



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière



DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Kherfi Om elkheir

Thème

Éléments finis inversés pour approcher un problème elliptique posé sur \mathbb{R}

Soutenu publiquement le : 29/09/2020

Devant le jury composé de :

D.r. Kouideri Mohamed	M.C.B. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
D.r. Azouz Salima	M.C.B. École Normale Supérieure - Ouargla	Examineur
D.r. Kaliche Keltoum	M.C.B. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2019/2020

Dédication

À qui Dieu a confié révérence À qui m'a appris à donner sans attendre mon cher père , que Dieu ait pitié de lui : * Younce *

À mon ange dans la vie, au sourire de la vie et au mystère de l'existence. Ma chère , mon Seigneur prolongera sa vie : * Sakina kherfi *

À ceux avec qui je connaissais le sens de la vie, mes sœurs bien-aimées : * Fatiha * Khoulode *
À mon cher grand -mère : * Sayihe *

À mes Grandes - père et mère : * baka * seada *

À tous mes oncles : * Ahemade * Djimo3i * Mehrez * Ali * Saide * Habibe * Mohamede *

À ma future famille, en particulier mon compagnon de la vie : * Nasreddine *

À chacune de mes tantes en particulier : * Nadjt * Halima * Samiha * Aicha * Zohra *

À la femme de mon oncle qui m'a aidé dans mon travail : * Mabroka *

Aux bourgeons de la vie et aux descendants de la famille : * Younce * Saide * Tamer * Taissire
* Afenane * Amegade * Nibale *

À toutes les femmes de mes oncles et aux enfants de leurs parents avec qui la vie est belle.

À mes amis et à mes proches et à tous ceux qui m'ont aidé à terminer cette mémoire.

Remerciements

Avant tout considération, je remercie Allah le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Tout d'abord, je remercie vivement notre encadreur Mlle. Keltoum Kaliche de m'avoir fourni ce sujet important en mathématiques et pour sa gentillesse ; son aide, ses conseils et sa disponibilité dans ce travail.

Je souhaite également de remercier nos professeurs de la Département de mathématiques pour tout le savoir qu'il nous ont donné. je profond remercie pour les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Table des matières

Dédication	I
Remerciements	II
NOTATIONS	VI
Introduction	1
1 Rappels sur les espaces de Sobolev avec poids	3
1.1 Notations et définitions	3
1.2 Les espace de Sobolev à poids	6
1.2.1 Définition l' espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$	6
1.2.2 propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$	6
1.3 Les espaces de traces	7
1.4 Inégalités de Hardy	8
1.5 Théorème de Lax-Milgram	9
2 Discrétisation du problème par les éléments finis inversés	11
2.1 Problème variationnelle	12
2.2 L'existence et l'unicité	13
2.3 Description de la méthode	17
2.3.1 L'espace approché	17
2.3.2 Estimation d'erreur	21

3 Quelques tests numériques	22
3.1 Fonctions de base	23
3.2 La matrice de rigidité	24
3.3 Tests de calcul	26

Conclusion

Références

Table des figures

2.1	Domaines Ω_0 et Ω_∞	17
2.2	Transforme T_1 à S_1	18
2.3	Illustration d'un maillage gradué de l'intervalle $] - 1, 1[$ pour $\mu = 1, 0.5, 0.2$. . .	20
3.1	Les solutions exacte, et approchée dans l'intervalle $[-50, 50]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 10, \gamma = 0.5$	27
3.2	Les solutions exacte, et approchée dans l'intervalle $[-6, 6]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 3, \gamma = 0.5$	28

NOTATIONS

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert.
- $\partial\Omega$: frontière de Ω .
- $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$: fermeture de Ω .
- $Supp u$: Support de u .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B, B'}$: produit de dualité de B, B' .
- V : espace de Hilbert avec le produit scalaire (\cdot, \cdot) .

Introduction

La plus part des phénomènes d'ingénierie peuvent être exprimées par des équations différentielles aux dérivées partielles formulé dans des domaines non bornés, comme dans l'électromagnétisme, la géophysique et la physique quantique. D'un point de vue mathématique, l'infinité du domaine géométrique complique la résolution numérique de tels équations.

Dans [5], l'auteur propose une méthode sans troncature pour résoudre tels problèmes. cette méthode s'appelle la méthode des éléments finis inversée. Elle repose sur la décomposition du domaine géométrique en deux parties, une partie bornée où on utilise les éléments finis classique et une partie non bornée qu'on peut la ramener à un domaine borné par une inversion adéquate. La méthode consiste de construire une approximation appropriée dans des espaces de Sobolev avec poids. Ces espaces permettent de décrire le comportement des fonctions à l'infini. Ils ont été très largement utilisés pour l'étude des problèmes elliptiques dans des domaines non bornés (voir [1]).

Dans ce travail, nous allons étudier l'implémentation de cette méthode pour résoudre une équation elliptique de second ordre de la forme

$$-\frac{d}{dx} \left(a(\cdot) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{où } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

La différence entre de cette méthodes et d'autre méthodes comme la méthode des frontières artificielles ou la méthode des éléments finis est qu'elle préserve l'infinité du domaine.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons des notations, définitions et propriétés des espaces de Sobolev avec poids.

Dans le deuxième chapitre, nous allons approcher la solution du problème (1) par la méthode des éléments finis inversés. Après avoir montré l'existence et l'unicité, une discrétisation du problème sera présentée. On termine ce chapitre par donner une estimation d'erreurs.

Dans le troisième chapitre, on va donner tout d'abord des détails sur le calcul des coefficients de la matrice de rigidité. Ensuite, nous exposons quelques résultats numériques pour montrer l'efficacité de la méthode.

Rappels sur les espaces de Sobolev avec poids

On expose dans ce chapitre les définitions ainsi les propriétés essentielles de la famille des espaces de Sobolev à poids que nous utiliserons tout au long de ce mémoire (voir[8]).

1.1 Notations et définitions

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), de frontière $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ régulière.

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point de \mathbb{R}^n , on note $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ la distance entre x et l'origine.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. On note :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Pour tout entier k , on note \mathbb{P}_k , l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k et $\mathring{\mathbb{P}}_k$, le sous-espace de \mathbb{P}_k formé par tous polynômes $p \in \mathring{\mathbb{P}}_k$ tels que $p(0) = 0$.

