جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية الرياضيات وعلوم المادة
قسم الفيزياء

مذكرة التخرج

ماستر أكاديمي

الميدان: علوم المادة

الشعبة: الفيزياء

التخصص: فيزياء النظرية

تقديم: أعبيدي سهيلة و المقدم هاجر

الموضوع

مبدأ عدم اليقين الموسع وبعض التطبيقات في ميكانيكا الكم

نوقشت يوم: 2020/09/29

أمام اللجنة المناقشة المكونة من:

الرئيس:	لمين خوجة	أستاذ محاضر أ	جامعة ورقلة 1
المؤطر:	بن الزائر هجيرة	أستاذ محاضر أ	جامعة ورقلة 1
المناقش:	قريشي زينب	أستاذ محاضر ب	المدرسة العليا للأساتذة

الفهرس

تشكرات

الحمد لله وحده و الصلاة و السلام على من لا نبي بعده ، مما لا بد منه أن لا يذمر إحسان المحسنين و معروفهم لقوله عليه الصلاة و السلام :"من صنع إليكم معروفا فكافئوه فإن لم تجدوا ما تكافئونه به فادعوا له حتى تروا أنكم قد كافئتموهم" . فكان لزاما علينا أن نتقدم بالشكر الجزيل لأستاذتنا الفاضلة "بن الزائر هجيرة " التي اشرفت على تأطير هذا العمل و قدمت ما في وسعها في سبيل اتمامه . كما لا يفوتنا أن نتقدم بخالص الشكر لكل من ساهم في إتمام هذا العمل من قريب أو بعيد من أساتذة بقسم الفيزياء و غيرهم . نسأل الله أن يجعل ذلك في ميزان حسناتهم يوم القيامة بحول الله.

إهداء

إلى من كان دعائهم لنا منارة لدروبنا

والدينا الكريمين

إلى من علمونا و لو حرفا في حياتنا

أساتذتنا الأكارم

إلى من كانوا بالقرب منا دائما ليعينونا و نحو القمة يدفعونا

إلى من انتظروا هذا اليوم بشوق ليروا ثمرة جهودهم

إلى كل أصدقاءنا و زملائنا الاعزاء

و إلى من نسيهم القلم

نهدي هذا العمل

أعبيدي سهيلة المقدم هاجر

الباب 1

مقدمة عامة

من أهم مبادئ ميكانيك الكم مبدأ عدم اليقين أو ما يسمى مبدأ الشك للعالم الألماني (Heisenberg)، و هو مبدأ ينص على أنه لا يمكن في الفيزياء قياس خاصيتي الموضع و السرعة بدقة متناهية لجسيم في نفس الوقت ، فهناك قدر لا يمكن للإنسان معرفته ولا قياسه . و تخضع هذه الحقيقة الطبيعية إلى معادلة عدم اليقين لـ (Heisenberg) المرتبطة بثابت بلانك h :

$$\triangle X \triangle P \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{1.1}$$

والمعادلة توضح أن حاصل ضرب عدم اليقين في الموضع مع عدم اليقين في كمية الحركة يكون دائما أكبر من ثابت بلانك h مقسوما على 2π . هذا يعني أنه لا يمكن أن يكون حاصل ضرب عدم اليقين في كمية الحركة مع حاصل ضرب عدم اليقين في الموضع صفرا ، وهو ما أثبت بالتجارب و القياسات . غير أن (Heisenberg) اعتبر المعلم ساكنا خلال حركة الجسيم و لم يدخل توسع الكون في الدراسة ، و هو ما أدرجه (de-Sitter) بتعديله لمبدأ عدم اليقين لـ (Heisenberg) ليصبح بذلك يسمى " مبدأ عدم اليقين المشوه" نسبة إلى إنحناء الفضاء ، و الذي ينقسم إلى قسمين هما :

1. **مبدأ عدم اليقين المعمم (GUP) :** و يعطى جبر (Heisenberg) له بالعلاقة :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar f(P). \tag{1.2}$$

و مثال ذلك ما جاء به (Achim Kempf) [1] في عام 1995 و الذي عرف فيه عبارة الدالة $f(P)$ بالشكل :

$$f(P) = (1 + \beta P^2). \tag{1.3}$$

و الذي يضمن حدا أدنى للطول :

$$(\triangle X)_{min} = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{1.4}$$

2. مبدأ عدم اليقين الموسع (EUP) : يعطى جبر (Heisenberg) له بالعلاقة :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar g(X). \tag{1.5}$$

و مثال ذلك ما جاء به (Anti)-de Sitter [2] و الذي أعطى عبارتهما بالشكل :

$$g(X) = \begin{cases} 1 + qX^2, & \text{For anti-de Sitter} \\ 1 - qX^2, & \text{For de Sitter} \end{cases} \tag{1.6}$$

و هو يضمن حد أدنى للزخم :

$$(\Delta P)_{min} = \hbar\sqrt{\alpha}. \tag{1.7}$$

استخدم (de-Sitter) من أجل تعديل مبدأ عدم اليقين لـ (Heisenberg) تصحيحات تتناسب مع الثابت الكوني $\Lambda = -3/L_h^2$ حيث: L_h هو نصف قطر (Anti)-de Sitter و الذي يحقق :

$$\begin{cases} L_h^2 < 0, & , \quad \text{For de Sitter} \\ L_h^2 > 0, & , \quad \text{For anti-de Sitter} \end{cases} \tag{1.8}$$

و عليه يصبح جبر (Heisenberg) المعدل له بالشكل :

$$(\Delta X)_i(\Delta P)_i \geqslant \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left[1+\frac{(\triangle X_i)^2}{L_h^2}\right]. \tag{1.9}$$

و قد سمي هذا التعديل بمبدأ عدم اليقين الموسع (EUP) و قد تم إثباته عن طريق مقارنة القياسات مع مبدأ عدم اليقين المعمم (GUP) أو عن طريق تجارب "Gedanken" التي يأخذ فيها توسع الكون بعين الاعتبار ،و قد أظهر "Mignemi" [5] أنه يمكن اشتقاق علاقة عدم اليقين الممدد(EUP) من تعريف ميكانيك الكم على خلفية سيتر المضاد فكتب العلاقة المعدلة لـ(Heisenberg) له بالشكل :

$$\left[\hat{X}_\mu,\hat{X}\nu\right]=0,\qquad \left[\hat{P}_\mu,\hat{P}_\nu\right]=i\hbar.\frac{1}{L^{2h}}\hat{L}_{\mu\nu},\qquad \left[\hat{X}_\mu,\hat{P}_\nu\right]=i\hbar\left(\lambda_{\mu\nu}+\frac{1}{L_h^2}X\mu X\nu\right). \tag{1.10}$$

حيث:$L_{\mu\nu}$ هو مؤثر العزم الحركي و يعرف بالشكل :

$$L_{\mu\nu}=X_\mu.P_\nu-X_\nu.P_\mu \qquad ;\mu,\nu=0,1,2,3. \tag{1.11}$$

قام (Filho) [6] بتقديم مصفوفة مترية قطرية تصف حركة الجسيمات في فضاء منحني و عرفها بالشكل :

$$dS^2=g_{xx}dx^2+g_{yy}dy^2+g_{zz}dz^2. \tag{1.12}$$

من المعادلة (1.12) نميز ثلاث حالات:

1. من أجل فضاء غير إقليدي و الذي تكون فيه المقادير صغيرة جدا و التي استخدمت لمحاولة دمج ميكانيك الكم مع النسبية العامة و كذا حل مشاكل ميكانيك الكم تكون القيم متباينة .

