

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

---

---

MASTER  
EN  
MATHÉMATIQUES

OPTION  
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

INTITULÉ

Classification des surfaces fermées

PAR  
Kaouther MERAD

Devant le jury :

Mohamed BOUSSAID	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Mohamed Tayeb BENMOUSSA	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examineur
Mohamed Amine BAHAYOU	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

Soutenu publiquement le : 01-10-2020

## Dédicace

Je dédie ce travail à :  
La lumière de ma vie Mama et Papa ;  
mes frères : Mouhamad El Hafed, Hamza, Soufian et Imad, mes sœurs : Soumia et  
Khawla et au poussin le plus cher, mon neveu Yunus.  
À mes amies fidèles : Izdehar, Hina, Ibtisam et Zainab soiyah et Rbiha et Iman et  
Zainab et Siham et Roumaissa . Sans oublier mes amies de la Valley University : Dalila,  
Ghania, Hamida, bouthaina bouhafas, nessrin el ilmi, saida dahraoui, aicha ibid.

Kaouther Merad.

## Remerciements

Je tiens à remercier tous d'abord mon Dieu qui m'a donné la bonne santé, la volonté et la patience tout au long de mes études.

Je tiens à remercier avec gratitude mon encadreur Monsieur Mohamed Amine BAHAYOU, de m'avoir guidé et suivi tout ou long de ce travail, de m'avoir encouragé et aussi prodigué de précieux conseils. Son aide et sa disponibilité m'ont permis d'avancer dans le travail et de finaliser cette étude.

Je remercie l'examineur Monsieur Mohamed Tayeb BENMOUSSA, ainsi que le président de jury Monsieur Mohamed BOUSSAID pour leur aide.

Je remercie également tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mes études et qui n'ont pas oublié leurs précieux conseils.

Je tiens à remercier les membres de ma promotion et tous mes professeurs.

Je remercie aussi toute personne qui, de près ou de loin, a contribué à la finalisation de ce travail.

# Introduction

L'objet de ce mémoire est la classification des surfaces fermées (compactes et sans bord). C'est un important résultat de topologie de longues dates, qui se démontre essentiellement par deux méthodes :

- Méthode combinatoire, où on montre que toute surface fermée admet une triangulation et à l'aide d'un procédé combinatoire, on se ramène aux formes normales relatives aux sommes connexes de tores ou d'espaces projectifs.
- Théorie de Morse, où l'étude des sous-niveaux d'une fonction de Morse permet de comprendre le type d'homotopie (et d'homéomorphie) de la surface chaque fois qu'une valeur critique est franchie.

Nous avons choisie l'outil de la théorie de Morse. Bien qu'il est très technique, il s'est révélé très puissant pour classifier à la fois les surfaces fermées orientables et non orientables.

Une surface sans bord  $S$  est un espace topologique localement homéomorphe au plan ; en d'autres termes, une *variété* de dimension 2. Par exemples :

- La sphère  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .
- Le tore  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$ .
- Le plan projectif  $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ .

Ce sont des surfaces fermées, mais aussi les surfaces obtenues par somme connexe de ces surfaces.

Le théorème de classification affirme qu'il n'y a pas de surfaces fermées autres que celles-ci. Plus précisément :

## Théorème de classification

- Toute surface fermée orientable de genre  $g$  est homéomorphe à :

$$S^2, \text{ si } g = 0 \text{ et à } T_g = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g \text{ copies}}, \text{ si } g \geq 1.$$

- Toute surface fermée non orientable de genre  $g \geq 1$  est homéomorphe à :

$$P_g = \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{g \text{ copies}}.$$

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre sur la théorie de Morse.
2. Deuxième chapitre, consacré au théorème de classification des surfaces fermées.
3. Une annexe qui regroupe des notions de topologie algébrique et éléments de la théorie des groupes nécessaires à l'étude topologique des surfaces.

Nous terminons par une petite bibliographie de la littérature qui traite ce thème plus en détail.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorie de Morse</b>	<b>6</b>
1.1	Fonctions de Morse . . . . .	6
1.2	Topologie des sous-niveaux . . . . .	10
1.2.1	Franchissement d'une valeur critique . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Classification des surfaces fermées</b>	<b>15</b>
2.1	Surfaces remarquables . . . . .	15
2.2	Théorème de classification . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Annexe</b>	<b>21</b>
3.1	Somme connexe et recollement . . . . .	21
3.2	Groupe fondamental et revêtements . . . . .	22

# Théorie de Morse



La théorie de Morse permet d'obtenir de nombreuses informations quant à la topologie d'une variété fermée à partir de la donnée d'une fonction de Morse, c'est-à-dire une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dont les points critiques sont non-dégénérés, en étudiant ses sous-niveaux :

$$M_a := f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in M, f(x) \leq a\}.$$

## 1.1 Fonctions de Morse

Soit  $M$  une variété différentielle et soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . Soit  $x \in M$  un point critique de  $f$ , i.e.  $d_x f = 0$ . On définit la hessienne de  $f$  au point  $x$ , par

$$H_f(x)(u, v) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f)(x)$$

pour tout champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  avec  $X(x) = u$  et  $Y(x) = v$ . Le point critique  $x$  est dit *non dégénéré* si l'endomorphisme associé à la forme bilinéaire symétrique  $H_f(x)$  est un isomorphisme.

**Remarque.** Si  $x$  est un point critique de  $f$  alors  $H_f(x)$  est bien définie et est symétrique.

En effet, si D'autre part, on a :

$$H_f(x)(u, v) - H_f(x)(v, u) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f)(x) = [X, Y](f)(x) = d_x f([X, Y](x)) = 0$$

On dit que  $f$  est une fonction de *Morse* si tous ses points critiques sont non dégénérés. Dans ce cas, pour tout point critique  $x$  de  $f$ ,

$$T_x M = E_x^+ \oplus E_x^-$$

où  $E_x^+$  (respectivement  $E_x^-$ ) est le sous-espace propre associé aux valeurs propres strictement positives (respectivement négatives) de  $H_f(x)$ .

**Exemples :**

- La fonction hauteur  $f(x, y, z) = z$  sur la sphère  $S^2$  est de Morse.
- La fonction  $f(x, y, z) = z^2$  sur la sphère  $S^2$  n'est pas Morse. En effet, l'ensemble de ses points critiques n'est pas fini<sup>1</sup> :

$$\text{Crit}(f) = \{(0, 0, -1)\} \cup \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0, 1)\}.$$

<sup>1</sup>D'après le lemme de Morse, l'ensemble des points critiques est discret, donc fini si la variété est compacte.

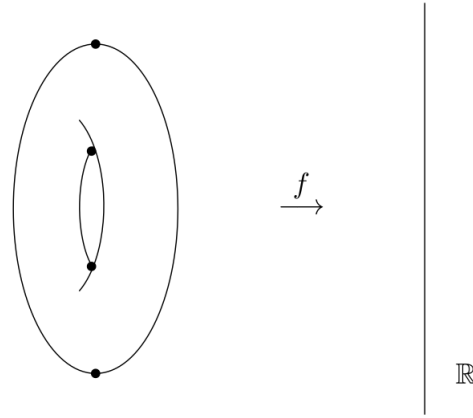


FIG. 1.1 : Fonction de Morse sur le tore.

