جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة و تحليل عددي

من إعداد الطالبة : بن حوة نسرين

الموضوع

مقدمة في المشتقات و التكاملات الكسرية المحلية

تناقش يوم 2020/09/30 من طرف لجنة المناقشة :

قويدري محمد	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
عباسي حسين	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا
بوعاد عيسى	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا
بن الشيخ عبد الكريم	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا

السنة الجامعية : 2020/2019

* شكر وعرفان *

إن الحمد و الشكر لله عزوجل إذ هو خالقنا ومعيننا في كل الأوقات والظروف و هو صاحب الفضل الذي وفقني في إنجاز هذا العمل المتواضع و نسأله أن يجعل كل هذا خالصا لوجهه الكريم راجية منه أن ينفعني و غيري به .

قال رسول الله صل الله عليه وسلم

(من لم يشكر الناس لم يشكر الله)

ومصداقا لقوله عليه الصلاة والسلام و إعترافا منا لأهل الفضل من بعده سبحانه

أتقدم بكل إحترام وتقدير بجزيل الشكر و العرفان للأستاذين الفاضلين " بوعاد عيسى " و " بن الشيخ عبد الكريم " اللذان كان لهما الفضل الكبير في السير نحو طريق النجاح والتقدم بنصائحهما و توجيهاتهما القيمة .

كما أتقدم بالشكر لكل الأساتذة الذين سهروا على تكويننا عبر مسيرتنا الدراسية من الإبتدائي إلى الجامعة خاصة الاستاذتين

" ليتوجي فايزة " و " حميدي رقية "

و كذلك " صديقاتي "

و إلى كل من قدم لنا يد المساعدة من بعيد أو قريب فله أخلص عبارات الشكر والتقدير .

نسأل الله التوفيق و السدادة في كل خطواتنا

إهداء

عن جابر بن عبد الله -رضي الله عنه- قال:

قال رسول الله صل الله عليه و سلم:

(سلوا الله علما نافعا ، وتعوذوا بالله من علم لا ينفع)

أهدي ثمرة جهدي هذا إلى :

روح قلبي و نور عيني منبع الحنان والعطاء

إلى من سهرت الليالي على راحتي ، إلى من جعل الله الجنة تحت قدميها

" أمي الحبيبة حفظها الله "

إلى من رباني وسهر على تعليمي المبادىء والقيم العليا

إلى من علمني بأن الحياة عطاء قبل أن تكون أخذ ، إلى مثلي الأعلى في هذة الحياة

" أبي الغالي حفظه الله "

إلى من بهم أستمد قوتي و أحافظ على توازني وهم قدوتي في هذه الحياة

" إخوتي "

إلى كل صديقاتي و أحبابي وكل من يعرفني بدون إستثناء

إلى الذين حرسوا على تعليمنا ، و بذلوا كل ما بوسعهم من أجل أن نصل إلى ما

نحن عليه الآن إلى الذين حملوا من أقدس الرسائل في الحياة

إلى جميع أساتذتنا الكرام طيلة مشوارنا الدراسي

وفي الأخير أسأل الله أن يوفق الجميع

نسرين

قائمة الجداول

قائمة الأشكال

الفهـــــــــــرس

مقدمة

مفهوم الحساب الكسري المحلي (يسمى أيضا الحساب الكسري)،والذي تم إقتراحه لأول مرة من قبل Kolwankar و Gangal [1, 2] بناءا على المشتق الكسري Riemann–Liouville [3, 4, 5, 6] والذي تم تطبيقه للتعامل مع العديد من الدوال غير القابلة للتفاضل من قبل العلماء والمهندسين [[7]-[16]].والتي ظهرت في الأنظمة المركبة لظواهر العالم الحقيقي.خاصة،أنه تم وضع نموذج عدم التفاضل الذي حدث في العلوم والهندسة من قبل المشتقات والتكاملات الكسرية المحلية،وقد لاق هذا الموضوع إهتمام الباحثين العاملين في مجالات مختلفة مثل الفيزياء الرياضية و العلوم التطبيقية نظرا لأهميته على خلاف الحساب الكلاسيكي الذي عجز عن ذلك.و في السنوات العشر الماضية،تبين أن حساب التفاضل والتكامل الكسري المحلي أداة مفيدة في مجالات مختلفة تتراوح من العلوم الأساسية إلى التطبيقات الهندسية المختلفة،لأنه يمكن أن يتعامل مع خصائص المحلية للدوال غير القابلة للتفاضل المعرفة في المجموعات الكسرية.و في الفضاءات الكسرية نجد نظرية أساسية للعدد والإستمرارية الكسرية المحلية للدوال غير القابلة للتفاضل.ومنه يتعلم المرء كيفية حساب و تحديد المشتقات و التكاملات الكسرية المحلية،بعد أن يتعلم المفاهيم الأساسية له.

و في هذه المذكرة،قمنا بدراسة هذا الموضوع لإعطاء النظرية الحديثة لحساب المشتقات والتكاملات الكسرية المحلية و تحدياته الجديدة في حل العديد من الدوال غير القابلة للتفاضل لمختلف الظواهر الناشئة في أنظمة العالم الحقيقي،حيث سنتطرق إلى أهم المفاهيم الأساسية للمشتقات والتكاملات الكسرية المحلية كمقدمة و نتمنى أن تكون هناك دراسة عميقة في هذا الموضوع على مدار السنوات القادمة.

حيث سنتطرق في الفصل الأول بتقديم أهم التعاريف الأساسية للمشتقات والتكاملات الكسرية المحلية،و كذا الكسور المحلية الإستمرارية و الدوال الخاصة التي إعتمدنا عليها لدراسة هذا الموضوع،كما قمنا بعرض عدة نقاط أخرى من المشتقات والتكاملات الكسرية المحلية،مثل:

المشتق الكسري المحلي بواسطة مقياس Hausdorff و مقياس المشتق،lebesgue الكسري المحلي بإستخدام علم الهندسة الفراكتالية [1, 19, 20]،و مجموعات الفراكتال،كما تم وضع تكامل Riemann على مجموعات الفراكتال.

أما الفصل الثاني فقد قمنا بدراسة بعض الخواص و المبرهنات للمشتقات الكسرية المحلية،و مقارنات لمعادلة إنتشار و علاقة الفراكتال في دوال نواة الفراكتال،و كذا المشتقات الكسرية مع أو بدون نواة منفردة و إصدارات أخرى للمشتقات الكسرية،وقد قمنا بتطبيق عدة مشتقات كسرية عبر فروق كسرية ليحل مسائل عددية إلى معادلات تفاضلية كسرية في الفيزياء الرياضية منها: مشتق Grünwald – Letnikov [[6],[28]-[34]] و مشتق Grünwald–Letnikov–Riesz عبر مشتق Grünwald – Letnikov [39] ...إلخ.

وفي الأخير تطرقنا إلى أهم الخواص و المبرهنات في التكاملات الكسرية المحلية،وكذا مبرهنة Taylor الكسرية المحلية في الدوال غير القابلة للتفاضل و سلسلة Taylor الكسرية المحلية في الدوال المرجعية،كما قمنا بتقديم سلسلة MacLaurin الكسرية المحلية في الدوال المرجعية.

الفصل الأول

تعاريف المشتقات و التكاملات الكسرية المحلية

قائمة المحتويـــــــات

في هذا الفصل نأخذ بعين الإعتبار تعريفات بعض الدوال الخاصة ، وكذا المشتقات والتكاملات الكسرية المحلية.

1.1 الدوال الخاصة

نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأساسية للدوال الخاصة التي نعتمد عليها في هذه المذكرة.

1.1.1 الدالة غاما

تعريف 1.1.1

الدالة غاما تعد من الدوال الأساسية في حساب التفاضل و التكامل الكسري المحلي،وتسمى أيضا دالة غاما لأولر، وتعطى بدلالة التكامل من الشكل التالي :

$$\Gamma(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \mu^{\varepsilon-1} e^{-\mu} d\mu$$

حيث $\mu \in \mathbb{R}$.

مثال 1.1.1

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \lim_{M\to\infty} \int_0^M \mu^{2-1} e^{-\mu} d\mu \\
&= \lim_{M\to\infty} \int_0^M \mu e^{-\mu} d\mu \\
&= \lim_{M\to\infty} \left[-\mu e^{-\mu} - e^{-\mu}\right]_0^M \\
&= \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{M}{e^M} - \frac{1}{e^{\mu}} + 0 + e^0\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

خواص 1.1.1

(1) $\forall \varepsilon \neq 0 \;\; \Gamma(\varepsilon+1) = \varepsilon\Gamma(\varepsilon)$.

(2) إذا كانت ε عددا صحيحا فإن : $\Gamma(\varepsilon+1) = \varepsilon!$.

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

ملاحظة 1.1.1

* لا يمكن إيجاد $\Gamma(\varepsilon)$ إذا كان ε عددا صحيحا سالبا .
* $\Gamma(0_+) = +\infty$.
* $\Gamma(1) = 1$.
* $\Gamma(\varepsilon)$ دالة متناقضة من أجل $0 < \varepsilon \leq 1$.

1.1.2 دالة Lebesgue-Cantor

تعريف 1.1.2
لتكن $\aleph \to \Phi$ الدالة المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$ من البعد الكسري $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$. و $\Phi(\mu)$ دالة ذات قيمة حقيقية معرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$ المعطاة ب :

$$\Phi(\mu)=\mu^{\varepsilon} \tag{1.1}$$

حيث $\wp \in \mu^{\varepsilon}$ و $0<\varepsilon<1$.
و $\lim_{\varepsilon\to 1}\Phi(\mu)=\mu\in\mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

1.1.3 دالة Mittag-leffler

تعريف 1.1.3
الدالة *Mittag–Leffler* المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$ المعطاة ب :

$$E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} \tag{1.2}$$

حيث $\mu\in\mathbb{R}$ و $0<\varepsilon<1$.
و بشكل آخر من (1.2) المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$ نكتب :

$$E_{\varepsilon}(\beta,\mu^{\varepsilon})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(\beta+k\varepsilon)} \tag{1.3}$$

حيث β عدد حقيقي،$\mu\in\mathbb{R}$ و $0<\varepsilon<1$.

قواعد 1.1.1
القواعد المنتجة من خلال دالات *Mittag–Leffler* المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$:

(1) $E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})E_{\varepsilon}(v^{\varepsilon})=E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}+v^{\varepsilon})$

(2) $E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})E_{\varepsilon}(-v^{\varepsilon})=E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}-v^{\varepsilon})$

(3) $E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}v^{\varepsilon})=E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}+i^{\varepsilon}v^{\varepsilon})$

(4) $E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}v^{\varepsilon})=E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon}+i^{\varepsilon}v^{\varepsilon})$

(5) $[E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}+i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})]^{n}=E_{\varepsilon}(n^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon}+n^{\varepsilon}i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})$،حيث n عدد صحيح و i^{ε} عدد تخيلي للمجموعة الكسورية $\wp$.

تعريف 1.1.4 (الدالة الجيب)
الدالة الجيب المعرفة على المجموعة الفركتالية $\wp$ المعطاة ب :

$$\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\mu^{(2k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(2k+1)\varepsilon)} \tag{1.4}$$

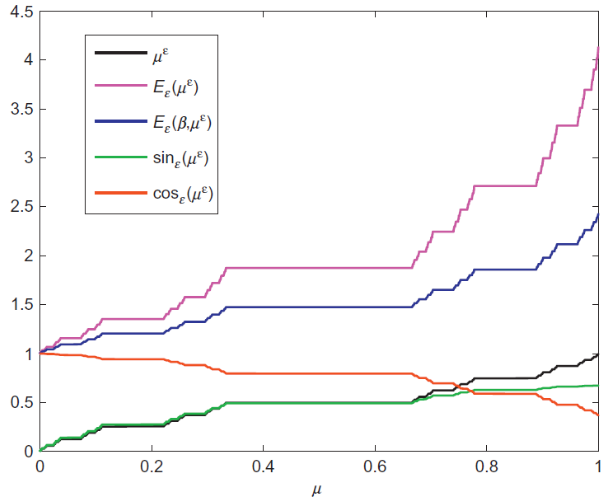
حيث $\mu\in\mathbb{R}$ و $0<\varepsilon<1$.

تعريف 5.1.1 (الدالة جيب التمام)
الدالة جيب التمام المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$ المعطاة ب :

$$\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu^{2k\varepsilon}}{\Gamma(1+2k\varepsilon)} \tag{5.1}$$

حيث $\mu \in \mathbb{R}$ و $0 < \varepsilon < 1$.