2. من أجل فضاء إقليدي يكون لدينا :

$$g_{xx}=g_{yy}=g_{zz}=1. \tag{1.13}$$

3. في بعد واحد تكون المترية التي قدمها (Filho) بالشكل:

$$ds^2 = g_{xx} dx^2. \tag{1.14}$$

واعتبر (Filho)مع زملائه الجسيم ينتقل من نقطة x إلى النقطة $x + g_{xx}^{-1/2}$ في بعد واحد وفق التحويل :

$$Tg\left(dx\right)|x >= |x + g_{xx}^{-1/2} dx\rangle. \tag{1.15}$$

هذا التحويل غير تجميعي و يمكن كتابة مؤثر التحويل T_g بالشكل :

$$Tg\left(dX\right) = 1 - iPdx \tag{1.16}$$

حيث P هو كمية الحركة المعممة مع جبر (Heisenberg) المشوه :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar g_{xx}^{-1/2} \tag{1.17}$$

من العلاقة (3.10) و (1.17) يكون :

$$g_{xx}^{-1/2} = f\left(P\right) \tag{1.18}$$

و منه تكون عبارة جبر عدم اليقين الموسع (EUP) في بعد واحد بالشكل :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar g_{xx}^{-1/2} \tag{1.19}$$

حيث يتم تعريف المترية بالشكل :

$$ds^2 = g_{xx}\,(dx)^2 \tag{1.20}$$

في الفصول القادمة سوف نناقش تأثير تشوه الفضاء على مبادئ ميكانيك الكم ، وكيف نجعله يتناسب مع هذه البادئ. كما سنتطرق الى عرض بعض التطبيقات المهمة في الفيزياء، مثل البئر الكمومي و الهزاز التوافقي في بعد واحد في حالة سيتر و سيتر المضاد وحالة الخطية مثل $[X,P]=i\hbar(1-q|x|)$. و ايضا تطبيق كمون هزاز توافقي في حالة تكميم بور سملفيد لجميع التشوهات الثلاث.

الباب 2

مبدأ عدم اليقين الموسع و الحد الادنى من الزخم

1.2 مقدمة

في ميكانيك الكم العادي اعتدنا على كتابة معادلة (Heisenberg) بالشكل التقليدي التالي :

$$\Delta X.\Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.1}$$

و كانت دالة الجاكوبي دوما مساوية للواحد $J(x) = 1$ بحكم أن الفضاء مسطح ، و لكن مع إنحناء الفضاء سوف تصبح الجاكوبي مختلفة عن الواحد $J(x) \neq 1$ وبذلك سوف تأثر على قيمة الجداء السلمي في فضاء "هيلبيرت" لكي يضمن صحة المقادير الفيزيائية تحت هذه الشروط ، والذي سنراه في الفصول اللاحقة .

2.2 مبدأ عدم اليقين الموسع في حالة (Anti) -de Sitter

مبدأ عدم اليقين لـ (Heisenberg) المقابل لهذه الحالة هو :

$$\Delta X.\Delta P \geqslant \frac{\hbar}{2}\left(1 \pm \alpha x^2\right). \tag{2.2}$$

حيث $\alpha > 0$: و تنتج منها علاقة المبدل بين x و p بالشكل :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar\left(1 \pm \alpha x^2\right). \tag{2.3}$$

في تمثيل إحداثيات الموضع يكون لدينا :

$$\hat{X} = x; \quad \hat{P} = -i\hbar(1 \pm \alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x}; \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 \pm \alpha x^2). \tag{2.4}$$

في ميكانيك الكم العادي لدينا عبارة الجداء السلمي بالشكل :

$$\langle \Psi || \phi \rangle = \int dx \Psi^*(x)\phi(x). \tag{2.5}$$

هذه العلاقة غير صالحة كجداء سلمي في حالة وجود الانحناء في الفضاء لأن مؤثر الزخم المشوه $\hat{P}$ ليس هرميتيا (غير متناظر) وفق هذا الجداء السلمي بمعنى:

$$\int dx \Psi^*(x) .P.\phi(x) \neq \int dx \left(P\Psi(x)\right)^* \phi(x) \tag{2.6}$$

نقوم بتعديل الجداء السلمي بادخال الجاكوبي ($J(P)$) ليكون بذلك مؤثر الزخم المشوه هرميتيا تحت تاثير الجداء السلمي المشوه المعرف بالعلاقة :

$$\langle \Psi | \phi \rangle = \int dx J(x) \Psi(x)^* .\phi(x) \tag{2.7}$$

بالنسبة لهذا الجداء السلمي فإنه من أجل أي مؤثر A في حالة$\Psi(x)$ يعرف بالشكل :

$$\langle A \rangle = \int dx J(x) \Psi(x)^* A \Psi(x) \tag{2.8}$$

نبحث الآن عن الجاكوبي من أجل مؤثر الزخم المشوه هرميتي تحت تاثير الجداء السلمي المشوه السابق و يحقق :

$$\int dx.J(x) . \left(P\Psi(x)\right)^* \Psi(x) = \int dx.J(x) . \left(\Psi(x)\right)^* .P\Psi(x) \tag{2.9}$$

باستخدام شرط تحقيق جبر (Heisenberg)،و التكامل يالتجزئة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالشكل :

$$\frac{dJ}{J}=\frac{\pm 2\alpha x}{1+\alpha x^2} \tag{2.10}$$

يعطي حلها بالعبارة التالية:

$$J(x)=(1\pm\alpha x^2) \tag{2.11}$$

هذا التعديل يؤدي الى علاقة الانغلاق المعممة التالية:

$$\int\frac{dx}{(1\pm\alpha x^2)}\left|x\right\rangle\left\langle x\right|=1 \tag{2.12}$$