**Champ gradient :** Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$ . Le champ gradient  $X_f$  est l'unique champ de vecteurs défini par :

$$g(X_f, Y) = \mathcal{L}_Y f,$$

de sorte que les points critiques de  $f$  correspondent aux points singuliers de  $X_f$ , i.e. les points fixes du flot  $\exp(tX_f)$ .

On considère désormais le champ gradient négatif  $-X_f$  et on notera son flot (défini sur tout  $\mathbb{R}$ , puisque  $M$  est compacte) par  $\phi_t$ .

**Variétés stables et instables** Pour tout point critique  $p$  de  $\text{Crit}(f)$ , on considère la variété stable (respectivement instable) :

$$W^s(p) = \{x \in M, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = p\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p\}$$

**Proposition 1.** La variété stable  $W^s(p)$  d'un point critique  $p$  de  $f$  est une sous-variété et son espace tangent en  $p$  est donné par :  $T_p W^s(p) = E_p^+$ . Avec un résultat similaire pour la variété instable  $W^u(p)$ .

On peut retrouver le résultat ci-dessus grâce au lemme de Morse.

**Proposition 2.** Pour toute fonction de Morse sur une variété compacte et sans bord,

$$M = \bigcup_{p \in \text{Crit}(f)} W^s(p) = \bigcup_{p \in \text{Crit}(f)} W^u(p).$$

*Démonstration.* Montrons que tout point de  $M$  est dans une variété stable d'un point critique. En remplaçant  $f$  par  $-f$  on obtient que tout point est aussi dans une variété instable d'un point critique de  $f$ .



Comme  $M$  est compacte, le champ gradient de  $f$  est complet, ce qui veut dire que son flot est défini sur tout  $t \in \mathbb{R}$ . Soit  $a \in M$ , un point critique non dégénéré. Le long de  $\phi_t(a)$  la fonction  $f$  est strictement décroissante. En effet,

$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(a)) = \mathcal{L}_{X_f}f(\phi_t(a)) = -\|X_f\|^2(\phi_t(a)) < 0.$$

On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\phi_t(a)) \geq \inf f$ , la borne inférieure de  $f$  qui est finie par compacité de  $M$ . Il s'ensuit :

$$\int_0^{+\infty} \|\mathcal{L}_{X_f}\|^2(\phi_t(a)) dt \leq f(a) - \inf f < +\infty.$$

La convergence de l'intégrale implique alors qu'il existe une suite  $(t_n)$  tendant vers  $+\infty$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{L}_{X_f}\|(\phi_{t_n}) = 0$ . Par compacité de  $M$ , quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\phi_{t_n}(a)$  converge vers  $c \in M$ . Le champ gradient s'annule donc en  $c$  et le point  $a$  appartient à la variété stable du point critique  $c$ .  $\square$

L'indice d'un point critique  $p$  est défini par :

$$n(p) = \dim W^u(p) = \text{codim } W^s(p).$$

**Définition 1.1.** Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . Une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est dite de Morse si tout ses points critiques sont non dégénérés. C'est-à-dire si, pour tout point critique  $p \in M$  de  $f$  (i.e.  $d_p f = 0$ ), la hessienne

$$H_f(p) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est inversible pour un certain carte locale  $(U; x_1, \dots, x_n)$  de  $p$ .

**Remarques.** 1. La propriété d'un point critique  $p$  d'être non dégénéré ne dépend pas du choix du système de coordonnées. En effet, si  $H_f(p)$  est la hessienne de  $f$  en  $p$  dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $H'_f(p)$  la hessienne de  $f$  en  $p$  dans une autre carte  $(y_1, \dots, y_n)$ . Alors les matrices sont reliées par la relation suivante :

$$H'_f(p) = J_f^t(p) \cdot H_f(p) \cdot J_f(p)$$

Où

$$J_f(p) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Il est essentiel ici que  $p$  soit un point critique de  $f$ . On sait d'après l'analyse vectorielle que  $J_f(p_0)$  est inversible (car il s'agit d'un changement de coordonnées). Ainsi :

$$\det H_f(p) \neq 0 \Leftrightarrow \det H'_f(p) \neq 0.$$

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine. On suppose que 0 est un point critique non généré i.e.  $D_0 f = 0$  et la hessienne  $D_0^2 f$  est inversible de signature  $(p, n - p)$ . Sous ses condition on a le lemme de Morse :

**Lemme 1.1.** *Il existe  $\varphi$  difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(0) = 0$  et*

$$f(x) - f(0) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_n^2,$$

où  $y = \varphi(x)$ .

*Démonstration.* Par la formule de Taylor à reste intégral, nous avons

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= Df(0).x + \int_0^1 (1-t)D^2f(tx).(x, x)dt \\ &= \underbrace{{}^t x \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt}_Q x \end{aligned}$$

avec  $Q$  symétrique (par le Théorème de Schwarz car  $f$  est deux fois différentiable) et de classe  $C^\infty$  (par le théorème de dérivation sous le signe intégral).

Notons  $\mathcal{S}$  le sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques. Soit  $A_0 \in \mathcal{S}$ . Alors pour tout  $A$  dans un voisinage de  $A_0$ , il existe  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^t M A_0 M$  avec  $M$  dépendant de façon  $C^\infty$  de  $A$ .

En effet, Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S} \\ M &\mapsto {}^t M A_0 M. \end{aligned}$$

C'est un polynôme en  $M$  donc  $\Phi$  est de classe  $C^1$ . Pour  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(I + H) &= A_0 + {}^t H A_0 + A_0 H + {}^t A_0 H \\ &= \Phi(I) + {}^t(A_0 H) + A_0 H + o(\|H\|) \quad (\text{car } A_0 \in \mathcal{S}) \end{aligned}$$

Ainsi  $D_I \Phi(H) = {}^t(A_0 H) + A_0 H$ . Le noyau de  $D_I \Phi$  est l'ensemble des  $H$  telle que  $A_0 H$  est antisymétrique (notons désormais  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ). La différentielle  $D_I \Phi$  est surjective car pour  $A \in \mathcal{S}$ ,

$$D_I \Phi \left( \frac{1}{2} A_0^{-1} A \right) = A.$$

Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ , on a également  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker D_I \Phi \oplus F$  où  $F = \{M, A_0 M \in \mathcal{S}\}$ .

On a  $I \in F$ . Soit  $\psi = \Phi|_F$ . Comme  $D_I \psi = D_I \Phi|_F$  est bijective car  $\ker D_I \Phi \cap F = \{0\}$ .

Par le théorème d'inversion locale on a l'existence d'un voisinage de  $I$  dans  $F$  (que l'on peut supposer inclus dans  $GL_n(\mathbb{R})$ ) tel que  $\psi$  soit un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $U$  sur  $V = \psi(U)$ . Ainsi  $V$  est un voisinage de  $A_0 = \psi(I) = \Phi(I)$  dans  $\mathcal{S}$ .

Cela signifie que  $\forall A \in V, \exists ! M \in U, A = {}^t M A_0 M$ . De plus  $M = \psi^{-1}(A)$  est une fonction de classe  $C^1$  de  $A$ . □

D'après ce lemme, il existe  $M(x) \in GL_n(\mathbb{R})$  fonction de classe  $C^1$  de  $x$  au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$ . Ainsi,  $f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$  avec  $y = M(x)x$ .

