République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSIT KASDI MERBAH OUARGLA

FACULT DES MATH MATIQUES ET SCIENCES DE LA MATI RE

D PARTEMENT DE MATH MATIQUES

MEMOIRE PR SENT EN VUE DE L OTENTION DU DIPL ME :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités Et Statistique

Par

BOUZIDI Maroua

Titre :

PRINCIPE DU MAXIMUM DU SECOND ORDRE EN CONTROLE DES DIFUSIONS

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Akti Mohamed	Prof.	Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Dr. Boussad Abdelmalek	M.A.	Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Dr. Mansoul Brahim	MA	Université KASDI Merbah-Ouargla	Encadreur

Année universitaire 2019- 2020

Dédicace

je dédie cette mémoire :

À ma mère et à mon père, qui m'ont été gentils et qui m'ont soutenu pendant més études .

mes frères : **Yacine, Islame, Abdelkrime, abdelatife, abdelghani, kamal, mouhamed, abdealrahmane.**

mes soueurs : **Wahiba, Safa, Ikram, Amel, Dalila, Yassmin, Houda, Wassila, Wafa.**

mes amies : **Nesrine, Souhila, Safa, Nouha.**

ma tante : **Dalila**, qui était ma deuxième mere et ses fille : **Zahya, Linda**.

ma fiancée : **Youcef**.

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant «**Allah**» le tout

puissant de m'avoir donné le force et la volonté

pour terminer ce travail.

Je remercie J'offre mes remerciements particuliers à mon professeur :

Mr.Mansoul Brahim

Pour avoir encadré ce travail, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui

ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier les professeurs, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Je tiens à remercier spécialement **M.akti Mouhamed** de bien vouloir présider le jury.

Et je tiens aussi à remercier **M.Boussad Abdelmalek** qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Je remercie également ma famille et mes amis pour leur soutien moral tout au long de mes études.

Je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de

ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques contrôlés de type Ito de la forme suivante

$$\begin{cases} dx = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dBt, t \in [0; T] \\ x_0 = \zeta \end{cases} \tag{1}$$

où $B = (B(t); t \in [0; T])$ disigne un mouvement Brownien défini sur un éspace de probabilité filtré $\left(\Omega; F; (F_t)_{t \geq 0}; P\right)$ vérifie les conditions habituelles, et u_t est un processus progressivement mésurable à valeurs dans un borélien de $\mathbb{R}^n$ appelé contrôle admissible, on le note par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles. Le couple $(x; u)$ s'appel couple admissible

La théorie du contrôle optimal intervient dans plusieurs domaines utilisant les applications mathématiques pour modiliser des situations en sciences de lingénieur,on sciences économiques ..ext.

Le but de contrôle optimal est de minimiser une fonction s'appelle fonction de coût J (où de maximiser) sur l'ensemble U telle que

$$J(t) = E\left[g\left(x_T\right) + \int_0^T h\left(t, x_t, u_t\right) dt\right] \tag{2}$$

Le probléme de principe du maximum de contrôle optimal est proposé par les équations (1) et (2) dans ce mémoire qui compose à trois chapitres :

Premièr chapitre :

Dans ce chapitre, on introduit les notions générales du calcul stochastique on définit les processus stochastiques et leurs propriétés et les notions de mouvement brownien et l'espérance conditionnel, et temps d'arrêt et martingale...etc. On parlait aussi sur les équations différentielles stochastiques (EDS), l'existante et l'unicité de sa solution.

Deuxième chapitre :

Dans ce chapitre on présentait le problème de contrôle optimal pour un système gouverné par l'équation (1) et étudié l'éstimation de solution du premier ordre et détermine le processus et l'équation adjoints.

Troisième chapitre :

Dans le dernier chapitre, on continue sur le même problème,mais passant en second ordre et trouve les conditions nécessaires d'optimalité sur l'EDS.

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre on veut donner quelques concepts de base au calcul stochastique comme formule d'Itô et les équations différentielles stochastiques.

1.1 Tribu

Voir[1]

Soit Ω un ensemble non vide ses éléments sont noté par ω.

Définition 1.1.1 *On défini un tribu (ou δ-algebre) sur Ω et on note $\mathcal{F}$est une famille de partie de Ω vérifier les 3 conditions suivantes :*

1. Contient l'ensemble vide $\Leftrightarrow \phi \in \mathcal{F}$.
2. Stable par passage au complémentaire $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^C \in \mathcal{F})$.
3. Stable par union dénombrable de famaille A_n appartient à $\mathcal{F} \Leftrightarrow (\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ et $\ A_n \in \mathcal{F}$ $\Leftrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F})$.

En particulier :

– $\forall A,B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ de méme $A \cap B \in \mathcal{F}$.

– Un tribu contient donc l'espace Ω.

Proposition 1.1.1 *Une intersection de tribu est une tribu, mais n'est pas vrais pour la réunion .*

Définition 1.1.2 *LaTribu engendrée par A est la plus petite tribu contenant cette famille et on la note $\sigma(A)$, elle est l'intersection de toutes les tribus contenant A.*

Exemple 1.1.1 $\sigma(A) = \{\Omega, \phi, A, A^c\}$.

Définition 1.1.3 *On dit que G est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et si seulement si pour tout l'ensemble A on a : si $A \in G \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.*

Définition 1.1.4 *La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contente tous les intervalle ouverts (ou fermés , ouvert à droit fermé à gauche ,...) et on note par $B_{\mathbb{R}}$.*

1.2 Espace mesuré

Voir[2]

1.2.1 Espace mesurable

Définition 1.2.1 *On dit que le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurablet si et seulement si :*

– Ω Est un ensemble non-vide.

– $\mathcal{F}$ Est une tribu de Ω.

1.2.2 Mesure

Définition 1.2.2 *Un mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est un fonction $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$, tels que :*

– $\mu(\phi) = 0$

– Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite deux à deux disjoints, alors $\mu\{\cup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Définition 1.2.3 *Un espace mesuré est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ tels que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable et μ est un mesure.*

1.2.3 Mesurabilité

Définition 1.2.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* (E, ξ) *deux espaces mesurables et soit* f *un application de* Ω *dans* E *est dit* $(\mathcal{F}, \xi)$ *mesurable si* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \xi$*, ou :*

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \setminus f(\omega) \in A\}$$

Définition 1.2.5 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité, on dit que* $N \subset \Omega$ *est un ensemble négligeable si et seulement si* $\exists M \subset \mathcal{F}$ *contenant* N *telle que* $P(M) = 0$

En particulier : l'union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable

Remarque 1.2.1 *Une propriété est vraie presque sûrement (p.s) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable*

Définition 1.2.6 *(Espace complet) : un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est dit complet s'il contient tous les ensembles négligeables* G *.*

1.3 Variable aléatoire

Voir[1]

Définition 1.3.1 *Une variable aléatoire* X *est une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, B_R)$ *tels que :*

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, B_R)$ et $\forall B \in B_R : X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_R\} \in \mathcal{F}$.

On a deux types de variable aléatoire :

– La variable aléatoire continue prend ses valeurs sur un ensemble infini (ou non-dénombrable).

– La variable aléatoire discrète prend ses valeurs sur un ensemble fini (dénombrable).

1.3.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Définition 1.3.2 *Soit X un varaible aléatoire défini sur$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la loi de X est la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, B_R)$ défini par :*

$$P_X(A) = P\left\{\omega; X\left(\omega\right) \in A\right\} = P\left(X \in A\right), \forall A \in B_{\mathbb{R}}$$

Définition 1.3.3 *(La fonction de répartition) : Soit X une variable alétoire, la loi de probabilité de X est P_X défini par la fonction F_x, Appelée fonction de réparation de variable X, défini par :*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longrightarrow P(X \leq x) \end{aligned}$$

Et vérifie les propriétés suivants :

1. $\forall t \in \mathbb{R} : 0 \leq F_X \leq 1$.
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X = 0 \;\; et \lim_{x \to +\infty} F_X = 1$.
4. Si $a \leq b : P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Remarque 1.3.1 *On dit que deux variables aléatoires X et Y ont le même loi si elles ont la même fonction de répartition. $F_X = F_Y$*

Définition 1.3.4 *La densité $f(x)$ d'une variable aléatoire est la dérivée de la fonction de répartition (si cette dérivée existe). On peut alors écrire $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$, En particulier :*

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx$$

Tels que :

1. f continue et positive sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

2. on a : $\int\limits_{I} f(x)dx = 1$.
3. $F_X(t) = P_X\left(]-\infty, t]\right) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$.

1.3.2 Mesurabilté d'une variable aléatoire :

Définition 1.3.5 *Sois $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, X une variable aléatoire réelle (v.a.r) dans $\mathbb{R}$ alors* :

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in B_{\mathbb{R}}$$

1.3.3 L'espérance du variable aléatoire

voir[1]

Définition 1.3.6 *L'espérance d'une variable aléatoire X est définie par la quantité $\int\limits_{\Omega} XdP$ que l'on note $E(X)$ ou $E_P(X)$,telle que*

$$\int\limits_{\Omega} XdP = \int_{\mathbb{R}} xdP_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \text{dans le cas continue.} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) & \text{dans le cas discrète .} \end{cases}$$

1.4 Espérance conditionelle

Voir[3]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité :

i Par rapport à un événement B $\in \mathcal{F}$, et soit $A \in \mathcal{F}$:

$$E(X/B) = \frac{P(X1_B)}{P(B)} \text{ si } P(B) \neq 0$$

ii Par rapport à une tribu :

Définition 1.4.1 *Sois $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit également X une v.a réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et intégrable. Alors il existe une unique v.a,* *appelée espérance conditionnelle de X sachant G, notée $E(X/G)$, telle que :*

1. $E(X/B)$ est $B-$mesurable.
2. pour tout $B \in G$, $\int_B E(X/G)dP = \int_B X(\omega)dP$.

iii Par rapport à une variable aléatoire :

Définition 1.4.2 *On définie l'espérance conditionnelle d'une v.a X (intégrable) par rapport à Y étant comme l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu engendré $\blacksquare(Y)$. On la note $E(X/Y)$ tels que :*

1. C'est une variable $\delta(Y)$ mesurable.
2. Pour tout $B \in \delta(Y)$, $\int_B E(X/Y)dP = \int_B XdP$.

1. Linéarité : si X et $Y \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$ alors : $E(aX + bY/G) = aE(X/G) + bE(Y/G)$

2. Si Y est G-mesurable alors : $E(YX/G) = YE(X/G)$.

3. Si X est indépendante de G alors : $E(X/G) = E(X)$.

4. Si $X \perp G$ alors : $E(E(X/G)) = E(X)$.

Propriété 1.4.1 **5.** *Si $X \leq Y$ alors : $E(X/G) \leq E(Y/\beta)$.*

6. Si Y est indépendante de X, alors : $E(Y/X) = E(Y)$.

7. Si $X \perp Y$ alors : $E(Y/X) = Y$.

Démonstration :

Voir[3]

1.5 Processus stochastique

Voir[1]

1.5.1 Filtration :

Définition 1.5.1 *Une filtration est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est-à-dire telle que :*$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \leq s$*, et on appelle l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *espace de probabilité filtré.*

Remarque 1.5.1 *– Les ensembles négligeables sont contenues dans* $\mathcal{F}_0$*.*
– La filtration est continue à droite si : $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$*.*

Définition 1.5.2 *Soit* X *un processus stochastique, on définie la filtration naturelle et note par* $\mathcal{F}_t^X$*, la famille croissante de tribu :*

$$\mathcal{F}_t^X = \delta\left\{X_s, s \leq t\right\}$$

1.5.2 Processus

Définition 1.5.3 *Un processus stochastique (où fonction aléatoire) est un famaille de variable aléatoire* $(X_t; t \in [0, +\infty])$ *définie sur le méme espace de probabilité.*

Définition 1.5.4 *Un processus stochastique* $(X_t; t \in [0, +\infty])$ *est dit adapté par-rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$ *si* X *est* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable pour tout* t*.*

Définition 1.5.5 ***(Trajectoire continue)*** *On dit que le processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est à trajectoire continue si l'application* $t \to X(t, \omega)$ *soit continue.*

Définition 1.5.6 ***(Processus prévisible)*** *On dit qu'un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est prévisible pour* $\mathcal{A}_t$*, si* X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* X_t *est* $\mathcal{F}_{t-1}$*-mesurable pour chaque* $t > 0$*.*

Définition 1.5.7 ***(Processus Gaussien)*** *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus Gaussien ssi*

$$\forall n \geq 1 : \forall t_0, t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+, \forall a_0, a_1, ..., a_n : \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$$

est un v.a Gaussien.

Définition 1.5.8 ***(Accroissement stationnaire et indépendante)*** *Pour $0 \leq s \leq t$ les variables aléatoires $X(t) - X(s)$ sont appelés des accroissement :*

1).Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est à accroissement stationnaire si la distribution de la variable aléatoire $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t.

2).Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est à accroissement indépendants si pour tout suite $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n$ les v.as $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

1.6 Mouvement Brownien :

Voir[4]

Définition 1.6.1 *On définie un mouvement Brownien et on note B_t, un processus stochastique vérifie :*

1. $B_0 = 0$ p.s.
2. B_t continue p.s.
3. pour $0 \leq s < t < u < v$ les acroissements $B_t - B_s$,$B_u - B_v$ sont indépondents.
4. pour $0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim N(0; t - s)$.

Définition 1.6.2 ***(mouvement Brownien stondard) :*** *Soit B_t un mouvement Brownien , on dit que B_t stondard si et selement si :*

1. $E(B_t) = 0$.
2. $E(B_t^2) = t$.
3. $B_0 = 0$.

– un mouvement brownien B_t est un processus continu gaussien centré de covaraince égale : $t \wedge s = \min(t, s)$.

– Le mouvement brownien B_t a des trajctoires preceque sûrement hôlderienne d'ordre $\gamma < 1/2$.

– Les trajectoires du mouvement brownien ne sont presque sûrement pas dérivables.