ويمكن استخراج الجداء السلمي لشعاعين ذاتيين لمؤثر الموضع وذلك بإستخدام علاقة الانغلاق اعلاه لنحصل على:

$$\langle x|x'\rangle=(1\pm\alpha x^2)\delta(x-x') \tag{2.13}$$

3.2 مبدأ عدم اليقين الموسع في حالة $(f(x)=1-q|x|)$

يتم تعريف مبدأ عدم اليقين الموسع في حالة القيمة المطلقة ل$|x|$ كالتالي :

$$\Delta p\Delta x\geqslant\frac{1}{2}\left\langle 1-q|x|\right\rangle \tag{2.14}$$

و الذي يوافق المبدل التالي:

$$[\hat{x},\hat{p}]=i\left(1-q\left|x\right|\right)\qquad ,q>0 \tag{2.15}$$

علاقة مبدل عدم اليقين الموسع السابقة تختلف عن العلاقة التالية :

$$[x;p] = i\left(1 - qx\right). \tag{2.16}$$

لأن القيمة المتوسطة لـ $\langle |x| \rangle \geqslant 0$ تعطي قيمة موجبة دوما بينما $\langle x \rangle = 0$ اذا اعتبرنا الفضاء متماثل المناحي . كما ان العلاقتين تعطيان علاقتي عدم يقين مختلفتين . علاقة عدم اليقين المناسبة لـ (2.16) هي نفسها في حالة ميكانيك الكم العادي .

و التمثيل الموضعي لها هو :

$$\hat{P} = \frac{1}{i}\left(1 - q\left|x\right|\right)\frac{\partial}{\partial x} \quad ; \hat{X} = x. \tag{2.17}$$

نعتبر الدالة $\mathit{\Psi}\left(x\right)$ المعرفة بالعبارة :

$$\mathit{\Psi}\left(x\right) \in \left\{L^2(\frac{-1}{q}, \frac{1}{q}; \frac{dx}{1-q|x|})\right\}. \tag{2.18}$$

مع الشروط الحدية : $\mathit{\Psi}\left(\pm\frac{1}{q}\right) = 0$

نريد برهان أن علاقة عدم اليقين الموسع تعطي حدا أدنى غير معدوم للزخم :

لنفترض دالة الموجة المستوية$\mathit{\Psi}\left(x\right)$ مع شرط التنظيم :

$$(\Psi) = \int_{\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} \frac{dx}{1-qx^2}|\mathit{\Psi}(x)|^2 = 1. \tag{2.19}$$

و الشرط الحدي :

$$\mathit{\Psi}(\pm\frac{1}{q}) = 0. \tag{2.20}$$

أولا نبرهن أن القيمة المتوسطة للدالة الموجية تختلف عن الصفر لجميع الدوال الموجية المستوية بمعنى :

$$\langle 1 - q\,|x|\rangle = L \neq 0. \tag{2.21}$$

لنفترض أن $L = 0$ ثم لدينا في ميكانيك الكم العادي عبارة القيمة المتوسطة للدالة الموجية بالشكل :

$$\langle 1 - q|x|\rangle = \int dx\,|\Psi(x)|^2 = 0 \tag{2.22}$$

العلاقة (2.22) تكون معدومة لأن :

$$|\Psi|^2 \geqslant 0 \tag{2.23}$$

لدينا $\mathit{\Psi}(x) = 0$ في المجال $x \in \left[\frac{-1}{q}; \frac{1}{q}\right]$ ثم لدينا :

$$(\Psi, \mathit{\Psi}) = 0 \tag{2.24}$$

قيمة تنظيم الدالة تتناقض مع شرط التنظيم لذلك لا يمكن أن تكون $L = 0$ فهي محصورة بين 0 و 1 لأن $x^2 \leq \frac{1}{q^2}$ لجميع قيم المجال و بالتالي نحصل على المتراجحة :

$$\triangle x \geq \frac{qL}{2} \tag{2.25}$$

مما يعني أن جبر (Heisenberg)المشوه له يعطي حد أدنى للزخم يساوي تقريبا q .

كمثال فنفترض دالة موجية ممثلة ب:

$$\Psi\left(x\right)=A\left(1-q\left|x\right|\right)^{a}\qquad;a>0 \tag{2.26}$$

الدالة معرفة على المجال$\Psi(x)\in[\frac{-1}{q};\frac{1}{q}]$
شروطها الحدية هي :

$$\Psi\left(\pm\frac{1}{q}\right)=0 \tag{2.27}$$

شرط التنظيم للدالة يكتب بالشكل :

$$\int\frac{dx}{1-q\left|x\right|}\left|\Psi\left(x\right)\right|^{2}=1 \tag{2.28}$$

نعوض قيمة الدالة$\Psi(X)$ في التكامل :

$$\int\frac{dx}{1-q|x|}\left|A(1-q|x|)^{a}\right|^{2}=1 \tag{2.29}$$

نبسط الحدود:

$$A^{2}\int dx\frac{(1-q|x|)^{2a}}{1-q|x|}=1 \tag{2.30}$$

نجمع الحدود المتشابهة :

$$A^{2}\int dx(1-q|x|)^{2a-1}=1 \tag{2.31}$$

بالتكامل نجد:

$$A^2 . \frac{2(1-q|x|)^{2a-1}}{q} = 1 \quad (2.32)$$

بالتبسيط نحصل على قيمة :A

$$A = \sqrt{qa}$$

و بذلك تكون عبارة الدالة$\mathit{\Psi}(x)$ بالشكل :

$$\Psi(x) = \sqrt{qa}(1-q|x|)^a \quad (2.33)$$

و عليه يكون لدينا :

$$\langle 1-q|x| \rangle = aq \int (1-q|x|)^{2a} dx \quad (2.34)$$

نحسب التكامل فنجد العبارة :

$$\langle 1-q|x| \rangle = \frac{2a}{1+2a} \quad (2.35)$$

باستخدام العلاقة :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (2.36)$$

نحصل على قيمة ΔXالتالية :

$$\Delta x = \frac{1}{q\sqrt{(a+1)(2a+1)}} \tag{2.37}$$

بتعويض العلاقة (2.37) في علاقة جبر (Heisenberg)، نحصل على قيمة $\triangle P$:

$$\triangle P \geq (\triangle P)_{min} = qa\sqrt{\frac{a+1}{2a+1}} \tag{2.38}$$

بالمثل كما تم البرهان عليه في المثال الاول من تشوه الفضاء فإننا في هذا المثال الثاني سوف نجد:

$$J(x) = (1 - q|x|) \tag{2.39}$$

والذي يؤدي الى علاقة الانغلاق المعممة التالية:

$$\int \frac{dx}{(1-q|x|)} |x\rangle \langle x| = 1 \tag{2.40}$$

والجداء السلمي لشعاعين ذاتيين لمؤثر الموضع الموافق لها هو:

$$\langle x|x'\rangle = (1 - q|x|)\delta(x - x') \tag{2.41}$$

4.2 خلاصة

في هذا الفصل قدمنا تعريفا لمبدل جبر هيزنبيرج المشوه في الحالات الثلاث و ابرزنا انه لا يمكن استخدام نفس قوانين ميكانيك الكم العادي على ميكانيك الكم المشوه نظرا لان الجاكوبي تختلف و بذلك تحصلنا على قيم أدنى للزخم تختلف حسب عبارة الجاكوبي.