La notation $a(u) \lesssim b(u)$ où $a(u)$ et $b(u)$ sont des quantités qui dépendent d'une fonction u , signifie qu'il existe une constante strictement positive C indépendante de u , telle que $a(u) \leq Cb(u)$ pour tout fonction u .

**Définition 1** (*Exposants conjugués*)

Soit $1 \leq p, q < +\infty$. On dit que p et q sont des exposants conjugués si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Définition 2 (*Espace L^p*)

Soit $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurable tel que

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty.$$

et la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Définition 3 (*Espace L^∞*)

On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurable u telles que

$$\exists C > 0, \quad |u(x)| < C \quad p. p.t \text{ sur } \Omega.$$

de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u|.$$

Définition 4 (*Fonctions k fois différentiables*)

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , on définit l'ensemble des fonctions k fois différentiables dans Ω , à valeurs dans \mathbb{R} dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω par

$$C^k(\Omega) = \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}, k \geq 1.$$

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace de distributions.

Définition 5 (*Inclusion continue*)

Soit A et B deux espaces de Banach. On dit que A s'injecte de façon continue dans B , et on note $A \hookrightarrow B$ si :

(i) $A \subset B$.

(ii) $\exists c > 0 : \|u\|_A \leq c \|u\|_B$.

**Définition 6** (l'espace $W^{m,p}(\Omega)$)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque, p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$ et m un entier naturel positive. On définit l'espace de Sobolev :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in D'(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Cet espace est équipé de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Théorème 7 (Formule de Green)[8]

Soit ω une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \Omega} \omega(x) \nu_i ds$$

où ν_i la i -ème composante de la normale extérieure unité de Ω .

Corollaire :

Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial \Omega} uv \nu_i, \quad \forall i \in 1, \dots, N$$

Théorème 8 (de représentation de Riesz-Fréchet)

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in H'$ une forme linéaire continue sur H .

Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait $f(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle$. En d'autres termes :

$$\exists! y \in H, \quad \forall x \in H, \quad f(x) = \langle y, x \rangle$$



1.2 Les espace de Sobolev à poids

1.2.1 Définition l' espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Dans toute la suite, $\langle x \rangle$ désigne la fonction poids de base, définie par

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}.$$

Soient $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$. Pour tout domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^n , on définit l'espace de Sobolev à poids :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\lambda| \leq m, \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Cet espace est un espace de Banach équipé de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|\langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

et de la semi-norme :

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x \rangle^\alpha D^\lambda u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

Exemples

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \langle x \rangle^{-1} u, \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

$$W_1^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \langle x \rangle^{-1} u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \langle x \rangle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

1.2.2 propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Nous avons les propriétés fondamentales suivantes (voir[7]) :

- $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
- Les inclusions suivantes sont valables avec injections continues :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$$



- Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, l'application :

$$u \in W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \varphi u \in W^{m,p}(\Omega)$$

est linéaire continue.

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$, l'application :

$$u \in W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) \mapsto \langle x \rangle^{\beta} u \in W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

- Pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$ avec $|\lambda| \leq m$, l'application :

$$u \in W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) \mapsto D^{\lambda} u \in W_{\alpha}^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est linéaire et continue.

- On a pour tout entier l dans \mathbb{Z} avec $l < m - \alpha - \frac{n}{p}$, $\mathbb{P}_l \subset W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
- l'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$.

Nous notons $\dot{W}_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ et on note $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$ son dual. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a $\dot{W}_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Les espaces de traces

Définition 9 [2]

Pour $1 < p < +\infty, s \in]0, 1[$, on pose

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^{-s} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \\ \int_0^{+\infty} t^{-1-sp} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x + te_i) - u(x)|^p dx dt < \infty, \forall i = 1, \dots, n\}$$

où $e_i, i = 1, 2, \dots, n$, désignent les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Maintenant, pour tout réel $s > 0$, on définit l'espace

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in W_{[s]-s}^{[s],p}(\mathbb{R}^n) \mid \forall |\lambda| = [s], D^{\lambda} u \in W_0^{s-[s],p}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Étant donné un réel α , on pose

$$W_{\alpha}^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^{\alpha} u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)\}.$$

**Théorème 10** [2]

Soit $m > 1$ un entier et α un réel. Il existe une application linéaire et continue $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ tels que

- 1) Pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$, $\gamma u = \left(u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}}(x', 0) \right)$ avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.
- 2) γ est une application surjective.
- 3) $\gamma^{-1}(0) = \mathring{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

1.4 Inégalités de Hardy

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement important dans la démonstration de certains équivalence de norme dans les espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

Lemme 1 [1] :

Soient $1 < p < +\infty$, et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq -1$. Soit f une fonction mesurable positive sur $[0, +\infty[$ tel que

$$\int_0^\infty t^{\beta+p} |f(t)|^p dt < +\infty.$$

Soit

$$F(t) = \begin{cases} -\int_t^{+\infty} f(t) dt, & \text{si } \beta > -1, \\ \int_0^t f(t) dt, & \text{si } \beta < -1. \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} t^\beta |F(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{|\beta+1|} \right)^p \int_0^{+\infty} t^{p+\beta} |f(t)|^p dt. \quad (1.1)$$

Un conséquence intéressante de l'inégalité de Hardy, le théorème suivant

Théorème 11 Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ou $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$ avec ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Soient $m \geq 1$ un entier et $\alpha, p \in]1, +\infty[$ deux réels tels que $\alpha + \frac{n}{p} \notin \{1, \dots, m\}$. On pose $q' = \min(m-1, [m - \alpha - (n/p)])$.

Alors :

- (1) la semi-norme $|\cdot|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$ définit une norme sur l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)/\mathbb{P}_{q'}$ équivalente à la norme quotient.
- (2) la semi-norme $|\cdot|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$ est une norme sur l'espace $\|\cdot\|_{\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)}$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$; il existe une constante $C > 0$ tels que

$$\forall u \in \mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega), \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C |u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}.$$



1.5 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram (voir [8]) est un théorème très important, sa démonstration est basée sur le théorème de représentation de Riesz (voir [8]). Considérons un problème variationnel sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.2)$$

Théorème 12 (*Lax-Milgram*)

Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$. On suppose que

(i) la forme bilinéaire a est continue,

$$\exists \beta > 0, \forall (u, v) \in V \times V, |a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V,$$

(ii) la forme bilinéaire a est coercive,

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2,$$

(iii) la forme linéaire F est continue,

$$\forall v \in V, |F(v)| \leq \|F\| \|v\|_V.$$

Alors, il existe une unique u dans V , le problème (1.1) satisfait l'estimation a priori suivante

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|}{\alpha}.$$

Méthode de Galerkin

Considérons un problème variationnel sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

où V est un espace de Sobolev avec poids.