1.6.1 Processus d'ito :

Définition 1.6.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*,et* B_t *un mouvement Brownien, On définie processus d'ito* $(X_t)_{t\in[0,1]}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s \quad \forall t \geq 0$$

Et :

– X_0Est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

– b Un processus adapté telle que $\forall t \geq 0 : \int_0^t |b(s)|\, ds < \infty$ p.s.

– σ Un processus adapté telle que $\forall t \geq 0 : \int_0^t |\sigma(s)|^2\, ds < \infty$ p.s.

1.7 Martingale

Définition 1.7.1 *Soient* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, une filtration et* (X_t) *un processus stochastique définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tele que :*

– X_t *est intégrable* $\Leftrightarrow E(|X_t|) < +\infty$.

– X_t *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\forall t \geq 0$ *alors :*

a/ On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par-rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ si :

$$E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s : \forall 0 \leq s < t$$

b/ On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sous martingale par-rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ si :

$$E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s : \forall 0 \leq s < t$$

c/ On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sur martingale par-rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ si :

$$E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s : \forall 0 \leq s < t$$

Soient X_t unprocessus stochastique définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et la fonction $E(X_t)$ l'espérance de X_t on a : 1- si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un martingal alors la fonction $E(X_t)$ est constante. 2- si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un sur martingal alors la fonction $E(X_t)$ est décroissante. 3- si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un sous martingal alors la fonction $E(X_t)$ est croissante.

1.8 Temps d'arrêt

Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et on note $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

Définition 1.8.1 *Un temps d'arrét est une variable aléatoire τ à valeure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que :*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}$$

– Une constante positive est un temps d'arrét.

– La tribu $\mathcal{F}_\tau$ définie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty / A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Est dite tribu des évènements antérieurs à τ.

1.9 Intégrale stochastique

voir[5],voir[1]

1.9.1 Fonction localement à variation bornée

Définition 1.9.1 *Soit f une fonction tel que,$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$,et pour tout $t > 0$:*

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| < \infty$$

Où le supremum est pris sur toutes les partitions $(t_0, ...t_n)$ de $[0, 1]$ avec n arbitraire.

a/ Si g un fonction croissante, alors à variation bornée.

b/ Si g est la diffrérence de deux fonction croissantes alors g à variation bornée.

c/ Si g continûment dérivable ,alors g à variation bornée.

Demonstration voir [5].

1.9.2 Intégrale de Riemann Stiljes

Définition 1.9.2 *Soit $t > 0, f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée, on défini :*

$$\int_0^t f(s)dg(s) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(s_i^{(n)})(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)) \tag{1-1}$$

Où $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n$, $s_i^{(n)} \in \left[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right]$ et $t_0^n, t_1^n, ..., t_n^n$ est une suite de partitions de $[0, 1]$, telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leq i \leq n} \left| t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)} \right| = 0$$

1.9.3 Intégrale stochastique (ou integrale d'Ito)

Soient l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien B sur cet espace ,et soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ de mouvement Brownien.

Définition 1.9.3 *Soit $\blacksquare$ un processus stochastique, on veut généraliser l'intégrale $\int_0^t \theta_s dB_s$, donc l'intégrale de Winer il est divisé en deux états, et cela concerne par le processus stochastique θ.*

Cas de processus étagés

Définition 1.9.4 *(processus étagés) : On dit qu'un processus θ et étagés si et seulement si :*

- il existe une suite de réele t_j , telle que : $0 \leq t_0^n \leq t_1^n \leq ... \leq t_n^n$.
- il existe une suite de variable aléatoire θ_j soit $\mathcal{F}_{tj} - mesurable$ et $\theta_j \in L^2(\Omega)$ et pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$ on a : $\theta_t = \theta_j$.

Soit :

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(s)$$

On définie alors l'intégrale d'ito par :

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \tag{1-2}$$

On a : $E(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = 0$ donc : $Var(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = E(\int_0^\infty \theta_s^2 dB_s)$.

Cas générale

- On définie les processus càdlàg de carrée intégrable (ou dans $L^2(\Omega * \mathbb{R}^+)$) et on note θ telle que :

$$\|\theta\|^2 =^{def} E[\int_0^\infty \theta_t^2 dt] < \infty$$

- On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega * \mathbb{R}^+)$ si $\|\theta - \theta_n\|^2 \to 0$.
- Soit $\theta = \lim \sum_{j=1}^{k(n)} \theta_j 1_{]t_j, t_{j+1}]}$ avec $\theta_j \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $L^2(\Omega * \mathbb{R}^+)$ donc on a :

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \lim \sum_{j=1}^{k(n)} \theta_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)), \text{dans } L^2(\Omega * \mathbb{R}^+)$$

- On note $\int_0^\infty \theta_s dB_s = \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]} dB_s$ si θ étagé et on a alors :

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]} dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1}) - B(t_j))$$

1. **linéarité :**

Si a et b deux constantes et $(\theta^i, i = 1, 2)$ deux processus stochastiques on a alors :

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2)dB_s = a\int_0^t \theta_s^1 dB_s + b\int_0^t \theta_s^2 dB_s \tag{1-3}$$

2. Soit $M_t = \int_0^\infty \theta_s dB_s$ et $N_t = (\int_0^\infty \theta_s dB_s)^2 - \int_0^\infty \theta_s^2 dB_s$,donc on a : M_t et N_t deux martingales.

1.10 Formule d'ito

Voir[1],Voir[6]

Définition 1.10.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *un espace probabilisé filtré et* B_t *un mouvement Brownien stondard et on pose* X_t *un processus d'Ito :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad \forall t \geq 0 \tag{1-4}$$

1. Soit f une fonction deux fois continûment différentiable, donc on a :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X(t)) \tag{1-5}$$

2. Soit une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de class C^2, bornée alors :

$$f(B_t) = f(B(0)) + \int_0^t f(B(s))dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))ds$$

3. Soit une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ * \mathbb{R}$ de class $C^{1,2}$,alors on a :

$$f(t, B_t) = f(0, B(0)) + \int_0^t f'(s, B(s))dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(s, B(s))ds + \int_0^t f'(s, B(s))ds$$

1.11 Equation différentielle stochastique (E.D.S)

Définition 1.11.1 *Une équation différentielle stochastique est de la forme :*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \qquad t \geq 0 \tag{1-6}$$

telle que : b,σ : $\mathbb{R} * [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et b, σ sont deux fonctions deterministes mesurables, avec b appelé coefficient de drive, σ est appelle coefficient de diffusion soit $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X_t$ variable aléatoire de carré intégrable et X indépendant du mouvement Brownien.

Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration engendré par le mouvement Brownien B_t et variable aléatoire X_0.un solution de + est un processus continue $\mathcal{F}_t - adapt\acute{e}$ telle que chaque integrale $\int_0^t$ $b(X_s, s)ds$ et $\int_0^t \sigma(X_s, s)dBs$ à un sens et l'egalité :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dBs$$

Est $(X_0 = x)$ satisfait pour tout t , presque sûrement en parle alors de la solution forte.

Remarque 1.11.1 *il existe deux types des solutions de E.D.S, solution forte et solution faible, considerons l'équation E.D.S :*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \qquad t \geq 0$$

$\{B_t, t \geq 0\}$ mouvement Brownien standard définie par l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.Telle que mouvement Brownien satisfait :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dBs$$

On dit que la solution forte est unique si lorsque X et $\tilde{X}$ représentes deux solutions fortes d'une équation $E.D.S.$

Alors :

$$X = \tilde{X}$$

Presque sûrement

Existance et unicité

Théorème 1.11.1 *Supposons que les fonctions b et σ satisfaient les conditions suivantes :*

a/ les fonctions b et σ sont continues.

b/ i/ condition de lipschitz local :

Pour tout compact $C \subset \mathbb{R}$, il exist une constant $K = K(C)$, telle que :

$|b(t,X) - b(t,Y)| + |\sigma(t,X) - \sigma(t,Y)| \leq K\,|X - Y|$, pour$X, Y \in C$ et $t \in [0,T]$.

ii/ condition de croissance : il existe une constant L telle que :

$|b(t,X)|^2 + |\sigma(t,X)|^2 \leq L(1 + |X|^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T]$.

c/ la condition initiale X_0 est indépendant de $\{B_t\}_{t \geq 0}$, X_0 est de carrée integrable alors l'équation $E.D.S$ **,** (1-6) admet pour tout conditions initial une solution forte $(X_t)_{t \in [0,T]}$ presque sûrement continue et cette solution est unique, de plus cette solution verifier $E(\sup |X_t|^2) < \infty$.

Chapitre 2

Principe du maximum de premier ordre

Dans ce chapitre nous présentons le principe du maximum en contrôle optimal gouvernés par des équations différentielles stochastiques dans le cas ou les coéfficients sont controlés.

2.1 formulation de problème et hypothése

Voir[8],Voir[7]

Définition 2.1.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace probabilisé filtré, et $B = (B_t)$ un mouvement brownien standard à valeur dans $\mathbb{R}^d$, et T un réel positif tels que : $T < \infty$ supposons que $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$ filtration naturelle.*

Définition 2.1.2 *On appelle un contrôle admissible tout processus u_t où $t \in [0, T]$ mesurble et adapté à valeure dans un borélienne A de $\mathbb{R}^d$, tel que :*

$$E\,|u_t|^m < \infty \quad \forall m > 1$$

Et on note l'ensemble de tous les contrôles admissibles par U *et définier par :*

$$U = \left\{ u : [0, T] * \Omega \to A, u = (u_t)_{t \in [0;T]} \text{ } mesurable \text{ } et \text{ } (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}} - adapt\acute{e} \right\}$$

On considèr le problème de contrôle suivants :

$$\begin{cases} \quad dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)dB_t \\ x(o) = \zeta \end{cases} \tag{2-1}$$

Où :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times A \to M_{n*d};$$

Et ζ variable aléatoire F_0- mésurable indépendante deB_t telle que :

$$E\left(|\zeta|^m\right) < \infty; \text{ pour tout } m > 1.$$

On définit la fonction de coût pour $u \in U$ et on note $J(u)$, par :

$$J(u) = E\left[\int_0^T h(t; x_t, u_t)dt + g(x_T)\right] \tag{2-2}$$

Où :$h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions Boréliennes et x_T la solution de l'équation (2.1) prise au temps términal T .

Proposition 2.1.1 ***(les hypothése sur les fonctions*** b, σ, h, g ***et ses dérivées) :***

** Les fonctions* b, σ, h, g *sont deux fois dérivables par-rapport a* x *à dériveés continues et bornée.**

$$\exists C > 0/\forall(t,a) \in [0,T] * A : |b(t,x,a)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|) \quad x \in \mathbb{R}^m \tag{2-3}$$

$$\exists C > 0/\forall(t,a) \in [0,T] * A : |h_x(t,x,a)| + |g_x(t,x)| \leq C(1+|x|) \quad x \in \mathbb{R}^m$$

* les fonctions b et σ sont Lipshitiziennes

Les fonctions b et σ sont Lipshitiziennes, alors pour tout u contrôle admissible $u \in U$ l'équation (2.1) admet une solution forte est unique donnée par :

$$X = \zeta + \int_0^t b(s, X_s, u_s)dt + \sigma(s, X_s; u_s)dB_s$$

De plus ce solution est continue est vérifie :

$$E[\sup |X_t|^m] \leq M, \forall m > 1 \tag{2-4}$$

Où M est constante qui dépond à K, m et T.

Remarque 2.1.1 *Par définiton du fonction de coût on a :*

$$J(u) = E(\int_0^T h(X_t, u_t)dt + g(X_T))$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|J(u)| &= \left| E(\int_0^T h(X_t, u_t)dt + g(X_T)) \right| \\
&\leq E \left| \int_0^T h(X_t, u_t)dt + g(X_T) \right| \\
&\leq E \left| \int_0^T h(X_t, u_t)dt \right| + E\left|g(X_T)\right|
\end{aligned}$$

D'après les conditions de croissance des fonctions h et g on a :

$$
\begin{aligned}
|J(u)| &\leq E[\int_0^T C(1+|X_t|)dt] + E[C+|X_t|] \\
&\leq (T+1)C[1+E(\sup_{t\in[0,T]}(|X_t|)]
\end{aligned}
$$

Et dans (2.4) *pour* $m=1$ *on a :*

$$E(\sup_{t\in[0,T]}(|X_t|)] \leq M'$$

Et donc :

$$|J(u)| \leq (T+1)C[1+M'] = H$$

Où H est constante donc $J(u)$ est bien definier.

Définition 2.1.3 *On dit que le contrôle u est optimal si :*

$$J(u) \leq J(v), pour\ tout\ v \in U$$

L'objectif de ce problème de contrôle optimal consiste a minimiser la fonction de coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U.