الباب 3

بعض التطبيقات في ميكانيك الكم

1.3 مقدمة

تهتم ميكانيك الكم بدراسة الجسيمات الأولية و التي تتحرك في حجم بعض نانومترات و من أشهر تطبيقاتها البئر الكمومي الذي يدرس حركة جسيم في حيز ضيق و الهزاز التوافقي الذي يعالج اهتزاز جسيم وفق كمون معين و كلا التطبيقين تعتمد دراسته على حركة الجسيم التي ترتبط بسرعته و منه بكمية حركته و الذي أظهرنا سابقا انه يختلف في ميكانيك الكم المشوه عن ميكانيك الكم العادي .و في هذا الفصل سندرس التطبيقين في حالة تشوه الفضاء ،و ذلك في خلفية سيتر و خلفية سيتر المضاد بالاضافة الى النوع الجديد من مبدأ هايزنبارغ الموسع.

2.3 بئر كمومي في بعد واحد

في ميكانيك الكم مسألة جسيم يتحرك في بئر كمومي لا نهائي هي مسالة تصف جسيم يتحرك في حيز ضيق يحيطه حاجز غير نفاذ ، و يستخدم هذا النموذج لإيضاح الفرق بين الميكانيك الكلاسيكي و ميكانيك الكم الذي يطبق على الأنظمة الكمومية . تنجح ميكانيك الكم في وصف الأنظة الكمومية أي الصغيرة جدا في حجم الذرات و الجسيمات الأولية ، حيث تبدأ الظواهر الكمومية في الظهور في حين فشل الميكانيك التقليدي في وصفها لأنه يطبق على الأجسام الكبيرة فقط .

في الأنظمة الكلاسيكية مثل جسيم منحصر داخل بئر يكون الجسيم يتحرك بأي سرعة و يكون احتمال وجوده في أي نقطة من الفضاء متساوي و لكن عندما يصغر البئر في حيز عدة نانومترات فإنه تصبح التاثيرات الكمومية مهمة و يبدأ الجسم باتخاذ مستويات طاقة معينة في البئر و في نفس الوقت فإنه يستحيل أن تكون طاقة الجسيم صفرا بمعنى أن الجسيم لا يمكن أن يكون في حالة سكون تام . ضف إلى ذلك فإن الجسيم يمكنه التواجد في أماكن محددة من البئر و هناك بعض المواضع لا يمكنه التواجد بها .

في الفروع التالية سندرس تطبيق البئر الكمومي في حالة سيتر و في حالة سيتر المضاد و في حالة النوع الجديد من مبدا عدم اليقين الممدد.

نعتبر جسيم كمومي بدون سبين كتلته m يتحرك في بئر كمومي احادي بعد بالشكل التالي :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : 0 < x < a \\ \infty & : x \notin [0; a] \end{cases} \tag{3.1}$$

تعطى معادلة شرودنغر بالشكل :

$$\left(\frac{P^2}{2m} + V(x) \right) \Psi(x) = E\Psi(x). \tag{3.2}$$

في الفروع القادمة نريد الحصول على عبارة الطاقة في حالة ديسيتر و في حالة ديسيتر المضاد و في حالة $F(x) = 1 - q|x|$

1.2.3 في حالة $F(x) = 1 - q|x|$

من التمثيل الموضعي لدينا عبارة مؤثر كمية الحركة بالشكل التالي:

$$\hat{P} = (i\hbar(1 - q|x|) \frac{d}{dx}. \tag{3.3}$$

نعوض قيمة (3.3) في المعادلة (3.2) :

$$\left(\frac{\left((i\hbar(1 - q|x|) \frac{d}{dx} \right)^2}{2m} + V(x) \right) \Psi(X) = E\Psi(x) \tag{3.4}$$

ولتحقيق شرطي البئر الكمومي يجب أن تؤول الدالة الموجية $\Psi(x)$ إلى الصفر عند جدران البئر، لأن عدم إختراق الجسيم للجدران الكمونية يعني إنعدام الدالة التي تصف حركتها، ولصياغة الشروط الحدودية للمسالة المطروحة نكتب معادلة شرودنغر التفاضلية المعبرة عن حركة الجسيم داخل البئر كالتالي: من أجل : $x \in]0, a[$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left((1-q|x|)\frac{d}{dx}\right)^2-E\right)\Psi(x)=0 \tag{3.5}$$

باستخدام تغيير المتغير التالي :

$$\frac{d}{ds}=(1-q|x|)\frac{d}{dx}\Rightarrow\frac{ds}{dx}=\frac{1}{(1-q|x|)} \tag{3.6}$$

نكتب المعادلة التفاضلية بدلالة ds فنحصل على المعادلة :

$$(-\hbar^2\frac{d^2}{ds^2}-2mE)\Psi(s)=0 \tag{3.7}$$

- إيجاد الحالة الكمومية العامة للجسيم داخل بئر كمون لانهائي: - المعادلة السابقة هي معادلة شرودنغر لها حل من الشكل الآسي التالي:

$$\Psi(s)=Ae^{iks}+Be^{-iks} \tag{3.8}$$

حيث :

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\bar{h}^2}} \tag{3.9}$$

باستخدام الشرطين الحديين على العلاقة (3.8) نجد :

$$V(x)=\begin{cases}\psi(0)=0 \quad\Longrightarrow\; B=-A\Longrightarrow\;\Psi(s)=A(e^{iks}-e^{-iks})\\ \Psi(a)=0,\end{cases} \tag{3.10}$$

و عليه تكون عبارة الحل بالشكل :

$$\Psi(s) = 2iA\sin(ks) \tag{3.11}$$

بتعويض شرط العلاقة (3.10) $(\Psi(a) = 0)$ في العلاقة (3.11) نجد :

$$2iA\sin(ks(a)) = 0 \tag{3.12}$$

من أجل $a = x$ نستخرج عبارة $s(a)$

$$ds = \frac{dx}{1-q|x|} \quad \Rightarrow s = -\frac{\ln(1-qx)}{q} \quad \Rightarrow s(a) = -\frac{\ln(1-qa)}{q} \tag{3.13}$$