On suppose de plus que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Alors, la méthode de Galerkin (voir [3]) consiste à remplacer l'espace par un espace vectoriel V_h de dimension finie et à résoudre le problème approché

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$



où $V_h \subset V$ est un sous-espace de V de dimension fini.

Qui est en générale plus facile que de résoudre directement en dimension infinie.

Discrétisation du problème par les éléments finis inversés

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation suivante :

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx}(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$

en utilisant de la méthode des éléments finis inversé. Après avoir donner la formulation variationnelle associé a ce problème dans l'espace $W_0^1(\Omega)$. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème de Lax-Milgram. Ensuite, nous construirons l'espace discret où un maillage gradué sera utilisé dans la partie non bornée. Finalement, nous donnons une estimation de l'erreur.



2.1 Problème variationnelle

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'équation elliptique suivante :

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx}(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.1)$$

avec $\Omega = \mathbb{R}$, $a(x), b(x), c(x)$ sont des fonctions variables et f est une fonction donnée.

On cherche une solution de (2.1) dans l'espace $W_0^1(\mathbb{R})$ dont ses fonctions vérifient :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x)|^2}{x^2 + 1} dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx < +\infty.$$

On cherche une formulation variationnelle de (2.1), en multipliant l'équation (2.1) par une fonction test $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et en intégrant sur \mathbb{R} , on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}} (a(x)u'(x))'v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx.$$

et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_{\mathbb{R}} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx.$$

D'après la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $W_0^1(\mathbb{R})$ alors, la formulation faible s'écrit sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W_0^1(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (2.2)$$

avec a une forme bilinéaire, définit par :

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}} a(x) u'(x)v'(x)dx + \int_{\mathbb{R}} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} c(x)u(x)v(x)dx$$

et la forme linéaire

$$L(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}).$$

Nous supposons les hypothèses suivantes :

(H_1) $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ et pour une constante $a_0 > 0$

$$a(x) \geq a_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

(H_2) $b \in W_2^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et $c \in W_2^{0,\infty}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire qu'il existe trois constantes b_1, b_2 et c_1

$$|b(x)| \leq \frac{b_1}{\langle x \rangle}, \quad |b'(x)| \leq \frac{b_2}{\langle x \rangle^2}, \quad |c(x)| \leq \frac{c_1}{\langle x \rangle^2}, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$



$(H_3) f \in W_0^{-1}(\mathbb{R})$.

La dernière hypothèse (H_3) est notamment valable lorsque $f \in W_1^0(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 + 1) |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Proposition 13 *Sous les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) , on a l'équivalence suivante, une fonction $u \in W_0^1(\mathbb{R})$ est une solution de (2.1) si et seulement si u est une solution de (2.2).*

Preuve : La première implication $(2.2) \Rightarrow (2.1)$ est déjà fait en dessus. Nous monterons maintenant la réciproque. On a

$$\int_{\mathbb{R}} a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_{\mathbb{R}} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}).$$

Si $u \in W_0^1(\mathbb{R})$ vérifie (2.2). Comme $D(\mathbb{R}) \subset W_0^1(\mathbb{R})$, par l'utilisation l'intégration par parties, on obtient : pour tout $v \in D(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) - f(x) \right) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in D(\mathbb{R})$$

d'où

$$-\frac{d}{dx} \left(-a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) - f(x) = 0 \quad \text{p.p sur } \mathbb{R}$$

et donc

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{p.p sur } \mathbb{R}$$

■

2.2 L'existence et l'unicité

pour montrer l'existence et l'unicité, on a besoin l'inégalité de Hardy suivante :

Lemme 2 *Il existe une constante $\pi_0 > 0$, telle que :*

$$\forall u \in W_0^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx \geq \pi_0 \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2 + 1} dx.$$

On suppose que

(H_4) Il existe une constante $\pi'_0 < \pi_0$, tel que :

$$c(x) - \frac{b'(x)}{2} \geq -\pi'_0 \frac{a_0}{\langle x \rangle^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Proposition 14 *Supposons que les hypothèses $(H_1), (H_2), (H_3)$ et (H_4) sont valides. Alors, l'équation (2.1) admet une solution unique $u \in W_0^1(\Omega)$ et de plus,*

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\mathbb{R})}$$

Preuve On applique le théorème de Lax-Milgram.

Montrons tout d'abord la continuité de la forme linéaire $L(\cdot)$:

On a pour tout $v \in W_0^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle f(x) \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx \right| \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|v(x)|^2}{\langle x \rangle} dx \right)^{1/2} \\ &\leq c_1 \| \langle x \rangle^{-1} v \|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|v\|_{W_0^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Donc $L(\cdot)$ est continue sur $W_0^1(\mathbb{R})$.

Maintenant, on montre la continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, on intègre par parties le deuxième terme, on trouve :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\mathbb{R}} a(x)u'(x)v'(x)dx - \int_{\mathbb{R}} b(x)v'(x)u(x)dx - \int_{\mathbb{R}} b'(x)u(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} c(x)u(x)v(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_{\mathbb{R}} (c(x) - b'(x))u(x)v(x)dx - \int_{\mathbb{R}} b(x)v'(x)u(x)dx. \end{aligned}$$

donc

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} a(x)u'(x)v'(x)dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} (c(x) - b'(x))u(x)v(x)dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} b(x)v'(x)u(x)dx \right|$$

De l'hypothèse (H_1) , on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} a(x)u'(x)v'(x)dx \right| &\leq \|a(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |u'(x)v'(x)|dx \\ &\leq a_1 \|u'(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v'(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$



et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (H_2) on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} (c(x) - b'(x))u(x)v(x)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle^2 (c(x) + b'(x)) \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle^2 (|c(x)| + |b'(x)|) \left| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right| \left| \frac{v(x)}{\langle x \rangle} \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (c_1 + b_2) \left| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right| \left| \frac{v(x)}{\langle x \rangle} \right| dx \\
&\leq (c_1 + b_2) \|\langle x \rangle^{-1} u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\langle x \rangle^{-1} v\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} b(x)u(x)v'(x)dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |b(x)u(x)v'(x)| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle |b(x)| \left| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right| |v'(x)| dx \\
&\leq b_1 \|\langle x \rangle^{-1} u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq a_1 \|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \|v\|_{W_0^1(\mathbb{R})} + b_1 \|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \|v\|_{W_0^1(\mathbb{R})} + (c_1 + b_2) \|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \|v\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \\
|a(u, v)| &\leq \max(a_1, c_1 + b_2, b_1) \|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \|v\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \\
|a(u, v)| &\leq C \|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \|v\|_{W_0^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

d'où la continuité de $a(., .)$.