الرسوم المقابلة للبعد الفركتالي $\varepsilon = \ln 2/\ln 3$ موضحة في الشكل (1.1).



شكل 1.1: مقارنات الدوال غير القابلة للتفاضل (1.1)-(5.1) عندما $\beta = 2$ و $\varepsilon = \ln 2/\ln 3$

1.2.1 قواعد

القواعد المنتجة عبر دالات *Mittag–Leffler* ، جيب ، وجيب التمام المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$:

(1) $E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon}) = \cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) + i^{\varepsilon}\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$

(2) $\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon}) - E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})}{2i^{\varepsilon}}$

(3) $cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon}) + E_{\varepsilon}(-i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})}{2}$

(4) $cos_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon}) = cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$

(5) $\sin_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon}) = -\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$

(6) $\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})^2 + \cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})^2 = 1$

(7) $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos_{\varepsilon}(k\mu^{\varepsilon}) = \frac{\sin_{\varepsilon}((2n+1)\mu^{\varepsilon}/2)}{2\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}/2)}$ ، بحيث $\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}/2) \neq 0$

الخصائص الأخرى مدرجة في الملحق.

تعريف 6.1.1 (الدوال الزائدية)

الدوال الزائدية عبر دالة *Mittag – Leffler* المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$ المعطاة ب :

$$\sinh_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) - E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{(2k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(2k+1)\varepsilon)} \tag{6.1}$$

$$\cosh_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) + E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{2k\varepsilon}}{\Gamma(1+2k\varepsilon)} \tag{7.1}$$

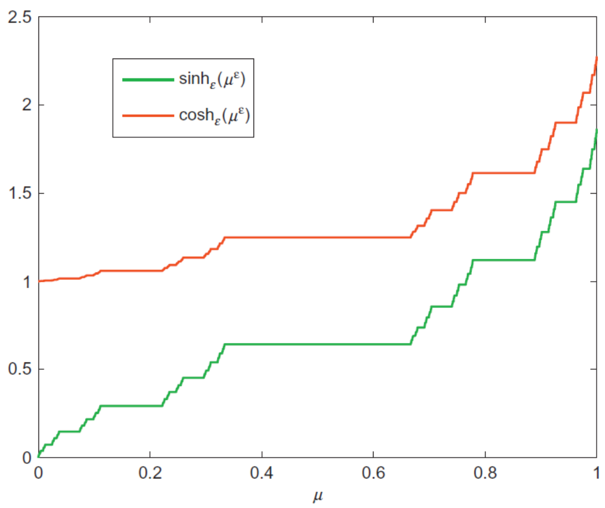
$$\tanh_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) - E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})}{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) + E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})} \tag{8.1}$$

$$\coth_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) + E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})}{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) - E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})} \tag{9.1}$$

$$\sec h_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{2}{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) + E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})} \tag{10.1}$$

$$\csc h_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = \frac{2}{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) - E_{\varepsilon}(-\mu^{\varepsilon})} \tag{11.1}$$

رسم المقارنة للدوال غير القابلة للتفاضل (6.1) و (7.1) عندما $\varepsilon = \ln 2/\ln 3$ كما هي موضحة في الشكل (2.1).



شكل 2.1: مقارنات الدوال غير القابلة للتفاضل (6.1) و (7.1) عندما $\varepsilon = \ln 2/\ln 3$

2.1 تعاريف كسور محلية إستمرارية

تعريف 1.2.1
لتكن $\wp$ المجموعة الفراكالية و d_1 و d_0 فضاءين متريين.لنفترض أن $\Phi : (\wp, d_0) \longrightarrow (\alpha, d_1)$ هو تطبيق ثنائية *Lipschitz* ،و نكتب:

$$\omega_1 \Im^{\varepsilon}(\wp) \leq \Im^{\varepsilon}(\Phi(\wp)) \leq \omega_1 \Im^{\varepsilon}(\wp) \tag{12.1}$$

ومنه :

$$\omega_1 \mid \mu_1 - \mu_2 \mid \leq \mid \Phi(\mu_1) - \Phi(\mu_2) \mid \leq \omega_1 \mid \mu_1 - \mu_2 \mid \tag{13.1}$$

حيث $\wp \subset \mathbb{R}$ ، $\mu_1, \mu_2 \in \wp$ و $\omega_1, \omega_2 > 0$.
بإستخدام (13.1)،إذا كان $\forall \rho > 0$ و $0 < \varepsilon < 1$، فإن :

$$\mid \Phi(\mu_1) - \Phi(\mu_2) \mid < \rho^{\varepsilon} \tag{14.1}$$

حيث ε هو أبعاد كسورية لمجموعة الفراكال $\wp$.هذا الشكل هو تشبيهات لتطبيق *Lipschitz* .

تعريف 2.2.1
لتكن $\Phi : \wp \to \aleph$ الدالة المعرفة على المجموعة الفراكالية $\wp$ من البعد الفراكالي $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$.العدد الحقيقي χ يسمى النهاية المعممة للدالة $\Phi(\mu)$ ، لما μ تؤول إلى a ، أو نهاية $\Phi(\mu)$ عند a ، إذا كان $\tau > 0$ و $\delta > 0$ ،ونكتب :

$$\mid \Phi(\mu) - \chi \mid < \tau^{\varepsilon} \tag{15.1}$$

و

$$0 < \mid \mu - a \mid < \delta \tag{16.1}$$

لنفترض أن $\tau > 0$ و $\delta > 0$ حيث $\mid \Phi(\mu) - \chi \mid < \tau^{\varepsilon}$ ،إذا كان $0 < \mid \mu - a \mid < \delta$ فإن :

$$\Phi(\mu) \to \chi \tag{17.1}$$

لما $\mu \to a$ ،أو:

$$\lim_{\mu \to a} \Phi(\mu) = \chi \tag{18.1}$$

نقول أن $\Phi(\mu)$ تؤول إلى χ لما μ تؤول إلى a.

تعريف 3.2.1
الدالة $\Phi(\mu)$ تكون كسرية محلية مستمرة عند $\mu = \mu_0$ حيث $\tau > 0$ ، و $\delta > 0$ ونكتب :

$$\mid \Phi(\mu) - \Phi(\mu_0) \mid < \tau^{\varepsilon} \tag{19.1}$$

كلما كان $0 < \mid \mu - \mu_0 \mid < \delta$ ، نكتب:

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \Phi(\mu) = \Phi(\mu_0) \tag{20.1}$$

الدالة $\Phi(\mu)$ تكون كسرية محلية مستمرة عند $\mu = \mu_0$ من اليمين إذا كان $\tau > 0$ ، و $\delta > 0$ بحيث (16.1) كلما كان $\mu_0 < \mu < \delta + \mu_0$.

الدالة $\Phi(\mu)$ تكون كسرية محلية مستمرة عند $\mu = \mu_0$ من اليسار إذا كان $\tau > 0$ ، و $\delta > 0$ بحيث (16.1) كلما كان $\delta - \mu_0 < \mu < \mu_0$.

إذا كانت $\lim_{\mu\to\mu_0^+}\Phi(\mu) = \Phi(\mu_0^+)$ ، $\lim_{\mu\to\mu_0^-}\Phi(\mu) = \Phi(\mu_0^-)$ و $\Phi(\mu_0^+) = \Phi(\mu_0^-)$ موجودة ، فإن :

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\Phi(\mu) = \lim_{\mu\to\mu_0^+}\Phi(\mu) = \lim_{\mu\to\mu_0^-}\Phi(\mu) \tag{21.1}$$

لنفترض أن الدالة $\Phi(\mu)$ هي عبارة عن كسور محلية مستمرة في المجال $I = (a, b)$ ، ونكتب :

$$\Phi(\mu) \in C_\varepsilon(a, b) \tag{22.1}$$

3.1 الكسيرية (الفراكتال)

تعريف 1.3.1

الكسيرية هي كائن هندسي خشن غير منتظم على كافة المستويات، ويمكن تمثيلها بعملية كسر شيء ما إلى أجزاء أصغر لكن هذه الأجزاء تشابه الجسم الأصلي.تحمل الكسيرية في طياتها ملامح مفهوم اللانهاية وتتميز بخاصية التشابه الذاتي أي أن مكوناتها مشابهة للكسيرية الأم مهما كانت درجة التكبير.غالبا ما يتم تشكيل الأجسام الكسيرية عن طريق عمليات أو خوارزميات متكررة:مثل العمليات الذاتية الاستدعاء أو التكرارية.

تمت دراسة العديد من أنواع الكسيريات على أنها كائنات رياضية.تشكل الهندسة الكسيرية فرعاً من الرياضيات يختص بدراسة سلوك وخصائص الكسيريات، كما تصف الكثير من الحالات التي يستعصي وصفها على الهندسة الكلاسيكية،وغالباً ما تطبق في حقول العلوم والتكنولوجيا والفنون المولدة حاسوبياً.إن تتبع الجذور المفاهيمية للكسيريات يقود إلى محاولات سابقة لقياس أغراض عجزت التعاريف التقليدية للهندسة الإقليدية والحساب الإقليدي عن شرحها.

1.3.1 المجموعة الكسيرية (المجموعة الفراكتالية)

تعريف 2.3.1

في محاولة جادة لفهم أغراض معينة كمجموعات كانتور،عمد علماء الرياضيات من أمثال كونستانتين كاراثيودوري وفيليكس هاوسدورف إلى تعميم المفهوم الحدسي للبعد حيث يتضمن قيماً غير صحيحة. كانت هذه الخطوة جزءاً من توجه ساد في بدايات القرن العشرين بهدف تكوين نظرية وصفية للمجموعة، وكان هذا إتماماً لأبحاث كانتور والتي كانت قادرة إلى حد ما على تصنيف مجموعات من النقاط في فضاء إقليدي.إن تعريف بُعد هاوسدروف ذو طبيعة هندسية،ولو أنه شُكل تقنياً باستخدام أدوات من التحليل الرياضي.عمل بيزيكوفيتش في هذا الاتجاه على غرار الآخرين،وقد اختلف في مضمونه عن التحريات المنطقية التي بُني على أساسها القسم الأعظم من النظرية الوصفية للمجموعة على عشرينيات وثلاثينات القرن العشرين،وقد تمت متابعة الأبحاث لاحقاً في هذا المجال،ولكن من قبل المختصين حصراً.

4.1 تعاريف المشتقات الكسرية المحلية

1.4.1 مقياس Hausdorff

تعريف 1.4.1 [45]
ليكن E من H^s القابل للقياس حيث $H^s(E) < \infty$. ومنه نجد مجموعات مفتوحة $O_1, O_2...$ تحتوي على E ، حيث $H^s(\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i \setminus E) = H^s(\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i) - H^s(E) = 0$ و أي مجموعة جزئية مفتوحة ل $\mathbb{R}^n$ هي مجموعة F_σ ، لذلك نفترض أن $O_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ij}$ لكل i،حيث $\{F_{ij}\}_j$ هي متتالية متزايدة في المجموعات المغلقة و الإستمرارية من H^s.

$$\lim_{j\to\infty} H^s(E\cap F_{ij}) = H^s(E\cap O_i) = H^s(E) \tag{23.1}$$

لما $\varepsilon < 0$ نجد j_i حيث :

$$H^s(E\setminus F_{ij_i}) < 2^{-i}\varepsilon \qquad (i = 1, 2, ...) \tag{24.1}$$

إذا كانت F مجموعة مغلقة حيث $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{ij_i}$ فإن :

$$H^s(F) \geq H^s(E\cap F) \geq H^s(E) - \sum_{i=1}^{\infty} H^s(E\setminus F_{ij_i}) > H^s(E) - \varepsilon \tag{25.1}$$

إذا كانت $F \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ ، فإن $H^s(F\setminus E) \leq H^s(\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i \setminus E) = 0$ حيث $F\setminus E$ تحتوي على بعض المجموعة G_δ و $H^s(G) = 0$ ، و منه $F\setminus G$ هي مجموعة F_σ التي تحتوي على E حيث :

$$H^s(F\setminus G) \geq H^s(F) - H^s(G) > H^s(E) - \varepsilon \tag{26.1}$$

نأخذ إتحاد قابل للعد من هذه المجموعات F_σ مفرطة ال $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...$ حيث المجموعة F_σ تحتوي على E و مقياس متعادل ل E .