نعوض قيمة s في عبارة الحل :

$$\Psi(a) = -2iA\sin\left(k\frac{\ln(1-qa)}{q}\right) = 0 \tag{3.14}$$

الشرط على الدالة sin لتكون معدومة هو :

$$k\frac{\ln(1-qa)}{q} = n\pi \qquad n = 1; 2; 3; ..... \tag{3.15}$$

لنحصل على قيمة k مكممة.

$$k = \frac{n\pi q}{\ln(1-qa)} \qquad n = 1; 2; 3; ..... \tag{3.16}$$

و منه تكون عبارة الحلول من الشكل :

$$\Phi_n(s) = -2iA\sin\left(\frac{n\pi q}{\ln(1-qa)}s\right), \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.17}$$

- **إيجاد عبارة الطاقة:** بتعويض قيمة $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ في شرط الدالة $\sin$ نجد :

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}\frac{\ln(1-qa)}{q}) = n\pi \tag{3.18}$$

و منه تكون عبارة الطاقة بالشكل :

$$E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{\left(\frac{\ln(1-qa)}{q}\right)^2} \tag{3.19}$$

2.2.3 في حالة $F(x) = 1 \pm qx^2$

من التمثيل الموضعي لدينا عبارة بالشكل :

$$\hat{P} = -(i\hbar(1 \pm qx^2)\frac{d}{dx}. \tag{3.20}$$

نعوض قيمة (3.20) في المعادلة (3.2) :

$$\left(\frac{\left((i\hbar(1 \pm qx^2)\frac{d}{dx}\right)^2}{2m} + V(x)\right)\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{3.21}$$

ولتحقيق شرطي البئر الكمومي يجب أن تؤول الدالة الموجية $\Psi(x)$ الى الصفر عند جدران البئر, لان عدم اختراق الجسيم للجدران الكمونية يعني انعدام الدالة التي تصف حركتها, ولصياغة الشروط الحدودية للمسالة المطروحة نكتب معادلة

شرودنغر التفاضلية المعبرة عن حركة الجسيم داخل البئر كالتالي: من أجل : $x \in]0, a[$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left((1 \pm qx^2)\frac{d}{dx}\right)^2 - E\right)\Psi(x) = 0 \tag{3.22}$$

باستخدام تغيير المتغير التالي :

$$\frac{d}{ds} = (1 \pm qx^2)\frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{1}{(1 \pm qx^2)} \tag{3.23}$$

نكتب المعادلة التفاضلية بدلالة ds فنحصل على المعادلة :

$$\left(-\hbar^2\frac{d^2}{ds^2} - 2mE\right)\Psi(s) = 0 \tag{3.24}$$

- إيجاد الحالة الكمومية العامة للجسيم داخل بئر كمون لانهائي: - المعادلة السابقة هي معادلة شرودنغر لها حل من الشكل الآسي التالي:

$$\Psi(s) = Ae^{iks} + Be^{-iks} \tag{3.25}$$

حيث :

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\bar{h}^2}} \tag{3.26}$$

باستخدام الشرطين الحديين (3.1) على العلاقة (3.25) نجد :

$$\begin{cases} \Psi(0) = 0 \Longrightarrow \ B = -A \\ \Psi(a) = 0 \Longrightarrow \ \Psi(s) = 2iA\sin(ks) \end{cases} \tag{3.27}$$

و عليه تكون عبارة الحل بالشكل :

$$\Psi(s) = 2iA\sin(ks) \tag{3.28}$$

بتعويض العلاقة (3.27) في العلاقة (3.28) نجد :

$$2iAsin(ks(a)) = 0 \tag{3.29}$$

من أجل $x = a$ نستخرج عبارة $s(a)$:

$$ds = \frac{dx}{1 \pm qx^2} \tag{3.30}$$

$$s = -\frac{\arctan(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}} \Rightarrow s(a) = -\frac{\arctan(\sqrt{q}a)}{\sqrt{q}} \tag{3.31}$$

الشرط على الدالة sin لتكون معدومة هو :

$$\left(k\frac{\arctan(\sqrt{q}a)}{\sqrt{q}}\right) = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{\frac{\arctan(\sqrt{q}a)}{\sqrt{q}}} \qquad n = 1; 2; 3; ..... \tag{3.32}$$

و منه تكون عبارة الحلول من الشكل :

$$\Phi_n(s) = 2iA\sin\left(\frac{n\pi}{\frac{\arctan(\sqrt{q}a)}{\sqrt{q}}}s\right), \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.33}$$

- **إيجاد عبارة الطاقة:** بتعويض قيمة $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ في شرط الدالة sin نجد :

$$\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar}}\frac{\arctan(\sqrt{q}a)}{\sqrt{q}} = n\pi \tag{3.34}$$

و منه تكون عبارة الطاقة بالشكل :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}.\left(\frac{n\pi\sqrt{q}}{\arctan\sqrt{q}a}\right)^2 \tag{3.35}$$

وتؤول الطاقة E_nالخاصة يالبئر الكمومي في كلا المثالين لما $q \longrightarrow \infty$ الى طاقة الجسيم غير نسبي وبدون سبين محصور في صندوق احادي البعد عرضه a المعرفة بـ:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}.\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{3.36}$$

3.3 هزاز تو افقي في بعد واحد

إن مسألة المتذبذب التوافقي من المسائل المهمة في ميكانيك الكم. حيث ترتبط هذه المسألة في تطبيقات عملية عديدة مثل اهتزاز الجزيئات وذرات المواد الصلبة التي تقرب عادة من اهتزازات توافقية بسيطة وكذلك المجال الكهرومغناطيسي الذي يمكن اعتباره في تطبيقات كثيرة كعدد من الاهتزازات التوافقية البسيطة.
لدينا عبارة هاملتون الهزاز التوافقي بالشكل :

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}mw^2x^2 \tag{3.37}$$

لدينا معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن بالشكل :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}D_x^2 + \frac{1}{2}mw^2x^2\right]\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{3.38}$$

1.3.3 في حالة $F(x) = 1 \pm qx^2$

- <u>حالة $F(x) = 1 - qx^2$</u>

في هذه الحالة تكون :

$$D_x = \frac{\hbar}{i}(1-\alpha x^2)\partial_x \tag{3.39}$$

باستخدام تغيير المتغير التالي :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{mw}{2\hbar\alpha}}\ln(\frac{1+\sqrt{\alpha}x}{1-\sqrt{\alpha}x} \tag{3.40}$$

