &\Rightarrow \lambda \in \sigma_P(T^*)/\overline{\sigma_P(T^{**})} \quad , \ \lambda \in \sigma_P P(T)\\ &\Rightarrow \lambda \in \sigma_P(T^*) \quad \text{و} \quad \lambda \notin \sigma_P(T^{**})\\ &\Rightarrow \lambda \in \sigma_P(T^*) \quad \text{و} \quad \lambda \notin \overline{\sigma_P(T)}\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن المؤثر $(T-\lambda I)$ قابل للقلب، وبما أن $\ker(T-\lambda I) \neq \{0\}$ وباعتبار (II.27) فإن $[E(T)-\bar{\lambda} I] \neq H$ ومنه $(T-\lambda I)^{-1}$ موجود ومجموعة تعريفه ليست كثيفة في H اذن $\lambda \in \overline{\sigma_r(T)}$ وبالتالي

$$\sigma_\mu(T^*) \subset \overline{\sigma_r(T)} \tag{II.30}$$

نبرهن العكس $\overline{\sigma_r(T)} \subset \sigma_\mu(T^*)$

نفترض أن $\lambda \in \overline{\sigma_r(T)}$ يعني أن $\bar{\lambda} \in \sigma_r(T)$ ومنه $\lambda \notin \sigma_P(T)$ ،أي

$$\bar{\lambda} \notin \sigma_P(T^{**}) \Rightarrow \bar{\lambda} \notin \overline{\sigma_P(T^{**})}$$

و من خلال هذا $[E(T)-\bar{\lambda} I] \neq H$ وباعتبار (II.27) فإن $(T^*-\lambda I) \neq \{0\}$ $\lambda \in \sigma_P(T)$ ومنه $\lambda \in \sigma_P(T^*)$ ،إذن

$$\begin{cases} \lambda \in \sigma_P(T^{**}) \\ \lambda \notin \overline{\sigma_P(T^{**})} \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \sigma_\mu(T^*) \tag{II.31}$$

من (II.30) و (II.31) نستنتج أن $\sigma_\mu(T^*) = \overline{\sigma_r(T)}$

2. **برهان (II.29)**

لنبرهن

$$\sigma_r(T^*) \subset \overline{\sigma_\mu(T)} \tag{II.32}$$

$$\overline{\sigma_\mu(T)} \subset \sigma_r(T^*) \tag{II.33}$$

لدينا من (II.28) $\overline{\sigma_r(T)} \supset \sigma_\mu(T^*)$ ومن ناحية اخرى $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ ، باستبدال T و T^* نجد $\overline{\sigma_r(T^*)} \supset \sigma_\mu(T)$ ومنه

$$\sigma_r(T^*) \subset \overline{\sigma_\mu(T)} \qquad \text{(برهان (II.32))}$$

ولدينا ايضا

$$\sigma_\mu(T^*) \subset \overline{\sigma_r(T)} \Rightarrow \overline{\sigma_\mu(T)} \subset \sigma_r(T^*) \qquad \text{(برهان (II.33))}$$

إذن

$$\sigma_r(T^*) = \overline{\sigma_\mu(T)}$$

□

نظرية 2.5.2 المؤثر القرين لنفسه لايملك طيف باقي ولا يملك طيف نقطي غير مستقر.

نظرية 3.5.2 إذا كان $T = T^*$ فإن المعادلة (II.28) من النظرية (2.4.2) تكتب على الشكل

$$\sigma_\mu(T) = \sigma_r(T) \tag{II.34}$$

بما أن $\sigma_\mu(T)$ و $\sigma_r(T)$ لا يملكان عنصر مشترك بينهما فإن العبارة (II.34) لاتكون صحيحة الا في حالة $\sigma_\mu(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.

نلاحظ هنا انه إذا كان T مؤثر محدود في H، $D(T) = H$ فإنه كما هو معلوم طيف المؤثر T يكون دائما ..... في دائرة قطرها $R = ||T||$ مركزها 0 ، وعلى هذا الأساس كل النقط λ التي لا تنتمي للدائرة ($|\lambda| > ||T||$) تنتمي الى مجموعة الحالة $\rho(T)$
اما في الحالة التي يكون فيها المؤثر T معرف على فراغ جزئي من الفراغ H تحقق النظرية التالية :

نظرية 4.5.2 ليكن T مؤثر محدود معرف في H ، مجموعة تعريفه H_1 حيث $H_1 \neq H$ فإن كل النقط λ المتواجد خارج الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها R تكون من الطيف الباقي.