Or  $Q(0) = \int_0^1 (1-t)D^2f(0)dt = \frac{1}{2}D^2f(0)$  qui est de signature  $(p, n-p)$ . Par le théorème de réduction des formes quadratiques sur  $\mathbb{R}$ , il existe  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $y = Au$  et  ${}^t y Q(0) y = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ .

$x \mapsto u = A^{-1}M(x)x$  a pour différentielle à l'origine  $A^{-1}M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$ . Par le théorème d'inversion locale, c'est un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque.** Une conséquence importante de ce lemme est que tous les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés. En effet, soit  $a$  un point critique de  $f$ . D'après le lemme de Morse, il existe un voisinage  $V$  de  $a$ ,  $\lambda \in \{0, \dots, n\}$  et un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que :  $f = -X_1^2 - \dots - X_\lambda^2 - X_{\lambda+1}^2 \dots - X_n^2 + f(a)$  sur  $V$ . Ainsi,  $a = (0, \dots, 0)$  dans ce système de coordonnées. Nous savons d'après l'analyse vectorielle que  $\text{grad}f(x) = 0$  est une condition nécessaire pour que  $x$  soit un point critique de  $f$ .

$$\text{Or } \text{grad}f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n} = (-2x_1, \dots, -2x_\lambda, \dots, 2x_{\lambda+1}, \dots, -2x_n) \text{ sur } V.$$

On voit donc clairement que pour  $x \in V$ ,

$$\text{grad}f(x) = 0, \quad x = \{0, \dots, 0\}; \text{ ie } x = a.$$

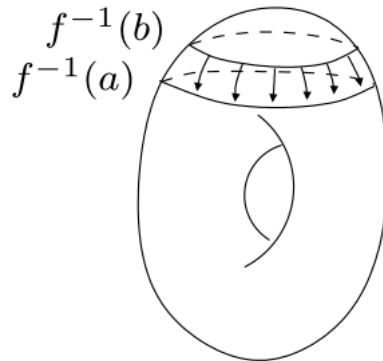
Ainsi, il existe un voisinage ouvert de  $a$  sur le quel  $f$  admet  $a$  comme unique point critique.

## 1.2 Topologie des sous-niveaux

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse. La topologie des niveaux de  $f$  ne change pas tant qu'on ne traverse pas de valeur critique. Il en est de même de celle des sous-niveaux. Désignons par

$$M_a := f^{-1} ]-\infty, a[$$

le sous-niveau  $a$  de  $f$ . Si  $a$  est une valeur régulière de  $f$ , alors  $M_a$  est une variété à bord (de même dimension que  $M$ ), dont le bord est le niveau  $f^{-1}(a)$ .



## Théorème (Absence de valeurs critiques)

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Si  $a < b$  et  $f^{-1}([a, b])$  est compact et ne contient aucun point critique de  $f$ , alors  $M_a$  est diffeomorphe à  $M_b$ ,  $M_a$  est une rétraction par déformation de  $M_b$ , et il existe un diffeomorphisme  $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow f^{-1}([a, b])$ , pour lequel le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(a) \times [a, b] & \xrightarrow{F} & f^{-1}([a, b]) \\ & \searrow \pi_2 & \downarrow f \\ & & [a, b] \end{array}$$

En particulier, tout les sous-niveaux de  $f$  entre  $a$  et  $b$  sont diffeomorphes.

*Démonstration.* L'idée est d'utiliser le flot d'un champ de vecteurs complet (lié au champ gradient de  $f$ ), pour rétracter  $M_b$  sur  $M_a$ .

Soit  $U$  un voisinage relativement compact de  $f^{-1}([a, b])$ . Notons que le champ gradient  $\nabla f$  ne s'annule pas sur  $f^{-1}([a, b])$ . Soit  $\rho : M \rightarrow [0, +\infty[$  de classe  $C^\infty$ , égale à  $\frac{1}{\|\nabla f\|^2}$  sur  $f^{-1}([a, b])$  et nulle à l'extérieur de  $U$ <sup>2</sup>. Le champ de vecteurs  $X = \rho \nabla f$  est à support compact sur  $U$  et donc son flot définit un groupe à 1-paramètres de diffeomorphismes  $\psi_t : U \rightarrow U$ . Pour chaque  $x \in U$ , considérons la courbe  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $c(t) = f(\psi_t(x))$ . Nous avons,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c(t) &= d_{\psi_t(x)}f \circ \frac{d}{dt}\psi_t(x) \\ &= d_X f(\psi_t(x)) \\ &= g(\nabla f, X)(\psi_t(x)). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $\psi_t(x) \in f^{-1}([a, b])$ ,

$$\frac{d}{dt}c(t) = g\left(\nabla f, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}\right)(\psi_t(x)) = 1,$$

et  $c(t) - c(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}c(s)ds = t$ . Donc

$$f(\psi_t(x)) = c(t) = c(0) + t = f(\psi_0(x)) + t = f(x) + t.$$

Supposons maintenant que  $f(x) = a$ , alors  $c(t) = a + t$ , et donc  $c(b - a) = b$ . Donc, si  $x \in f^{-1}(a)$  et  $y = \psi_{b-a}(x)$ , alors  $f(y) = b$ .

Considérez le diffeomorphisme  $\psi_{b-a} : M \rightarrow M$ . Nous venons de voir que tout  $x \in M$  avec  $f(x) = a$  s'envoie sur  $y$  tel que  $f(y) = b$  et si  $f(x) < a$ , alors pour  $y = \psi_{b-a}(x)$  nous avons  $f(y) < b$ . Par conséquent,  $\psi_{b-a}$  envoie  $M_a$  sur  $M_b$  et son inverse  $\psi_{a-b} = \psi_{b-a}^{-1}$  envoie  $M_b$  sur  $M_a$ . Par conséquent,  $M_a$  et  $M_b$  sont diffeomorphes.

Considérons maintenant la famille à un paramètre d'applications  $r_t : M_b \rightarrow M_b$  donnée par

$$r_t(x) = \begin{cases} x, & \text{si } f(x) \leq a \\ \psi_{t(a-f(x))}(x), & \text{si } a \leq f(x) \leq b. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Les fonctions  $C^\infty$  à support compact existent toujours, voir [?]