نعيد كتابة المعادلة من الشكل :

$$[\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} - \frac{mw}{\hbar\alpha}\tanh^2(\sqrt{\frac{\hbar\alpha}{mw}}\varepsilon) + \epsilon]\Psi = 0 \tag{3.41}$$

حيث : $\epsilon = \frac{2E}{\hbar w}$ يعطى حل هذه العبارة بالشكل :

$$\mathit{\Psi} = c^{\lambda} f(s) \tag{3.42}$$

حيث :

$$c = \cosh(\sqrt{\frac{\hbar\alpha}{mw}}\varepsilon) \tag{3.43}$$

$$s = \sinh(\sqrt{\frac{\hbar\alpha}{mw}}\varepsilon) \tag{3.44}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2w^2}{\hbar^2\alpha^2}} \tag{3.45}$$

نختار اشارةλ سالبة في عبارة الحل ثم نعوضها في معادلة شرودنغر فيصبح لدينا :

$$(1+S^2)f''(s)+(2\lambda+1)Sf'(s)+(\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon+\lambda)f(s)=0 \tag{3.46}$$

إذا قمنا بتعيين $\sum_{n=0}^{\infty}a_nS^{n+k}=f(s)$ و أدرجناها في المعادلة أعلاه نجد:

$$a_{n+2}=-\left[\frac{(n+k)(n+2\lambda)+\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon+\lambda}{(n+k+2)(n+k+1)}\right]a_n \tag{3.47}$$

مع $k=0$ و $k=1$ من الحد الأدنى من أجل $k=0$ لدينا :

$$f_{k=0}=S2F1(-\frac{n}{2};-\frac{n-}{2},\frac{1}{2},-s^2) \tag{3.48}$$

حيث

$$n\pm=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-(\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon+\lambda)} \tag{3.49}$$

من أجل الحصول على حل كثير الحدود ل$f_{k=0(s)}$ نضع : $N=n=\frac{n+}{2}$ أو $N=n=\frac{n-}{2}$ حيث : $N=0,1,2,3......$
مما يعطي :

$$\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon+\lambda=-4N(\lambda+N) \tag{3.50}$$

من أجل $k=0$ لدينا :

$$f_{k=1}=S2F1(-\frac{n}{2};-\frac{n-}{2},\frac{3}{2},-s^2) \tag{3.51}$$

حيث

$$n\pm = -\lambda - 1 \pm \sqrt{\lambda^2 - (\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon + \lambda)} \tag{3.52}$$

من أجل الحصول على حل كثير الحدود ل$f_{k=1(s)}$ نضع : $N = n = \frac{n+}{2}$ أو $N = n = \frac{n-}{2}$ حيث : $N = 0, 1, 2, 3......$ مما يعطي :

$$\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon + \lambda = -(2N+1)(2\lambda + 2N + 1) \tag{3.53}$$

من ذلك يكون لدينا :

$$E_N = \frac{hw}{2}[(4N+1)\sqrt{1 + (\frac{\hbar\alpha}{2mw})^2} + (2N(2N+1) + \frac{1}{2})\frac{\hbar\alpha}{mw} \qquad N = 0; 1; 2; .... \tag{3.54}$$

لدينا دالة الموجة :

$$\Psi_N = C_2^{\lambda} f_1(-N; N+\lambda; \frac{1}{2}, -S^2) \tag{3.55}$$

و:

$$E_N = \frac{hw}{2}[(2(2N+1)+1)\sqrt{1 + (\frac{\hbar\alpha}{2mw})^2} + ((2n+1)(2N+2) + \frac{1}{2})\frac{\hbar\alpha}{mw} \qquad N = 0; 1; 2; .... \tag{3.56}$$

حيث :

$$\Psi_N = SC_2^{\lambda} f_1(-N; N+\lambda+1; \frac{3}{2}, -S^2) \tag{3.57}$$

- **في حالة $F(x) = 1 + qx^2$**

في هذه الحالة تكون :

$$D_x = \frac{\hbar}{i}(1+\alpha x^2)\partial_x \tag{3.58}$$

باستخدام تغيير المتغير التالي :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{mw}{2\hbar\alpha}}\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}x) \tag{3.59}$$

نعيد كتابة المعادلة من الشكل :

$$[\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} - \frac{mw}{\hbar\alpha}\tan^2(\sqrt{\frac{\hbar\alpha}{mw}}\varepsilon) + \epsilon]\Psi = 0 \tag{3.60}$$

حيث : $\epsilon = \frac{2E}{\hbar w}$ يعطى حل هذه العبارة بالشكل :

$$\Psi = c^{\lambda} f(s) \tag{3.61}$$

حيث :

$$c = \cos(\sqrt{\frac{\hbar\alpha}{mw}}\varepsilon) \tag{3.62}$$

$$s = \sin(\sqrt{\frac{\hbar\alpha}{mw}}\varepsilon) \tag{3.63}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2w^2}{\hbar^2\alpha^2}} \tag{3.64}$$

نختار اشارة λ موجبة في عبارة الحل ثم نعوضها في معادلة شرودنغر فيصبح لدينا :

$$(1-S^2)f''(s)-(2\lambda+1)Sf'(s)+(\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon-\lambda)f(s)=0 \quad (3.65)$$

إذا قمنا بتعيين $\sum_{n=0}^{\infty} a_n S^{n+k}=f(s)$ و أدرجناها في المعادلة أعلاه نحصل على العلاقة التكرارية:

$$a_{n+2}=[\frac{(n+k)(n+2\lambda+k)-\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon+\lambda}{(n+k+2)(n+k+1)}]a_n \quad (3.66)$$

من أجل $k=0$ لدينا :

$$f_{k=0}=S2F1(-\frac{n}{2};\frac{n-}{2},\frac{1}{2},s^2) \quad (3.67)$$

حيث

$$n\pm=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+(\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon-\lambda)} \quad (3.68)$$

من أجل الحصول على حل كثير الحدود ل $f_{k=0(s)}$ نضع : $N=n=\frac{n+}{2}$ أو $N=n=\frac{n-}{2}$ حيث : $N=0,1,2,3......$
مما يعطي :

$$\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon-\lambda=4N(\lambda+N) \quad (3.69)$$

من أجل $k=1$ لدينا :

$$f_{k=1}=S2F1(-\frac{n}{2};-\frac{n-}{2},\frac{3}{2},s^2). \quad (3.70)$$

حيث

$$n\pm=-\lambda-1\pm\sqrt{\lambda^2+(\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon-\lambda)} \tag{3.71}$$