البرهان إذا كان $\lambda > ||T||$ فإنه واضح $\lambda \notin \sigma_P(T)$ ، نفترض ان $\lambda \in \sigma_c(T)$ ، عندها توجد متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من H من أجلها تكون المتتالية y_n حيث $y_n = (T-\lambda I)^{-1}x_n$ غير محدودة ومنه $Ty_n - x_n = \lambda y_n$ وعليه نستنتج :

$$|\lambda|||y_n|| \leq ||T||||y_n|| + 1$$

ومن هذه المتراجحة الاخيرة نحصل على

$$||y_n|| \leq \frac{1}{|\lambda| - ||T||} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

وهذا تناقض ، ومنه نستنتج أن $\lambda \notin \sigma_c(T)$ وبالتالي $\lambda \in \rho(T)$ و $\lambda \in \sigma_r(T)$.

نفترض أن $\lambda \in \rho(T)$ ونفترض أن $y \in H \ominus H_1$ حيث $y \neq 0$ عندها نجد الشعاع $x \in H_1$ يُحقق:
$y = (T - \lambda I)x$

بما أن $\langle x,y\rangle = 0$ فإن $\langle Tx,x\rangle = \lambda||x||^2$ ومنه نستنتج

$$|\lambda|||x||^2 = |\langle Tx,x\rangle| \leq ||T||||x||^2$$

أي: $|\lambda| > ||T||$ ينافي كون $|\lambda| < ||T||$ ومنه $\lambda \notin \rho(T)$ إذن $\lambda \in \sigma_r(T)$.

□

6.II طيف التمديد الحقيقي وفق الأعداد الناقصة

ليكن F مؤثر هرميتي على فراغ هيلبار H
N_λ الفراغ الناقص للمؤثر F أي $N_\lambda = M \subset M_\lambda$ و $M_\lambda = E(F-\lambda I)$

$$\begin{cases} m = \dim N_z \\ n = \dim N_z \end{cases}$$

m و n أعداد ناقصين لـ F والثنائية (m,n) الدليل الناقص لـ F.

نظرية 1.6.2 إذا كان $T \in \mathcal{P}(F)$ و $\lambda \in \sigma_P(T)$ و T_λ الفراغ الذاتي المرفق بها فإن

$$\dim T_\lambda \leq \begin{cases} m & (\mathrm{Im}\lambda > 0) \\ n & (\mathrm{Im}\lambda < 0) \\ r+s & (\mathrm{Im}\lambda = 0) \end{cases}$$

حيث $r = \dim N_\lambda$ ، $s = \dim F_\lambda$. F_λ فراغ الجزئي ذاتي لـ F المرفق بـ λ.

نتيجة 1.6.2 إذا كانت $\lambda \notin \sigma_P(T)$ فإن $s = 0$.

البرهان لاحظ انه من أجل $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ و $f \in T_\lambda$
كل شعاع $\varphi \in D(F)$ تكون

$$\Big((F-\lambda I)\varphi, f\Big) = \Big(\varphi, (F-\lambda T)f\Big) = 0$$

ومنه نستنتج $f \in N_{\bar\lambda}$ أي: $T_\lambda \subset N_{\bar\lambda}$
لكن عندما $\mathrm{Im}\lambda > 0$ يكون

$$\dim T_\lambda \leq \dim N_{\bar\lambda} = \dim M_\lambda = m$$

بنفس الطريقة لما $\mathrm{Im}\lambda < 0$ نجد $\dim T_\lambda < n$
اما في حالة $\mathrm{Im}\lambda = 0$ إذا كانت $T_\lambda = \{0\}$ نستنتج ان $s = 0$ ومنه نجد $\dim T_\lambda \leq n$
بفرض أن $F_\lambda \neq \{0\}$ فإن المؤثر الهرميتي T يكون تمديدا حقيقيا للمؤثر F_0 فراغه الناقص $N'_\lambda = F_\lambda \oplus N_\lambda$ ، عندها يكون $\lambda \in \sigma_P(T_0)$ ، $s = \dim F_\lambda$ ، وبإعتبار $F_\lambda = \{0\}$ فإن: $\dim T_\lambda \leq n + s = \dim N_\lambda$ حيث $\dim T_\lambda \leq r + s$.