2.4.1 مقياس Lebesgue

تعريف 2.4.1
لتكن المجموعة الجزئية $E \subseteq \mathbb{R}$ حيث طول المجال $I = [a, b]$ (أو $I = (a, b)$) هو $l(I) = b - a$ ، ومنه مقياس *Lebesgue* معرف ب :

$$L(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)\right\} \tag{27.1}$$

$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ هي متتالية للمجالات المفتوحة حيث :

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

مقياس *Lebesgue* المعرف في $\sigma - algebra\ Lebesgue$،وهي مجموعة لجميع المجموعات E التي تحقق معيار كاراثودوري الذي يتطلب هذا لكل $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$L(A) = L(A\cap E) + L(A\cap E^c) \tag{28.1}$$

المجموعات التي لم يتم إحتوائها في $\sigma - algebra\ Lebesgue$ ليست قابلة للقياس في *Lebesgue* . توجد مثل هذه المجموعات (مثل مجموعات فيتالي)،بمعنى إحتواء $\sigma - algebra\ Lebesgue$ في مجموعة القوى $\mathbb{R}$ القطعي.

3.4.1 تعاريف المشتقات الكسرية المحلية

تعريف 3.4.1

المشتق الكسري المحلي للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(0<\varepsilon\leq 1)$ [[1، 2],[7]-[16]] و المعطى ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{d^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\bigg|_{\mu=\mu_0}=\lim_{\mu\to\mu_0}\frac{d^{\varepsilon}\left[\Phi(\mu)-\Phi(\mu_0)\right]}{\left[d(\mu-\mu_0)\right]^{\varepsilon}} \tag{29.1}$$

بحيث الحد $d^{\varepsilon}[\Phi(\mu)]/[d(\mu-\mu_0)]^{\varepsilon}$ هو مشتق *Riemann–Liouville* من الرتبة ε للدالة $\Phi(\mu)$.

المشتق الكسري المحلي (فراكتال) للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(0<\varepsilon\leq 1)$ عبر μ^{ε} مقياس *Hausdorff* [1، 17، 18] و المعطى ب :

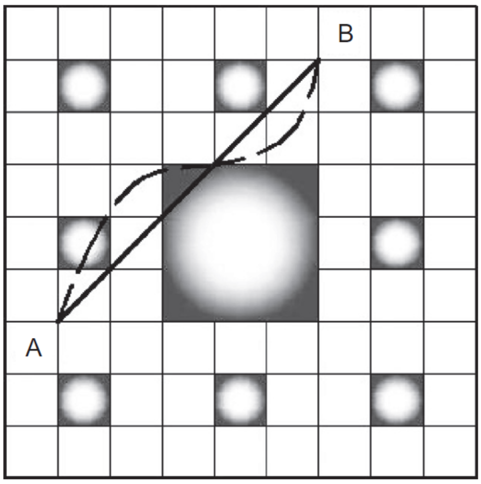
$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{d^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\bigg|_{\mu=\mu_0}=\lim_{\mu\to\mu_0}\frac{\Phi(\mu)-\Phi(\mu_0)}{\mu^{\varepsilon}-\mu_0^{\varepsilon}} \tag{30.1}$$

حيث μ^{ε} هو مقياس الفراكتال.

المشتق الكسري المحلي (الفراكتالي) بإستخدام هندسة الفراكتال للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(0<\varepsilon\leq 1)$ [1، 19، 20] ونكتب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{d\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\bigg|_{\mu=\mu_0}=\frac{d\Phi(\mu)}{d\sigma}=\lim_{\Delta\mu\to\mu_0}\frac{\Phi(\mu_B)-\Phi(\mu_A)}{\Upsilon\eta_0^{\varepsilon}} \tag{31.1}$$

حيث $d\sigma=\Upsilon\eta_0^{\varepsilon}$ مع معلم هندسي Υ و سلم المقياس η_0 في الشكل (3.1).



شكل 3.1: المسافة بين نقطتين A و B في مجال زمني متقطع

المشتق الكسري المحلي بإستخدام هندسة الفراكتال للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(0<\varepsilon\leq 1)$ [[1],[21]-[25]] من الشكل التالي:

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{d^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\bigg|_{\mu=\mu_0}=\lim_{\mu\to\mu_0}\frac{\Delta^{\varepsilon}\left[\Phi(\mu)-\Phi(\mu_0)\right]}{(\mu-\mu_0)^{\varepsilon}} \tag{32.1}$$

حيث $\Delta^{\varepsilon}\left[\Phi(\mu)-\Phi\left(\mu_0\right)\right]\cong\Gamma(1+\varepsilon)\left[\Phi(\mu)-\Phi\left(\mu_0\right)\right]$، مع دالة *Gamma Euler*
$\Gamma(1+\varepsilon)=:\int_0^{\infty}\mu^{\varepsilon-1}\exp(-\mu)d\mu$

من (32.1) نحدد $\varepsilon(0<\varepsilon\leq 1)$ بمقياس *Hausdorff* للأبعاد [[1]-[25]]:

$$H^{\varepsilon}\left[\Omega\cap(\mu_0,\mu)\right]=(\mu-\mu_0)^{\varepsilon} \tag{33.1}$$

ومنحناه لما $\varepsilon = \ln 2/\ln 3$ هو مجموعة أبعاد الفراكتال Ω و$\mu_0 = 0$ كما هو مبين في الشكل (1.2).

تعريف 4.4.1

لنفترض أن $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon(a,b)$ و $0 < \varepsilon \leq 1$. حيث : $\sigma > 0$ و $0 < |\mu - \mu_0| < \delta$ ، إذا كانت النهاية:

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0) = \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} |_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu \longrightarrow \mu_0} \frac{\Delta^\varepsilon [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^\varepsilon} \tag{34.1}$$

موجودة ومنتهية،حيث $\Delta^\varepsilon [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)] \cong \Gamma(1+\varepsilon) [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]$. في هذه الحالة نقول أن $D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)$ هو المشتق الكسري المحلي للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε عند النقطة $\mu = \mu_0$.

لتكن $\Phi(\mu) \in [\mu, b)$ ، حيث: $\Delta^\varepsilon [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)] \cong \Gamma(1+\varepsilon) [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]$ ، إذا كانت النهاية:

$$\frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} |_{\mu=\mu_0^-} = \lim_{\mu \longrightarrow \mu_0^-} \frac{\Delta^\varepsilon [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^\varepsilon} \tag{35.1}$$

موجودة نقول أن الدالة $\Phi(\mu)$ هي المشتق الكسري المحلي من الطرف الأيسر من الرتبة ε عند النقطة $\mu = \mu_0$.

لتكن $\Phi(\mu) \in (a, \mu]$ ، حيث: $\Delta^\varepsilon [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)] \cong \Gamma(1+\varepsilon) [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]$ ، إذا كانت النهاية:

$$\frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} |_{\mu=\mu_0^+} = \lim_{\mu \longrightarrow \mu_0^+} \frac{\Delta^\varepsilon [\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\mu - \mu_0)^\varepsilon} \tag{36.1}$$

موجودة نقول أن الدالة $\Phi(\mu)$ هي المشتق الكسري المحلي من الطرف الأيمن من الرتبة ε عند النقطة $\mu = \mu_0$.

لنفترض أن:

$$\left.\frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon}\right|_{\mu=\mu_0^+}$$

و

$$\left.\frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon}\right|_{\mu=\mu_0^-}$$

موجودة و

$$\left.\frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon}\right|_{\mu=\mu_0^+} = \left.\frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon}\right|_{\mu=\mu_0^-}$$

$$\frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon}\bigg| \mu = \mu_0 = \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon}\bigg| \mu = \mu_0^+ = \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon}\bigg| \mu = \mu_0^- \tag{37.1}$$

إذا كان $0 < \varepsilon \leq 1$ ، الزيادة الفراكتالية للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε عند النقطة $\mu = \mu_0$ المعرفة ب :

$$\Gamma(1+\varepsilon)\Delta^\varepsilon \Phi(\mu_0) = \Delta^\varepsilon[\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0] = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0)(\Delta\mu)^\varepsilon + \varpi(\Delta\mu)^\varepsilon \tag{38.1}$$

حيث $\Delta\mu$ هو الزيادة ل μ و $\varpi \to 0$ مثلما $\Delta \to 0$.

إذا كان $0 < \varepsilon \leq 1$ ، المشتق الكسري المحلي للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε عند النقطة $\mu = \mu_0$ المعرف ب :

$$d^\varepsilon \Phi(\mu_0) = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu_0)(d\mu)^\varepsilon + \varpi(d\mu)^\varepsilon \tag{39.1}$$

لنفترض أنه توجد أي نقطة $\mu \in (a,b)$ على النحو التالي :

$$\Phi^{(\varepsilon)}(\mu) = \frac{d^\varepsilon \Phi(\mu)}{d\mu^\varepsilon} = D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) \tag{40.1}$$

في هذه الحالة، $D_\varepsilon(a,b)$ تسمى مجموعة المشتق الكسري المحلي ε .

5.1 تعاريف التكاملات الكسرية المحلية

تعريف 1.5.1 (تكامل *Riemann*)

لتكن $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$،ثم ، نعرف تكامل *Riemann* للدالة $\varphi(\mu)$ ب :

$$\int_a^b \varphi(\mu)d\mu = \lim_{\Delta\mu\to 0}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\mu_k)\Delta\mu_k \tag{41.1}$$

حيث $\Delta\mu = \max_{1\le k\le n}\Delta\mu_k$.

تعريف 2.5.1

لنفترض أن $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$. ثم ، نعرف التكامل الكسري المحلي للدالة $\varphi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(0<\varepsilon\le 1)$ ونكتب :

$$aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)}\int_a^b \varphi(\mu)(\mathrm{d}\mu)^\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)}\lim_{\Delta\mu_k\to 0}\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(\mu_k)(\Delta\mu_k)^\varepsilon \tag{42.1}$$

حيث $\Delta\mu_k = \mu_{k+1}-\mu_k$ مع $\mu_0 = a < \mu_1 < \cdots < \mu_{N-1} < \mu_N = b$.

و منه صيغة التكامل الكسري المحلي للدوال الخاصة معرفة ب :

$$_0I_\mu^{(\varepsilon)}a\varphi(\mu) = a_0I_\mu^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) \tag{43.1}$$

$$_0I_\mu^{(\varepsilon)}\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} = \frac{\mu^{(k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(k+1)\varepsilon)}, \quad k\in N \tag{44.1}$$

تعريف 3.5.1

لنفترض أن التكامل الكسري المحلي للدالة $\varphi(\mu)$ في المجال المغلق $[a,b]$ يكون متعادل ل Θ.

إذا كان $\rho>0$، يوجد $0<|\Delta\mu_k|<\delta$ ، ونكتب:

$$\left|\Theta - \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)}\lim_{\Delta\mu_k\to 0}\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(\mu_k)(\Delta\mu_k)^\varepsilon\right| < \rho^\varepsilon \tag{45.1}$$

في الواقع ، نتذكر شرط لتكامل *Riemann* التي تفترض أن الدالة $\varphi(\mu)$ يحدها $[a,b]$ ، إذن هو شرط ضروري وكاف لوجود :

$$\int_a^b \varphi(\mu)d\mu \tag{46.1}$$

حيث $\varphi(\mu)$ لها مقياس *Lebesgue* الصفر.

تم وضع تكامل *Riemann* على المجموعات الفراكتالية على النحو التالي انظر [1, 16, 21].

لتكن $\varphi:\wp\to\aleph$ الدالة المعرفة على المجموعة الفراكتالية $\wp$ من الأبعاد الكسورية $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$. لنفترض أن $\varphi(\mu)$ يحدها $[a,b]$ (أو$\varphi(\mu)\in C_\varepsilon[a,b]$)،إذن هو شرط ضروري و كاف لوجود :

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)}\int_a^b \varphi(\mu)(\mathrm{d}\mu)^\varepsilon \tag{47.1}$$

إذن المجموعة الفراكتالية من الإستمرارية الكسرية المحلية للدالة $\varphi(\mu)$ لها مقياس *Lebesgue* الصفر المعمم.

تعريف 4.5.1
لنفترض أن $\varphi(\mu) \in C_{\varepsilon}[a,b]$ ، و $\varphi(\mu)$ تكامل كسري محلي في المجال $[a,b]$ ، و يمكننا كتابة القواعد التالية:

(1) ${}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) = 0$ في حالة $a = b$.

(2) ${}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) = -{}_bI_a^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)$ في حالة $a < b$.

(3) ${}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) = \varphi(\mu)$ في حالة $\varepsilon = 0$.