من أجل الحصول على حل كثير الحدود ل$f_{k=1(s)}$ نضع : $N=n=\frac{n+}{2}$ أو $N=n=\frac{n-}{2}$ حيث : $N=0,1,2,3......$
مما يعطي :

$$\frac{mw}{\hbar\alpha}\varepsilon-\lambda=(2N+1)(2\lambda+2N+1) \tag{3.72}$$

من ذلك يكون لدينا :

$$E_N=\frac{hw}{2}[(4N+1)\sqrt{1+(\frac{\hbar\alpha}{2mw})^2}-(2N(2N+1)+\frac{1}{2})\frac{\hbar\alpha}{mw} \qquad N=0;1;2;.... \tag{3.73}$$

لدينا دالة الموجة :

$$E_N=\frac{hw}{2}[(2(2N+1)+1)\sqrt{1+(\frac{\hbar\alpha}{2mw})^2}-((2n+1)(2N+2)+\frac{1}{2})\frac{\hbar\alpha}{mw} \qquad N=0;1;2;.... \tag{3.74}$$

$$\Psi_N=SC_2^{\lambda}f_1(-N;N+\lambda+1;\frac{3}{2},S^2) \tag{3.75}$$

2.3.3 في حالة $F(x)=1-q|x|$

نأخذ عبارة شرودنغر بالشكل :

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\Psi=E\Psi \tag{3.76}$$

نعوض قيمة $\hat{P} = -i\hbar(1-q|x|)\frac{d}{dx}$ نجد:

$$\left[\frac{\left(-i\hbar(1-q|x|)\frac{d}{dx}\right)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\Psi = 0 \tag{3.77}$$

باستخدام تغيير المتغير التالي :

$$s = (1-q|x|) \tag{3.78}$$

سوف نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left[s^2\frac{d^2}{ds^2} + s\frac{d}{ds} + \epsilon - \sigma^2(1-s)^2\right]\Psi = 0 \tag{3.79}$$

حيث:

$$\epsilon = \frac{2mE}{q^2}, \sigma = \frac{m\omega}{q^2} \tag{3.80}$$

كما يمكن كتابتها بشكل آخر:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{d}{ds} + \frac{(\epsilon-\sigma^2) - \sigma^2s^2 + 2\sigma^2s}{s^2}\right]\Psi(s) = 0 \tag{3.81}$$

الآن لايجاد شكل العام لدالة $\Psi(s)$نعلم ان الدالة الموجية منتهية عند $s \longrightarrow 0$ و $s \longrightarrow \infty$، مما يعني يمكن كتابة هذه الدالة بالصيغة العامة:

$$\Psi(s) = \Psi_{s\longrightarrow\infty}(s)\Psi_{s\longrightarrow0}(s)X(s) \tag{3.82}$$

المعادلة الموجية (??) لما $s \longrightarrow 0$ تؤول الى المعادلة التالية:

$$\left[s^2\frac{d^2}{ds^2} + s\frac{d}{ds} + \epsilon - \sigma^2\right]\Psi_{s\longrightarrow0}(s) = 0 \tag{3.83}$$

الحل هذه الاخيرة يكتب بـ:

$$\Psi_{s\longrightarrow 0}(s) = s^{\delta} \tag{3.84}$$

ولايجاد عبارة δ نعوضه في المعادلة (3.83) لنجد:

$$\delta(\delta-1)+\delta+\epsilon-\sigma^2=0 \tag{3.85}$$

ومنه نحصل على قيمتين لـ δ

$$\delta^2+\epsilon-\sigma^2=0 \Longrightarrow \delta=\pm\sqrt{\sigma^2-\epsilon} \tag{3.86}$$

الحل السالب مرفوض لان الدالة تتباعد ومنه تكون $\Psi_{s\longrightarrow 0}(s)$ تساوي:

$$\Psi_{s\longrightarrow 0}(s) = s^{\sqrt{\sigma^2-\epsilon}} \tag{3.87}$$

اما تصرف المعادلة الموجية لما $s \longrightarrow \infty$ هي:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{d}{ds}-\sigma^2\right]\Psi_{s\longrightarrow\infty}(s)=0 \tag{3.88}$$

وحلها هو:

$$\Psi_{s\longrightarrow\infty}(s)=\exp(-\sigma s) \tag{3.89}$$

ومنه تصبح الدالة $\Psi(s)$ تساوي:

$$\Psi(s)=\exp(-\sigma s)s^{\sqrt{\sigma^2-\epsilon}}X(s) \tag{3.90}$$

وبعد نعوض هذا الحل في المعادلة (3.77) لنجد معادلة تفاضلية الخاصة بكثير الحدود لاغير المعمم اي:

$$X(s)=L_n^{2\sqrt{\sigma^2-\epsilon}}(2\sigma s) \tag{3.91}$$

كما احيطكم علما ان هناك الكثير من الكمونات التي من الممكن ان تستعمل في مثل هذه الانواع من التشوهات، بالاضافة الى تطبيقها في الحالة النسبية.

الباب 4

تكميم بور سامرفيد

1.4 مقدمة

يعد تقريب WKB أو تكميم بور سامرفيد في الفيزياء الرياضية طريقة لإيجاد حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة مكانيًا. يتم استخدامه عادةً في الحساب شبه الكلاسيكي في ميكانيكا الكم حيث يتم إعادة صياغة الدالة الموجية كوظيفة أسية ، ويتم توسيعها بشكل شبه كلاسيكي ، ثم يتم أخذ السعة أو المرحلة المتغيرة ببطء كما هو الحال في الفضاء المنحني الذي ناخد فيه توسع الكون بعين الإعتبار . و في هذا الفصل سندرس تكميم بور سامرفيد في حالة سيتر و في حالة سيتر المضاد و كذا في حالة القيمة المطلقة لx على تطبيق الهزاز التوافقي .

2.4 في حالة f(x)=1-q|x|

كلاسيكيا لدينا :

$$\{X;P\} = 1 - q\,|x| \tag{4.1}$$

حيث هي اقواس بواسون , تعطى عبارة الطاقة بالعلاقة :

$$E = \frac{P^2}{2m} + V(x) \tag{4.2}$$

يكتب شرط تكميم بور ساملفيلد بالعلاقة :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{P}{1-q\,|x|}dx = \pi(n+\delta) \tag{4.3}$$

حيث: x_1 و x_2 هما حلان للمعادلة $E = V(x)$.

تمكننا حالة تكميم بور ساملفيد من الحصول على مستويات الطاقة لميكانيك الكم في بعد واحد المصححة من قبل مبدأ عدم اليقين الموسع EUP .