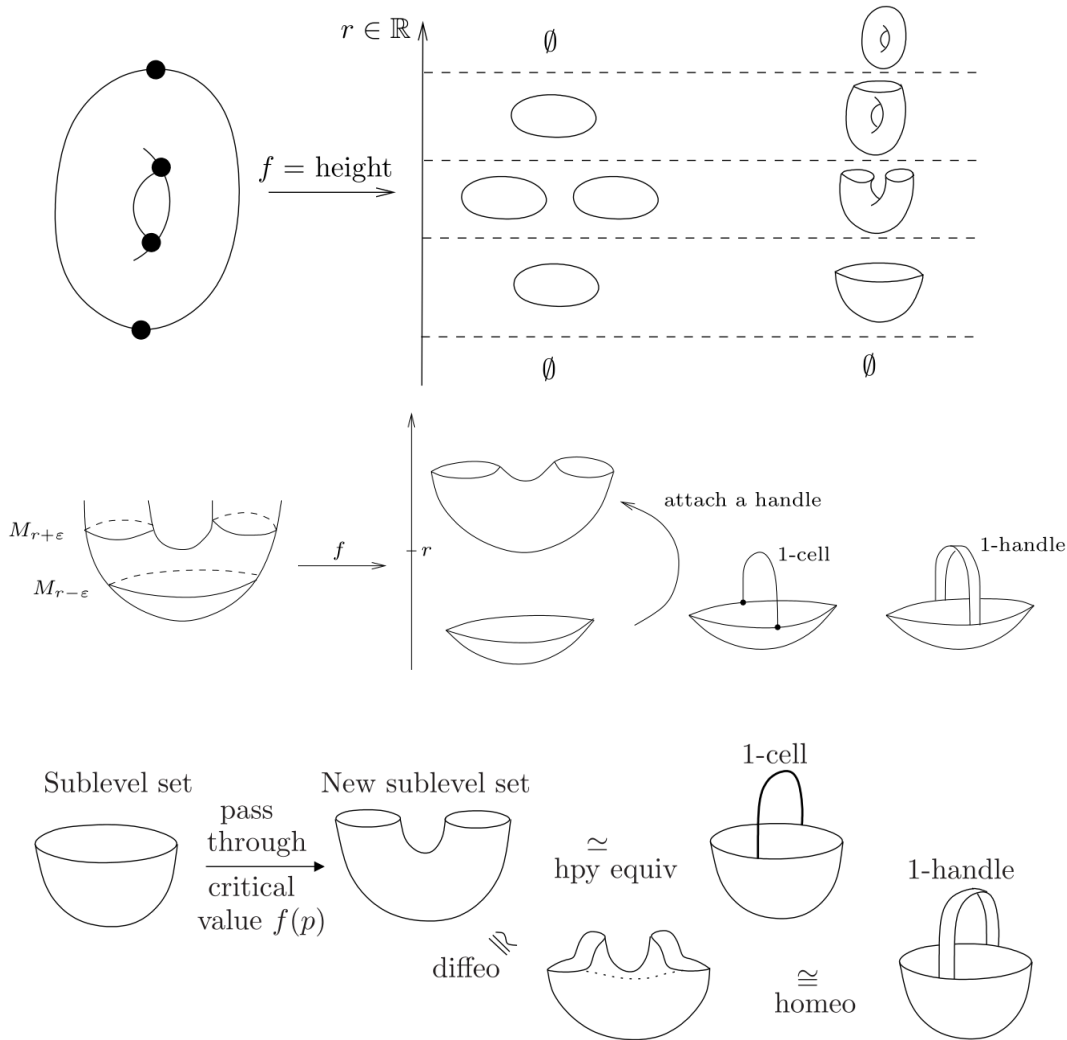
L'application  $r_t$  est continue car pour  $a = f(x)$ ,  $\psi_{t(a-f(x))}(x) = \psi_0(x) = x$ . Comme  $r_0$  est l'identité et  $r_1$  est une rétraction de  $M_b$  sur  $M_a$ , alors  $M_a$  est un rétraction par déformation de  $M_b$ .

Pour la deuxième partie du théorème, on considère l'application

$$F : \begin{matrix} f^{-1}(a) \times [a, b] & \longrightarrow & f^{-1}([a, b]) \\ (x, t) & \longmapsto & F(x, t) = \psi_{t-a}(x) \end{matrix}$$

Le calcul ci-dessus montre que pour tout  $x \in f^{-1}([a, b])$  nous avons  $\psi_{a-f(x)}(x) \in f^{-1}(a)$ . Ainsi,  $F(\psi_{a-f(x)}(x), f(x)) = x$  et  $F$  est surjectif. Puisque  $f$  augmente le long de ses lignes de flux de gradient,  $F$  est augmentant également le long des lignes d'écoulement de  $X$ . Par conséquent,  $F$  est injective et  $F$  est une immersion parce que les lignes de gradient sont transversales aux ensembles de niveaux. Par conséquent,  $F$  est un difféomorphisme.  $\square$

### 1.2.1 Franchissement d'une valeur critique



## Théorème (Franchissement d'une valeur critique)

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Soit  $p$  un point critique non dégénéré d'indice  $k$  de  $f$  et soit  $r = f(p)$ . On suppose que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $f^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon])$  est compact et ne contient pas d'autre point critique de  $f$  que  $p$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, l'espace  $M_{r+\varepsilon}$  a le même type d'homotopie de  $M_{r-\varepsilon}$  auquel on a ajouté une cellule de dimension  $k$  (la variété instable de  $p$ ).

*Démonstration.* Commençons par présenter les idées de la démonstration en contemplant la figure 5. La cellule  $e^k$  est le morceau de variété instable de  $a$  représenté sur cette figure. Ensuite :

1. en modifiant  $f$ , on construit une fonction  $F$  qui coïncide avec  $f$  sauf sur un voisinage de  $a$ , où  $F < f$ , de sorte que  $F^{-1}([-\infty, r - \varepsilon])$  sera la réunion de  $M_{r-\varepsilon}$  et d'un petit voisinage de  $p$  (la partie hachurée horizontalement sur la figure 5);
2. ainsi, le théorème (1.2) appliqué à la fonction  $F$  donne la partie hachurée  $F^{-1}([-\infty, r + \varepsilon])$  comme un rétracte de  $M_{r+\varepsilon}$  (qui est aussi le sous-niveau  $r + \varepsilon$  pour la fonction modifiée  $F$ );
3. on peut alors se placer dans une carte de Morse pour montrer que la partie de  $M$  constituée du morceau de variété instable et de  $M_{r+\varepsilon}$  est un rétracte par déformation de  $F^{-1}([-\infty, r + \varepsilon])$ .

**Construction de  $F$ .** On choisit une carte de Morse  $(U, h)$  au voisinage de  $p$  et un  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $f^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon])$  soit compact et pour que  $U$  contienne la boule de centre 0 et de rayon  $\sqrt{2\varepsilon}$ . Le disque  $D^k$  est la partie de  $U$  formée des  $(x_-, x_+)$  tels que  $\|x_-\|^2 < \varepsilon$  et  $x_+ = 0$ . Sur la figure 5, comme sur la figure 6, le sous-niveau  $M_{r-\varepsilon}$  est hachuré obliquement alors que  $f^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon])$  est pointillé. La cellule, le disque  $D^k$  est en trait gras.

On construit la fonction  $F$  en utilisant une fonction  $\mu : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  de classe  $C^\infty$ , avec les propriétés suivantes :

- $\mu(0) > \varepsilon$ ;
- pour  $s \geq 2\varepsilon$ ,  $\mu(s) = 0$ ;
- pour tout  $s$ ,  $-1 < \mu'(s) \leq 0$ .