الفصل الثاني

المشتقات الكسرية المحلية

قائمة المحتويـــــات

1.2 خواص و مبرهنات المشتقات الكسرية المحلية

مبرهنة 1.1.2 (مبرهنة رول)
لنفترض أن $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$ ، $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a,b)$ و $\Phi(a) = \Phi(b)$.فإنه توجد نقطة $\mu_0 \in (a,b)$ و $\varepsilon \in (0,1]$ حيث:

$$\Phi^{(\varepsilon)}(\mu_0) = 0 \tag{1.2}$$

البرهان 1.1.2

(1) إذا كانت $\Phi(\mu) = 0 \in [a,b]$ و $\forall \mu_0 \in (a,b)$ فإن: $\Phi^{(\varepsilon)}(\mu_0) = 0$.

(2) إذا كانت $\Phi(\mu) \neq 0 \in [a,b]$.

* في هذه الحالة لدينا $\Phi(\mu)$ دالة محلية كسرية مستمرة على المجال $C_\varepsilon[a,b]$ ، ومنة توجد نقطتين تصل فيهما $\Phi(\mu)$ حديها الأعلى و الأدنى ، نرمز لهما ب T و t على الترتيب .

* لأن $\Phi(\mu) \neq 0$ ، فإنه على الأقل T و t لا تساويان الصفر.

* نفرض أن $T \neq 0$ و $\Phi(\mu_0) = T$. في هذه الحالة يكون :

$$\Phi(\mu_0 + \Delta\mu) \leq \Phi(\mu_0) \tag{2.2}$$

* إذا كان $\Delta\mu > 0$ فإن :

$$\frac{\Delta^\varepsilon[\Phi(\mu_0 + \Delta\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\Delta\mu)^\varepsilon} \leq 0 \tag{3.2}$$

و

$$\lim_{\Delta\mu \to 0} \frac{\Delta^\varepsilon[\Phi(\mu_0 + \Delta\mu) - \Phi(\mu_0)]}{(\Delta\mu)^\varepsilon} \leq 0 \tag{4.2}$$

* بطريقة مماثلة ، لما نأخذ : $\Delta\mu < 0$.

* لدينا $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a,b)$ وبطريقة مماثلة في حالة: $T = 0$ و $t \neq 0$ نجد :(1.2).

مبرهنة 2.2.2
لنفترض أن $\Phi(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$ و $\Phi(\mu) \in D_\varepsilon(a,b)$. ومنه توجد نقطة $\mu_0 \in (a,b)$ و $\varepsilon \in (0,1]$ ونكتب :

$$\Phi(a) - \Phi(b) = \Phi^{(\varepsilon)}(\mu_0)\frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} \tag{5.2}$$

البرهان 1.2.2
لتكن الدالة غير القابلة للتفاضل ،المعرفة ب :

$$\Lambda = \Gamma(1+\varepsilon)\left\{[\Phi(\mu)-\Phi(a)]-[\Phi(b)-\Phi(a)]\frac{(\mu-a)^{\varepsilon}}{(b-a)^{\varepsilon}}\right\} \tag{6.2}$$

حيث $\varepsilon \in (0,1]$ ، $\Lambda(a)=0$ و $\Lambda(b)=0$.
في هذه الحالة ، إذا كان $\mu_0 \in (a,b)$ فإنة توجد متطابقة أنتجت من الشكل التالي:

$$\Lambda = \Gamma(1+\varepsilon)\left\{[\Phi(\mu)-\Phi(a)]-[\Phi(b)-\Phi(a)]\frac{(\mu-a)^{\varepsilon}}{(b-a)^{\varepsilon}}\right\} \tag{7.2}$$

ومنه نحصل على النتيجة (5.2).

مبرهنة 3.3.2 (كسور محلية إستمرارية)
لنفترض أن $\lim_{\mu\to\mu_0}\Phi(\mu)=\Phi(\mu_0)$ و $\lim_{\mu\to\mu_0}\Theta(\mu)=\Theta(\mu_0)$ ، ونكتب :

(1) $\lim_{\mu\to\mu_0}[\Phi(\mu)\pm\Theta(\mu)]=\Phi(\mu_0)\pm\Theta(\mu_0)$

(2) $\lim_{\mu\to\mu_0}|\Phi(\mu)|=|\Phi(\mu_0)|$

(3) $\lim_{\mu\to\mu_0}[\Phi(\mu)\Theta(\mu)]=\Phi(\mu_0)\Theta(\mu_0)$

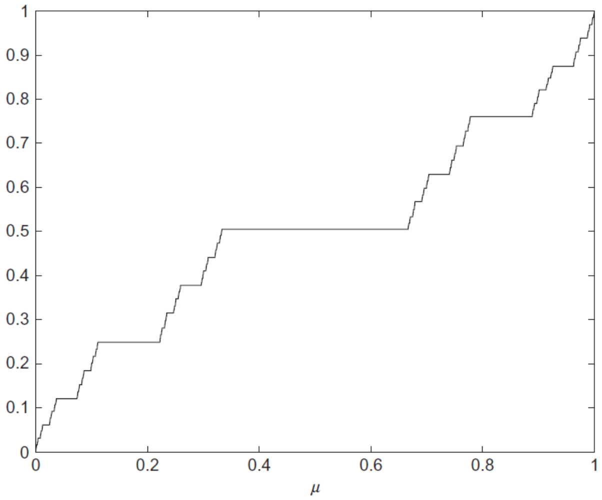
(4) $\lim_{\mu\to\mu_0}[\Phi(\mu)/\Theta(\mu)]=\Phi(\mu_0)/\Theta(\mu_0)$ ، بحيث $\Theta(\mu_0)\neq 0$.

للحصول على تفاصيل البراهين الشكلي لصلاحية هذه القواعد الأربعة،انظر [1, 16, 21].
تعد المبرهنة السابقة نتيجة طبيعية معممة لتلك المعروفة عندما تكون الرتبة عدد صحيح إيجابي.

1.1.2 مقارنات لمعادلة علاقة الفراكتال في دوال نواة الفراكتال

معادلة علاقة الفراكتال من (29.1) معطاة كما يلي:

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)+\omega\Phi(\mu)=0 \tag{8.2}$$



شكل 1،2: منحنى لمقياس *Hausdorff* البعدي ε حيث $\varepsilon = \ln 2/\ln 3$

حيث $\Phi(0) = 1$ هو حلها ونكتب :

$$\Phi(\mu) = e^{(-\omega F_c(\mu))} \tag{9،2}$$

حيث $F_c(\mu)$ هي دالة *Lebesgue–Cantor* و $F_c(\mu) \sim \mu^{\varepsilon}$
معادلة علاقة الفراكتال بمساعدة (30،1) معطى ب [26] :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) + \omega\Phi(\mu) = 0 \tag{10،2}$$

حيث $\Phi(0) = 1$ ويتم حلها بواسطة :

$$\Phi(\mu) = e^{(-\omega\mu^{\varepsilon})} \tag{11،2}$$

معادلة علاقة الفراكتال بإستخدام (31،1) (انظر [19]):

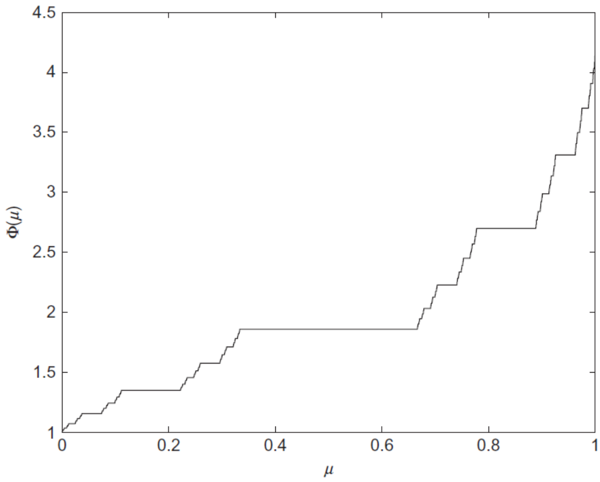
$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) + \omega\Phi(\mu) = 0 \tag{12،2}$$

حيث $\Phi(0) = 1$ حل له،

$$\Phi(\mu) = e^{(-\omega\Upsilon\eta_0^{\varepsilon-1}\mu)} \tag{13،2}$$

حيث $\sigma = \Upsilon\eta_0^{\varepsilon-1}\mu$،
تعتمد معادلة علاقة الفراكتال على (32،1) ونكتب (أنظر [26]):

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) + \omega\Phi(\mu) = 0 \tag{14،2}$$



شكل 2،2: مخطط $\Phi(\mu)$ عندما $\omega=1$ و $\varepsilon=\ln 2/\ln 3$

$$\Phi(\mu)=E_\varepsilon(-\omega\mu^\varepsilon) \tag{15،2}$$

حيث $E_\varepsilon\left(-\omega\mu^\varepsilon\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)\omega^i\mu^{\varepsilon i}}{\Gamma(1+\varepsilon i)}$ يتم تعريفه على مجموعات *Cantor*. الرسم المقابل إذا كان $\omega=1$ و $\varepsilon=\ln 2/\ln 3$ يظهر في الشكل (2،2).

2،1،2 مقارنات لمعادلة إنتشار الفراكتال في دوال نواة الفراكتال

معادلة إنتشار الفراكتال مبنية على أساس (31،1) يتم تقديمها على النحو التالي (أنظر [8]):

$$\frac{\partial^\varepsilon(\sigma,\mu)}{\partial\mu^\varepsilon}=\Lambda\frac{\partial^2\Phi(\sigma,\mu)}{\partial\sigma^2} \tag{16،2}$$

حيث $\Lambda=\Gamma(1+\varepsilon)\chi_c(\mu)/4$ ويتم حلها بواسطة :

$$\Phi(\sigma,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi F_c(\mu)}}e^{\left(-\dfrac{\sigma^2}{F_c(\mu)}\right)} \tag{17،2}$$

حيث $F_c(\mu)$ هو معادلة *Lebesgue–Cantor* و $\chi_c(\mu)$ هي دالة العضوية لمجموعة *Cantor* .

نذكر أن معادلة إنتشار الفراكتال ضمن (30،1) لها الشكل [17]:

$$\frac{\partial^\varepsilon(\sigma,\mu)}{\partial\mu^\varepsilon}=\Lambda\frac{\partial^{2\varsigma}\Phi(\sigma,\mu)}{\partial\sigma^{2\varsigma}} \tag{18،2}$$

حيث $1\leq\varsigma<0$ و Λ هو تلامس ، والحل هو :

$$\Phi(\sigma,\mu)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\Lambda\mu^\varepsilon}}e^{\left(-\frac{\sigma^{2\sigma}}{4\Lambda\mu^\varepsilon}\right)} \tag{19،2}$$

معادلة إنتشار الفراكتال مبنية على أساس (31،1). لديها الشكل :

$$\frac{\partial^\varepsilon(\sigma,\mu)}{\partial\mu^\varepsilon}=\Lambda\frac{\partial^{2\varsigma}\Phi(\sigma,\mu)}{\partial\sigma^{2\varsigma}} \tag{20،2}$$

حيث $1 \leq \varsigma < 0$ و Λ هو تلامس ، ويتم إعطاء حلها بواسطة :

$$\Phi(\sigma,\mu)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\Lambda\Upsilon\eta_0^{1-\varepsilon}\mu}}e^{\left(-\frac{\left(\iota\xi_0^{1-\zeta}\sigma\right)^2}{4\Lambda\Upsilon\eta_0^{1-\varepsilon}\mu}\right)} \tag{21.2}$$

نذكر أدناه معادلة إنتشار الفراكتال على أساس (32.1) [23] :

$$\frac{\partial^{\varepsilon}\Phi(\sigma,\mu)}{\partial\mu^{\varepsilon}}=\Lambda\frac{\partial^{2\varepsilon}\Phi(\sigma,\mu)}{\partial\sigma^{2\varepsilon}} \tag{22.2}$$

حيث Λ هو تلامس ، ويتم إعطاء حلها بواسطة :

$$\Phi(\sigma,\mu)=\Phi_0\mu^{\beta\varepsilon}E_{\varepsilon}(-\frac{\sigma^{2\varepsilon}}{(4\Lambda\mu)^{\varepsilon}}) \tag{23.2}$$