Il reste de montrer la coercivité de la forme bilinéaire $a(., .)$. De l'inégalité de Hardy et des hypothèses (H_4) et (H_1) , on obtient

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_{\mathbb{R}} a(x)v'(x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} b(x)v'(x)v(x) dx + \int_{\mathbb{R}} c(x)v(x)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} a(x)|v'(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left[c(x) - \frac{b'(x)}{2} \right] |v(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} a(x)|v'(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle^2 \left[c(x) - \frac{b'(x)}{2} \right] \frac{v(x)^2}{\langle x \rangle^2} dx \\
&\geq a_0 \left(1 - \frac{\pi'_0}{\pi_0} \right) \int_{\mathbb{R}} |v'(x)|^2 dx \\
&\geq C \|v\|_{W_0^1(\mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

donc $a(., .)$ est coercive.

Alors, toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, donc le problème (2.2)



admet une solution unique dans $W_0^1(\mathbb{R})$.

De plus, son unique solution satisfait

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\mathbb{R})}. \quad (2.3)$$

En effet, l'estimation (2.3) est s'obtient en prenant $v = u$ dans (2.2) et en utilisant la continuité de la forme L et la coercivité de la forme bilinéaire a :

$$C\|u\|_{W_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \|f\|_{W_0^{-1}(\mathbb{R})}\|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})}$$

Alors

$$C\|u\|_{W_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{W_0^{-1}(\mathbb{R})}$$

Donc

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\mathbb{R})} \quad (2.4)$$

■

2.3 Description de la méthode

2.3.1 L'espace approché

On décompose l'espace Ω en deux sous-domaines Ω_0 et Ω_∞ tel que

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_\infty$$

avec

Ω_0 est un domaine borné qu'on le choisit ici $\Omega_0 =]-R, R[$ avec $R > 0$, une paramètre fixé.

Ω_∞ est un domaine non borné, qui représente le domaine extérieur de Ω_0 dans \mathbb{R} où on le décompose en sous-domaines T_1 et T_2 tel que

$$\Omega_\infty = T_1 \cup T_2$$

avec $T_1 =]R, +\infty[$ et $T_2 =]-\infty, -R[$

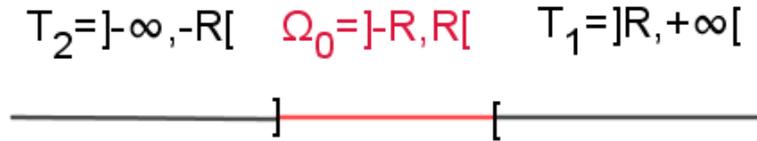


FIGURE 2.1 – Domaines Ω_0 et Ω_∞

Nous considérons l'application d'inversion

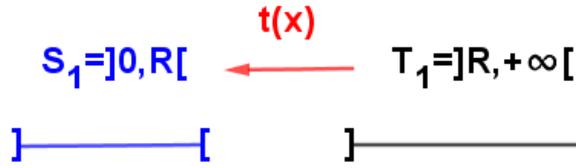
$$x \mapsto t(x) = \frac{R^2}{x} \quad (2.5)$$

Qui transforme chaque sous-domaine non borné $T_i (i = 1, 2)$ en sous-domaine borné S_i .

On pose

$$\hat{\Omega} = (\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2) \setminus \{0\}$$

avec $S_1 =]0, R[$ et $S_2 =]-R, 0[$


 FIGURE 2.2 – Transforme T_1 à S_1

Étant donné une fonction w définie sur Ω_∞ , nous désignons par \hat{w} la fonction définie sur $\hat{\Omega}$. Par

$$\hat{w}(x) = \left(\frac{R}{x}\right)^\gamma w(t(x)), \quad \forall x \in \hat{\Omega}. \quad (2.6)$$

où γ est un paramètre réel fixé.

Nous devons utiliser ultérieurement de nouveau espace. Étant donné $0 \leq m$ et $p \in [1, +\infty[$, on note $V^{m,p}$ l'espace composé des fonctions satisfaisant

$$\forall k \leq m, |x|^{\theta+k-m} u^{(k)} \in L^p(\hat{\Omega}).$$

muni de norme

$$\|u\|_{V_\theta^{m,p}(\hat{\Omega})} = \left(\sum_{k \leq m} \int_{\hat{\Omega}} |x|^{(\theta+k-m)p} |u^{(k)}|^p dx \right)^{1/p}.$$

Lemme 3 Soit $w \in W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$. On a $\hat{w} \in V_\delta^{m,p}(\hat{\Omega})$ avec

$$\delta = \gamma + 2m - \alpha - 2/p.$$

Dans le domaine Ω_0 , nous utilisons des éléments finis usuels. On considère une partition habituelle $x_0 = -R < x_1 < \dots < x_N = R$ de Ω_0 .

On pose

$$h = \max_{i \in I} |x_{i+1} - x_i| \quad \text{et} \quad \Delta_i =]x_i, x_{i+1}[\quad \text{pour} \quad i \in I, \quad \text{où} \quad I = \{0, \dots, N-1\}.$$

Sur le domaine $\hat{\Omega}$, on construit une partition graduée comme suit



Définition 15 *Étant donné un nombre réel $\mu(0 < \mu \leq 1)$, on dit qu'une famille de partition $((\hat{x}_i)_{1 \leq i \leq M})$, $\hat{x}_0 = a < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M = b$, de l'intervalle $]a, b[$ est μ -graduée s'il existe trois constantes $\kappa_i > 0, 1 \leq i \leq 3$ ne dépendant pas de la partition, telle que*

$$\kappa_1 \hat{h}^{1/\mu} \leq \hat{x}_1 \leq \kappa_2 \hat{h}^{1/\mu}$$

$$\forall 1 \leq i \leq M - 1, \quad \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i \leq \kappa_3 \hat{h} \hat{x}_i^{1-\mu}$$

où $\hat{h} = \max_{1 \leq i \leq M-1} (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)$.