On définit  $F$  par

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin h(U) \\ r - \|x_-\|^2 + \|x_+\|^2 - \mu(\|x_-\|^2 + 2\|x_+\|^2), & \text{si } x = h(x_-, x_+) \end{cases}$$

Remarquons que le sous-niveau  $r + \varepsilon$  de  $F$  est exactement de  $f$ . En effet,

- en dehors de  $\|x_-\|^2 + 2\|x_+\|^2 \leq 2\varepsilon$ ,  $F = f$ ;
- à l'intérieur de l'ellipsoïde en question, on a

$$F(x) \leq f(x) = r - \|x_-\|^2 + \|x_+\|^2 \leq r + \frac{1}{2}\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2 \leq r + \varepsilon.$$

Les points critiques de  $F$  sont les mêmes que ceux de  $f$ , puisque pour tout  $x \in h(U)$

$$d_x F = -2 \sum_{i=1}^k x_i (-1 - \mu'(\xi^2 + 2\eta^2)) dx_i + 2 \sum_{i=k+1}^n x_i (1 - 2\mu'(\xi^2 + 2\eta^2)) dx_i$$

et comme  $-1 - \mu'(\xi^2 + 2\eta^2) < 0$  et  $1 - 2\mu'(\xi^2 + 2\eta^2) \geq 1$  alors  $d_x F$  ne s'annule que pour  $x_- = x_+ = 0$ , c'est-à-dire en  $p$ .

Nous avons

$$F^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon]) \subset f^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon]).$$

En effet, comme  $F \leq f$  alors  $f^{-1}([-\infty, r - \varepsilon]) \subset F^{-1}([-\infty, r - \varepsilon])$  et

$$\begin{aligned} F^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon]) &= F^{-1}([-\infty, r + \varepsilon]) - F^{-1}([-\infty, r - \varepsilon]) \\ &\subset M_{r+\varepsilon} - F^{-1}([-\infty, r - \varepsilon]) \\ &\subset M_{r+\varepsilon} - f^{-1}([-\infty, r - \varepsilon]) \\ &= f^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon]). \end{aligned}$$

en particulier, cette région est compacte. De plus, elle ne contient aucun point critique de  $F$  : le seul possible serait  $p$ , mais

$$F(p) = r - \mu(0) < r - \varepsilon.$$

On en déduit que  $F^{-1}([-\infty, r + \varepsilon])$  est un rétracte par déformation de  $M_{r+\varepsilon}$ . Appelons  $H$  la partie hachurée horizontalement sur la figure 5 (et blanche sur la figure 8), c'est-à-dire l'adhérence de  $F^{-1}([-\infty, r + \varepsilon]) - M_{r+\varepsilon}$ . On a en particulier

$$F^{-1}([-\infty, r + \varepsilon]) = M_{r+\varepsilon} \cup H.$$

**La rétraction** On définit la rétraction en suivant les flèches indiquées sur la figure 9. Précisément,  $r_t$  est l'identité en dehors de  $h(U)$  et on définit  $r_t$  sur  $U$  (plutôt que sur  $h(U)$ , pour alléger l'écriture) par

- sur la région 1 (figure 9), c'est-à-dire sur  $\|x_-\|^2 \leq \varepsilon$ ,

$$r_t(x_-, x_+) = (x_-, tx_+);$$

- sur la région 2, définie par  $\varepsilon \leq \|x_-\|^2 \leq \varepsilon\|x_+\|^2$ , on pose

$$r_t(x_-, x_+) = (x_-, s_t(x_+))$$

avec

$$s_t = t + (1 - t) \frac{\sqrt{\|x_-\|^2 - \varepsilon}}{\|x_+\|}$$

le nombre ad hoc pour rendre les formules continues;

- sur la région 3, qui correspond à  $M_{r+\varepsilon}$  et où  $\|x_+\|^2 + \varepsilon \leq \|x_-\|^2$ , on prend simplement  $r_t = \text{Id}$ .

□

# Classification des surfaces fermées



## 2.1 Surfaces remarquables

Nous allons nous intéresser dans cette partie aux surfaces fermées. Ce sont des variétés topologiques de dimension 2. Intuitivement, une variété (topologique) de dimension 2 est un espace topologique qui est, dans un voisinage de chaque point, homéomorphe au disque unité  $D = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| < 1\}$ . Nous allons considérer nos espaces à isomorphisme près<sup>1</sup>. En dimension 0, il n'y a qu'une seule variété connexe à homéomorphisme près : le point. En dimension 1, les variétés connexes sont :

- le cercle,
- la droite réelle,
- l'intervalle compact  $[0, 1]$ ,
- l'intervalle ouvert-fermé  $[0, 1[$ .

En dimension 2, on peut aussi dresser la liste de toutes les variétés topologiques connexes et fermées à homéomorphisme près. Une telle liste est une classification des surfaces connexes et fermées. Décrire cette liste et montrer qu'elle est complète et non-redondante est le but de cette partie.

**Sphère** Comme ensemble il s'agit simplement de

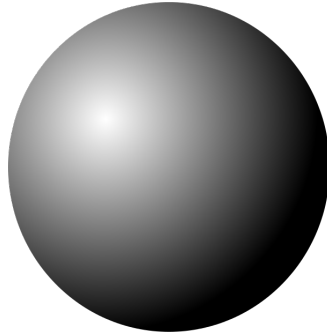
$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}.$$

On muni  $S^2$  de la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^3$ . Le fait que l'on parle de la sphère sous-entend qu'il n'y en a qu'une, ce qui est bien le cas lorsque l'on considère les surfaces à homéomorphisme près. En effet, les sphères  $\{x \in \mathbb{R}^3, \|x - x_0\| = r\}$ , où  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  et  $r > 0$  sont toutes homéomorphes à  $S^2$ .

---

<sup>1</sup>les isomorphismes de variétés topologiques sont les homéomorphismes



FIG. 2.1 : Sphère  $S^2$ 

**Tore**  $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}), \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\}$ , muni de la topologie produit. On peut aussi le décrire comme le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  dont on a identifié les côtés opposés comme sur le dessin ci-dessous :

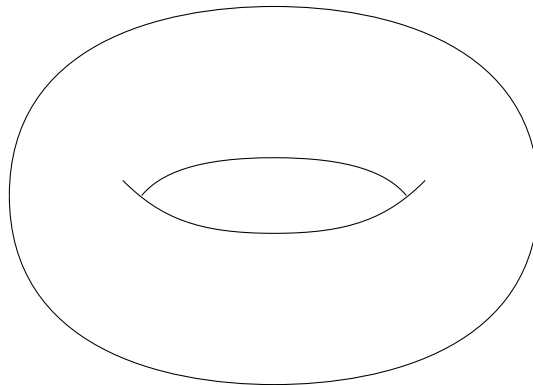
Plus précisément, on forme le quotient du carré par la relation d'équivalence  $\sim_{T^2}$  définie par les relations :

$$\begin{cases} (t, 0) \sim_{T^2} (t, 1) \\ (0, t) \sim_{T^2} (1, t) \end{cases}$$

La topologie est aussi la topologie quotient relativement à la surjection

$$[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1] / \sim_{T^2} .$$

Ceci revient aussi à former le quotient du cylindre fermé  $[0, 1] \times S^1$  par la relation d'équivalence  $\sim'_{T^2}$ :

FIG. 2.2 : Tore  $T^2$ 

**Bande Möbius** On le décrit comme étant le carré (ruban)  $[0, 1] \times [0, 1]$  quotienté par le relation d'équivalence  $\sim_M, (0, t) \sim_M (1, 1 - t)$

Le bord du ruban de Möbius, contrairement à celui du cylindre fermé n'est constitué que d'un seul cercle!