حيث $E_{\varepsilon}\left(-\omega\mu^{2\varepsilon}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{\varepsilon}}{2}\frac{(-1)^i\omega^i\mu^{2\varepsilon i}}{\Gamma(1+\varepsilon i)}$ معرفة على مجموعات *Cantor* ورسمها ، عندما $\omega=1$ و $\varepsilon=\ln 2/\ln 3$ [23] يظهر في الشكل (3.2) .
عندما $\Lambda=1$ نستنتج أن :

$$\Phi(\sigma,\mu)=\Phi_{0,0}\mu^{\beta\varepsilon}E_{\varepsilon}\left(-\frac{\sigma^{2\varepsilon}}{(4\mu)^{\varepsilon}}\right) \tag{24.2}$$

ومنه [21] :

$$\Phi(\sigma,0)=\delta_{\varepsilon}(\sigma) \tag{25.2}$$

أدناه ، نقدم تعريفا جديد لدالة *Dirac* الكسرية المحلية ، وهي:

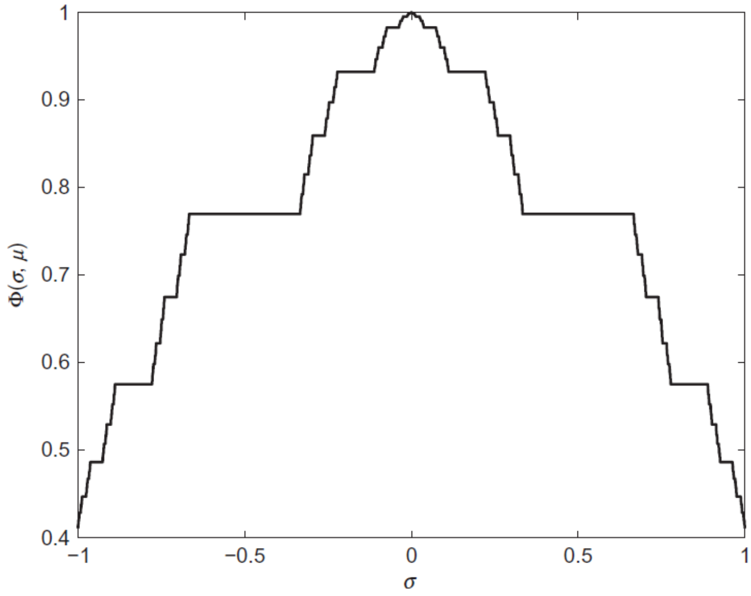
$$\delta_{\varepsilon}(\sigma)=\lim_{\mu\to 0}\Phi_{0,0}\mu^{\beta\varepsilon}E_{\varepsilon}\left(-\frac{\sigma^{2\varepsilon}}{(4\mu)^{\varepsilon}}\right) \tag{26.2}$$

ومنه [27] ، لدينا :

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{(4\pi\mu)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\Gamma(1+\varepsilon)}}E_{\varepsilon}\left(-\frac{\sigma^{2\varepsilon}}{(4\mu)^{\varepsilon}}\right)(\mathrm{d}\sigma)^{\varepsilon} \tag{27.2}$$

لهذا السبب:

$$\delta_{\varepsilon}(\sigma)=\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\frac{(4\pi\mu)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\Gamma(1+\varepsilon)}}E_{\varepsilon}\left(-\frac{\sigma^{2\varepsilon}}{(4\mu)^{\varepsilon}}\right) \tag{28.2}$$



شكل 3.2: منحنيات مسافة التركيز للمصدر غير القابل للتفاضل (أنظر [23])

وبالتالي وبمساعدة (26.2) و (28.2) نحصل على :

$$\Phi_{0,0} = \frac{1}{\frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\Gamma(1+\varepsilon)}} \tag{29.2}$$

و

$$\beta = -\frac{\varepsilon}{2} \tag{30.2}$$

بطريقة مماثلة ، نحصل عليها :

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{(4\pi\Lambda\mu)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\Gamma(1+\varepsilon)}} E_{\varepsilon}\left(-\frac{\sigma^{2\varepsilon}}{(4\Lambda\mu)^{\varepsilon}}\right) (\mathrm{d}\sigma)^{\varepsilon} \tag{31.2}$$

لذلك ، هناك دالة *Dirac* كسرية محلية محددة بواسطة :

$$\delta_{\varepsilon}(\sigma) = \lim_{\mu_0 \to 0} \frac{1}{\frac{(4\pi\Lambda\mu)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\Gamma(1+\varepsilon)}} E_{\varepsilon}\left(-\frac{\sigma^{2\varepsilon}}{(4\Lambda\mu)^{\varepsilon}}\right) \tag{32.2}$$

لهذا السبب:

$$\Phi_0 = \frac{1}{\frac{(4\pi\mu)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\Gamma(1+\varepsilon)}} \tag{33.2}$$

3.1.2 مشتقات كسرية عبر فروق كسرية

تم تطبيق المشتقات الكسرية عبر الفروق الكسرية ليحل مسائل عددية إلى معادلات تفاضلية كسرية في الفيزياء الرياضية . مشتق *Letnikov – Grünwald* للدالة $\Phi(\mu)$ من رتبة كسرية $\varepsilon(0 < \varepsilon \leq)$ [[6],[28]-[34]] هو مشتق كسري عبر فرق كسري ، معطى ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \left.\frac{d^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\right|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{\rho^{\varepsilon}} \tag{34.2}$$

حيث حد الفرق الكسري هو :

$$\Delta^{\varepsilon}\Phi(\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\binom{\varepsilon}{i}\Phi(\mu-i\rho) \tag{35.2}$$

و $\binom{\varepsilon}{i}=\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1+i)\Gamma(1+\varepsilon-i)}$.

المشتق الكسري للدالة $\Phi(\mu)$ من رتبة كسرية $\varepsilon(0<\varepsilon\leq)$ [35, 36, 37] هو مشتق كسري عبر فرق كسري ، معطى ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\left.\frac{d^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\right|_{\mu=\mu_0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{\rho^{\varepsilon}} \tag{36.2}$$

حيث حد الفرق الكسري هو :

$$\Delta^{\varepsilon}\Phi(\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\binom{\varepsilon}{i}\Phi(\mu-(\varepsilon-i)\rho) \tag{37.2}$$

المشتق الكسري للدالة $\Phi(\mu)$ من رتبة كسرية $\varepsilon(0<\varepsilon\leq)$ [38] وهو مشتق كسري عبر فرق كسري ،معطى ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\left.\frac{d^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\right|_{\mu=\mu_0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta^{\varepsilon}\left[\Phi(\mu)-\Phi_0(\mu)\right]}{\rho^{\varepsilon}} \tag{38.2}$$

حيث حد الفرق الكسري هو :

$$\Delta^{\varepsilon}\Phi(\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\binom{\varepsilon}{i}\Phi(\mu-(\varepsilon-i)\rho) \tag{39.2}$$

المشتق الكسري للدالة $\Phi(\mu)$ من رتبة التغير $\varepsilon(\mu)(0<\varepsilon(\mu)\leq 1)$ [24] معرف ب :

$$D^{(\varepsilon(\mu))}\Phi(\mu)=\left.\frac{d^{\varepsilon(\mu)}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon(\mu)}}\right|_{\mu=\mu_0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta^{\varepsilon(\mu)}\left[\Phi(\mu)-\Phi_0(\mu)\right]}{\rho^{\varepsilon(\mu)}} \tag{40.2}$$

حيث حد الفرق الكسري هو :

$$\Delta^{\varepsilon(\mu)}\Phi(\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\frac{1}{\Gamma(i-\varepsilon(\mu))}\Phi(\mu-(\varepsilon(\mu)-i)\rho) \tag{41.2}$$

مشتق *Grünwald–Letnikov–Riesz* للدالة $\Phi(\mu)$ من رتبة كسرية $\varepsilon(0<\varepsilon\leq)$ عبر مشتق *Letnikov – Grünwald* [39] المعرفة ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\left.\frac{d^{\varepsilon}\Phi(\mu)}{d\mu^{\varepsilon}}\right|_{\mu=\mu_0}=c_{\varepsilon}\lim_{\rho\to 0}\frac{\left[\Delta_{+}^{\varepsilon}\Phi(\mu)+\Delta_{-}^{\varepsilon}\Phi_0(\mu)\right]}{\rho^{\varepsilon}} \tag{42.2}$$

حيث:

$$c_{\varepsilon}=\frac{1}{2\cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})} \tag{43.2}$$

وحدودها الفروق الكسرية.

* إذا كان $\rho > 0$ فإن :

$$\Delta_{+}^{\varepsilon}\Phi(\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{|i|}\binom{\varepsilon}{i}\Phi(\mu-i\rho) \tag{44.2}$$

* إذا كان $\rho < 0$ فإن:

$$\Delta_{-}^{\varepsilon}\Phi(\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{|i|}\binom{\varepsilon}{i}\Phi(\mu+i\rho)$$

4.1.2 مشتقات كسرية مع أو بدون نواة منفردة و إصدارات أخرى للمشتقات الكسرية

وجدت المشتقات الكسرية ذات النواة المفردة تطبيقات شائعة في حقول العلماء والمهندسين ، نذكر بعضها ، على سبيل المثال : *Liouville* ، *Riemann – Liouville* ، *Caputo* ، *Weyl* ، *Marchaud* ، *Hadamard* ، *Chen* ، *Canavati* ، *Cossar* و *Riesz* . كما نوقشت مؤخرا التفاصيل المتعلقة بالمشتقات الكسرية المطابقة [40, 41].وقد تم إقتراح إصدارات *Riemann* و *Caputo* المعممة من المشتقات الكسرية [42].و المشتق الكسري بدون نواة مفردة و بعض خصائصه حيث تمت مناقشته مؤخرا في [43, 44]. أدناه ،نقدم تعريفات مشتقات كسور مع أو بدون نواة مفردة وكذلك المشتقات الكسرية المطابقة.

المشتق الكسري *Liouville* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{d}{d\mu}\int_{-\infty}^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon}}d\lambda \tag{46.2}$$

حيث $-\infty<\mu<\infty$ و ε هو عدد حقيقي.

المشتق الكسري من الجانب الأيسر *Liouville* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{1}{\Gamma(n-\varepsilon)}\frac{d^{n}}{d\mu^{n}}\int_{0}^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}d\lambda \tag{47.2}$$

حيث $\mu>0$، n عدد صحيح و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري من الجانب الأيمن *Liouville* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{-}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\varepsilon)}\frac{d^{n}}{d\mu^{n}}\int_{-\infty}^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}d\lambda \tag{48.2}$$

حيث $\mu<\infty$ ، n عدد صحيح ، و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري من الجانب الأيسر *Riemann-Liouville* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{a^{+}}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{1}{\Gamma(n-\varepsilon)}\frac{d^{n}}{d\mu^{n}}\int_{a}^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}d\lambda \tag{49.2}$$

حيث $\mu\geq a$ ، n عدد صحيح و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري من الجانب الأيمن *Riemann-Liouville* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{a^{+}}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\varepsilon)}\frac{d^{n}}{d\mu^{n}}\int_{\mu}^{b}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}d\lambda \tag{50.2}$$

حيث $\mu \leq b$، n عدد صحيح و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري من الجانب الأيسر *Caputo* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{a+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(n-\varepsilon)}\int_a^\mu \frac{1}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(\lambda)\right]d\lambda \tag{51.2}$$

هناك $\mu \leq a$ ، n عدد صحيح و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري من الجانب الأيمن *Caputo* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{a+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\varepsilon)}\int_\mu^b \frac{1}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(\lambda)\right]d\lambda \tag{52.2}$$

حيث $\mu \leq b$ ، n عدد صحيح و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري *Weyl* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε (عوضا عن تعريف ، أنظر [24]) المعرف ب :

$$D_{\mu}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(n-\varepsilon)}\frac{d^n}{d\mu^n}\int_\mu^\infty \frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}d\lambda \tag{53.2}$$

هنا n عدد صحيح و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري *Marchaud* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{\{\varepsilon\}}{\Gamma(1-\{\varepsilon\})}\int_\mu^\infty \frac{[\Phi(\mu)-\Phi(\lambda)]}{(\mu-\lambda)^{\{\varepsilon\}+1}}d\lambda \tag{54.2}$$

حيث $\varepsilon = [\varepsilon] + \{\varepsilon\}$.

المشتق الكسري من الجانب الأيسر *Marchaud* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε المعرف ب :

$$D_{+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{\{\varepsilon\}}{\Gamma(1-\{\varepsilon\})}\int_\mu^\infty \frac{\left[\Phi^{([\varepsilon])}(\mu)-\Phi^{([\varepsilon])}(\mu-\lambda)\right]}{\lambda^{\{\varepsilon\}+1}}d\lambda \tag{55.2}$$

حيث $\varepsilon = [\varepsilon] + \{\varepsilon\}$.