Soit $\hat{x}_0 = 0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M = R$, une partition μ graduée de l'intervalle S_1 ;

et $\hat{x}_0 = -R < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M = 0$, une partition μ graduée de l'intervalle S_2 .

Un moyen de construire une famille de mailles μ -graduée est comme suit, considérons la suite finie croissante $(\theta_i^*)_{1 \leq i \leq M}$ définie par

$$\theta_1^* = 1, \theta_{i+1}^* = \theta_i^* + (\theta_i^*)^{1-\mu} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq M.$$

Alors la partition de $S_2 =]-R, 0[$ est donnée par :

$$\hat{x}_i = -\frac{\theta_i^*}{\theta_M^*} R, \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq M.$$

et la partition de $S_1 =]0, R[$ est donnée par :

$$\hat{x}_i = \frac{\theta_i^*}{\theta_M^*} R, \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq M.$$

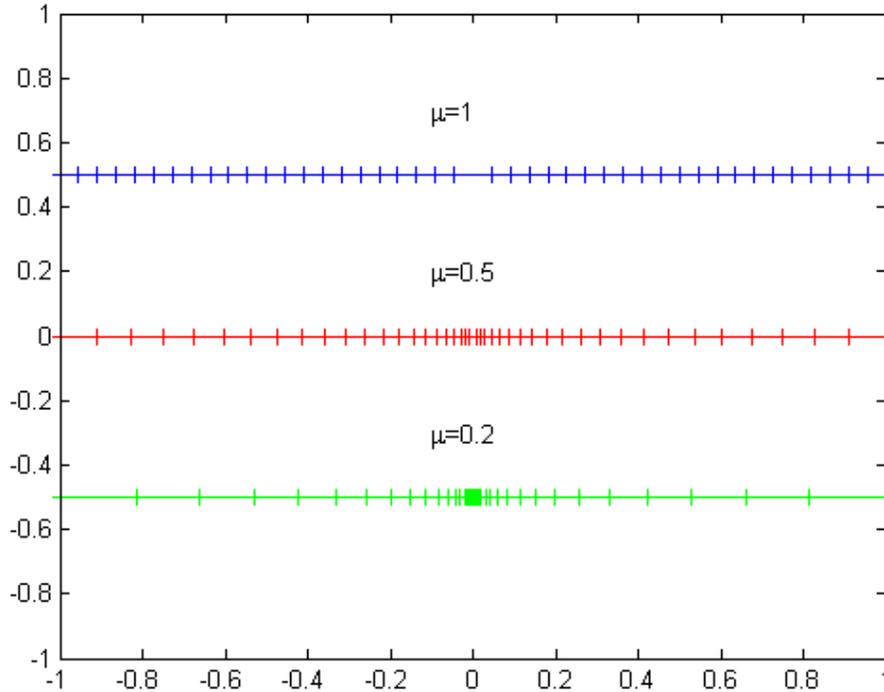


FIGURE 2.3 – Illustration d'un maillage gradué de l'intervalle $] - 1, 1[$ pour $\mu = 1, 0.5, 0.2$

Considérons maintenant une famille μ - graduée $(\hat{x}_i)_{1 \leq i \leq 2M}$ de $\hat{\Omega}$.

Soit $J = \{0, 1, \dots, M - 1\}$ et $\hat{\Delta}_i =]\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}[$, pour $i \in J$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'espace discret $W_h(\Omega)$ qui approche l'espace $W_0^1(\Omega)$ par

$$W_h(\Omega) = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_{\Delta_i} \in \mathbb{P}_k(\Delta_i), \forall i \in I \right. \\ \left. \hat{v}|_{\hat{\Delta}_i} \in \mathbb{P}_k(\hat{\Delta}_i), \forall i \in J, \quad \text{et} \quad \hat{v}(0) = 0 \right\}$$

Observez que les fonctions de $W_h(\Omega)$ dans Ω_∞ ne utilise pas des éléments finis usuelle, on utilise des éléments inversés.

Avant d'énoncer des résultats d'approximation, observons que l'espace $W_h(\Omega)$ dépend principalement du paramètre de discrétisation h , supposé tendre à zéro, et de trois paramètres des régularités R , γ et μ convenablement fixés. De plus, nous avons



Lemme 4 *Supposons que $\gamma > \frac{-3}{2}$. Alors*

$$W_h(\Omega) \subset W_0^1(\Omega) \quad (2.7)$$

Donc supposons désormais que

$$\gamma > \frac{-3}{2}. \quad (2.8)$$

Alors le problème approché associé au problème variationnel est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in W_h(\Omega) \end{cases} \quad (2.9)$$

admet une solution unique.

2.3.2 Estimation d'erreur

Théorème 16 (voir[6]) : *Supposons que les hypothèses de la proposition (5) soient vérifiées.*

Supposons aussi que $u \in W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega)$ pour certains vrais $\eta > 0$ et que

$$\eta - \frac{3}{2} < \gamma < \eta - \frac{1}{2}$$

Alors, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|u - u_h\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + \hat{h}^{k \min(\mu^*, \mu)/\mu} \|u\|_{W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega_\infty)}$$

tel que $\mu^ = \frac{\eta}{k} > 0$.*

La preuve détaillé de ce théorème se trouve dans [6]. L'idée d'approximation d'une fonction définie sur un domaine non borné ne dépend pas seulement de sa régularité mais aussi de sa décroissance à l'infini.

Quelques tests numériques

Le but de ce chapitre est double. Tout d'abord, nous donnons quelques détails sur la structure et le calcul de la matrice de rigidité. Deuxièmement, nous présentons des résultats numériques qui confirment la convergence de la méthode et ses performances.



3.1 Fonctions de base

Soit $w_i, i \in I$ les fonctions de base des éléments finis habituelles définies sur Ω et satisfaisant :

pour tout $i \in I$

- $w_i \in W_h(\Omega)$,
- $w_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in I$,
- $w_i(x_N) = 0$ De même, on définit, la deuxième famille de fonctions de base $(w_i^*)_{i \in J}$ comme

suit :

- $w_i^* \in W_h(\Omega)$,
- $\hat{w}_i^*(\hat{x}_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in I$,
- $\hat{w}_i^*(\hat{x}_M) = 0$.