2.2 Estimation de solution

Voir[8]

On supposera l'existence d'un contrôle u minimise la fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles U

Pour $v \in U$, τ dans $]0, T[$ et $\theta \geq 0$ (assez petite), on définier la perturbation suivant :

$$u_t^\theta = \begin{cases} u_t & si\ t \in [0, \tau[\\ v & si\ t \in [\tau, \tau + \theta[\\ u_t & si\ t \in [\tau + \theta, T] \end{cases} \tag{2-5}$$

Remarque 2.2.1 *Soient X^θ et X les solutions forts de* (2.1) *assosié respectivement à u^θ et u. On aura l'estimation suivant :*

$$E[\sup_{t \in [0,T]} \left|X^\theta - X\right|^2] = O(\theta)$$

Lemme 2.2.1 *sous les hypothéses* $(2-3)$ *on a l'éstimation suivante*

$$E\left[\sup_{t \in [0;T]} |x_\theta - x - x_1|^2\right] \leq C\theta, \tag{2-6}$$

Tels que X_1, X_2 solutions des équations suivants :

$$\begin{aligned} X_1(t) = &\int_0^t [b(s, X(s), u_\theta(s)) - b(s, X(s), u(s)) + b_x(s, X(s), u(s))X_1(s)]ds \\ &+ \int_0^t [\sigma(s, X(s), u_\theta(s)) - \sigma(s, X(s), u(s)) + \sigma_x(s, X(s), u_\theta(s))X_1]dB_s \end{aligned} \tag{2-7}$$

$$\begin{aligned} X_2(t) = &\int_0^t [(b_x(s, X(s), u_\theta(s)) - b_x(s, X(s), u(s)))x_1(s) + b_x(s, X(s), u(s)))X_2(s) \\ &+ \frac{1}{2} b_{xx}(s, X(s), u(s))X_1(s)X_1(s)]ds + \int_0^t [\sigma_x(s, X(s), u_\theta(s)) - \sigma_x(s, X(s), u(s)))X_1(s) \\ &+ \sigma_x(s, X(s), u(s)))X_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(s, X(s), u(s)))X_1(s)X_1(s)]dB_s \end{aligned} \tag{2-8}$$

On va montre que :

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_1(t)|^2 \leq K\theta. \tag{2-9}$$

Preuve. En utilisant l'inégalité :

$$(a+b+c+d)^2 \leq 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2.$$

On a :

$$\begin{aligned}
|X_1(t)|^2 &= \left| \int_0^t [b(s,X(s),u_\theta(s)) - b(s,X(s),u(s)) + b_x(s,X(s),u(s))X_1(s)]ds \right. \\
&+ \sigma(s,X(s),u_\theta(s)) - \sigma(s,X(s),u(s)) + \sigma_x(s,X(s),u(s))X_1(s)]dB_s|^2 \\
&= 4\int_0^t |b(s,X(s),u_\theta(s)) - b(s,X(s),u(s))|^2 \, ds + 4\int_0^t |b_x(s,X(s),u(s))X_1(s)|^2 \, ds \\
&+ 4\int_0^t |\sigma(s,X(s),u_\theta(s)) - \sigma(s,X(s),u(s))|^2 \, dB_s + 4\int_0^t |\sigma_x(s,X(s),u(s))X_1(s)|^2 \, dB_s
\end{aligned}$$

On passe à l'espérance :

$$\begin{aligned}
E\,|X_1(t)|^2 &\leq 4\int_0^t E[|b(s,X(s),u_\theta(s)) - b(s,X(s),u(s))|^2]ds \\
&+ 4\int_0^t E[|b_x(s,X(s),u(s))X_1(s)|^2]ds \\
&+ 4\int_0^t E[|\sigma(s,X(s),u_\theta(s)) - \sigma(s,X(s),u(s))|^2]dB_s \\
&+ 4\int_0^t E[|\sigma_x(s,X(s),u(s))X_1(s)|^2]dB_s
\end{aligned}$$

Par définition de $u_\theta(t)$ on a :

$$\begin{aligned}
E\left|X_1(t)\right|^2 \leq & \, 4\int_0^t E[|b_x(s,X(s),u(s))X_1(s)|^2]ds + 4\int_0^t E[|\sigma_x(s,X(s),u(s))X_1(s)|^2]dB_s \\
& + 4\int_0^\tau E[|b(s,X(s),u(s)) - b(s,X(s),u(s))|^2]ds \\
& + 4\int_0^\tau E[|\sigma(s,X(s),v) - \sigma(s,X(s),u(s))|^2]dB_s \\
& + 4\int_\tau^{\tau+\theta} E[|b(s,X(s),v) - b(s,X(s),u(s))|^2]ds \\
& + 4\int_\tau^{\tau+\theta} E[|\sigma(s,X(s),v) - \sigma(s,X(s),u(s))|^2]dB_s \\
& + 4\int_{\tau+\theta}^t E[|b(s,X(s),u(s)) - b(s,X(s),u(s))|^2]ds \\
& + 4\int_{\tau+\theta}^t E[|\sigma(s,X(s),v) - \sigma(s,X(s),u(s))|^2]dB_s
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
E\left|X_1(t)\right|^2 \leq & \, 4\int_0^t E[|b_x(s,x(s),u(s))X_1(s)|^2]ds + 4\int_0^t E[|\sigma_x(s,x(s),u(s))X_1(s)|^2]dB_s \\
& + 4\int_\tau^{\tau+\theta} E[|b(s,x(s),v) - b(s,X(s),u(s))|^2]ds \\
& + 4\int_\tau^{\tau+\theta} E[|\sigma(s,X(s),v) - \sigma(s,X(s),u(s))|^2]dB_s
\end{aligned}$$

Par les hypothéses $(2,3)$ on a σ et b sont bornées par $C(1+|X|)$, de même on a σ_x et b_x sont bornée par un constant M, pour utilise cette hypotése on a :

$$\begin{aligned}
E\left|X_1(t)\right|^2 \leq & \, 4\int_0^t E[M\left|X_1(s)\right|^2]ds + 4\int_0^t E[M\left|X_1(s)\right|^2]ds \\
& + 4\int_\tau^{\tau+\theta} C(1+\sup_{0\leq t\leq T} E\left|X(s)\right|^2)ds + 4\int_\tau^{\tau+\theta} C(1+\sup_{0\leq t\leq T} E\left|X(s)\right|^2)ds \\
\leq & \, 8\int_0^t ME[|X_1(s)|^2]ds + 8\int_\tau^{\tau+\theta} C(1+\sup_{0\leq t\leq T} E\left|X(s)\right|^2)ds
\end{aligned}$$

Et dans (2.4) on obtient :

$$
\begin{aligned}
E\left|X_1(t)\right|^2 &\leq 8M\int_0^t E\left|X_1(s)\right|^2 ds + 8\int_\tau^{\tau+\theta} C(1+M)ds \\
&\leq 8M\int_0^t E\left|X_1(s)\right|^2 ds + 8C(1+M)(\tau+\theta-\tau) \\
&\leq 8M\int_0^t E\left|X_1(s)\right|^2 ds + 8C(1+M)\theta
\end{aligned}
$$

Par lemme de *Gronwall* on obtient :

$$
\begin{aligned}
E\left|X_1(t)\right|^2 &\leq 8C(1+M)\theta\int_0^t \exp 8Mds \\
&\leq 8C(1+M)\theta\exp 8Mt \\
&\leq 8C(1+M)\theta\left(\exp 8MT-\right) \\
&\leq K\theta
\end{aligned}
$$

Pour $K = 8C(1+M)\exp 8MT$. D'aprés l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy on obtient :

$$
E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X_1\right|^2\right) \leq CE\left|X_1\right|^2 \leq K\theta;
$$

D'où la preuve La relation $(2,9)$ vont nous permettra de prouver la relation $(2,6)$. ■

En appliquant le dévellopement de Taylor avec reste intégrale au point x et a l'ordre 1 aux fonction : $b(x+x_1,u^\theta)$ et $\sigma(x+x_1,u^\theta)$ on a :

$$
b(t,X+X_1,u^\theta) = b(t,X,u_\theta) + b_x(t,X,u_\theta)X_1 + \int_0^1\int_0^1 \lambda b_{xx}(t,X+\lambda\theta X_1,u_\theta)d\lambda d\theta X_1X_1
$$

$$
\sigma(t,X+X_3,u^\theta) = \sigma(t,X,u_\theta) + \sigma_x(t,X,u_\theta)X_1 + \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{xx}(t,X+\lambda\theta X_1,u_\theta)d\lambda d\theta X_1X_1
$$

Donc par l'addition et l'intégrale on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t b(s,X+X_1,u^\theta)ds+\int_0^t \sigma(s,X+X_1,u^\theta)dB_s &= \int_0^t b(s,X,u_\theta)ds+\int_0^t \sigma(s,X,u_\theta)dB_s\\ &+\int_0^t b_x(s,X,u_\theta)X_1ds+\int_0^t \sigma_x(s,X,u_\theta)X_1(s)dBs\\ &+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda b_{xx}(s,X+\lambda\theta X_1,u_\theta)d\lambda d\theta X_1(s)X_1(s)ds\\ &+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda \sigma_{xx}(s,X+\lambda\theta X_1,u_\theta)d\lambda d\theta X_1(s)X_1(s)dB_s\end{aligned}$$

Alors :.

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^t b(s,X+X_1,u^\theta)ds+\int_0^t \sigma(s,X+X_1,u^\theta)dB_s &= X(t)-\zeta+X_1(t)\\ &+\int_0^t B^\theta(s)ds+\int_0^t \Lambda^\theta(s)dB_s;\end{aligned}$$

Telle que :

$$\begin{aligned}\beta^\theta(s) &= \left[\frac{1}{2}b_{xx}(s;X,u)(X_1X_1)\right]+\left[b_x(s,X,u_\theta)-b_x(s,X,u))X_1\right]\\ &+\int_0^1\int_0^1 \lambda\left[b_{xx}(s,X+\lambda\theta X_1,u_\theta)-b_{xx}(s;X,u)\right]d\lambda d\theta X_1(s)X_1(s).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^\theta(s) &= \left[\frac{1}{2}\sigma_{xx}(s;X,u)(X_1X_1)\right]+\left[\sigma(s,X,u_\theta)-\sigma(s,X,u)\right]\\ &+\int_0^1\int_0^1 \lambda\left[\sigma_{xx}(s,X+\lambda\theta X_1,u_\theta)-\sigma_{xx}(s;X,u)\right]d\lambda d\theta X_1(s)X_1(s).\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
X(t) + X_1(t) = \zeta &+ \int_0^t b(s, X + X_1, u^\theta) ds + \int_0^t \sigma(s, X + X_1, u^\theta) dB_s \\
&- \int_0^t \beta^\theta(s) ds - \int_0^t \gamma^\theta(s) dB_s;
\end{aligned}
$$

Par consequence on trouve :

$$
\begin{aligned}
X_\theta(t) - X(t) - X_1(t) &= \int_0^t \left[b(s, X_\theta, u_\theta) - b(s, X + X_1, u_\theta) \right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(s, X_\theta, u_\theta) - \sigma(s, X + X_1, u_\theta) \right] dB_s \\
&+ \int_0^t \beta^\theta(s) ds + \int_0^t \gamma^\theta(s) dB_s
\end{aligned}
$$

En passant par espérance on obtient :

$$
\begin{aligned}
E \left| X_\theta(t) - X(t) - X_1(t) \right|^2 &\leq 3 \int_0^t E \left[b(s, X_\theta, u_\theta) - b(s, X + X_1, u_\theta) \right]^2 ds \\
&+ 3 \int_0^t E \left[\sigma(s, X_\theta, u_\theta) - \sigma(s, X + X_1, u_\theta) \right]^2 ds \\
&+ 6 \int_0^t E \left| \beta^\theta(s) \right|^2 ds + 6 \int_0^t E \left| \gamma^\theta(s) \right|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Puisque les fonctions b et σ sont lipschitzienne alors :

$$
\begin{aligned}
E \left| X_\theta(t) - X(t) - X_1(t) \right|^2 &\leq 3k \int_0^t E \left[X_\theta(s) - X(s) - X_1(s) \right]^2 ds \\
&+ 3k \int_0^t E \left[X_\theta(s) - X(s) - X_1(s) \right]^2 ds \\
&+ 6 \int_0^t E \left| \beta^\theta(s) \right|^2 ds + 6 \int_0^t E \left| \gamma^\theta(s) \right|^2 ds. \\
&= 6k \int_0^t E \left[X_\theta(s) - X(s) - X_1(s) \right]^2 ds \\
&+ 6 \int_0^t E \left| \beta^\theta(s) \right|^2 ds + 6 \int_0^t E \left| \gamma^\theta(s) \right|^2 ds..
\end{aligned}
$$

On va calculer $E\left|\beta^{\theta}(s)\right|^{2}$ et $E\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2}$puisque les fonctions b_x et b_{xx} sont bornées alors :

$$\begin{aligned} E\left|\beta^{\theta}(s)\right|^{2} &\leq \frac{3}{2}ME\left|X_1X_1\right| + 3ME\left|X_1\right| + 3ME\left|X_1X_1\right| \\ &\leq K\left(\theta+\sqrt{\theta}\right) = O\left(\theta\right). \end{aligned}$$

De même manière les fonctions σ_x et σ_{xx} sont bornées alors :

$$\begin{aligned} E\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2} &\leq \frac{3}{2}ME\left|X_1X_1\right| + 3ME\left|X_1\right| + 3ME\left|X_1X_1\right| \\ &\leq K\left(\theta+\sqrt{\theta}\right) = 0\left(\theta\right). \end{aligned}$$

Donc :

$$E\left|X_{\theta}(t) - X(t) - X_1(t)\right|^{2} \leq 6k\int_0^t E\left[X_{\theta}(s) - X(s) - X_1(s)\right]^{2} ds + 0\left(\theta\right).$$

Par le lemme de Gronwall on obtient :

$$E\left|X_{\theta}(t) - X(t) - X_1(t)\right|^{2} \leq 0\left(\theta\right)\exp(6kT) = O\left(\theta\right).$$

Par l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy on obtient :

$$E\left[\sup_{t\in[0;T]}\left|x_{\theta} - x - x_1\right|^{2}\right] \leq C\theta.$$

2.3 Principe du maximum

Le principe du maximum sera établi essentiellement à partir le lemme suivant

Lemme 2.3.1 *[S.peng]Soit u un contrôle optimal alors sous l'hypotése* (2.3) *on a :*

$$o(\theta) \leq E[\int_0^T (h(t,X,u_\theta) - h(t,X,u))dt] + E[g_x(X(T))(X_1 + X_2) + \int_0^T h_x(t,X,u)(X_1 + X_2)dt] \tag{2-10}$$

$$+\frac{1}{2}E[g_{xx}(X(T)(X_1X_1) + \int_0^T h_{xx}(t,x,u)X_1(t)X_1(t)dt]$$

2.3.1 Estimation du premier ordre

L'estimation du premier ordre consiste à calculer la partie où on a les dérivéer de premier order de (2.10) C'est à dire calculer $E[g_x(X(T))(X_1(T) + X_2(T))$ et :

$$\int_0^T h_x(t,X,u)(X_1(t) + X_2(t)dt.$$

On considére l'équation linéaire associée aux équation de définition de X_1 et X_2 :

$$\begin{cases} d\Phi_1(t) = b_x(t)\Phi_1(t)dt + \sigma_x(t)\Phi_1(t)dB_t \\ \Phi_1(0) = Id \end{cases}$$

Cette équation est linéaire et à coefficients bornées, donc elle ademet un solution fortes unique. De plus la solution Φ_1 est inversible et son inverse Ψ_1.