□

نظرية 2.6.2 إذا كان F مؤثر هرميتي دليله الناقص (m,n) حيث m,n من N_λ فإنه من أجل كل λ غير حقيقي يوجد مؤثر T من $\mathcal{P}(F)$ من أجله يكون $\lambda \in \sigma_P(T)$ عندها يكون:

$$\dim T_\lambda = \begin{cases} m & (\mathrm{Im}\lambda > 0) \\ n & (\mathrm{Im}\lambda < 0) \end{cases} \tag{II.35}$$

البرهان .

لتكن λ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ عدد مركب ثابت ، لاحظ أنه $D(F)$ و $N_{\bar{\lambda}}$ مستقلين خطيا، نعرف المؤثر T كالتالي:

$$D(T) = D(F) + N_{\bar{\lambda}}$$
$$T(x,y) = Fx + \lambda y \qquad / \ x \in D(T) \ y \in N_{\bar{\lambda}}$$

لاحظ انه من أجل $v \in D(F)$ يكون :

$$\begin{aligned} \langle Tv, x+y \rangle &= (Fv, x) + (Fv, y) \\ &= (v, Fx) + \bar{\lambda}(v, y) \\ &= (v, T(x+y)) \end{aligned}$$

على هذا الأساس $D(F) \subset D(T_0)$ عندها يكون

$$\begin{aligned} T_0 v &= Tv \\ &= Fv \qquad / \ v \in D(F) \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن $T \in \mathcal{P}(F)$ بالإضافة الى $N_{\bar{\lambda}} \subset T_\lambda$.
ومنه بإعتبار النظرية السابقة نستنتج أن $T_\lambda = N_{\bar{\lambda}}$ وهذا يعني تحقق الصيغة (II.35)

□

نظرية 3.6.2 إذا كان $T \in \mathcal{P}(F)$ ، فإن $\sigma_c(F) = \sigma_c(T)$

البرهان .
نفرض $\lambda \in \sigma_c(F)$ يكون $B = (F - \lambda I)^{-1}$ موجود ومعرف بكثافة وغير محدود.
نبرهن الأن أن $\bar{\lambda} \notin \sigma_P(T)$.
نفرض $Ty = \lambda y \, , (y \neq 0)$ ، عندها بما أن $D(F) \subset D(T_0)$ من أجل كل شعاع $x \in D(F)$ نحصل على

$$\left\langle (F - \lambda I)x, y \right\rangle = \left\langle x, (T - \lambda I)y \right\rangle = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$y \perp M_\lambda \qquad / \, M_\lambda = E(F - \lambda I) = D(B)$$

وهذا مناف كون المؤثر B معرف بكثافة.
ومنه نستنتج أن $\lambda \notin \sigma_P(T)$ أي أن $(T - \lambda I)^{-1}$ موجود .
وبالتالي يكون

$$(T - \lambda I)^{-1}x = (F - \lambda I)^{-1}x \qquad / \, x \in M_\lambda$$

ومنه يكون المؤثر $\exists (T - \lambda I)^{-1}$ معرف بكثافة وغير محدود أي أن $\lambda \in \sigma_c(T)$

□

نظرية 4.6.2 إذا كان $T \in \mathcal{P}(F)$ فإن

$$\sigma_c(T) \subset \sigma_c(F) \cup \sigma_r(F)$$

البرهان .
بإعتبار $\sigma_P(T)$ مجموعة القيم الذاتية و $\rho(T)$ مجموعة القيم النظامية فإنه من تعريف T ، T_0 و F يكون

$$T \in \mathcal{P}(F) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_P(F) \subset \sigma_P(T) \\ \rho(F) \subset \rho(T) \end{cases}$$

ومنه نلاحظ أن :

$$\lambda \in \sigma_c(T) \Rightarrow \begin{cases} \lambda \notin \sigma_P(T) \Rightarrow \lambda \notin \sigma_P(F) \\ \lambda \notin \rho(T) \Rightarrow \lambda \notin \rho(F) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \lambda \in \sigma_c(F) \cap \sigma_r(F)$$

ذالك لأن

$$\sigma_c(F) \cap \sigma_r(F) \cup \sigma_P(F) \cap \rho(F) = \mathbb{C}$$

□

نظرية 5.6.2 إذا كان $T \in \mathcal{P}(F)$ و F مؤثر هرميتي دليله الناقص ثابت فإن $\sigma_c(T)$ يكون حقيقا.