المشتق الكسري من الجانب الأيمن *Marchaud* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε المعرف ب :

$$D_{-}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{\{\varepsilon\}}{\Gamma(1-\{\varepsilon\})}\int_0^\mu \frac{\left[\Phi^{([\varepsilon])}(\mu)-\Phi^{([\varepsilon])}(\mu+\lambda)\right]}{\lambda^{\{\varepsilon\}+1}}d\lambda \tag{56.2}$$

حيث $\varepsilon = [\varepsilon] + \{\varepsilon\}$.

أدناه ، المشتق الكسري *Hadamard* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)}\int_0^\mu \frac{[\Phi(\mu)-\Phi(\lambda)]}{[\ln(\mu/\lambda)]^{\varepsilon+1}}\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{57.2}$$

حيث ε عدد حقيقي .

الآن ، نحدد المشتق الكسري من الجانب الأيسر *Chen* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε من الشكل :

$$D_{a}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{d}{d\mu}\int_a^\mu \frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon}}d\lambda \tag{58.2}$$

حيث $\mu \leq a$ و ε عدد حقيقي.
المشتق الكسري من الجانب الأيمن *Chen* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{a}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = -\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{d}{d\mu}\int_{\mu}^{b}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon}}d\lambda \tag{59.2}$$

حيث $b \leq \mu$ و ε عدد حقيقي.
المشتق الكسري *Canavati* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{d}{d\mu}\int_{0}^{\mu}\frac{1}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon-n}}\left[\frac{\partial^{n}}{\partial\lambda^{n}}\Phi(\lambda)\right]d\lambda \tag{60.2}$$

حيث $0 \leq \mu$ ، ε عدد حقيقي ، و $n = [\varepsilon]$ عدد صحيح.
المشتق الكسري *Riesz* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{-c_{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{\partial^{n}}{\partial\mu^{n}}\left[\int_{-\infty}^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon+1-n}}d\lambda + \int_{\mu}^{\infty}\frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda-\mu)^{\varepsilon+1-n}}d\lambda\right] \tag{61.2}$$

حيث $c_{\varepsilon} = 1/\left[2\cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})\right]$ ، ε عدد حقيقي ، و n عدد صحيح.
المشتق الكسري *Cossar* من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{-1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\int_{\mu}^{N}\frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda-\mu)^{\varepsilon}}d\lambda\right] \tag{62.2}$$

حيث ε عدد حقيقي.
المشتق الكسري *Riemann–Liouville* المعدل للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_{0}^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)-\Phi(0)}{(\lambda-\mu)^{\varepsilon}}d\lambda \tag{63.2}$$

حيث ε عدد حقيقي.
المشتق الكسري المطاوع للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε [40] المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \lim_{k\rightarrow 0}\frac{\Phi(\mu+k\mu^{1-\varepsilon})-\Phi(\mu)}{k} \tag{64.2}$$

حيث $\varepsilon(0 < \varepsilon \leq 1)$ عدد حقيقي.
المشتق الكسري من الجانب الأيسر المطاوع المعدل للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε [41] المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \lim_{k\rightarrow 0}\frac{\Phi(\mu+k(\mu-a)^{1-\varepsilon})-\Phi(\mu)}{k} \tag{65.2}$$

حيث $\varepsilon(0 < \varepsilon \leq 1)$ عدد حقيقي.
المشتق الكسري من الجانب الأيمن المطاوع المعدل للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε [41] المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = -\lim_{k\rightarrow 0}\frac{\Phi(\mu+k(\mu-a)^{1-\varepsilon})-\Phi(\mu)}{k} \tag{66.2}$$

حيث $\varepsilon(0<\varepsilon\leq 1)$ عدد حقيقي.

المشتق الكسري *Riemann* المعمم للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε [42] المعرف ب :

$$ {}^{\gamma}D_a^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{(1+\gamma)^{\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{d}{d\mu}\int_a^{\mu}\frac{\lambda^{\gamma}\Phi(\mu)}{(\mu^{\gamma+1}-\lambda^{\gamma+1})^{\varepsilon}}d\lambda \tag{67.2}$$

حيث $a\leq\mu$ و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري *Caputo* المعمم للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε [42] المعرف ب :

$$ {}^{\gamma}D_0^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{(1+\gamma)^{\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{d}{d\mu}\int_0^{\mu}\frac{\lambda^{\gamma}\Phi(\mu)}{(\mu^{\gamma+1}-\lambda^{\gamma+1})^{\varepsilon}}d\lambda \tag{68.2}$$

حيث $0\leq\mu$ و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري *Erdelyi–Kober* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D_{0,\xi,\zeta}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\mu^{-n\zeta}\left(\frac{1}{\xi\mu^{\zeta-1}}\frac{d}{d\mu}\right)^{n}\mu^{-\zeta(n+\zeta)}I_{0,\xi,\xi+\zeta}^{n-\varepsilon}\Phi(\mu) \tag{69.2}$$

حيث:

$$I_{0,\xi,\xi+\zeta}^{n-\varepsilon}\Phi(\mu)=\frac{\xi\mu^{-\zeta(\zeta+\varepsilon)}}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^{\mu}\frac{\lambda^{\xi\zeta+\xi-1}\Phi(\mu)}{(\mu^{\zeta}-\lambda^{\zeta})^{1-\varepsilon}}d\lambda \tag{70.2}$$

و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري *Caputo–Fabrizio* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية ε [43, 44] المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon)}\Phi(\mu)=\frac{1}{1-\varepsilon}\int_0^{\mu}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\mu-\lambda)\right)\Phi^{(1)}(\mu)d\lambda \tag{71.2}$$

حيث $0<\mu$ و ε عدد حقيقي.

المشتق الكسري *Coimbra* من الرتبة الكسرية ε المعرف ب :

$$D^{(\varepsilon(\mu))}\Phi(\mu)=\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon(\mu))}\left\{\int_a^{\mu}\frac{1}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon(\mu)}}\left[\frac{\partial\Phi(\lambda)}{\partial\lambda}\right]d\lambda+\Phi(0)\mu^{-\varepsilon(\mu)}\right\} \tag{72.2}$$

حيث $a<\mu$ و $\varepsilon(\mu)(0<\varepsilon(\mu)<1)$ عدد حقيقي متعلق ب μ .

المشتق الكسري *Riemann-Liouville* من الجانب الأيسر للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية $\varepsilon(\lambda,\mu)$ المعرفة ب :

$$D_{a^+}^{(\varepsilon(\lambda,\mu))}\Phi(\mu)=\frac{d}{d\mu}\int_a^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon(\lambda,\mu)}}\frac{d\lambda}{\Gamma[1-\varepsilon(\lambda,\mu)]} \tag{73.2}$$

حيث $a<\mu$ و $\varepsilon(\lambda,\mu)(0<\varepsilon(\lambda,\mu)<1)$ عدد حقيقي متعلق ب μ .

المشتق الكسري *Riemann-Liouville* من الجانب الأيمن للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية $\varepsilon(\lambda,\mu)$ المعرفة ب :

$$D_{b^-}^{(\varepsilon(\lambda,\mu))}\Phi(\mu)=\frac{d}{d\mu}\int_{\mu}^{b}\frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda-\mu)^{\varepsilon(\lambda,\mu)}}\frac{d\lambda}{\Gamma[1-\varepsilon(\lambda,\mu)]} \tag{74.2}$$

حيث $\mu<b$ و $\varepsilon(\lambda,\mu)(0<\varepsilon(\lambda,\mu)<1)$ عدد حقيقي متعلق ب μ.

المشتق الكسري *Caputo* من الجانب الأيسر للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية $\varepsilon(\lambda,\mu)$ المعرف ب :

$$D_{a^+}^{(\varepsilon(\lambda,\mu))}\Phi(\mu)=\int_a^{\mu}\frac{1}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon(\lambda,\mu)}}\left[\frac{d}{d\mu}\Phi(\lambda)\right]\frac{d\lambda}{\Gamma[1-\varepsilon(\lambda,\mu)]} \tag{75.2}$$

حيث $a < \mu$ و $(0 < \varepsilon(\lambda, \mu) < 1)\varepsilon(\lambda, \mu)$ عدد حقيقي متعلق ب μ.
المشتق الكسري *Caputo* من الجانب الأيمن للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة الكسرية $\varepsilon(\lambda, \mu)$ المعرف ب :

$$D_{b^-}^{(\varepsilon(\lambda,\mu))}\Phi(\mu) = \int_{\mu}^{b} \frac{1}{(\lambda-\mu)^{\varepsilon(\lambda,\mu)}} \left[\frac{d}{d\mu}\Phi(\lambda)\right] \frac{d\lambda}{\Gamma[1-\varepsilon(\lambda,\mu)]} \tag{76.2}$$

حيث $\mu < b$ و $(0 < \varepsilon(\lambda, \mu) < 1)\varepsilon(\lambda, \mu)$ عدد حقيقي متعلق ب μ.
المشتق الكسري *Caputo* للمتغير من الرتبة الكسرية المعرف ب :

$$D_{a^+}^{(\varepsilon(\mu))}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma[1-\varepsilon(\mu)]} \int_{a}^{\mu} \frac{1}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon(\mu)}} \left[\frac{d}{d\mu}\Phi(\lambda)\right] d\lambda \tag{77.2}$$

حيث $\mu < b$ و $(0 < \varepsilon(\lambda, \mu) < 1)\varepsilon(\lambda, \mu)$ عدد حقيقي متعلق ب μ.

الفصل الثالث
التكامل الكسري المحلي

قائمة المحتويـــــــات

1.3 خواص و مبرهنات التكاملات الكسرية المحلية

خاصية 1.1.3
لنفترض أن $\varphi(\mu)$،$\varphi_1(\mu)$، و $\varphi_2(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$ ، قواعد التكامل الكسري المحلي للدوال غير القابلة للتفاضل المعرفة في المجموعات الفراكتالية التي أنتجت هذه القوائم [1، 16، 21] :

(1) $${}_aI_b^{(\varepsilon)}\left[\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)\right] = {}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi_1(\mu) + {}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi_2(\mu)$$

(2) $${}_aI_b^{(\varepsilon)}[C\varphi(\mu)] = C{}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)$$ بحيث C ثابت .

(3) $${}_aI_b^{(\varepsilon)}1 = (b-a)^\varepsilon/\Gamma(1+\varepsilon)$$

(4) ${}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) \geq 0$ ، بحيث $\varphi(\mu) \geq 0$

(5) $$\left|{}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)\right| \leq {}_aI_b^{(\varepsilon)}|\varphi(\mu)|$$

(6) $${}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) = {}_aI_c^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) + {}_cI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)$$ بحيث $a<c<b$.

(7) ${}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) \in [t(b-a)^\varepsilon/\Gamma(1+\varepsilon), T(b-a)^\varepsilon/\Gamma(1+\varepsilon)]$ ، بحيث أن حديها الأعلى و الأدنى للدالة $\varphi(\mu)$ هي T و t ، على الترتيب.