On suppose que :

$$d\Psi_1(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t;$$

Donc on recherche α et β.

On a :$\Phi_1\Psi_1 = Id$ danc $d(\Phi_1\Psi_1) = 0$, alors d'aprés la formule et l'intégrale par partier $d'Ito$ on trouve :

$$d(\Phi_1\Psi_1) = (d\Phi_1)\Psi_1 + \Phi_1(d\Psi_1) + < d\Phi_1, d\Psi_1 >$$

Telle que :

$$< d\Phi_1, d\Psi_1 >= (d\Phi_1) * (d\Psi_1).$$

Comme :

$$dt * dt = 0 \text{ et } dt * dB_t = 0 \text{ et } dB_t * dB_t = dt$$

Donc on a :

$$< d\Phi_1, d\Psi_1 >= (d\Phi_1) * (d\Psi_1) = \sigma_1\sigma_2 dt = \sigma_x(t)\Phi_1(t)\beta(t)dt$$

Alors :

$$\begin{aligned}
d(\Phi_1\Psi_1) &= (d\Phi_1)\Psi_1 + \Phi_1(d\Psi_1) + \sigma_x(t)\Phi_1(t)\beta(t)dt \\
&= \Psi_1[b_x(t)\Phi_1(t)dt + \sigma_x(t)\Phi_1(t)dB_t] + \Phi_1[\alpha(t)dt + \beta(t)dB_t] + \sigma_x(t)\Phi_1(t)\beta(t)dt \\
&= \Psi_1(t)b_x(t)\Phi_1(t)dt + \sigma_x(t)\Psi_1(t)\Phi_1(t)dB_t + \Phi_1\alpha(t)dt + \Phi_1(t)\beta(t)dB_t + \sigma_x(t)\Phi_1(t)\beta(t)dt \\
&= [b_x(t) + \Phi_1\alpha(t) + \sigma_x(t)\Phi_1(t)\beta(t)]dt + [\sigma_x(t) + \Phi_1(t)\beta(t)]dB_t
\end{aligned}$$

Puisque $\Psi_1(t)\Phi_1(t) = Id$, alors $d(\Phi_1\Psi_1) = 0 = 0dt + 0dB_t$. Alors :

$$\begin{cases}
b_x(t) + \Phi_1\alpha(t) + \sigma_x(t)\Phi_1(t)\beta(t) = 0 \\
et \\
\sigma_x(t) + \Phi_1(t)\beta(t) = 0
\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= -\Phi_1(t)^{-1} * \sigma_x(t) \\
&= -\Psi_1(t)\sigma_x(t);
\end{aligned}$$

Remplace $\beta(t)$ par sa valeur on trouve :

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \Phi_1(t)^{-1}\sigma_x(t)\sigma_x(t) - \Phi_1(t)^{-1}b_x(t) \\
&= \Psi_1(t)\sigma_x(t)\sigma_x(t) - \Psi_1(t)b_x(t).
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} d\Psi_1(t) = (\Psi_1(t)\sigma_x(t)\sigma_x(t) - \Psi_1(t)b_x(t))dt - \Psi_1(t)\sigma_x(t)dB_t \\ \Psi_1(0) = Id \end{cases}.$$

En suivant la méthode de résolvant des équations différentielles ordinaires lineaires, on pose :

$$\eta_1(t) = \Psi_1(t)(X_1(t) + X_2(t)).$$

On applique la formule $d\prime Ito$ on trouve :

$$\begin{aligned}
d\eta_1(t) &= d(\Psi_1(t)(X_1(t) + X_2(t))) \\
&= (d\Psi_1(t))(X_1(t) + X_2(t)) + \Psi_1(t)d(X_1(t) + X_2(t)) + < d\Psi_1(t), d(X_1(t) + X_2(t)) > \\
&= [\Psi_1(t)\sigma_x(t)\sigma_x(t) - \Psi_1(t)b_x(t))dt - \Psi_1(t)\sigma_x(t)dB_t](X_1(t) + X_2(t)) \\
&+ \Psi_1[(b^\theta - b + b_x^\theta X_1 + b_x X_2 + \frac{1}{2}b_{xx}X_1X_1)dt + (\sigma^\theta - \sigma + \sigma_x^\theta X_1 + \sigma_x X_2 \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}X_1X_1)dB_t] - \Psi_1\sigma_x(\sigma^\theta - \sigma + \sigma_x^\theta X_1 + \sigma_x X_2 + \frac{1}{2}\sigma_{xx}X_1X_1)dt \\
&= [\Psi_1(t)\sigma_x(t)\sigma_x(t)X_1(t) - \Psi_1(t)b_x(t)X_1(t) + \Psi_1(t)\sigma_x(t)\sigma_x(t)X_2 - \Psi_1(t)b_x(t)X_2]dt \\
&- (\Psi_1(t)\sigma_x(t)X_1 + \Psi_1(t)\sigma_x(t)X_2)dB_t + [(\Psi_1 b^\theta - \Psi_1 b + \Psi_1 b_x^\theta X_1 + \Psi_1 b_x X_2 \\
&+ \Psi_1\frac{1}{2}b_{xx}X_1X_1)dt + (\Psi_1\sigma^\theta - \Psi_1\sigma + \Psi_1\sigma_x^\theta X_1 + \Psi_1\sigma_x X_2 + \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_{xx}X_1X_1)dB_t] \\
&(-\Psi_1\sigma_x\sigma^\theta + \Psi_1\sigma_x\sigma - \Psi_1\sigma_x\sigma_x^\theta X_1 - \Psi_1\sigma_x\sigma_x X_2 - \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_x\sigma_{xx}X_1X_1)dt
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
d\eta_1(t) &= [-\Psi_1 b_x X_1 + \Psi_1\sigma_x\sigma_x X_1 + \Psi_1 b^\theta - \Psi_1 b + \Psi_1 b_x X_1 + \frac{1}{2}\Psi_1 b_{xx}X_1X_1 - \Psi_1\sigma_x\sigma^\theta + \Psi_1\sigma_x\sigma \\
&- \Psi_1\sigma_x\sigma_x^\theta X_1 - \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_x\sigma_{xx}X_1X_1]dt \\
&+ [-\Psi_1\sigma_x x_1 - \Psi_1\sigma_x x_2 + \Psi_1\sigma^\theta - \Psi_1\sigma + \Psi_1\sigma_x^\theta X_1 + \Psi_1\sigma_x X_1 + \Psi_1\sigma_x X_1 + \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_{xx}X_1X_1)dB_t \\
&= [\Psi_1(b^\theta - b) - \Psi_1\sigma_x(\sigma^\theta - \sigma) + \frac{1}{2}\Psi_1 b_{xx}X_1X_1 + (b_x^\theta - b_x)\Psi_1 X_1 - (\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1\sigma_x X_1 \\
&- \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_x\sigma_{xx}X_1X_1]dt + \left[\Psi_1(\sigma^\theta - \sigma) + \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_{xx}X_1X_1 + (\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1 X\right] dB_s
\end{aligned}$$

On pose :

$$Y_1 = \Phi_1^*(T) g_x(X(T)) + \int_0^T \Phi_1^*(s) f_x(s) ds$$
$$\xi_1(t) = E[Y_1/\mathcal{F}_t] - \int_0^t \Phi_1^*(t) h_x(s) ds$$

On remarque que $E(\eta_1(T)\xi_1(T)) = E[\Phi_1^*(T) g_x(T)\eta_1(T)]$ car :

$$\begin{aligned} E(\eta_1(T)\xi_1(T)) &= E(\eta_1(T)[E[Y_1/\mathcal{F}_t] - \int_0^t \Phi_1^*(s) h_x(s) ds]) \\ &= E(\eta_1(T)[Y_1 - \int_0^t \Phi_1^*(s) h_x(s) ds]) \\ &= E(\eta_1(T)[\Phi_1^*(T) g_x(X(T)) + \int_0^T \Phi_1^*(s) h_x(s) ds - \int_0^t \Phi_1^*(s) h_x(s) ds]) \\ &= E(\eta_1(T)\Phi_1^*(T) g_x(X(T)). \end{aligned}$$

On a $X_1 + X_2 = \eta_1 \Phi_1^*$ donc pour calculer $E[g_x(T)(X_1+X_2)]$, il suffit de calculer $E[\eta_1(T)\xi_1(T)]$. Puisque $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 < s \leq t), Y_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $E(Y_1/\mathcal{F}_t)$ est une martingale de carrée intégrable ,alors d'après la décomposition $d\prime Ito$, on a :

$$E(Y_1/\mathcal{F}_t) = E(Y_1) + \int_0^t G_1(s) dB_s. \tag{2-11}$$

Où $G_1(s)$ est un processus adapté telle que : $E \int_0^T |G_1(s)|^2 ds < \infty$

Donc on peut réecrire $\xi_1(T)$ comme suit :

$$\xi_1(t) = E(Y_1) + \int_0^t G_1(s) dB_s - \int_0^t \Phi_1^*(s) f_x(s) ds.$$

Alors :

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = G_1(t) dB_s - \Phi_1^*(t) h_x(t) dt \\ \xi(T) = E(Y_1) \end{cases}.$$

On applique la formule $d\prime It\hat{o}$ à $\eta_1(t)\xi_1(t)$ on obtient :

$$d(\eta_1(t)\xi_1(t)) = d(\eta_1(t))\xi_1(t) + d(\xi_1(t))\eta_1(t) + < d\eta_1, d\xi_1 > .$$

Alors :

$$\begin{aligned}
d(\eta_1(t)\xi_1(t)) &= d(\eta_1(t))\xi_1(t) + d(\xi_1(t))\eta_1(t) + < d\eta_1, d\xi_1 > \\
&= \Bigg[\bigg(\Psi_1(b^\theta - b) - \Psi_1\sigma_x(\sigma^\theta - \sigma) + \frac{1}{2}\Psi_1 b_{xx}X_1X_1 + (b_x^\theta - b_x)\Psi_1X_1 \\
&-(\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1\sigma_xX_1 - \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_x\sigma_{xx}X_1X_1\bigg)\, dt \\
&+ \bigg(\Psi_1(\sigma^\theta - \sigma) + \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_{xx}X_1X_1 + (\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1X_1\bigg)\, dB_s\Bigg]\, \xi_1 \\
&+ \eta_1(t)G_1(t)dB_s - \Phi_1^*(t)h_x(t)dt \\
&+ G_1(t)\bigg(\Psi_1(\sigma^\theta - \sigma) + \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_{xx}X_1X_1 + (\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1X\bigg)\, dt \\
&= \bigg[\Psi_1(b^\theta - b)\xi_1 - \Psi_1\sigma_x(\sigma^\theta - \sigma)\xi_1 + \frac{1}{2}\Psi_1b_{xx}\xi_1X_1X_1 + (b_x^\theta - b_x)\Psi_1\xi_1X_1 \\
&- (\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1\sigma_x\xi_1X_1 - \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_x\sigma_{xx}\xi_1X_1X_1 + G_1(t)\Psi_1(\sigma^\theta - \sigma) \\
&+\frac{1}{2}G_1(t)\Psi_1\sigma_{xx}X_1X_1 + G_1(t)(\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1X_1 - \eta_1(t)\Phi_1^*(t)h_x(t)\bigg]\, dt \\
&+ \bigg[\eta_1(t)G_1(t) + \Psi_1(\sigma^\theta - \sigma)\xi_1 + \frac{1}{2}\Psi_1\sigma_{xx}\xi_1X_1X_1 + (\sigma_x^\theta - \sigma_x)\Psi_1\xi_1X_1\bigg]\, dB_s
\end{aligned}$$

Donc par l'intégrale et l'éspérance on trouve :

$$\begin{aligned}
E[g_x(T)(X_1 + X_2)] &= E\left[\eta_1(T)\xi_1(T)\right] \\
&= E\int_0^T \big(\Psi_1(b^\theta - b)\xi_1 - \Psi_1\sigma_x(\sigma^\theta - \sigma)\xi_1\big)\, dt \\
&+ E\int_0^T \bigg([\frac{1}{2}\Psi_1b_{xx}X_1X_1 + \frac{1}{2}G_1(t)\Psi_1\sigma_x\sigma_{xx}X_1X_1 \\
&-\frac{1}{2}\Psi_1\sigma_x\sigma_{xx}\xi_1(t)X_1X_1\bigg)\, dt + E\int_0^T \eta_1(t)\psi_1^*(t)h_x(t)dt
\end{aligned}$$

On pose :

$$p_1(t) = \psi_1^*(t)\,\zeta_1(t) \tag{2-12}$$

$$Q_1(t) = \psi_1^*(t)\,G_1(t) - \sigma^*(t)\,p(t)$$

$$\eta_1(t) = \Psi_1(t)(X_1(t) + X_2(t)).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E[g_x(T)(X_1 + X_2)] &= E\int_0^T \left(p(t)\,(b^\theta - b) + Q_1(t)\,(\sigma^\theta - \sigma)\right) dt \\ &+ \frac{1}{2}E\int_0^T ([p_1(t)\,b_{xx}X_1X_1 + Q_1(t)\,\sigma_{xx}X_1X_1)\,dt \\ &- E\int_0^T h_x(t)\,(X_1 + X_2)\,dt \end{aligned}$$

On définit la hamiltonien H par :

$$H(t;x(t);u(t);p(t);Q(t)) = h(t;x(t);u(t)) + p(t)\,b(t;x(t);u(t)) + Q(t)\,\sigma(t;x(t);u(t))\,.$$

Si on le remplace $E[g_x(T)(X_1 + X_2)]$ par sa valeur on peut réecrire la relation $(2,9)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} o(\theta) \leq E[&\int_0^T (H(t;x(t);u_\theta(t);p(t);Q(t)) - H(t;x(t);u(t);p(t);Q(t)))dt] \\ &+ \frac{1}{2}E[g_{xx}(X(T)\,[X_1(T)\,X_1(T)] + \int_0^T H_{xx}(t;x(t);u(t);p(t);Q(t))\,X_1(t)X_1(t)dt]. \end{aligned} \tag{2-13}$$

Cette formule s'appelle inéquation variationnelle du premier ordre.