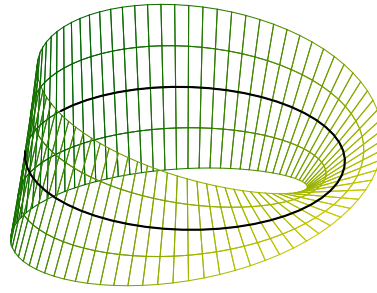


FIG. 2.3 : Bande de Möbius

**Bouteille de Klein** La bouteille de Klein est une surface fermée, sans bord et non orientable. La bouteille de Klein peut aussi être obtenue par recollement de deux rubans de Möbius le long de leurs bords. De manière équivalente, la bouteille de Klein est la somme connexe de deux plans projectifs.

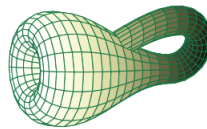


FIG. 2.4 : Bouteille de Klein

## 2.2 Théorème de classification

**Somme connexe et orientation sur les surfaces :**

**Surfaces orientables :**

Notons  $T_1$  le tore  $S^1 \times S^1$ . C'est une surface compacte dont le groupe fondamental est  $\pi_1(T_1) = \mathbb{Z}^2$ . On définit par récurrence la surface  $T_{n+1} = T_n \# T_1$  (On peut définir  $T_0$  comme la sphère  $S^2$ ). On appelle  $T_n$  la **surface orientée de genre  $n$** .

Nous allons calculer par récurrence les groupes fondamentaux des  $T_n$ . Notons  $V_1$  l'espace obtenu en enlevant un carré à  $T_1$ . On peut écrire  $V_1$  comme l'union de deux cylindres courbés  $A$  et  $B$ , chacun définis par un produit de la forme  $S^1 \times J$  avec  $J$  un arc de cercle. Leurs groupes fondamentaux sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . Leur intersection est un rectangle  $J \times J$  simplement connexe. Le théorème de Van Kampen nous donne  $\pi_1(V_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

En choisissant le point de base  $O$  sur un coin du carré, soit  $a$  la classe dans  $V_1$  d'un lacet

parcourant une fois  $S^1 \times 0$  dans la direction indiquée par un côté,  $b$  la classe d'un qui parcourt  $0 \times S^1$ , et soit le lacet parcourant le bord du carré.  $a$  et  $b$  sont des générateurs de  $\pi_1(V_1)$ , et la classe de  $\gamma$  dans  $V_1$  est  $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$  le commutateur de  $a$  et  $b$ .

Notons  $V_n$  l'espace obtenu en enlevant un disque à  $T_n$  et supposons par récurrence que  $\pi_1(V_n)$  soit le groupe libre à  $2n$  générateurs  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ , et que la classe du bord de  $V_n$  soit  $[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]$ . On peut obtenir  $V_{n+1}$  en recollant  $V_1$  et  $V_n$  sur une portion de cercle simplement connexe de leurs bords.

Le théorème de Van Kampen nous dit que  $\pi_1(V_{n+1})$  est un groupe libre à  $2n + 2$  générateurs  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  (donnés par  $\pi_1(V_n)$ ) et  $a_{n+1}, b_{n+1}$  (donnés par  $\pi_1(V_1)$ ).

On choisit le point de base  $O$  à la fois sur le bord de  $V_{n+1}$  et sur la zone de recollement de  $V_1$  et  $V_n$ . Le bord de  $V_{n+1}$  peut s'écrire comme le composé du bord de  $V_n$ , de classe  $[a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$ , et du bord de  $V_1$  de classe  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ , ce qui achève la récurrence.

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Van Kampen sur  $T_n = V_n \cup D^2$  pour obtenir le groupe fondamental de  $T_n$ .

**Proposition 3.** *Le groupe fondamental de  $T_n$  est le quotient du groupe libre à  $2n$  générateurs  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  par le sous groupe distingué engendré par le produit des commutateurs  $[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]$ , i.e. la présentation :*

$$\pi_1(T_n) = \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] \rangle.$$

## Surfaces non orientables

Le plan projectif réel  $P^2R$  peut être obtenu comme l'espace quotient de la sphère  $S^2$  par la relation qui identifie les paires de points antipodaux. La surjection canonique  $S^2 \rightarrow P^2R$  est continue, et localement un homéomorphisme.  $P^2R$  est une surface compacte. On peut décomposer la sphère  $S^2$  en deux petits disques opposés  $D_1$  et  $D_2$  plus une couronne  $C$ , s'intersectant en deux cercles disjoints. L'image sur  $P^2R$  de  $D_1 \cup D_2$  est un disque  $D$ , et la couronne  $C$  devient un ruban de Moebius  $M$ .

On a donc  $P^2R = M \cup D$  avec  $M \cap D$  leur bord commun, un cercle faisant deux fois le tour du ruban de Moebius. Le théorème de Van Kampen donne alors le groupe fondamental du plan projectif réel :

**Proposition 4.** *le groupe fondamental du plan projectif réel est donné par :*

$$\pi_1(P^2R) = \mathbb{Z}_2.$$

On définit  $U_1 = P^2R$  et par récurrence  $U_{n+1} = U_n \# U_1$ . Les surfaces  $U_n$  contiennent une partie homéomorphe au ruban de Moebius, elle ne sont donc pas orientables. On appelle  $U_n$  la surface non orientable de genre  $n$ .

Si  $a$  est un générateur de  $\pi_1(M)$ , la classe du bord  $\gamma_1$  de  $M$  est  $a^2$ .  $U_2$  est obtenu en recollant deux rubans de Moebius  $M_1$  et  $M_2$  le long de leurs bords, c'est la bouteille de Klein. La classe du lacet  $M_1 \cap M_2$  est  $a_1^2$  dans  $M_1$  et  $a_2^{-2}$  dans  $M_2$ .

D'après le théorème de Van Kampen,  $\pi_1(U_2)$  est le quotient du groupe libre à deux générateurs  $a_1, a_2$  par le sous groupe distingué engendré par  $a_1^2 a_2^2$ .

**Proposition 5.**  $\pi_1(U_n)$  est le quotient du groupe libre à  $n$  générateurs  $a_1, \dots, a_n$  par le sous groupe distingué engendré par  $a_1^2 \dots a_n^2$ , i.e. la présentation :

$$\pi_1(U_n) = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^2 \dots a_n^2 \rangle.$$

*Démonstration.* On procède par récurrence, de la même façon que pour les surfaces  $T_n$ . Notons  $W_n$  l'espace  $U_n$  privé d'un petit disque ouvert.  $W_1$  est un ruban de Moebius, de groupe fondamental  $\mathbb{Z}$ . On construit  $W_n$  en recollant  $W_{n-1}$  et un ruban de Moebius  $M$  le long d'un arc de cercle. On a donc  $\pi_1(W_n) = \pi_1(W_{n-1}) * \pi_1(M)$  et par récurrence  $\pi_1(W_n)$  est le groupe libre à  $n$  générateurs  $a_1, \dots, a_n$ .