البرهان .

ليكن $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ و $H = M_\lambda \oplus N_\lambda$.
بما أن $\dim N_\lambda < \infty$ فإن $N_\lambda \subset E(T-\lambda I)$ (ذالك لانه في حالة المخالفة N_λ يوجد شعاع غير معدوم يكون عموديا على $E(T-\lambda I)$ ومنه إذا كان $y = (T-\lambda I)x$ فإن

$$\begin{cases} x = (T-\lambda I)y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

حيث $x_1 \in M_\lambda \cap E(T-\lambda I)$ و $x_2 \in N_\lambda \cap E(T-\lambda I)$ عندها يكون:

$$x_1 = (F-\lambda I)y_1 \quad , \quad x_2 = (T-\lambda I)y_2$$

وعلى هذا الأساس يكون

$$(T-\lambda I)^{-1}x = (F-\lambda I)^{-1}P_1x + (F-\lambda I)^{-1}P_2x$$

حيث P_1 و P_2 مؤثرات الإسقاط العمودية على M_λ و N'_λ على التوالي .
ومنه بما أن :

$$||(F-\lambda I)^{-1}|| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}$$

المؤثر $(T-\lambda I)^{-1}$ منتهي فإن $||(T-\lambda I)^{-1}|| < \infty$ وهذا يعني $\lambda \notin \sigma_c(T)$.

□

خــاتــمــة عــامــة

يندرج محتوى المذكرة في العمل على توضيح تغير الخصائص الطيف في حالة التمديد الحقيقي للمؤثر الهرميتي وذالك عن طريق مفهوم الأعداد الناقصة .

ولهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع ، وتبقى الدراسة مفتوحة بتغير شروط المؤثرات.

قائــمــة الــمــراجــع

[1] د.أ. كولموغورف، س. فومين، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي، - تعريب أبوبكر خالد سعد الله - د.م.ج 1987.

[2] إيروين كريزيك، المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته - ترجمة د. خضر حامد الأحمد- ، الطبعة الرابعة -دمشق- 2004-2005 م.

[3] مصطفى عسيلة ، دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج. الجزائر، 2009.

[4] مصطفى عسيلة ، دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف ، الجزء الأول ، المؤثرات المحدودة ، UKMO ، 2013.

[5] T.KATO ,Perturbation theory for linear operators, Berlin-Heidelberg, New -York, Springer Verlag 1966.

[6] T.KATO , Wave Operators and similarity for some non self-adjoint operators , Math.Ann , 162(1966),258-279.

[7] KUZHEL', A. V. Regular extensions of Hermitian operators. In: Doklady Akademii Nauk. Russian Academy of Sciences, 1980. p. 30-33.

[8] Krasnosed'skii. M. Ao," On self-adjoint extensions of Hermitian operators," Ukrainsk Matem Zh No. 1, 21-38(1949).

[9] Shtraus. A. V,"On extensions and characteristic function of a symmetric operator, " Izv, Akado Nauk SSSR, set Matem, 32, 186-207(1968).

[10] Yosida K. ; Functional Analysis, Springer-Verlag, 1965.

[11] Hutson v.C.L.,Pym J.S.; Functional Analysis and operator theory, Academic Press, London, 1980.

[12] N. Dunford, J.T. schwartz, *Lienear operators, Part I, General theory, Wiley-Interscience, New York,* .1957

مُلخص

يهدف هذا العمل إلى معرفة التمديد الحقيقي للمؤثر الهيرميتي ومن ثم التأكد من تحقق صيغة فون نيومن لهذا التمديد ومعرفة مجمل التغيرات الطيفية التي تحصل أثناء التمديد.

إعتمدنا في الدراسة على طريقة الأعداد الناقصة للمؤثر.

الكلمات المفتاحية : المؤثر الخطي - المؤثر الهيرميتي - التمديد الحقيقي - الأعداد الناقصة.

Abstract

This work aims to finding and understanding the regular extension of the hermitian operator then checking von newman's formulafor this extension and also knowing all spectral changes that happen during the extension process.

We used the operator's defect numbers method in this spectral study.

Keywords: Linear operator - Hermitian operator - Regular Extension - Defect Numbers.