2.4 processus et équations adjoints

Le processus p_1 qui avoir précédent s'appelle le processus adjoint du premier ordre.

Remarque 2.4.1 *La formule de processus adjoint est calculé à partir de la relation* $(2,12)$

et est donné par :

$$p_1(t) = E\left[\psi_1^*(t)\phi_1^*(T)g_x(x\,(T)\,/F_t\right] + \psi_1^*(t)\int_t^T \phi_1^*(s)h_x\,(s;x(s);u(s))\,ds$$

Si on applique la formule d'Ito aux processus adjoint $p_1 = \psi_1^*\,(t)\,\zeta_1\,(t)$ on trouve :

$$\begin{cases} -dp_1(t) = \left[b_x^*\,(t,x(t);u(t))\,p_1(t) + \sigma_x^*\,(t,x(t);u(t))\,Q_1(t) - h_x\,(t,x(t);u(t))\right]dt - Q_1(t)dB_t \\ p_1(t) = g_x\,[x(T)] \end{cases}. \tag{2-14}$$

Cettte équation s'appelle l'équation adjoint du permier ordre .

Chapitre 3

Principe du maximum du second ordre

Dans ce chapitre en passant aux dérivées du second ordre pour avoir une estimation des solutions d'équation d'état de l'ordre $o(\theta)$, puisque on aura vu dans le chapitre précédent que si on utilise seulement les dérivées du premier ordre on aura une éstimation de l'ordre $O(\theta)$.

Alors on pose de même probléme qui soit donner dans le chapitre 2 .

3.1 Formulation du problème et hypothèses

On considèr le problème de contrôle suivants :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t.u_t)dB_t \\ x(o) = \zeta \end{cases}$$

Où :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times A \to M_{n*d};$$

Et ζ variable aléatoire F_0- mésurable indépendante deB_t telle que :

$$E\left(|\zeta|^m\right) < \infty; \text{ pour tout } m > 1.$$

On définit la fonction de coût pour $u \in U$ et on note $J(u)$, par :

$$J(u) = E(\int_0^T h(t; x_t, u_t)dt + g(x_T))$$

Où :$h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions Boréliennes et x_T la solution de l'équation $(2-1)$ prise au temps términal T .

Le but de problème de contrôle optimal consiste a minimiser la fonction de coût $J(u)$ sur un ensemble de conrôle admissible U.

3.2 Estimation de solution

Lemme 3.2.1 *Sous l'hypothèses* $(2, 3)$ *sur les fonctions* b *et* σ*il exsiste* $C \geq 0$ *telle que :*

$$E\left[\sup_{t\in[0;T]} |x_\theta - x - x_1 - x_2|^2\right] \leq C\theta^2. \tag{3-1}$$

On va montre que :

$$E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_2(t)|^2 \leq K\theta^2. \tag{3-2}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} X_2(t) = &\int_0^t [(b_x(s, X(s), u_\theta(s)) - b_x(s, X(s), u(s)))X_1(s) + b_x(s, X(s), u(s)))X_2(s) \\ &+ \frac{1}{2}b_{xx}(s, X(s), u(s))X_1(s)X_1(s)]ds + \int_0^t [\sigma_x(s, X(s), u_\theta(s)) - \sigma_x(s, X(s), u(s)))X_1(s) \\ &+ \sigma_x(s, X(s), u(s)))X_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(s, X(s), u(s)))X_1(s)X_1(s)]dB_s \end{aligned}$$

Danc :

$$\begin{aligned}|X_2(t)|^2 \leq \int_0^t &\left|(b_x(s,X(s),u_\theta(s)) - b_x(s,X(s),u(s)))X_1(s) + b_x(s,X(s),u(s)))X_2(s)\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}b_{xx}(s,X(s),u(s))X_1(s)X_1(s)\right|^2 ds + \int_0^t \left|\sigma_x(s,X(s),u_\theta(s)) - \sigma_x(s,X(s),u(s)))X_1(s)\right. \\ &\left.+\sigma_x(s,X(s),u(s)))X_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(s,X(s),u(s)))X_1(s)X_1(s)\right|^2 dB_s\end{aligned}$$

De même montere on a :

$$\begin{aligned}|X_2(t)|^2 \leq & \int_0^t 2\left|(b_x(s,X(s),u_\theta(s)) - b_x(s,X(s),u(s)))X_1(s)\right|^2 ds \\ &+ \int_0^t 2\left|b_x(s,X(s),u(s)))X_2(s) + \frac{1}{2}b_{xx}(s,X(s),u(s))X_1(s)X_1(s)\right|^2 ds \\ &+ \int_0^t 2\left|\sigma_x(s,X(s),u_\theta(s)) - \sigma_x(s,X(s),u(s)))X_1(s)\right|^2 dB_s \\ &+ \int_0^t 2\left|\sigma_x(s,X(s),u(s)))X_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(s,X(s),u(s)))X_1(s)X_1(s)\right|^2 dB_s\end{aligned}$$

De simple calcul on a :

$$\begin{aligned}E\left|X_2(t)\right|^2 \leq 6 & \int_0^t E[|b(s,X(s),u_\theta(s)) - b(s,X(s),u(s))X_1|]^2 ds \\ &+ 6\int_0^t E[|b_x(s,X(s),u(s))X_2(s)|^2]ds \\ &+ 3\int_0^t E[|b_{xx}(s,X(s),u(s))X_1(s)X_1(s)|^2]ds \\ &+ 6\int_0^t E[|\sigma(s,X(s),u_\theta(s)) - \sigma(s,X(s),u(s))X_1|^2]dB_s \\ &+ 6\int_0^t E[|\sigma_x(s,X(s),u(s))X_2(s)|^2]dB_s \\ &+ 3\int_0^t E[|\sigma_{xx}(s,X(s),u(s))X_1(s)X_1(s)|^2]dB_s\end{aligned}$$

Pour la définition de u_θ on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left|X_2(t)\right|^2 \leq\ & 6\int_\tau^{\tau+\theta} E[|b(s,X(s),v)-b(s,X(s),u(s))X_1|]^2 ds \\
&+ 6\int_0^t E[|b_x(s,X(s),u(s))X_2(s)|^2]ds \\
&+ 3\int_0^t E[|b_{xx}(s,X(s),u(s))X_1(s)X_1(s)|^2]ds \\
&+ 6\int_\tau^{\tau+\theta} E[|\sigma(s,X(s),v)-\sigma(s,X(s),u(s))X_1|^2]dB_s \\
&+ 6\int_0^t E[|\sigma_x(s,X(s),u(s))X_2(s)|^2]dB_s \\
&+ 3\int_0^t E[|\sigma_{xx}(s,X(s),u(s))X_1(s)X_1(s)|^2]dB_s.
\end{aligned}$$

Par l'hypotéses de (2.3) on a :

$$\begin{aligned}
E\left|X_2(t)\right|^2 \leq\ & 6\int_\tau^{\tau+\theta} E[|MX_1|]^2 ds + 6\int_0^t E[|MX_2(s)|^2]ds \\
&+ 3\int_0^t E[|MX_1(s)X_1(s)|^2]ds + 6\int_\tau^{\tau+\theta} E[|MX_1|^2]ds \\
&+ 6\int_0^t E[|MX_2(s)|^2]ds + 3\int_0^t E[|MX_1(s)X_1(s)|^2]ds.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E\left|X_2(t)\right|^2 &\leq 12\int_\tau^{\tau+\theta} E[|MX_1|]^2 ds + 12\int_0^t E[|MX_2(s)|^2]ds + 6\int_0^t E[|MX_1(s)X_1(s)|^2]ds \\
&= 12M\int_\tau^{\tau+\theta} E[|X_1|]^2 ds + 12M\int_0^t E[|X_2(s)|^2]ds + 6M\int_0^t E[|X_1(s)X_1(s)|^2]ds \\
&= 12M\int_0^t E[|X_2(s)|^2]ds + 12M\int_\tau^{\tau+\theta} \theta ds \ + 6M\int_0^t \theta^2 ds \\
&= 12M\int_0^t E[|X_2(s)|^2]ds + 12M\theta^2 + 6M\theta^2 t \\
&= 12M\int_0^t E[|X_2(s)|^2]ds + 12M\theta^2 + 6M\theta^2 T.
\end{aligned}$$

Par l'inégalités de *Gronwall*, on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left|X_2(t)\right|^2 &\leq \left(12M\theta^2 + 6M\theta^2 T\right)\exp\int_0^t 12Mds \\
&\leq \left(12M\theta^2 + 6M\theta^2 T\right)\exp 12Mt \\
&\leq \left(12M\theta^2 + 6M\theta^2 T\right)\exp 12MT \\
&\leq \theta^2\left(12M + 6MT\right)\exp 12MT \\
&\leq C\theta^2
\end{aligned}$$

Telle que $C = (12M + 6MT)\exp 12MT$, d'ou le résultat demandé. ■

Les relations (2.9) et (3.2) Va nous pèrmetra de la relation (3.1)

Preuve. On pose : $X_3 = X_1 + X_2$ pour la simplicité des calculs .

En appliquent la dévellopement de Taylor avec reste intégrale au point x et a l'ordre 1 aux fonction :$b(x + x_3, u^\theta)$ et $\sigma(x + x_3, u^\theta)$ on a :

$$\begin{aligned}
b(t, X + X_3, u^\theta) &= b(t, X, u_\theta) + b_x(t, X, u_\theta)X_3 + \int_0^1\int_0^1 \lambda b_{xx}(t, X + \lambda\theta X_3, u_\theta)d\lambda d\theta X_3 X_3 \\
\sigma(t, X + X_3, u^\theta) &= \sigma(t, X, u_\theta) + \sigma_x(t, X, u_\theta)X_3 + \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{xx}(t, X + \lambda\theta X_3, u_\theta)d\lambda d\theta X_3 X_3
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
b(t, X + X_3, u^\theta) + \sigma(t, X + X_3, u^\theta) &= b(t, X, u_\theta) + \sigma(t, X, u_\theta) + b_x(t, X, u_\theta)X_3 + \sigma_x(t, X, u_\theta)X_3 \\
&+ \int_0^1\int_0^1 \lambda b_{xx}(t, X + \lambda\theta X_3, u_\theta)d\lambda d\theta X_3 X_3 \\
&+ \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{xx}(t, X + \lambda\theta X_3, u_\theta)d\lambda d\theta X_3 X_3 \\
&= b(t, X, u_\theta) - b(t, X, u) + b(t, X, u) + b_x(t, X, u_\theta)X_3 \\
&- b_x(t, X, u)X_3 + b_x(t, X, u)X_3 + \sigma(t, X, u_\theta)
\end{aligned}$$

■

$$
\begin{aligned}
&- \sigma(t,X,u) + \sigma(t,X,u) + \sigma_x(t,X,u_\theta)X_3 \\
&- \sigma_x(t,X,u)X_3 + \sigma_x(t,X,u_\theta)X_3 + \frac{1}{2}b_{xx}(X,u_\theta)(X_3X_3) \\
&- \frac{1}{2}b_{xx}(X,u)(X_3X_3) + \frac{1}{2}b_{xx}(X,u)(X_3X_3) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X,u_\theta)(X_3X_3) - \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X,u)(X_3X_3) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X,u_\theta)(X_3X_3) \\
&+ \int_0^1\int_0^1 \lambda b_{xx}(t,X+\lambda\theta X_3,u_\theta)d\lambda d\theta X_3X_3 \\
&+ \int_0^1\int_0^1 \lambda \sigma_{xx}(t,X+\lambda\theta X_3,u_\theta)d\lambda d\theta X_3X_3
\end{aligned}
$$

En passent aux l'intégrale on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t b(s,X+X_3,u^\theta)ds + \int_0^t \sigma(s,X+X_3,u^\theta) = & \int_0^t b(s,X,u)ds + \int_0^t [b(s,X,u_\theta) - b(t,X,u)]ds \\
&+ \int_0^t [b_x(s,X,u_\theta) - b_x(s,X,u)]X_3ds \\
&+ \int_0^t b_x(s,X,u)X_3ds + \int_0^t \sigma(s,X,u)dB_s \\
&+ \int_0^t [\sigma(s,X,u_\theta) - \sigma(s,X,u)]dB_s \\
&+ \int_0^t [\sigma_x(s,X,u_\theta) - \sigma_x(s,X,u)]X_3dB_s \\
&+ \int_0^t \sigma_x(s,X,u)X_3dB_s \\
&+ \int_0^t \frac{1}{2}b_{xx}(X,u)(X_3X_3)ds + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X,u)(X_3X_3)ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda[b_{xx}(s,X+\lambda\theta X_3,u_\theta) \\
&- b_{xx}(X,u)]d\lambda d\theta X_3X_3ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda[\sigma_{xx}(s,X+\lambda\theta X_3,u_\theta) \\
&- \sigma_{xx}(X,u)]d\lambda d\theta X_3X_3dB_s
\end{aligned}
$$