La dernière fonction de base notée ici par w_N , est mixte, son support s'étend aux régions MEF et MEFI c'est la fonction unique de $W_h(\Omega)$ Satisfaisant

- $w_N(\hat{x}_N) = \hat{w}_N(\hat{x}_M) = 1$,
- $w_N(x_j) = 0$ pour $0 \leq j \leq N - 1$.
- $\hat{w}_N(\hat{x}_j) = 0$, $0 \leq j \leq M - 1$. On peut facilement prouver que la famille composée des fonctions

$(w_i)_{0 \leq i \leq N, (i) \neq 0}$, $(w_i^*)_{0 \leq i \leq M-1, (i) \neq (0)}$ et w_N est une base de $W_h(\Omega)$.

Il en résulte que

$$\dim W_h(\Omega) = (N + M) - 1. \quad (3.1)$$

Un élément $v_h \in W_h(\Omega)$ se décompose sous la forme

$$v_h = \sum_{i=1}^N v_h(x_i) w_i + \sum_{i=1}^{M-1} \hat{v}_h(\hat{x}_i) w_i^*$$

On note $(\psi_m)_{1 \leq m \leq d}$ avec $d = (N + M) - 1$ la base de W_h telle que la restriction de ψ_i sur Ω_0 donne w_i et sa restriction sur Ω_∞ donne w_i^* .



Proposition 17 *Supposons que les hypothèses $(H_1), (H_2)$ et (H_3) sont vérifiées. Alors, le problème approché (2.9) équivaut à un système linéaire de la forme*

$$AU = B. \quad (3.2)$$

avec $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ et $B = (B_j)_{1 \leq j \leq N}$

Preuve On a

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

et comme

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \psi_i,$$

Alors

$$a\left(\sum_{i=1}^N u_i \psi_i, v_h\right) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

On choisit $v_h = \psi_j$, comme a est bilinéaire alors

$$\sum_{i=1}^N u_i a(\psi_i, \psi_j) = l(\psi_j), \quad \forall j \in 1, \dots, N \quad (3.3)$$

Donc, le problème (3.3) s'écrit

$$AU = B.$$

avec

$$A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A_{i,j} = a(\psi_i, \psi_j),$$

$$B = (B_j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^n, \quad B_j = l(\psi_j),$$

et $U = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^n$.

■

3.2 La matrice de rigidité

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment calculer les coefficients de la matrice de rigidité :

$$A_{i,j} = a(\psi_i, \psi_j) = a(w_i, w_j) + a(w_i^*, w_j^*).$$



Les coefficients $a(w_i, w_j)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} a(w_i, w_j) &= \int_{\Omega_0} a(x)w_i'(x)w_j'(x)dx - \int_{\Omega_0} b(x)w_i'(x)w_j(x)dx + \int_{\Omega_0} c(x)w_i(x)w_j(x)dx \\ &= \sum_{l=1}^{N-1} \int_{\Delta_l} a(x)w_i'(x)w_j'(x)dx - \sum_{l=1}^{N-1} \int_{\Delta_l} b(x)w_i'(x)w_j(x)dx + \sum_{l=1}^{N-1} \int_{\Delta_l} c(x)w_i(x)w_j(x)dx, \end{aligned}$$

et les coefficients $a(w_i^*, w_j^*)$ s'écrivent :

$$a(w_i^*, w_j^*) = \int_{\Omega_\infty} a(x)w_i^{*\prime}(x)w_j^{*\prime}(x)dx - \int_{\Omega_\infty} b(x)w_i^{*\prime}(x)w_j^*(x)dx + \int_{\Omega_\infty} c(x)w_i^*(x)w_j^*(x)dx.$$

On pose

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_\infty} a(x)w_i^{*\prime}(x)w_j^{*\prime}(x)dx, \\ I_2 &= \int_{\Omega_\infty} b(x)w_i^{*\prime}(x)w_j^*(x)dx, \\ I_3 &= \int_{\Omega_\infty} c(x)w_i^*(x)w_j^*(x)dx. \end{aligned}$$

On pose $t(s) = x$ donc $dx = -\frac{R^2}{s^2}ds$.

On a

$$\widehat{w}^*(s) = \left(\frac{R}{s}\right)^\gamma w^*(t(s)) \implies w^*(t(s)) = \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}^*(s), \quad \forall s \in \widehat{\Omega}. \quad (3.4)$$

On dérive les deux coté, on trouve :

$$\begin{aligned} (w^*(t(s)))' &= \left(\left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}^*(s)\right)' \\ - \left(\frac{R}{s}\right)^2 w^{*\prime}(t(s)) &= \frac{\gamma}{R} \left(\frac{s}{R}\right)^{\gamma-1} \widehat{w}^*(s) + \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}^{*\prime}(s) \\ - \left(\frac{R}{s}\right)^2 w^{*\prime}(t(s)) &= \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left(\frac{\gamma}{s} \widehat{w}^*(s) + \widehat{w}^{*\prime}(s)\right) \\ w^{*\prime}(t(s)) &= - \left(\frac{s}{R}\right)^2 \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left(\frac{\gamma}{s} \widehat{w}^*(s) + \widehat{w}^{*\prime}(s)\right). \end{aligned}$$

On utilise un changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\widehat{\Omega}} a(t(s))w_i^{*\prime}(t(s))w_j^{*\prime}(t(s)) \left(-\frac{R^2}{s^2}\right) ds \\ &= \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\widehat{\Delta}_l} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left(-\frac{s^2}{R^2}\right) \left(\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_i^*(s) + \widehat{w}_i^{*\prime}(s)\right) \left(-\frac{s^2}{R^2}\right) \left(\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_j^*(s) + \widehat{w}_j^{*\prime}(s)\right) \left(-\frac{R^2}{s^2}\right) ds \\ &= \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\widehat{\Delta}_l} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left(-\frac{s^2}{R^2}\right) \left(\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_i^*(s) + \widehat{w}_i^{*\prime}(s)\right) \left(\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_j^*(s) + \widehat{w}_j^{*\prime}(s)\right) ds \\ &= - \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\widehat{\Delta}_l} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left(\frac{\gamma}{R} \widehat{w}_i^*(s) + \frac{s}{R} \widehat{w}_i^{*\prime}(s)\right) \left(\frac{\gamma}{R} \widehat{w}_j^*(s) + \frac{s}{R} \widehat{w}_j^{*\prime}(s)\right) ds \end{aligned}$$