1.2.4 كمون هزاز تو افقي

شرط تكميم بور ساملفيلد من اجل هزاز توافقي ذو كمون $X^2 V(X) =$ مع أخذ $\omega = 0$, $\hbar = 1$, $2m = 1$ تعطى بالعبارة:

$$\int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \frac{\sqrt{E-X^2}}{1-q\,|x|}dx = \pi(n+\frac{1}{2}) \tag{4.4}$$

و هكذا لدينا :

$$\frac{2q\sqrt{E-q^2E^2} + \pi(-1+q^2E+\sqrt{1-q^2E}) + 2(q^2E-1)\sin^{-1}(q\sqrt{E})}{q^2\sqrt{1-q^2E}} = \pi(n+\frac{1}{2}) \tag{4.5}$$

من أجل صغيرةq جدا لدينا عبارة الطاقة:

$$E \approx 2n+1-\frac{q}{\pi}(2n+1)^{\frac{3}{2}} \tag{4.6}$$

3.4 في حالة $f(x) = 1 \pm qx^2$

يتم اعطاء جبر هايزنبيرج المشوه في بعد واحد بشكل أكثر عمومية من EUP :

$$[X.P] = i\bar{h}G(x)$$

حيث الدالة المشوهة تعطى بالشكل :

$$G(x) = 1 \pm \alpha x^2$$

لدينا معادلة شرودنغر في بعد واحد في فضاء سيتر المعمم:

$$(\frac{P^2}{2m} + V(x))\Psi = E\Psi \tag{4.7}$$

يكتب شرط تكميم بور ساملفيلد بالشكل :

$$\int_{x_1}^{x_2} Pdx = \pi\bar{h}(n + \frac{1}{2}) \quad n = 0 : 1; 2; 3.... \tag{4.8}$$

1.3.4 كمون هزاز تو افقي

لدينا هاملتون النطام :

$$H = P^2 + X^2$$

نضع $m = \frac{1}{2}$ و$w = 2$ و$\bar{h} = 1$ من أجل التبسيط نضع $H(p; x)$ لنحصل على :

$$P = \sqrt{E - X^2} \tag{4.9}$$

يعطى شرط تكميم بورساملفيد بالشكل :

$$\int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \frac{\sqrt{E-X^2}}{1-\alpha X^2} dx = \pi(n+\frac{1}{2}) \qquad n = 0.1.2.3..... \tag{4.10}$$

*في فضاء سيتر و من أجل α صغير جدا :

$$\int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \sqrt{E-X^2}(1+\alpha X^2) dx \approx \pi(n+\frac{1}{2}) \tag{4.11}$$

و الذي يعطي الدرجة الاولى من α من مستوى الطاقة :

$$E_n \approx 2n+1-\alpha(n^2+n+\frac{1}{4}) \tag{4.12}$$

*في فضاء سيتر المضاد و من أجل $|\alpha|$ صغير جدا :

$$\int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \sqrt{E-X^2}(1-|a|\, X^2) dx \approx \pi(n+\frac{1}{2}) \tag{4.13}$$

و الذي يعطي الدرجة الاولى من α من مستوى الطاقة :

$$E_n \approx 2n+1+|\alpha|\left(n^2+n+\frac{1}{4}\right) \tag{4.14}$$

الباب 5

خاتمة عامة

في الأخير نشير إلى أننا خلال هذه المذكرة ابرزنا الفرق بين ميكانيك الكم العادي و ميكانيك الكم المشوه انطلاقا من تعريف جبر هايزنبيرج المشوه ، و الذي اعطي بثلاث حالات هما:

- حالة (Anti)-de Sitter (EUP) المعرف بالصيغة $[X, P] = i\hbar(1 + qx^2)$.
- حالة de Sitter (EUP) المعرف بالصيغة $[X, P] = i\hbar(1 - qx^2)$.
- حالة النوع الجديد من مبدأ عدم اليقين الممتد (EUP) المعرف بالصيغة $[X, P] = i\hbar(1 - q|x|)$.

و اوضحنا الفرق بين الحالات الثلاث فيما بينها و بين جبر هايزنبيرج العادي و الذي يختلف فيه قيمة الجاكوبي للدالة من حالة إلى اخرى و من ذلك يتشوه الجداء السلمي و منه قيم المقادير الفيزيائية (الدالة الموجية و مستويات الطاقة) ، و قد قمنا بتطبيق ذلك على مثالين مهميين في فيزياء ميكانيك الكم هما البئر الكمومي و الهزاز التوافقي . و لاهمية التقريب الشبه كلاسيكي WKB في اعطاء قيم أكثر دقة لحلول المعادلات التفاضلية فاننا قمنا بتطبيقه على الهزاز توافقي .

المراجع

[1] Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994); A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995)

[2] Won Sang Chung and Hassan Hassanabadi, Modern Physics Letters A Vol. 32, No. 26 1750138 (2017)

[3] Won Sang Chung, International Journal of Theoretical Physics (2019) 58:2575–2591

[4] Won Sang Chung and Hassan Hassanabadi, Modern Physics Letters A Vol. 33, No. 26 (2018) 1850150

[5] S. Mignemi, Mod. Phys. Lett. A 25, 1697 (2010).

[6] Filho, R., Braga, J., Lira, J., Andrade, J. Jr.: Phys. Lett. B 755, 367 (2016)

ملخص

في هذا العمل ، تمت دراسة ميكانيكا الكم على الفضاء سيتر وسيتر المضاد (Anti)-de Sitter ($[X,P]=i\hbar(1\pm qx^2)$) بالاضافة الى نوع آخر من مبدأ عدم اليقين الممتد (EUP) المعرف بالصيغة $[X,P]=i\hbar(1-q|x|)$. مع بعض الأمثلة التطبيقية، يتم تحليل مشكلة الصندوق أحادي البعد ومسألة كمون هزاز توافقي، وكذلك تكميم بور-سومرفيلد.

Abstract

In this work, the quantum mechanics on the (anti) de Sitter space (i.e. $[X,P]=i\hbar(1\pm qx^2)$) and another new type of extended uncertainty principle (EUP) given by $[X,P]=i\hbar(1-q|x|)$ are investigated. As examples, the one-dimensional box problem and one-dimensional harmonic oscillator problem are discussed, and also the Bohr – Sommerfeld quantization.

Résumé

Dans ce travail, la mécanique quantique sur l'espace (anti) de Sitter (i.e. $[X,P]=i\hbar(1\pm qx^2)$) et un autre type de principe d'incertitude étendue (EUP) donné par $[X,P]=i\hbar(1-q|x|)$ sont étudiés. Avec quelques exemples, le problème de la boîte à une dimension et le problème de l'oscillateur harmonique à une dimension sont analysés, et aussi la quantification Bohr–Sommerfeld .

الكلمات المفتاحية

مبدأ عدم اليقين الموسع ، الحد الادنى للزخم ، الفضاء المشوه ، ميكانيك الكم في الفضاء المنجني