On remplaçant X_3 par sa valeur on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t b(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)ds + \int_0^t \sigma(s, X + X_1 + X_2, u^\theta) = & \int_0^t b(s, X, u)ds + \int_0^t \sigma(s, X, u)dB_s \\
& + \int_0^t [b(s, X, u_\theta) - b(s, X, u)]ds \\
& + \int_0^t b_x(s, X, u)X_1 ds + \int_0^t b_x(s, X, u)X_2 ds \\
& + \int_0^t [b_x(s, X, u_\theta) - b_x(s, X, u)]X_1 ds \\
& + \int_0^t [b_x(s, X, u_\theta) - b_x(s, X, u)]X_2 ds \\
& + \int_0^t [\sigma(s, X, u_\theta) - \sigma(s, X, u)]dB_s \\
& + \int_0^t \sigma_x(s, X, u)X_1 dB_s + \int_0^t \sigma_x(s, X, u)X_2 dB_s \\
& + \int_0^t [\sigma_x(s, X, u_\theta) - \sigma_x(s, X, u)]X_1 dB_s \\
& + \int_0^t [\sigma_x(s, X, u_\theta) - \sigma_x(s, X, u)]X_2 dB_s \\
& + \int_0^t \frac{1}{2} b_{xx}(X, u)(X_3 X_3)ds + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X, u)(X_3 \\
& + \int_0^t \frac{1}{2} b_{xx}(X, u)(X_1 X_1)ds + \int_0^t \frac{1}{2} b_{xx}(X, u)(X_1 \\
& + \int_0^t \frac{1}{2} b_{xx}(X, u)(X_2 X_1)ds + \int_0^t \frac{1}{2} b_{xx}(X, u)(X_2 \\
& + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X, u)(X_1 X_1)dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X, u)(\\
& + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X, u)(X_2 X_1)dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X, u)(\\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \lambda[b_{xx}(s, X + \lambda\theta X_3, u_\theta) \\
& - b_{xx}(X, u)]d\lambda d\theta (X_1 + X_2)(X_1 + X_2)ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \lambda[\sigma_{xx}(s, X + \lambda\theta X_3, u_\theta) \\
& - \sigma_{xx}(X, u)]d\lambda d\theta (X_1 + X_2)(X_1 + X_2)dB_s
\end{aligned}
$$

Alors :

$$\int_0^t b(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)ds + \int_0^t \sigma(s, X + X_1 + X_2, u^\theta) = X(t) + X_1(t) + X_2(t) \\ - \zeta + \int_0^t \beta^\theta(s)ds + \int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s$$

Telle que :

$$\beta^\theta(s) = \frac{1}{2} b_{xx}(X, u)(X_2X_2 + 2X_1X_2) + (b_x(x, u_\theta) - b_x(X, u))X_2 \\ + \int_0^1 \int_0^1 \lambda[b_{xx}(t, X + \lambda\theta(X_1 + X_2), u_\theta) - b_{xx}(X, u)]d\lambda d\theta(X_1 + X_2)(X_1 + X_2)$$

$$\gamma^\theta(s) = \frac{1}{2} \sigma_{xx}(X, u)(X_2X_2 + 2X_1X_2) + (\sigma_x(x, u_\theta) - \sigma_x(X, u))X_2 \\ + \int_0^1 \int_0^1 \lambda[\sigma_{xx}(t, X + \lambda\theta(X_1 + X_2), u_\theta) - \sigma_{xx}(X, u)]d\lambda d\theta(X_1 + X_2)(X_1 + X_2)$$

Alors :

$$X(t) + X_1(t) + X_2(t) = \int_0^t b(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)ds + \int_0^t \sigma(s, X + X_1 + X_2, u^\theta) \\ + \zeta - \int_0^t \beta^\theta(s)ds - \int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
X_\theta(t) - X(t) - X_1(t) - X_2(t) &= \zeta + \int_0^t b(X_\theta, u_\theta)ds + \int_0^t \sigma(X_\theta, u_\theta)dB_s \\
&- \int_0^t b(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)ds - \int_0^t \sigma(s, X + X_1 + X_2, u^\theta) \\
&- \zeta + \int_0^t \beta^\theta(s)ds + \int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s \\
&= \int_0^t [b(X_\theta, u_\theta) - b(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)]ds \\
&+ \int_0^t [\sigma(X_\theta, u_\theta) - \sigma(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)]dB_s \\
&+ \int_0^t \beta^\theta(s)ds + \int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|X_\theta(t) - X(t) - X_1(t) - X_2(t)|^2 = \bigg| &\int_0^t [b(X_\theta, u_\theta) - b(t, X + X_1 + X_2, u^\theta)]ds \\
&+ \int_0^t [\sigma(X_\theta, u_\theta) - \sigma(t, X + X_1 + X_2, u^\theta)]dB_s \\
&+ \int_0^t \beta^\theta(s)ds + \int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s \bigg|^2
\end{aligned}$$

Par l'inégalité $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, on obteint :

$$\begin{aligned}
|X_\theta(t) - X(t) - X_1(t) - X_2(t)|^2 \leq\ &3\left|\int_0^t [b(X_\theta, u_\theta) - b(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)]ds\right|^2 \\
&+ 3\left|\int_0^t [\sigma(X_\theta, u_\theta) - \sigma(s, X + X_1 + X_2, u^\theta)]dB_s\right|^2 \\
&+ 3\left|\int_0^t \beta^\theta(s)ds + \int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s\right|^2
\end{aligned}$$

En passant aux ésperances :

$$\begin{aligned}
E\left|X_\theta(t)-X(t)-X_1(t)-X_2(t)\right|^2 &\leq 3\int_0^t E\left|b(X_\theta,u_\theta)-b(s,X+X_1+X_2,u^\theta)\right|^2 ds \\
&+3\int_0^t E\left|\sigma(X_\theta,u_\theta)-\sigma(t,X+X_1+X_2,u^\theta)\right|^2 dB_s \\
&+3E\left|\int_0^t \beta^\theta(s)ds+\int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s\right|^2 \\
&\leq 3\int_0^t E\left|b(X_\theta,u_\theta)-b(t,X+X_1+X_2,u^\theta)\right|^2 ds \\
&+3\int_0^t E\left|\sigma(X_\theta,u_\theta)-\sigma(s,X+X_1+X_2,u^\theta)\right|^2 dB_s \\
&+6E\left|\int_0^t \beta^\theta(s)ds+\int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s\right|^2
\end{aligned}$$

Puisque σ et b sont Lipschitzeinnes alors :

$$\begin{aligned}
E\left|X_\theta(t)-X(t)-X_1(t)-X_2(t)\right|^2 &\leq 3k\int_0^t E\left|X_\theta(s)-X(s)-X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds \\
&+3k\int_0^t E\left|X_\theta(s)-X(s)-X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds \\
&+6E\left|\int_0^t \beta^\theta(s)ds+\int_0^t \gamma^\theta(s)dB_s\right|^2 \\
&\leq 6k\int_0^t E\left|X_\theta(s)-X(s)-X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds \\
&+6E\int_0^t \left|\beta^\theta(s)\right|^2 ds+\int_0^t \left|\gamma^\theta(s)\right|^2 dB_s
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
E\left|\beta^\theta(s)\right|^2 = E\Bigg|&\frac{1}{2}b_{xx}(X,u)(X_2X_2+2X_1X_2)+(b_x(x,u_\theta)-b_x(X,u))X_2 \\
&+\int_0^1\int_0^1 \lambda[b_{xx}(t,X+\lambda\theta(X_1+X_2),u_\theta)-b_{xx}(X,u)]d\lambda d\theta(X_1+X_2)(X_1+X_2)\Bigg|^2 \\
&\leq 4E\left|\frac{1}{2}b_{xx}(X,u)(X_2X_2)\right|^2+4E\left|b_{xx}(X,u)(X_1X_2)\right|^2+4\left|(b_x(x,u_\theta)-b_x(X,u))X_2\right|^2 \\
&+4\left|\int_0^1\int_0^1 \lambda[b_{xx}(t,X+\lambda\theta(X_1+X_2),u_\theta)-b_{xx}(X,u)]d\lambda d\theta(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right|^2
\end{aligned}$$

Puisque b_x et b_{xx} sont borneés :

$$\begin{aligned} E\left|\beta^{\theta}(s)\right|^2 &\leq ME\left|X_2X_2\right|^2 + 4ME\left|X_1X_2\right|^2 + 4ME\left|X_2\right|^2 + 4ME\left|(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right|^2 \\ &\leq ME\left|X_2X_2\right|^2 + 4ME\left|X_1X_2\right|^2 + 4ME\left|X_2\right|^2 + 4ME\left|X_1X_1 + X_2X_2 + X_2X_1 + X_1X_2\right|^2 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Shwartz et les relations (2.9) et (3.2) :

$$\begin{aligned} E\left|\beta^{\theta}(s)\right|^2 &\leq ME\left|X_2X_2\right|^2 + 4ME\left|X_1X_2\right|^2 + 4MCE\left|X_2\right|^2 + 4ME\left|X_1X_1\right|^2 \\ &\quad + 4ME\left|X_2X_2\right|^2 + 4ME\left|X_2X_1\right|^2 + 4ME\left|X_1X_2\right|^2 \\ &\leq C\left(\theta^2 + \theta\sqrt{\theta} + \theta^4\right). \end{aligned}$$

De même manière et puisque $\sigma_x$et σ_{xx} bornée alors :

$$\begin{aligned} E\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^2 &= E\left|\frac{1}{2}\sigma_{xx}(X,u)(X_2X_2 + 2X_1X_2) + (\sigma_x(x,u_\theta) - \sigma_x(X,u))X_2\right. \\ &\quad \left. + \int_0^1\int_0^1 \lambda[\sigma_{xx}(t, X + \lambda\theta(X_1+X_2), u_\theta) - \sigma_{xx}(X,u)]d\lambda d\theta(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right|^2 \\ &\leq 4E\left|\frac{1}{2}\sigma_{xx}(X,u)(X_2X_2 + 2X_1X_2)\right|^2 + 4E\left|(\sigma_x(x,u_\theta) - \sigma_x(X,u))X_2\right|^2 \\ &\quad + 4E\left|\int_0^1\int_0^1 \lambda[\sigma_{xx}(t, X + \lambda\theta(X_1+X_2), u_\theta) - \sigma_{xx}(X,u)]d\lambda d\theta(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right|^2 \\ &\leq ME\left|X_2X_2\right|^2 + 4ME\left|X_1X_2\right|^2 + 4MCE\left|X_2\right|^2 + 4ME\left|(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right| \\ &\leq C\left(\theta^2 + \theta\sqrt{\theta} + \theta^4\right). \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} E\left|X_\theta(t) - X(t) - X_1(t) - X_2(t)\right|^2 &\leq 6k\int_0^t E\left|X_\theta(s) - X(s) - X_1(s) - X_2(s)\right|^2 ds \\ &\quad + 2C\left(\theta^2 + \theta\sqrt{\theta} + \theta^4\right) \end{aligned}$$

On utilise le lemme de *Gronwall* on obtient :

$$E\left|X_\theta(t)-X(t)-X_1(t)-X_2(t)\right|^2 \leq 2C\left(\theta^2+\theta\sqrt{\theta}+\theta^4\right)\exp(\int_0^t 6kdu)ds$$
$$\leq o(\theta)\exp(6kt)\Big|_0^t$$
$$\leq o(\theta)\left[1-\exp(6kT)\right]=o(\theta)$$

D'aprés l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy on trouve :

$$E\left[\sup_{t\in[0;T]}\left|X_\theta(t)-X(t)-X_1(t)-X_2(t)\right|^2\right]\leq C\theta^2$$

3.3 Principe du maximum

Tout d'abord, nous donnons la preuve du lemme présentée dans le chapitre précédent, qui était la suivante

Lemme 3.3.1 *Soit u un contrôle optimal alors sous l'hypotése* (2.3) *on a :*

$$o(\theta)\leq E[\int_0^T (h(t,X,u_\theta)-h(t,X,u))dt]+E[g_x(X(T))\left[X_1(T)+X_2(T)\right]+\int_0^T h_x(t,X,u)(X_1+X_2)] \tag{2.10}$$

$$+\frac{1}{2}E\left[g_{xx}(X(T))X_1(T)X_1(T)+\int_0^T h_{xx}(t,x,u)X_1(t)X_1(t)dt\right]$$

Preuve. On a u est optimal alors :$J(u)\leq J(v),\forall v\in U$ donc :$J(u_\theta)-J(u)\geq 0$

Donc :

$$E[\int_0^T h(t,X_\theta,u_\theta)dt+g(X_\theta(T))]-E[\int_0^T h(t,X,u)dt+g(X(T))]\geq 0$$

Alors :

$$E[\int_0^T (h(t,X_\theta,u_\theta)-h(t,X,u))dt]+[g(X_\theta(T))-g(X(T))]\geq 0$$

En appliquant le dévelloppement de Taylor des fonctions $h(t, X_\theta, u_\theta)$ et $g(X_\theta(T))$ au point X à l'ordre 2 telle que :

$$X_\theta = X_1 + X_2 + X + o\,(\theta)$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} h(t, X_1 + X_2 + X, u_\theta) = {} & h(t, X, u_\theta) + h_x(t, X, u_\theta)(X_1 + X_2) \\ & + \frac{1}{2} h_{xx}(t, X, u_\theta)(X_1 + X_2)(X_1 + X_2) + o(|X_1 + X_2|^2) \end{aligned}$$

Et :

$$g(X_1+X_2+X) = g(X(T))+g_x(X(T))(X_1+X_2)+\frac{1}{2}g_{xx}(X(T))(X_1+X_2)(X_1+X_2)+o(|X_1 + X_2|^2)$$

Telle que :

$$o(|X_1 + X_2|^2) = o(\theta)$$

Alors :

$$\begin{aligned} h(t, X_1 + X_2 + X, u_\theta) - h(t, X, u) = {} & o(\theta) + [h(t, X, u_\theta) - h(t, X, u)] + h_x(t, X, u_\theta)(X_1 + X_2) \\ & + \frac{1}{2} h_{xx}(t, X, u_\theta)(X_1 + X_2)(X_1 + X_2) + h_x(t, X, u)(X_1 + X_2) \\ & + \frac{1}{2} h_{xx}(t, X, u)(X_1 + X_2)(X_1 + X_2) - h_x(t, X, u)(X_1 + X_2) \\ & - \frac{1}{2} h_{xx}(t, X, u)(X_1 + X_2)(X_1 + X_2) \end{aligned}$$

et :

$$g(X(T)+X_1+X_2)-g(X(T)) = o(\theta)+g_x(X(T))(X_1+X_2)+\frac{1}{2}g_{xx}(X(T))(X_1+X_2)(X_1+X_2)$$