مبرهنة 1.1.3 (مبرهنة القيم المتوسطة)
إذا كان $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$ فإنه توجد نقطة $\xi \in (a,b)$ بحيث :

$$ {}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) = \varphi(\xi)\frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)} \tag{1.3}$$

البرهان 1.1.3
لتكن $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$ ، بحيث :

$$ {}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) \in [t(b-a)^\varepsilon/\Gamma(1+\varepsilon), T(b-a)^\varepsilon/\Gamma(1+\varepsilon)] \tag{2.3}$$

و منه :

$$ \frac{aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)}{\frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)}} \in [t,T] \tag{3.3}$$

إذا كان $\xi \in (a,b)$، فإن :

$$ \frac{aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)}{\frac{(b-a)^\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)}} = \varphi(\xi) \tag{4.3}$$

مبرهنة 2.2.3
لنفترض أن $\varphi(\mu) \in C_\varepsilon[a,b]$ ، إذا كان $mu \in (a,b)$ ، فإنه توجد الدالة $\Phi(\mu)$ بحيث :

$$ \Phi(\mu) = {}_aI_\mu^{(\varepsilon)}\varphi(\mu) \tag{5.3}$$

ومنه المشتق الكسري المحلي معرف ب :

$$ \frac{\partial^\varepsilon\Phi(\mu)}{\partial\mu^\varepsilon} = \varphi(\mu) \tag{6.3}$$

البرهان 1.2.3
لتكن $\mu \in [a,b]$ ، ومنه يوجد $\mu+\Delta\mu \in [a,b]$ بحيث :

$$\Phi(\mu) = {}_a I^{(\varepsilon)}_{\mu+\Delta\mu}\varphi(\mu) \tag{7.3}$$

في هذه الحالة ، نجد :

$$\Delta^{\varepsilon}[\Phi(\mu+\Delta\mu)-\Phi(\mu)] = \int_a^{\mu+\Delta\mu}\varphi(\mu)(\mathrm{d}\mu)^{\varepsilon} - \int_a^{\mu}\varphi(\mu)(\mathrm{d}\mu)^{\varepsilon} \tag{8.3}$$

و

$$\Delta^{\varepsilon}[\Phi(\mu+\Delta\mu)-\Phi(\mu)] = \int_{\mu}^{\mu+\Delta\mu}\varphi(\mu)(\mathrm{d}\mu)^{\varepsilon} \tag{9.3}$$

من (1.3)، إذا كان $\xi \in (a,b)$ ، فإن :

$$ {}_{\mu}I^{(\varepsilon)}_{\mu+\Delta\mu}\varphi(\mu) = \varphi(\xi)\frac{(\Delta\mu)^{\varepsilon}}{\Gamma(1+\varepsilon)} \tag{10.3}$$

مما ينتج :

$$\frac{{}_{\mu}I^{(\varepsilon)}_{\mu+\Delta\mu}\varphi(\mu)}{\frac{(\Delta\mu)^{\varepsilon}}{\Gamma(1+\varepsilon)}} = \varphi(\xi) \tag{11.3}$$

أو

$$\frac{\Delta^{\varepsilon}[\Phi(\mu+\Delta\mu)-\Phi(\mu)]}{(\Delta\mu)^{\varepsilon}} = \varphi(\xi) \tag{12.3}$$

لما $\Delta\mu \to 0$، فإن :

$$\lim_{\Delta\mu\to 0}\frac{\Delta^{\varepsilon}[\Phi(\mu+\Delta\mu)-\Phi(\mu)]}{(\Delta\mu)^{\varepsilon}} = \Phi^{(\varepsilon)}(\mu) = \varphi(\xi) \tag{13.3}$$

إذا كان $\Delta\mu > 0$ ، فإنه توجد نقطة $\mu = a$ بحيث :

$$\Phi^{(\varepsilon)}(\mu)\Big|_{\mu=a^+} = \varphi(a^+) \tag{14.3}$$

بحيث : $\Delta\mu < 0$ فإنه توجد نقطة ، $\mu = b$ بطريقة مماثلة ، إذا كان

$$\Phi^{(\varepsilon)}(\mu)\Big|_{\mu=b^-} = \varphi(b^-) \tag{15.3}$$

وبالتالي نحصل على النتيجة.

مبرهنة 3.3.3 (صيغة *Newton-Leibniz*)
لنفترض أن $\Phi^{(\varepsilon)}(\mu) = \varphi(\mu) \in C_{\varepsilon}[a,b]$ ثم:

$$ {}_aI^{(\varepsilon)}_b\varphi(\mu) = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{16.3}$$

البرهان 1.3.3

لتكن الدالة المعرفة $\Phi_0(\mu) =_a I_\mu^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)$،وهكذا لدينا :

$$\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}\left(\Phi_0(\mu)-\Phi(\mu)\right)=\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}\Phi_0(\mu)-\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}\Phi(\mu)=\varphi(\mu)-\varphi(\mu)=0 \tag{17.3}$$

ومنه :

$$\Phi_0(\mu)-\Phi(\mu)=C \tag{18.3}$$

مع C ثابت.
لذلك من (17.3)، نتج المتطابقة التالية :

$${}_aI_b^{(\varepsilon)}\varphi(\mu)=\Phi_0(b)-\Phi_0(a)=\Phi(b)-\Phi(a) \tag{19.3}$$

وبالتالي نحصل على النتيجة المرجوة.

مبرهنة 4.4.3 (التكامل بالتجزئة)

لنفترض أن $\varphi_1(\mu),\varphi_2(\mu)\in C_\varepsilon[a,b]$ و،$\varphi_1(\mu),\varphi_2(\mu)\in D_\varepsilon(a,b)$. ومنه :

$${}_aI_b^\varepsilon\left\{\left[\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}\varphi_1(\mu)\right]\varphi_2(\mu)\right\}=\left[\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)\right]_a^b-{}_a I_b^{(\varepsilon)}\left\{\varphi_1(\mu)\left[\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}\varphi_2(\mu)\right]\right\} \tag{20.3}$$

البرهان 1.4.3

لدينا :

$$\left[\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)\right]_a^b={}_a I_b^{(\varepsilon)}\left\{\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}[\varphi_1\varphi_2(\mu)]\right\} \tag{21.3}$$

ومنه :

$${}_aI_b^\varepsilon\left\{\left[\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}\varphi_1(\mu)\right]\varphi_2(\mu)\right\}=\left[\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)\right]_a^b-{}_a I_b^{(\varepsilon)}\left\{\varphi_1(\mu)\left[\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\mu^\varepsilon}\varphi_2(\mu)\right]\right\} \tag{22.3}$$

لذلك نحصل على النتيجة المرجوة.
لنفترض أن $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)\in C_\varepsilon(a,b)$ ، ومنه :

$$D^{(k\varepsilon)}\left\{{}_{\mu_0}I_\mu^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)\right\}=\varphi(\mu) \tag{23.3}$$

حيث : $_{\mu_0}I_\mu^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)=\overbrace{{}_{\mu_0}I_\mu^{(\varepsilon)}\cdots{}_{\mu_0}I_\mu^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$ و $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)=\overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$.

مبرهنة 5.5.3

لنفترض أن $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu),D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\in C_\varepsilon(a,b)$. ومنه ، إذا كان $0<\varepsilon<1$ ،فإنه توجد نقطة $\mu_0\in(a,b)$ بحيث :

$${}_{\mu_0}I_\mu^{(k\varepsilon)}\left[D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]-{}_{\mu_0}I_\mu^{((k+1)\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]=D^{(k\varepsilon)}\varphi\left(\mu_0\right)\frac{\left(\mu-\mu_0\right)^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} \tag{24.3}$$

حيث: $_{\mu_0}I_\mu^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)=\overbrace{{}_{\mu_0}I_\mu^{(\varepsilon)}\cdots{}_{\mu_0}I_\mu^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$ و $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)=\overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$.

البرهان 1.5.3
نقدم الصيغة التالية :

$$\begin{aligned}\mu_0 I_{\mu}^{((k+1)\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right] &= \mu_0 I_{\mu}^{(k\varepsilon)}\left\{\mu_0 I_{\mu}^{(\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]\right\}\\ &= \mu_0 I_{\mu}^{(k\varepsilon)}\left\{D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu) - D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\right\}\\ &= \mu_0 I_{\mu}^{(k\varepsilon)}\left[D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)\right] - \mu_0 I_{\mu}^{(k\varepsilon)}\left[D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\right]\end{aligned} \tag{25.3}$$

و

$$\begin{aligned}\mu_0 I_{\mu}^{(k\varepsilon)}\left[D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\right] &= D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\mu_0 I_{\mu}^{(k\varepsilon)}\\ &= D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\mu_0 I_{\mu}^{((k-1)\varepsilon)}\frac{(\mu-\mu_0)^{\varepsilon}}{\Gamma(1+\varepsilon)}\\ &= D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\frac{(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\end{aligned} \tag{26.3}$$

و منه :

$$\mu_0 I_{\mu}^{(k\varepsilon)}\left[D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)\right] - \mu_0 I_{\mu}^{((k+1)\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right] = D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\frac{(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} \tag{27.3}$$

لذلك ، أثبتنا النتيجة.

1.1.3 التكاملات الكسرية

التكامل الكسري *Liouville* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε المعرف ب :

$$I^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_a^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{\varepsilon}}d\lambda \tag{28.3}$$

التكامل الكسري *Riemann-Liouville* من الجانب الأيسر للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(\lambda,\mu)$ المعرفة ب :

$$I_{a^+}^{(\varepsilon(\lambda,\mu))}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma[\varepsilon(\lambda,\mu)]}\int_a^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{1-\varepsilon(\lambda,\mu)}}d\lambda \tag{29.3}$$

حيث $a<\mu$ و $\varepsilon(\lambda,\mu)(0<\varepsilon(\lambda,\mu)<1)$ عدد حقيقي متعلق ب μ .
التكامل الكسري *Riemann-Liouville* من الجانب الأيمن للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(\lambda,\mu)$ المعرفة ب :

$$I_{b^-}^{(\varepsilon(\lambda,\mu))}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma[\varepsilon(\lambda,\mu)]}\int_{\mu}^{b}\frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda-\mu)^{1-\varepsilon(\lambda,\mu)}}d\lambda \tag{30.3}$$

حيث $\mu<b$ و $\varepsilon(\lambda,\mu)(0<\varepsilon(\lambda,\mu)<1)$ عدد حقيقي متعلق ب μ.
التكامل الكسري *Hadamard* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε المعرف ب :

$$I_{a^+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_a^{\mu}\frac{\Phi(\lambda)}{[\ln(\mu/\lambda)]^{1-\varepsilon}}\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{31.3}$$

حيث $0\le a<\mu$ و $\varepsilon>0$ عدد حقيقي .
التكامل الكسري *Erdelyi–Kober* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε المعرف ب :

$$I_{a^+,\xi,\zeta}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{\xi\mu^{-\xi(\zeta+\varepsilon)}}{\Gamma(\varepsilon)}\int_a^{\mu}\frac{\lambda^{\xi(\zeta+1)-1}\varphi(\lambda)}{(\mu^{\xi}-\lambda^{\xi})^{1-\varepsilon}}d\lambda \tag{32.3}$$

حيث $0 \leq a < \mu$ و $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي .
التكاملات الكسرية للدالة $\Phi(\mu)$ المتعلقة بدالة أخرى $\Phi_0(\mu)$ والمعرفة ب :

$$I_{a^+,\Phi_0}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_a^\mu \frac{\Phi_0'(\lambda)\Phi(\lambda)}{[\Phi_0(\mu)-\Phi_0(\lambda)]^{1-\varepsilon}}d\lambda \tag{33.3}$$

حيث $0 \leq a < \mu$.
التكامل الكسري المعمم من الجانب الأيسر للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε المعرف ب :

$$^{\gamma}I_{a^+}^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{\gamma^{1-\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)}\int_a^\mu \frac{\lambda^{\gamma-1}\Phi(\lambda)}{(\mu^\gamma-\lambda^\gamma)^{1-\varepsilon}}d\lambda \tag{34.3}$$

حيث $\mu > a$ و $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي .
التكامل الكسري المعمم من الجانب الأيمن للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة ε المعرف ب :

$$^{\gamma}I_{b^-}^{\prime(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{\gamma^{1-\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)}\int_\mu^b \frac{\lambda^{\gamma-1}\Phi(\lambda)}{(\lambda^\gamma-\mu^\gamma)^{1-\varepsilon}}d\lambda \tag{35.3}$$

حيث $\mu > b$ و $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي . هذه التعميمات الكسرية للتكاملات n أضعاف اليسار و اليمين من الشكل $\int_\mu^b \mu_1^{\gamma-1}d\mu_1 \int_{\mu_1}^b \mu_2^{\gamma-1}d\mu_2 \cdots \int_{\mu_{n-1}}^b \mu_n^{\gamma-1}\Phi(\mu_n)d\mu_n$ و $\int_a^\mu \mu_1^{\gamma-1}d\mu_1 \int_a^{\mu_1} \mu_2^{\gamma-1}d\mu_2 \cdots \int_a^{\mu_{n-1}} \mu_n^{\gamma-1}\Phi(\mu_n)d\mu_n$
حيث $n \in \mathbb{N}$ ، على التوالي. عندما $b = \infty$ ، التكامل الكسري المعمم يسمى تكامل *Liouville* .
التكامل الكسري *Riemann-Liouville* للدالة $\Phi(\mu)$ من الرتبة $\varepsilon(\varepsilon \geq 0)$ المعرف ب :

$$I^{(\varepsilon)}\Phi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^\mu \frac{\Phi(\lambda)}{(\mu-\lambda)^{1-\varepsilon}}d\lambda \qquad \varepsilon > 0 \tag{36.3}$$

$$I^{(0)}\Phi(\mu) = \Phi(\mu) \qquad \varepsilon = 0 \tag{37.3}$$

2.3 مبرهنة و سلسلة *Taylor* الكسرية المحلية

1.2.3 مبرهنة *Taylor* الكسرية المحلية في الدوال غير القابلة للتفاضل

مبرهنة 1.1.3 (مبرهنة *Taylor*)
نفترض أن $D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu) \in C_\varepsilon(a,b)$.ثم، من أجل $k = 0, 1, ..., n$ فإن :

$$\varphi(\mu) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon} + \frac{D^{((n+1)\varepsilon)}\varphi(\xi)}{\Gamma(1+(n+1)\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{(n+1)\varepsilon} \tag{38.3}$$

مع $\forall\mu \in (a,b)$, $a < \mu_0 < \xi < \mu < b$ حيث $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu) = \overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k\text{ -times}}\varphi(\mu)$.