Le bord  $\gamma_n$  de  $W_n$  se décompose en  $\gamma_{n-1}\gamma'_1, \gamma'_1$  de classe  $a_n^2$  dans  $M$ . Par récurrence, la classe de  $\gamma_n$  dans  $W_n$  est  $a_1^2 \dots a_n^2$ . On conclut en utilisant le théorème de Van Kampen sur  $U_n = W_n \cup D$ . □

**Proposition 6.**

1. Pour tout  $g, h$ ,  $T_g$  et  $P_h$  ne sont pas homéomorphes.
2. Si  $g \neq h$  alors  $T_g$  et  $T_h$  ne sont pas homéomorphes. ■

*Démonstration.*

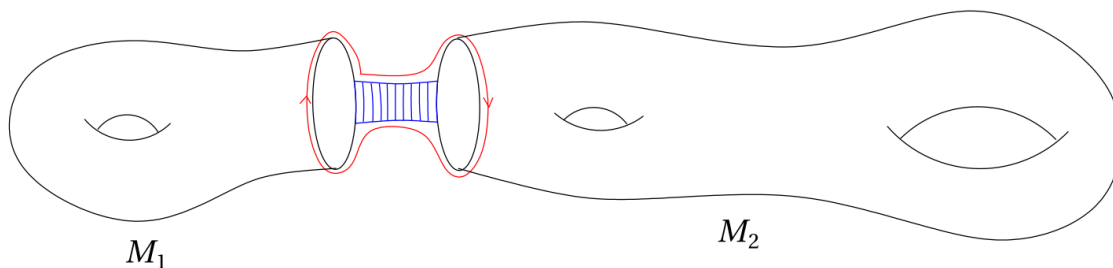
1. La surface  $T_g$  est orientable, donc n'est pas homéomorphe à la surface non orientable  $P_h$ .
- 2.

$$\begin{aligned} \pi_1(S^2) = 1, \quad \pi_1(T_g) &= \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{2g} \mid [\gamma_1, \gamma_2] \dots [\gamma_{2g-1}, \gamma_{2g}] \rangle \\ \pi_1(P_g) &= \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \mid \gamma_1^2 \dots \gamma_g^2 \rangle \end{aligned}$$

et l'abélianisé est donné par

$$\begin{aligned} \pi_1(T_g)/[\pi_1(T_g), \pi_1(T_g)] &= \mathbb{Z}^{2g} \\ \pi_1(P_g)/[\pi_1(P_g), \pi_1(P_g)] &= \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

□




---

<sup>2</sup>de même pour  $P_g$  et  $P_h$ .

- Définition 2.1.** 1. On appelle *tore à g anses* et on note  $T_g$  toute surface homéomorphe à  $T \# T \# \dots \# T$  ( $g$  copies,  $g$  entier  $\geq 2$ ), avec les conventions  $T_1 = T$  et  $T_0 = S^2$ .
2. On appelle *plan projectif à g anses* et on note  $P_g$  toute surface homéomorphe à  $P \# T_g$  ( $g$  entier  $\geq 0$ ,  $P_0 = P$ ).
3. On appelle *bouteille de Klein à g anses* et on note  $B_g$  toute surface homéomorphe à  $B \# T_g$  ( $g$  entier  $\geq 0$ ,  $B_0 = B$ ).

### Théorème de classification

- Toute surface fermée orientable de genre  $g$  est homéomorphe à :

$$S^2, \text{ si } g = 0 \text{ et à } T_g = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g \text{ copies}}, \text{ si } g \geq 1.$$

- Toute surface fermée non orientable de genre  $g \geq 1$  est homéomorphe à :

$$P_g = \underbrace{\mathbb{P}R^2 \# \dots \# \mathbb{P}R^2}_{g \text{ copies}}.$$

*Démonstration.* Pour une preuve détaillée voir [4] et [8].

□



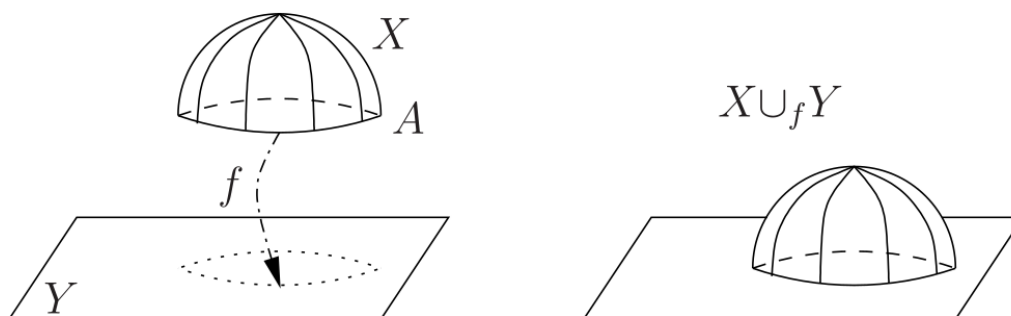
### 3.1 Somme connexe et recollement

#### Recollement

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $A$  une partie de  $X$  et  $f : A \rightarrow Y$  une application continue. Le recollement de  $X$  sur  $Y$  par  $f$  est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \amalg Y) / \mathcal{R},$$

où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim f(x)$  pour tout  $x$  dans  $A$ .



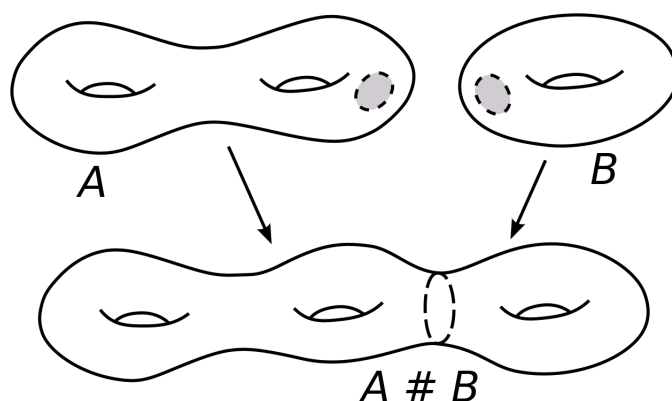
**Remarque.** Si  $X$  et  $Y$  sont connexes (resp. connexes par arcs), alors  $X \cup_f Y$  l'est aussi.

#### Somme connexe de variétés

La *somme connexe* de deux variétés connexes de même dimension  $n$  est obtenue en retirant à chacune un petit voisinage d'un point formé d'une boule ouverte, et en recollant les deux variétés ainsi obtenues (en prenant l'espace quotient de leur union disjointe) le long des deux sphères  $S^{n-1}$  apparues. Le résultat est une variété de dimension  $n$ , bien définie à homéomorphisme près, et connexe (sauf dans le cas où les deux variétés initiales sont homéomorphes à des droites réelles).

#### Remarques.

1. La somme connexe de deux variétés connexes (de dimension  $\geq 2$ ) est toujours connexe.
2. La somme connexe de variétés est une opération associative et commutative.
3. La somme connexe de deux variétés est orientable, si et seulement si, les deux variétés de départ sont orientables.



### Attachement de cellule



On se donne  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . On note  $e^n$  la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  et on se donne une application d'attachement  $\phi : S^{n-1} \rightarrow X$  continue qui indique l'endroit sur  $X$  où est attaché le bord de  $e^n$ . Pour effectuer cet attachement, on définit la relation  $\mathcal{R}$  sur  $X \amalg e^n$ , l'espace topologique somme de  $X$  et  $e^n$ , comme la plus petite relation d'équivalence contenant les couples  $(x, \phi(x))$  pour  $x \in S^{n-1} \subset X \amalg e^n$ .