On peut réecrire $(2,10)$ comme suite :

$$0 \leq E\int_0^T [(o(\theta) + [h(t,X,u_\theta) - h(t,X,u)] + h_x(t,X,u_\theta)(X_1+X_2)$$
$$+ \frac{1}{2}h_{xx}(t,X,u_\theta)(X_1+X_2)(X_1+X_2) + h_x(t,X,u)(X_1+X_2)$$
$$+ \frac{1}{2}h_{xx}(t,X,u)(X_1+X_2)(X_1+X_2) - h_x(t,X,u)(X_1+X_2)$$
$$- \frac{1}{2}h_{xx}(t,X,u)(X_1+X_2)(X_1+X_2)]dt$$
$$+ E\int_0^T [o(\theta) + g_x(X(T))(X_1+X_2) + \frac{1}{2}g_{xx}(X(T))(X_1+X_2)(X_1+X_2)]dt$$

Donc :

$$0 \leq \circ(\theta) + E\int_0^T [h(t,X,u_\theta) - h(t,X,u)]dt + E\int_0^T h_x(t,X,u_\theta)(X_1+X_2)dt$$
$$+ \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u_\theta)(X_1+X_2)(X_1+X_2)dt$$
$$+ E\int_0^T h_x(t,X,u)(X_1+X_2)dt + E\int_0^T \frac{1}{2}h_{xx}(t,X,u)(X_1+X_2)(X_1+X_2)dt$$
$$- E\int_0^T h_x(t,X,u)(X_1+X_2)dt - \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u)(X_1+X_2)(X_1+X_2)dt$$
$$+ E\int_0^T \frac{1}{2}g_{xx}(X(T))(X_1+X_2)(X_1+X_2)dt + \alpha(T)$$

Donc on a :

$$0 \leq \circ(\theta) + E\int_0^T [h(t,X,u_\theta) - h(t,X,u)]dt + E\int_0^T h_x(t,X,u_\theta)(X_1+X_2)dt$$
$$+ \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u)(X_1X_1)dt + E[g_x(X(T)X_1X_1)] + \alpha(T)$$

Telle que :

$$\begin{aligned}
\alpha(T) &= E\int_0^T [h_x(t,x,u_\theta) - h_x(t,x,u)](X_1+X_2)dt + \frac{1}{2}E\int_0^T h(t,X,u)X_1X_2]dt \\
&+ \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u)X_2X_1dt + \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u)X_2X_2dt \\
&+ \frac{1}{2}E\int_0^T [h_{xx}(t,X,u_\theta) - h_{xx}(t,X,u)](X_1+X_2)(X_1+X_2)dt \\
&+ \frac{1}{2}[g_{xx}(X(T))X_1X_2] + \frac{1}{2}E[g_{xx}(X(T))X_2X_1] + \frac{1}{2}E[g_{xx}(X(T))X_2X_2]
\end{aligned}$$

D'aprés la définition de u^θ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha(T) &= E\int_\tau^{\tau+\theta} [h_x(t,x,v) - h_x(t,x,u)](X_1+X_2)dt \\
&+ \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u)X_1X_2dt + \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u)X_2X_1dt \\
&+ \frac{1}{2}E\int_0^T h_{xx}(t,X,u)X_2X_2dt + \frac{1}{2}E\int_\tau^{\tau+\theta} [h_{xx}(t,X,v) - h_{xx}(t,X,u)](X_1+X_2)(X_1+X_2)dt \\
&+ E\frac{1}{2}[g_{xx}(X(T))X_1X_2] + \frac{1}{2}E[g_{xx}(X(T))X_2X_1] + \frac{1}{2}E[g_{xx}(X(T))X_2X_2]
\end{aligned}$$

Grace à les conditions sur les fonctions et ses dérivés h_x et $g_x$bornée par : $C(1+|X|)$ est h_{xx} et g_{xx} sont bornée, danc on aura :

$$\begin{aligned}
\alpha(T) &\leq E\int_\tau^{\tau+\theta} [C\left(1+|X|\right)(X_1+X_2)]dt + +\frac{1}{2}E\int_0^T MX_1X_2dt \\
&+ \frac{1}{2}E\int_0^T MX_2X_1dt + \frac{1}{2}E\int_0^T MX_2X_2dt \\
&+ \frac{1}{2}E\int_\tau^{\tau+\theta} M\left[(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right]dt \\
&+ \frac{1}{2}ME[X_1X_2] + \frac{1}{2}ME[X_2X_1] + \frac{1}{2}ME[X_2X_2]
\end{aligned}$$

Dans l'hypotèse :

$$
\begin{aligned}
\alpha(T) \leq & \int_{\tau}^{\tau+\theta} E\left[C(1+\sup_{t\in[0,T]}|X|)(X_1+X_2)\right]dt + \frac{1}{2}M\int_0^T E\left[X_1X_2\right]dt \\
& + \frac{1}{2}M\int_0^T E\left[X_2X_1\right]dt + \frac{1}{2}M\int_0^T E\left[X_2X_2\right]dt \\
& + \frac{1}{2}M\int_{\tau}^{\tau+\theta} E\left[(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right]dt \\
& + \frac{1}{2}ME[X_1X_2]dt + \frac{1}{2}ME[X_2X_1]dt + \frac{1}{2}ME[X_2X_2]
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
\alpha(T) \leq C & \int_{\tau}^{\tau+\theta} E\left[(X_1+X_2)\right]dt + \frac{1}{2}M\int_0^T E\left[X_1X_2\right]dt \\
& + \frac{1}{2}M\int_0^T E\left[X_2X_1\right]dt + \frac{1}{2}M\int_0^T E\left[X_2X_2\right]dt \\
& + \frac{1}{2}M\int_{\tau}^{\tau+\theta} E\left[(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right]dt \\
& + \frac{1}{2}ME[X_1X_2]dt + \frac{1}{2}ME[X_2X_1] + \frac{1}{2}ME[X_2X_2].
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\alpha(T) \leq K & \left[E[X_1X_2]dt + E[X_2X_1] + E[X_2X_2]\right. \\
& + \int_{\tau}^{\tau+\theta} E\left[(X_1+X_2)\right]dt + \int_0^T E\left[X_1X_2\right]dt \\
& \left. + \int_0^T E\left[X_2X_1\right]dt + \int_0^T E\left[X_2X_2\right]dt + \int_{\tau}^{\tau+\theta} E\left[(X_1+X_2)(X_1+X_2)\right]dt\right]
\end{aligned}
$$

Où $K = \max\left(C; \frac{1}{2}M\right)$; et par l'inégalité de Cauchy Schwartz et $(2,9)$ et $(3,2)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\alpha(T) & \leq K\left[2\theta\sqrt{\theta} + \theta^2 + \theta\sqrt{\theta} + \theta^2 + 2T\theta\sqrt{\theta}\right. \\
& \left. + T\theta^2 + \theta^2 + \theta^3 + 2\theta^2\sqrt{\theta}\right] \\
& = o\left(\theta\right)
\end{aligned}
$$

En remplace cette résultat dans $(2,10)$ on obtient :

$$\circ(\theta) \leq E \int_0^T [ht, X, u_\theta) - h(t, X, u)]dt + E \int_0^T h_x(t, X, u_\theta)(X_1 + X_2)dt$$
$$+\frac{1}{2}E \int_0^T h_{xx}(t, X, u)(X_1 X_1)dt + E[g_x(X(T)X_1 X_1]$$

Donc, on obtient le résultat demandé. ■

3.3.1 Estimation du second ordre

L'éstimation du second ordre conssiste à calcule ou on a les dérivés du second ordre dans la relation $(2,13)$ inéquation variationnelle du premier ordre.

$$+\frac{1}{2}E[g_{xx}(X(T)\left[X_1\left(T\right)X_1\left(T\right)\right] + \int_0^T H_{xx}\left(t; x\left(t\right); u\left(t\right); p\left(t\right); Q\left(t\right)\right) X_1(t)X_1(t)dt]$$

Puisque on a un cas non linéaire, on ne peut pas appliquer le même méthode de l'éstimation du chapitre précédent. Donc on doit d'abords linéairiser la quantité à éstimer , pour cela on pose $Z = X_1 X_1^*$.

En applique la formule d'Ito trouve :

$$dZ(t) = d\left(X_1^*\right)X_1 + X_1^* d\left(X_1\right) + < d\left(X_1^*\right); d\left(X_1\right)$$

Alors :

$$dZ(t) = \left[Z\left(t\right)b_x^*(t) + b_x Z(t) + \sigma_x(t)Z(t)\sigma_x^*(t) + A_\theta(t)\right]dt \tag{3-3}$$
$$+ \left[Z\left(t\right)\sigma_x^*(t) + \sigma_x Z(t) + B_\theta(t)\right]dB_t.$$

Telle que :

$$A_\theta(t) = X_1(t)\left(b^\theta(t) - b(t)\right)^* + \left(b^\theta(t) - b(t)\right)X_1^*(t) + \sigma_x(t)X_1(t)\left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)^*$$
$$+ \left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)X_1^*(t)\sigma_x^*(t) + \left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)\left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)^*.$$
$$B_\theta(t) = X_1(t)\left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)^* + \left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)X_1^*(t)$$

On a :

$$E\int_0^T A_\theta(t)dt \leq E\int_0^T \left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)\left(\sigma^\theta(t) - \sigma(t)\right)^* dt + o(\theta)$$
$$B_\theta(t) \leq o(\theta).$$

On donne l'équation linéaire associée à $(3,3)$ comme suivant :

$$\begin{cases} d\Phi_2(t) = \left[\Phi_2(t)b_x^*(t) + b_x\Phi_2(t) + \sigma_x(t)\Phi_2(t)\sigma_x^*(t)\right]dt \\ \qquad + \left[\Phi_2(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_x\Phi_2(t)\right]dB_t. \\ \Phi_2(0) = Id \end{cases}.$$

Cette équation est admet une solution forte unique et inversible son inverse Ψ_2

On suppose que :

$$d\Psi_2(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t;$$

Donc on recherche α et β.

On a :$\Phi_1\Psi_1 = Id$ donc $d(\Phi_2\Psi_2) = 0$,alors d'aprés l'integrale par partier $d'Ito$ on trouve :

$$d(\Phi_2\Psi_2) = (d\Phi_2)\Psi_2 + \Phi_2(d\Psi_2) + < d\Phi_2, d\Psi_2 >$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
d(\Phi_2\Psi_2) &= [(\Phi_2(t)b_x^*(t) + b_x\Phi_2(t) + \sigma_x(t)\Phi_2(t)\sigma_x^*(t))\,dt + (\Phi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_x\Phi_2(t))\,dB_t]\Psi_2\,(t) \\
&\quad + \Phi_2\,(t)\,[\alpha(t)dt + \beta(t)dB_t] + (\Phi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_x\Phi_2(t))\,\beta(t)dt \\
&= (\Phi_2(t)b_x^*(t)\Psi_2\,(t) + b_x\Phi_2(t)\Psi_2\,(t) + \sigma_x(t)\Phi_2(t)\sigma_x^*(t)\Psi_2\,(t) + \Phi_2\,(t)\,\alpha(t) \\
&\quad +\Phi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t)\beta(t) + \sigma_x\Phi_2(t)\beta(t))\,dt + (\Phi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t)\Psi_2\,(t) + \sigma_x\Phi_2(t)\Psi_2\,(t) + \Phi_2\,(t)\,\beta(t))\,dB_t
\end{aligned}
$$

Puisque $\Psi_1(t)\Phi_1(t) = Id$;alors $d(\Phi_1\Psi_1) = 0 = 0dt + 0dB_t$.