De même, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\hat{\Omega}} b(t(s)) w_i^{*'}(t(s)) w_j^*(t(s)) \left(-\frac{R^2}{s^2} \right) ds \\
&= \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_l} b(t(s)) \left(\frac{s}{R} \right)^\gamma \left(-\frac{s^2}{R^2} \right) \left(\frac{\gamma}{s} \hat{w}_i^*(s) + \hat{w}_i^{*'}(s) \right) \left(\frac{s}{R} \right)^\gamma \hat{w}_j^*(s) \left(-\frac{R^2}{s^2} \right) ds \\
&= \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_l} b(t(s)) \left(\frac{s}{R} \right)^{2\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{R} \hat{w}_i^*(s) + \frac{s}{R} \hat{w}_i^{*'}(s) \right) \hat{w}_j^*(s) ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\hat{\Omega}} c(t(s)) w_i^*(t(s)) w_j^*(t(s)) \left(-\frac{R^2}{s^2} \right) ds \\
&= \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_l} c(t(s)) \left(\frac{s}{R} \right)^{2\gamma} \hat{w}_i^*(s) \hat{w}_j^*(s) \left(-\frac{R^2}{s^2} \right) ds \\
&= - \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_l} c(t(s)) \left(\frac{s}{R} \right)^{2\gamma-2} \hat{w}_i^*(s) \hat{w}_j^*(s) ds
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A(w_i^*, w_j^*) &= I_1 + I_2 + I_3 \\
&= - \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_l} a(t(s)) \left(\frac{s}{R} \right)^{2\gamma} \left(\frac{\gamma}{R} \hat{w}_i^*(s) + \frac{s}{R} \hat{w}_i^{*'}(s) \right) \left(\frac{\gamma}{R} \hat{w}_j^*(s) + \frac{s}{R} \hat{w}_j^{*'}(s) \right) ds \\
&\quad + \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_l} b(t(s)) \left(\frac{s}{R} \right)^{2\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{R} \hat{w}_i^*(s) + \frac{s}{R} \hat{w}_i^{*'}(s) \right) \hat{w}_j^*(s) ds \\
&\quad - \sum_{l=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_l} c(t(s)) \left(\frac{s}{R} \right)^{2\gamma-2} \hat{w}_i^*(s) \hat{w}_j^*(s) ds.
\end{aligned}$$

En pratique, on peut utiliser la formule quadrature de Gauss – Lobatto (voir [8]) pour calculer les intégrales sur les intervalles $\hat{\Delta}_l$.

3.3 Tests de calcul

L'objectif ici est d'afficher quelques résultats numériques obtenus avec un code de calcul écrit en matlab où les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1 ont été utilisés à la fois dans les régions MEF et MEFI. Le domaine considéré est l'espace tout entier $\Omega = \mathbb{R}$.

Le nombre de points équidistants discrétisés est N dans $\Omega_0 =]-R, R[$ et M dans $\hat{\Omega}$.

Dans ce test on prend $M = 2N$.

Exemple 1 Un problème de Dirichlet avec des coefficients constants.

Nous considérons le problème (2.1) lorsque

$$a(x) = 1, b(x) = 0, c(x) = 0.$$

La fonction f est choisit de telle sorte que la solution exact est donnée par :

$$u(x) = \frac{(x + 1)}{(1 + (x - 1)^2)^{1/2}}.$$

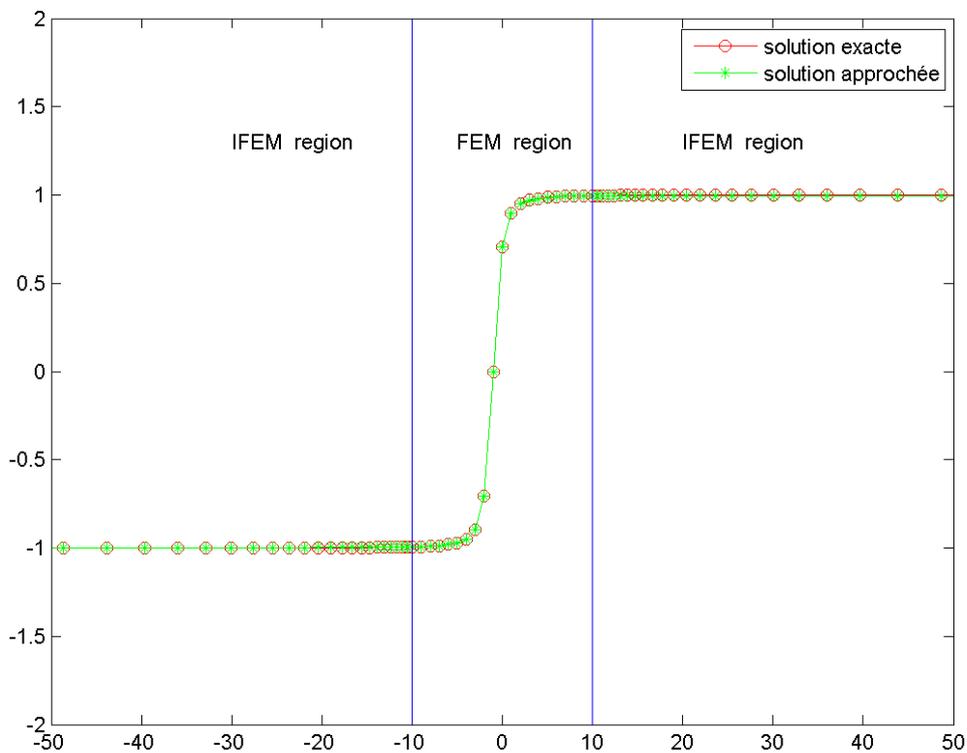


FIGURE 3.1 – Les solutions exacte, et approchée dans l'intervalle $[-50, 50]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 10$, $\gamma = 0.5$.

Exemple2 Un problème de Dirichlet avec des coefficients les variables .