**Définition 3.1.** L'espace  $X \cup_{\phi} e^n$  obtenu en attachant à  $X$  une  $n$ -cellule selon  $\phi$  est l'espace topologique quotient :  $X \cup_{\phi} e^n = (X \amalg e^n) / \mathcal{R}$ .

La proposition suivante permet de manier cette notion d'attachement de cellule.

#### Proposition 7.

1. Soient  $\phi_0$  et  $\phi_1$  deux applications continues de  $S^{n-1}$  dans  $X$ . Si ces applications sont homotopes alors les espaces  $X \cup_{\phi_0} e^n$  et  $X \cup_{\phi_1} e^n$  ont même type d'homotopie.
2. Soit  $Y$  un espace topologique. Si il existe une application  $f : X \rightarrow Y$  qui est une équivalence d'homotopie<sup>1</sup> alors les espaces  $X \cup_{\phi} e^n$  et  $Y \cup_{f \circ \phi} e^n$  ont même type d'homotopie.

## 3.2 Groupe fondamental et revêtements

### Groupe fondamental

Le groupe fondamental est introduit pour la première fois, par Poincaré, dans une note aux comptes rendus de l'Académie des sciences en 1892. Il s'agit d'associer à un espace topologique donné, un groupe, de tel sorte que deux espaces homéomorphes ont des groupes

<sup>1</sup>C'est-à-dire, admettant une réciproque à homotopie près.

fondamentaux isomorphes. Plus précisément, soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ , (on dira que  $(X, x)$  est un espace pointé). Soit  $\mathcal{L}(X, x)$  l'ensemble des lacets basés en  $x$ , i.e. les applications continues  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  avec  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . On voudrait faire de  $\mathcal{L}(X, x)$  un groupe, avec la concaténation des lacets :

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 (t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

mais cette opération n'est pas associative.

L'homotopie est compatible avec la concaténation des lacets et descend au quotient pour en former un groupe, appelé le groupe fondamental de  $(X, x)$  :

$$\pi_1(X, x) := \frac{\mathcal{L}(X, x)}{\text{homotopie}}.$$

Ce groupe dépend, à priori, du point base  $x$ . Néanmoins, si  $X$  est connexe par arcs,  $\pi_1(X, x)$  ne dépend plus de  $x$  et on notera simplement  $\pi_1(X)$ . Plus précisément, si  $c$  est un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $X$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(X, y) \\ [\gamma] &\longrightarrow [c \cdot \gamma \cdot c^{-1}] = [c] \cdot [\gamma] \cdot [c]^{-1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $c$ .

**Exemples.**

1.  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . On montre en fait que  $\pi_1(S^1, 1) = \{\gamma_n, n \in \mathbb{Z}\}$  où  $\gamma_n(t) = e^{i2\pi nt}$ .
2.  $\pi_1(\mathbb{R}^n)$  est trivial. En effet, tous les lacets de  $\mathbb{R}^n$  sont homotopes.

## Revêtements

Soit  $B$  un espace topologique. Un revêtement de  $B$  est la donnée d'un espace topologique  $E$  et d'une application continue  $P : E \rightarrow B$  ayant la propriété de trivialisatoin locale suivante. Pour tout point  $b$  de  $B$ , il existe un voisinage  $V$  de  $b$  dans  $B$ , un espace discret non vide  $F$  et un homéomorphisme  $\phi : P^{-1}(V) \rightarrow V \times F$  tels que le diagramme suivant commute :

Ceci veut dire qu'un revêtement est un fibré à fibres discrètes.

Autrement dit,  $P : E \rightarrow B$  est un revêtement si tout point de  $B$  appartient à un ouvert  $V$  tel que  $P^{-1}(V)$  soit une réunion disjointe d'ouverts appliqués homéomorphiquement par  $P$  sur  $V$ .

**Proposition 8.** Soit  $p : E \rightarrow B$  un homéomorphisme local surjectif, avec  $E$  compact. Alors  $p$  est un revêtement.

*Démonstration.* Soit  $b \in B$  et  $P^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Soit  $W_i$  un voisinage ouvert de  $x_i$  tel que  $p|_{W_i}$  soit un homéomorphisme de  $W_i$  sur un ouvert  $U_i$  contenant  $b$ . Quitte à les rétrécir, on peut supposer les  $W_i$  deux à deux disjoints. Soit

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i \setminus P \left( E \setminus \bigcup_{i=1}^n W_i \right)$$

et  $V_i = (P|_{W_i})^{-1}(U)$ . Alors, par construction,  $P^{-1}(U)$  est la réunion disjointe des  $V_i$ .  $\square$



**Théorème 1.** *Soit  $X$  un espace topologique et  $G$  un groupe opérant sur  $X$  de façon que, pour tout  $g \in G$ , l'application  $x \rightarrow g \cdot x$  est un homéomorphisme de  $X$ . On fait l'hypothèse (P) suivante : Pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que, pour tout  $g \neq e$  dans  $G$ ,  $gU \cap U = \emptyset$ . Alors  $X$  est un revêtement de  $X/G$ .*

**Exemples.**

1.  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(t) = e^{it}$ . D'après le théorème précédent avec  $G = \mathbb{Z}$ .
2.  $p : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $p(z) = z^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).
3.  $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ ,  $p(x) = [x]$ , avec l'action du groupe  $G = \{-\text{Id}, \text{Id}\}$ .



# Bibliographie

- [1] M. Audin, M. Damien, *Théorie de Morse et homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.
- [2] A. Banyaga, D. Hurtbise, *Lectures on Morse Homology*. Springer, 2004.
- [3] Y. Félix, D. Tanré, *Topologie algébrique*. Sciences Sup, 2010.
- [4] A. Gramain, *Topologie des surfaces*. Presses Universitaires de France, 1971.
- [5] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 1996.
- [6] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2011.
- [7] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [8] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, American Mathematical Society 2001.
- [9] J. W. Milnor, *Morse Theory*, Princeton 1963.

## Résumé

L'objet de ce mémoire est le théorème de classification des surfaces fermées à homéomorphisme près. Nous avons défini les surfaces qui interviennent dans le théorème de classification (somme connexe de tores et somme connexe de plans projectifs). Nous avons étudié la théorie de Morse dans le cadre des surfaces. Nous avons revu la notion du groupe fondamental d'une surface et montré que les surfaces construites précédemment sont toutes différentes, ce qui nous a permis de démontrer le théorème de classification et assurer qu'une surface fermée est homéomorphe soit à une somme connexe de tores ou une somme connexe de plans projectifs.

**Mots clefs :** fonction de Morse, somme connexe, groupe fondamental, surface fermée, cellule, anse.

---

## Abstract

The subject of this thesis is the classification of closed surfaces up to homeomorphism. We have defined the surfaces involved in the classification theorem (connected sum of tori and connected sum of projective planes). We have studied Morse theory in the framework of surfaces. We have introduced the notion of the fundamental group of a surface and show that the surfaces constructed previously are all different, which allowed us to prove the classification theorem and ensure that a closed surface is homeomorphic to a connected sum of tori or a connected sum of projective planes.

**Keywords :** Morse function, connected sum, fundamental group, closed surface, cell, handle.