Alors :

$$
\begin{cases}
\Phi_2(t)b_x^*(t)\Psi_2\,(t) + b_x\Phi_2(t)\Psi_2\,(t) + \sigma_x(t)\Phi_2(t)\sigma_x^*(t)\Psi_2\,(t) + \Phi_2\,(t)\,\alpha(t) \\
\qquad +\Phi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t)\beta(t) + \sigma_x\Phi_2(t)\beta(t) = 0 \\
\qquad et \\
\Phi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t)\Psi_2\,(t) + \sigma_x\Phi_2(t)\Psi_2\,(t) + \Phi_2\,(t)\,\beta(t) = 0.
\end{cases}
$$

Donc :

$$\beta(t) = -\Psi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t) - \sigma_x\Psi_2\,(t)\,,$$

Remplace $\beta(t)$ par sa valeur on trouve :

$$\alpha(t) = -\Psi_2(t)b_x^*(t) - b_x\Psi_2(t) - \sigma_x(t)\Psi_2(t)\sigma_x^*(t) + (\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t))\Psi_2(t)(\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t)).$$

Alors :

$$
\begin{cases}
d\Psi_2(t) = ((\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t))\Psi_2(t)(\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t)) - \Psi_2(t)b_x^*(t) - b_x\Psi_2(t) - \sigma_x(t)\Psi_2(t)\sigma_x^*(t))dt \\
\qquad - (\Psi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_x\Psi_2\,(t))\,dB_t \\
\Psi_2(0) = Id
\end{cases}.
$$

En suivant la méthode de résolvant des équations différentielles ordinaire lineaires, on pose :$\eta_2(t) = \Psi_2(t)Z\,(t)$

On applique la formule $d\prime Ito$ on trouve :

$$\begin{aligned}
d\eta_2(t) &= (d\Psi_2(t))Z(t) + \Psi_2(t)d(Z(t)) + < d\Psi_2(t), d(Z(t)) > \\
&= [((\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t))\Psi_2(t)(\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t)) - \Psi_2(t)b_x^*(t) - b_x\Psi_2(t) \\
&- \sigma_x(t)\Psi_2(t)\sigma_x^*(t))dt - (\Psi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_x\Psi_2\,(t))\,dB_t]Z(t) \\
&+ \Psi_2(t)[(Z\,(t)\,b_x^*(t) + b_xZ(t) + \sigma_x(t)Z(t)\sigma_x^*(t) + A_\theta(t))\,dt + (Z\,(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_xZ(t) + B_\theta(t))dB_t] \\
&- (\Psi_2\,(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_x\Psi_2\,(t))\,(Z\,(t)\,\sigma_x^*(t) + \sigma_xZ(t) + B_\theta(t))dt \\
&= [\Psi_2(t)A_\theta(t) - \sigma_x^*(t)\Psi_2\,(t)\,B_\theta(t) - \sigma_x\Psi_2\,(t)\,B_\theta(t)]\,dt + B_\theta(t)\Psi_2\,(t)\,dB_t.
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
Y_2 &= \Phi_2^*(T)g_{xx}(X(T)) + \int_0^t \Phi_2^*(t)H_{xx}(t)dt \\
\xi_2(t) &= E[Y_2/\mathcal{F}_t] - \int_0^t \Phi_2^*(s)H_{xx}(s)ds.
\end{aligned}$$

On remarque que $E(\eta_2(T)\xi_2(T)) = E[\Phi_2^*(T)g_{xx}(T)\eta_2(T)] = E[g_{xx}(T)x_1(T)x_1(T)]$,car :

$$\begin{aligned}
E(\eta_1(T)\xi_2(T)) &= E(\eta_2(T)[E[Y_2/\mathcal{F}_t] - \int_0^t \Phi_1^*(t)h_x(s)ds]) \\
&= E(\eta_2(T)[Y_2 - \int_0^t \Phi_2^*(t)H_{xx}(s)ds]) \\
&= E(\eta_2(T)[\Phi_2^*(T)g_{xx}(X(T)) + \int_0^t \Phi_2^*(s)H_{xx}(s)ds - \int_0^t \Phi_2^*(t)H_{xx}(s)ds]) \\
&= E(\Phi_2^*(T)g_{xx}(X(T))\eta_2(T)).
\end{aligned}$$

Donc pour calculer $E[g_x(T)(X_1 + X_2)]$,il suffit de calculer $E[\eta_1(T)\xi_1(T)]$.

Puisque $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 < s \leq t), Y_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $E(Y_2/\mathcal{F}_t)$ est une martingale de carrée integrable ,alors d'aprés la décomposition $d\prime Ito$, on a :

$$E(Y_2/\mathcal{F}_t) = E(Y_2) + \int_0^t G_2(s)dB_s. \tag{3-4}$$

Où $G_1(s)$ est un processus adapté telle que :$E\int_0^T |G_2(s)|^2\,ds < \infty$

Donc on peut réecrire $\xi_2(T)$ comme suit :

$$\xi_2(t) = E(Y_2) + \int_0^t G_2(s)dB_s - \int_0^t \Phi_1^*(t)H_{xx}(s)ds.$$

Alors :

$$d\xi_2(t) = G_2(t)dB_s - \Phi_2^*(t)H_{xx}(t)dt$$

On applique la formule $d\prime Ito$ à $\eta_2(t)\xi_2(t)$ on obtient :

$$d(\eta_2(t)\xi_2(t)) = d(\eta_2(t))\xi_2(t) + d(\xi_2(t))\eta_2(t) + < d\eta_2, d\xi_2 > .$$

Alors :

$$\begin{aligned} d(\eta_2(t)\xi_2(t)) &= ([\Psi_2(t)A_\theta(t) - \sigma_x^*(t)\Psi_2\,(t)\,B_\theta(t) - \sigma_x\Psi_2\,(t)\,B_\theta(t)]\,dt + B_\theta(t)\Psi_2\,(t)\,dB_t)\,\xi_2(t) \\ &= \eta_2(t)\,(G_2(t)dB_s - \Phi_2^*(t)H_{xx}(t)dt) + (B_\theta(t)\Psi_2\,(t))\,(G_2(t))\,dt \end{aligned}$$

Donc par la simplification et l'intégrale puis l'éspérance on trouve :

$$\begin{aligned} E[g_{xx}(x\,(T))x_1(T)x_1(T)] &= E\,[\eta_2(T)\xi_2(T] \qquad (3\text{-}5) \\ &= E\int_0^T \left[Tr\left((\sigma^\theta(t) - \sigma(t))^* p_2(t)(\sigma^\theta(t) - \sigma(t))\right) - H_{xx}(t)X_1(t)X_1(t)\right] dt \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} p_2\,(t) &= \psi_2^*\,(t)\,\zeta_2\,(t) \qquad (3\text{-}6) \\ \eta_2(t) &= \Psi_2(t)Z\,(t) = \Psi_2(t)X_1X_1^* \end{aligned}$$

On remplace la relation $(3,5)$dans la relation $(2,13)$ on obtient :

$$o(\theta) \leq E[\int_0^T (H(t;x(t);u_\theta(t);p_1(t);Q_1(t)) - H(t;x(t);u(t);p_1(t);Q_1(t)))dt] \tag{3-7}$$
$$+\frac{1}{2}E\int_0^T \left[Tr\left((\sigma^\theta(t)-\sigma(t))^* p_2(t)(\sigma^\theta(t)-\sigma(t))\right)\right]dt$$

Cette formule s'appelle inéquation variationnelle du second ordre.

Si on utilise la définition du u_θ cette inéquation variationnelle devient :

$$o(\theta) \leq E[\int_\tau^{\tau+\theta} (H(t;x(t);v;p_1(t);Q_1(t)) - H(t;x(t);u(t);p_1(t);Q_1(t)))dt]$$
$$+\frac{1}{2}E\int_\tau^{\tau+\theta} [Tr((\sigma(t;x(t);v)-\sigma(t;x(t);u(t)))^* p_2(t)(\sigma(t;x(t);v)-\sigma(t;x(t);u(t)))]dt$$

quand θ tend vers à 0 on obtient :

$$0 \leq H(t;x(t);v;p_1(t);Q_1(t)) - H(t;x(t);u(t);p_1(t);Q_1(t)) \tag{3-8}$$
$$+\frac{1}{2}Tr((\sigma(t;x(t);v)-\sigma(t;x(t);u(t)))^* p_2(t)(\sigma(t;x(t);v)-\sigma(t;x(t);u(t)));$$

pour tout $v \in U; P.p.s, dt$ -$p.p$.

3.4 Processus et équations adjoints

Le processus p_2 s'appelle le processus adjoint du second ordre

Remarque 3.4.1 *la formule de processus adjoint du second ordre est calculé à partir de la relation ( ) et est donné par*

$$p_2(t) = E[\Psi_2^*(t)\Psi_2^*(T)g_x(x(T)/F_t] + \Psi_2^*(t)\int_t^T \Phi_2^*(s)H_{xx}(s;x(s);u(s);p_1(s);Q_1(s))\,ds \tag{3-9}$$

Si on applique la formule d'Ito aux processus adjoint $p_2 = \Psi_2^*(t)\,\zeta_2(t)$ on trouve

$$\begin{cases} -dp_2(t) = [b_x^*(t, x(t); u(t))\, p_2(t) + p_2(t) b_x(t, x(t); u(t)) + \sigma_x^*(t, x(t); u(t))\, p_2(t) \sigma_x^*(t, x(t); u(t)) \\ \sigma_x^*(t, x(t); u(t))\, Q_2(t) + Q_2(t)\sigma_x(t, x(t); u(t)) + H_{xx}(s; x(s); u(s); p_1(s); Q_1(s))]dt - Q_2(t)dB_t \quad ; \\ \qquad p_2(T) = g_{xx}[x(T)] \end{cases} \tag{3-10}$$

où est donnée par

$$Q_2(t) = \Psi^*(t) G_2(t) - p_2(t)\sigma_x(t; x(x); u(t)) - \sigma_x^*(t; x(x); u(t)) p_2(t)$$

Cette équation s'appelle l'équation adjoint du second ordre .

Et maintenant, nous résumons le résultat final de ce chapitre dans théorème du principe maximum généralisé suivent :

Théorème 3.4.1 *Si $(x; u)$ est une solution optimale pour notre problème ; alors il existe deux processus adjointe F_t-adaptés P_1 et P_2 donnés par* (2_12) *et* (3_6) *tels que la condition sur l' hamiltonnien soit vérifié.*

Remarque 3.4.2 *Si la diffusion ne contient pas de terme controle alors l'inéquation variationnelle donnée par :*

$$H(t; x(t); v; p(t)) \leq H(t; x(t); u(t); p(t)) \text{ ;pour tout } v \in U; P.p.s, dt - p.p.$$

Où le hamiltonnien H donné par

$$H(t; x(t); u(t); p(t)) = h(t; x(t); u(t)) + p(t)\, b(t; x(t); u(t)).$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux problème de contrôle optimal stochastique dans le cas ou l'ensemble des contrôles admissibles est non convexe ,en plus particulier aux aspect liés à l'estimation et aux conditions nécessaires d'optimalité. Nous avons établi un principe démontre pour des équations différentielles stochastiques ou les coefficients dérive et de diffusion sont contrôlées. Les problèmes de contrôle optimale stochastique et le cout comportent un terme singulier jouent un rôle important dans les problèmes financées et économiques .

Bibliographie

[1] **Monique Jeanblanc**.Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY.Septembre 2006.

[2] **Marc Troyanov**.Mesures et Intégration- EPFL - Octobre 2005.30 avril 2008.

[3] **J.Jacques Ruch et M.Line Chabano**l Espérance conditionnelle martingales 2012-2013.

[4] **Bahadi Aissa**.Cours de calcul stochastique master 1 probabilté statistique univarsité kasdi merbah ourgla 2018-2019.

[5] **Olivier Lévêque**.COURS DE PROBABILITES ET CALCUL STOCHASTIQUE.EPFL.Semestre d'hiver 2004-2005.

[6] **S.Bahlali, B. MEZERDI**, Approximation in stochastic optimal controle of dif fusion processus .Random and stochastic equation. Vol 8, N 4.365-372.(2000).

[7] **S..Bahlali, B.DJEHICHE And B. MEZERDI** , The relaxed stochastique maximum principale in singular optimal control of diffusion ;SIAM.J.Control optimal .Vol.46,lusse2,pp.427-444.(2007).

[8] Gardane.lemme de gronwall Analyse page 371.

[9] **S.Peng (1990)**, A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM Jour.Cont. Optim.28,N° 4, pp 966-979.

Annexe

Lemme 3.4.1 ***(Lemme de Gronwall)voire*** [**4**]*Soient $T > 0$ et u une fonction positive bornée sur $[0;T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a > 0, b > 0$ telles que pour tout $t \in [0;T]$, on a :*

$$u(t) \leq a + b\int_0^t u(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [0;T], \quad u(t) \leq a\int_0^t \exp(bs)\,ds$$

Lemme 3.4.2 ***(Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (BDG)*** *pour tout temps d'arrêt τ on a ,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0;T]}\left|\int_0^t f(s)dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right],$$

où C est une constante positive.

Proposition 3.4.1 ***(L'inégalité de Hölder) voire*** [**2**]*L'inégalité de Hölder dit que si $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Proposition 3.4.2 ***(l'inégalité de Cauchy-Schwartz)*** *C 'est une cas particuliée de l'inégalité de Holder pour $p = q = 2$;on a*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

Théorème 3.4.2 ***(Dévelopment de Taylor-Young)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n-1$-fois dérivable, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(|x-a|^n).$$

Théorème 3.4.3 ***(Dévelopment de Taylor avec reste intégral)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt.$$

Proposition 3.4.3 ***(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) voire*** [**3**]*Soit X une variable aléatoire. Pour tout $a > 0$,*

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Théorème 3.4.4 *Si $f(x;y)$est continue en tout point d'un rectangle $R = \{|x-x_0| < a \text{ et } |y-y_0| < b\}$, bornée sur $\mathbb{R}$ alors l'ED $y' = f(x,y)$ a une solution sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale $y(x_0) = y_0$. Cette solution est définie pour tout $|x-x_0| < \alpha$ telleque $\alpha = \min(a, b/k)$ avec $|f(x;y)| < k$ .Si de plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues et bornées sur $\mathbb{R}$, alors la solution est unique.*

Résumé

Dans ce travaille, nous avons étudié le principe du maximum en contrôle optimal stochastique gouverné par l'équation différentielle stochastique dans le cas où le coefficient de diffusion dépend de contrôle et le domaine des contrôles est non convexe, oǔ nous avons étudié l'estimation de solution du premier et second ordre, puis le principe du maximum de contrôle optimal et les conditions nécessaires d'optimalités .

Mots-clés : formule d'Itô, processus stochastique, l'équation différentielle stochastique, principe du maximum, contrôle optimale.

Abstract

In this work, we studied the principle of the maximum in optimal stochastic control governed by the stochastic differential equation in the case where the diffusion coefficient depend on control and the set of controls is non-convex, where we studied the estimation of solution of the first and second order, then the principle of the maximum of optimal control and the necessary conditions of optimalities.

Key word :Itô's formula, stochastic process, stochastic differential equation, maximum principle, optimal control

الملخص

في هذا العمل ، درسنا مبدأ الحد الأقصى في التحكم العشوائي الأمثل الذي تحكمه المعادلة التفاضلية العشوائية في الحالة التي يعتمد فيها معامل الانتشار على التحكم ومجال الضوابط غير محدب ، حيث درسنا تقدير حل من الدرجة الأولى والثانية ، ثم مبدأ الأقصى التحكم الأمثل والشروط اللازمة لتحققه.

الكلمات المفتاحية : صيغة إيتو – العملية العشوائية – معادلة تفاضلية عشوائية – المبدأ الأقصى – التحكم الأمثل .