Nous considérons le problème(2.1) avec

$$a(x) = 1 + \frac{\sin(20(x + 1))}{5}, b(x) = 0, c(x) = 0.$$

La fonction f est choisit de telle sorte que la solution exact est donnée par :

$$u(x) = \frac{\sin(\pi(x + 1))}{(1 + (x - 1)^2)^{5/2}}.$$

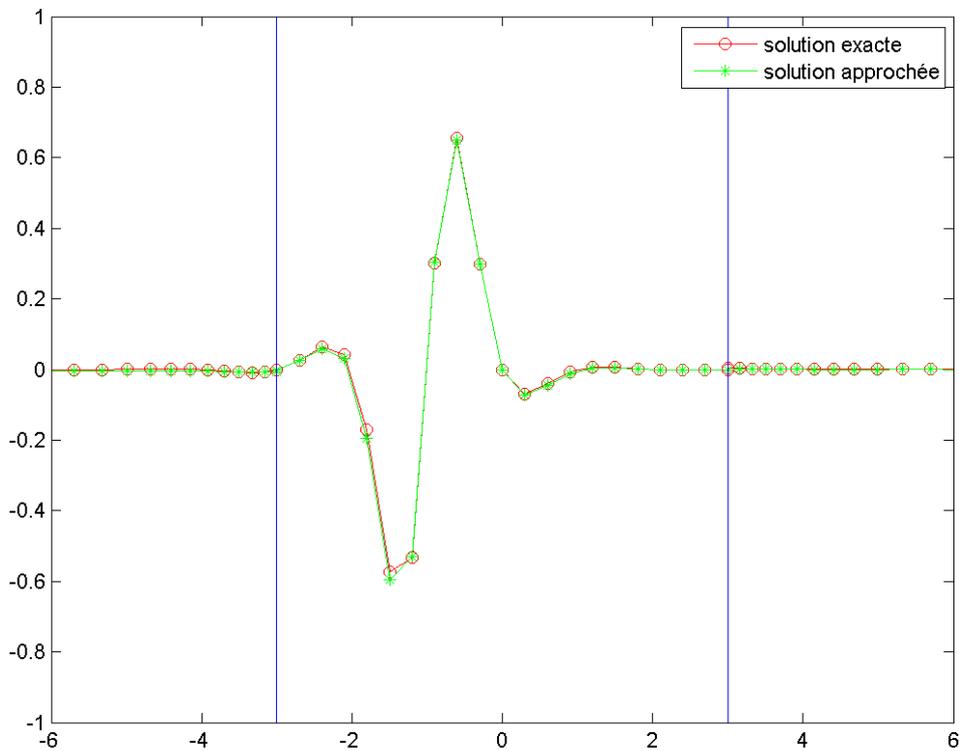


FIGURE 3.2 – Les solutions exacte, et approchée dans l'intervalle $[-6, 6]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 3$, $\gamma = 0.5$.



Code de calcul

Les étapes principales que nous avons suivit dans notre code de calcul sont :

1. Déclaration des paramètres suivantes :

- R =la taille de l'intervalle borné.
- N =le nombre des points de discrétisation dans $\Omega_0 =] - R, R[$
- M =le nombre des points de discrétisation dans chaque intervalle $T_i, i = 1, 2$.
- μ =paramètre de gradation du maillage.
- γ = l'exposant de la transformation de Ω_∞ à $\hat{\Omega}$.

2. Construction du maillage :

- Sur Ω_0 = maillage uniforme,
- Sur T_1 et T_2 = maillage gradué.

3. Calcul de la matrice A et le second membre B.

4. Résolution du système linéaire.

5. Illustration des résultats numériques.

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié l'approximation d'une équation elliptique du second ordre dans \mathbb{R} par la méthode des éléments finis inversés. Nous avons montré l'existence et l'unicité des solutions dans les espaces de Sobolev à poids qui ont très adapté à la résolution de tel problèmes. Nous avons aussi donné des résultats numériques qui montre l'efficacité de cette méthode.

Comme perspective, on propose d'appliquer la méthode des éléments finis inversés pour résoudre des problèmes elliptiques en domaines extérieurs. On propose aussi d'appliquer la méthode aux problèmes paraboliques.

Références

- [1] Bolley, J. Camus. Quelque résultat sur les espaces de Sobolev avec poids. Pub.Sém.Mat.Inf. Univ .Rennes,1968-1969.
- [2] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 46 :227–272, 1971.
- [3] G.Dhatt,G. Touzot,and E.Lefrancois .Méthode des éléments finis.Editions Lavoisier,2005.
- [4] Hardy ,G.G. ,Littlewood ,D.E. ,Polya,G. :Inequalities ,Cambridge (1952).
- [5] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new méthode for solving elliptic problems in unbounded domains. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39(1) :109–145, 2005.
- [6] T. Z. Boulmezaoud, S. Mziou, and T. Boudjedaa. Numerical approximation of second-order elliptic problems in unbounded domains,. Journal of Scientific Computing, 60(2) :295-312, 2014.
- [7] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space : an approach using weighted spaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 26(8) :633–669, 2003.
- [8] V.Manet,methode des éléments finis,licence Creative Commons 3.0 France, 2013.

الملخص:

طريقة العناصر المنتهية العكسية هي طريقة بدون قطع تم تقديمها لحل معادلات تفاضلية جزئية في المجالات الغير المحدودة. الهدف من هذا العمل هو تحليل وتنفيذ هذه الطريقة لحل معادلة الإهليجية من الدرجة الثانية لمطروحة على كل الفضاء R . يحتوي هذا العمل على نتائج عددية تحصلنا عليها من برنامج حساب عددي مكتوب في الماتلاب، خاصة عندما يكون المجال هو R . كما يتضمن أيضا النتائج النظرية المتعلقة باستخدام فضاءات سوبولوف ذات الأوزان كإطار تابعي.

الكلمات المفتاحية :

طريقة العناصر المنتهية العكسية، المجالات غير المحدودة، المعادلة الإهليجية، فضاءات سوبولوف ذات الأوزان.

Abstract:

The inverted finite element method is a method without truncation which was introduced to solve partial differential equations in unbounded intervals. The objective of this work is to analyze and implement this method to solve an elliptical equation of the second order posed in the R . this work contains numerical results obtained from of a one dimensional code written in Matlab, especially when the domain is the whole space. It also includes theoretical results related to the use of weighted Sobolev space as a functional framework.

Keywords:

The inverted finite element method, unbounded domains, elliptical equation, weighted Sobolev space.

Résumé :

La méthode des éléments finis inversés est une méthode sans troncature qui a été introduite pour résoudre des équations aux dérivées partielles en intervalles non bornés. L'objectif de ce travail est d'analyser et d'implémenter cette méthode pour résoudre une équation elliptique du second ordre posé dans sur R . La mémoire comporte des résultats numériques issus d'un code unidimensionnel écrits au Matlab, notamment lorsque le domaine est l'espace tout entier. Elle comporte aussi des résultats théoriques liés à l'utilisation d'espace de Sobolev à poids comme cadre fonctionnel.

Mots clés :

Méthode des éléments finis inversés, domaines non bornés, équation elliptique, espace de Sobolev à poids.