البرهان 2.1.3
من خلال الإستفادة من :

$$_{\mu_0}I_\mu^{(k\varepsilon)}\left[D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)\right] - {}_{\mu_0}I_\mu^{((k+1)\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right] = D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)\frac{(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)} \tag{39.3}$$

نستنتج أن :

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{k=0}^{n}\left\{\mu_0 I_\mu^{(k\varepsilon)}\left[D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]-\mu_0 I_\mu^{((k+1)\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]\right\}\\&\quad=\varphi(\mu)-\mu_0 I_\mu^{((k+1)\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]\\&\quad=\textstyle\sum_{k=0}^{n}\left\{D^{(k\varepsilon)}\varphi\left(\mu_0\right)\frac{(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\right\}\end{aligned}\tag{40.3}$$

ومنه :

$$\begin{aligned}{}_{\mu_0}I_\mu^{((k+1)\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]&={}_{\mu_0}I_\mu^{(\varepsilon)}\left\{{}_{\mu_0}I_\mu^{(k\varepsilon)}\left[D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\right]\right\}\\&=D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\xi)_{\mu_0}I_\mu^{((k+1)\varepsilon)}1\\&=D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\xi)\frac{(\mu-\mu_0)^{(k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(k+1)\varepsilon)}\end{aligned}\tag{41.3}$$

حيث $\mu_0<\xi<\mu,\forall\mu\in(a,b)$.
لذلك ،أثبتنا النتيجة.

مبرهنة 2.2.3
لنفترض أن $D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\in C_\varepsilon(a,b)$.إذا كان $k=0,1,...,n$، فإن :

$$\varphi(\mu)=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon}+R_{n\varepsilon}(\mu-\mu_0)\tag{42.3}$$

مع $a<\mu_0<\xi<\mu<b$ ، $\forall\mu\in(a,b)$، حيث $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)=\overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$ و $R_{n\varepsilon}(\mu-\mu_0)=O((\mu-\mu_0)^{n\varepsilon})$.

البرهان 2.2.3
بإستخدام (38.3) نجد :

$$\left|\frac{R_{n\varepsilon}(\mu-\mu_0)}{(\mu-\mu_0)^{n\varepsilon}}\right|=\left|\frac{D^{((n+1)\varepsilon}\varphi(\xi)}{\Gamma(1+(k+1)\varepsilon)}\frac{(\mu-\mu_0)^{(n+1)\varepsilon}}{(\mu-\mu_0)^{n\varepsilon}}\right|=\left|\frac{D^{((n+1)\varepsilon}\varphi(\xi)}{\Gamma(1+(k+1)\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{\varepsilon}\right|\tag{43.3}$$

ومنه ، نستنتج أن :

$$\left|\frac{R_{n\varepsilon}(\mu-\mu_0)}{(\mu-\mu_0)^{n\varepsilon}}\right|=\left|\frac{D^{((n+1)\varepsilon}\varphi(\xi)}{\Gamma(1+(k+1)\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{\varepsilon}\right|=0\tag{44.3}$$

مبرهنة 3.3.3
لنفترض أن $D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu)\in C_\varepsilon(a,b)$،إذا كان $k=0,1,...,n$، فإن :

$$\varphi(\mu)=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\mu^{k\varepsilon}+\frac{D^{((n+1)\varepsilon)}\varphi(\theta\mu)}{\Gamma(1+(n+1)\varepsilon)}\mu^{(n+1)\varepsilon}\tag{45.3}$$

مع $0<\theta<1$، $\forall\mu\in(a,b)$ ، حيث $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu)=\overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$.

البرهان 2.3.3

من أجل $\mu_0 = 0$ و $\mu \in (a,b)$، بإستخدام (42.3) ، فإن :

$$\varphi(\mu) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon} + \frac{D^{((n+1)\varepsilon)}\varphi(\xi)}{\Gamma(1+(n+1)\varepsilon)}\mu^{(n+1)\varepsilon} \qquad (46.3)$$

حيث $a < \mu_0 < \xi < \mu < b$.

إذا كان $\xi = \theta\mu$ في (46.3) ، فإن :

$$\frac{D^{((n+1)\varepsilon)}\varphi(\xi)}{\Gamma(1+(n+1)\varepsilon)}\mu^{(n+1)\varepsilon} = \frac{D^{((n+1)\varepsilon)}\varphi(\theta\mu)}{\Gamma(1+(n+1)\varepsilon)}\mu^{(n+1)\varepsilon} \qquad (47.3)$$

مع $0 < \theta < 1$.

2.2.3 سلسلة *Taylor* الكسرية المحلية في الدوال المرجعية

مبرهنة 4.4.3

لنفترض أن $D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu) \in C_\varepsilon(a,b)$، إذا كان $k = 0,1,...,n$ ، فإن :

$$\varphi(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon} \qquad (48.3)$$

مع $a < \mu_0 < \mu < b$ ، $\forall\mu \in (a,b)$، حيث $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu) = \overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$.

البرهان 2.4.3

وفقا لمبرهنة *Taylor* الكسرية المحلية ، من (38.3) ، فإن :

$$\begin{aligned}\varphi(\mu) &= \lim_{\mu\to\mu_0}\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon} + \frac{D^{((n+1)\varepsilon)}\varphi(\mu_0)}{\Gamma(1+(n+1)\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{(n+1)\varepsilon}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu_0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}(\mu-\mu_0)^{k\varepsilon}\end{aligned} \qquad (49.3)$$

مع $a < \mu_0 < \xi < \mu < b$ ، $\forall\mu \in (a,b)$ ، حيث $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu) = \overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$.

في هذه الحالة ، نقدم النتيجة التالية.

أفترض أن $D^{((k+1)\varepsilon)}\varphi(\mu) \in C_\varepsilon(a,b)$.ثم،إذا كان $k = 0,1,...,n$ ، فإن :

$$\varphi(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\mu^{k\varepsilon} \qquad (50.3)$$

مع $a < 0 < \mu < b$،$\forall\mu \in (a,b)$ ، حيث $D^{(k\varepsilon)}\varphi(\mu) = \overbrace{D^{(\varepsilon)}\cdots D^{(\varepsilon)}}^{k-\ times}\varphi(\mu)$.

هذه السلسلة يقال أنها سلسلة *MacLaurin* الكسرية المحلية للدالة $\varphi(\mu)$.

3.2.3 سلسلة *MacLaurin* الكسرية المحلية في الدوال المرجعية

مبرهنة 5.5.3

في هذه الحالة ، نقدم سلسلة *MacLaurin* الكسرية المحلية في الدوال المرجعية:

(1) $E_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}$

(2) $E_\varepsilon(-\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}$

(3) $\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu^{(2k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(2k+1)\varepsilon)}$

(4) $\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu^{2k\varepsilon}}{\Gamma(1+2k\varepsilon)}$

(5) $\sinh_\varepsilon=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{(2k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(2k+1)\varepsilon)}$

(6) $\cosh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{2k\varepsilon}}{\Gamma(1+2k\varepsilon)}$

البرهان 2.5.3

إذا كانت $\varphi(\mu)$ الدالة غير القابلة للمفاضلة ، فإن سلسلة *Maclaurin* الكسرية المحلية تعطى من الشكل :

$$\varphi(\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\mu^{k\varepsilon} \qquad (51.3)$$

من ناحية أخرى ، يمكن تقديم كثيرة الحدود *Maclaurin* الكسرية المحلية ب :

$$T_n\left[\varphi(\mu)\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)}{\Gamma(1+k\varepsilon)}\mu^{k\varepsilon} \qquad (52.3)$$

(1) إلى حد أبعد ، بإستخدام العلاقة $D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)=1$ ، حيث $\varphi(0)=E_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$ ، نجد :

$$E_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}$$

(2) بطريقة مماثلة ، لما نأخذ $D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)=(-1)^k$ ، حيث $\varphi(0)=E_\varepsilon(-\mu^\varepsilon)$ و $k\in R_0$ ، نجد :

$$E_\varepsilon(-\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu^{k\varepsilon}}{\Gamma(1+k\varepsilon)}$$

(3) لدينا :

$$D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)=\begin{cases}(-1)^k, & 2k+1\\ 0, & 2k\end{cases}$$

حيث $\varphi(\mu)=\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$ و $k\in R_0$ ، ومنه نجد :

$$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu^{(2k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(2k+1)\varepsilon)}$$

(4) بنفس الطريقة لدينا :

$$D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)=\begin{cases}(-1)^k, & 2k\\ 0, & 2k+1\end{cases}$$

حيث $\varphi(\mu)=\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$ و $k\in R_0$ ، ومنه نجد :

$$\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu^{2k\varepsilon}}{\Gamma(1+2k\varepsilon)}$$

(5) لدينا :

$$D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)=\begin{cases}1, & 2k+1\\ 0, & 2k\end{cases}$$

حيث $\varphi(\mu)=\sinh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$ و $k\in R_0$ ، ومنه نجد :

$$\sinh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{(2k+1)\varepsilon}}{\Gamma(1+(2k+1)\varepsilon)}$$

(6) و بالمثل لنا :

$$D^{(k\varepsilon)}\varphi(0)=\begin{cases}1, & 2k\\ 0, & 2k+1\end{cases}$$

حيث $\varphi(\mu)=\cosh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$ و $k\in R_0$ ، ومنه نجد :

$$\cosh_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{2k\varepsilon}}{\Gamma(1+2k\varepsilon)}$$

في الصيغ أعلاه ، نلاحظ أن $R_0=R\cup 0$.

لتكن C ثابتا. التكاملات الكسرية المحلية لبعض الدوال غير القابلة للتفاضل المعرفة على المجموعات الفراكتالية المدرجة في الجدول (1.3).

لتكن التكاملات $m,n(m\neq n)$. التكامل الكسري المحلي لبعض الدوال غير القابلة للتفاضل عبر دالة *Leffler − Mittag* المعرفة على المجموعات الفراكتالية المدرجة في الجدول (2.3).

جدول 1.3: العمليات الأساسية للتكامل الكسري المحلي لبعض الدالات غير القابلة للمفاضلة المعرفة على المجموعات الفراكتالية

الدالة الأصلية	الدالة المحولة
C	$C\mu^{\varepsilon}/\Gamma(1+\varepsilon)$
$\mu^{k\varepsilon}/\Gamma(1+k\varepsilon)$	$\mu^{(k+1)\varepsilon}/\Gamma(1+(k+1)\varepsilon)$
$E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$	$E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})-1$
$E_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$	$\frac{E_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})-1}{C}$
$\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$	$-[\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})-1]$
$\sin_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$	$\frac{-[\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})-1]}{C}$
$\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$	$\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$
$\cos_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$	$\frac{\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})}{C}$
$\frac{\mu^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)}\sin_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$	$-\frac{1}{C}[\frac{\mu^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)}\cos_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})-\frac{1}{C}\sin_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$
$\frac{\mu^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)}\cos_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$	$\frac{1}{C}\{\frac{\mu^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)}\sin_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})-\frac{1}{C}[\cos_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})-1]\}$
$E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})\sin_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$	$\frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})[\sin_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})-C\cos_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})]+C}{1+C^2}$
$E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})\cos_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})$	$\frac{E_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})[\cos_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})+C\sin_{\varepsilon}(C\mu^{\varepsilon})]-1}{1+C^2}$

جدول 2.3: العمليات الأساسية للتكامل الكسري المحلي لبعض الدالات غير القابلة للمفاضلة عبر دالة *Mittag–Leffler* المعرفة على المجموعات الفراكتالية

الدالة الأصلية	الدالة المحولة
$\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$	0
$\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})$	0
$\sin_{\varepsilon}(m^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})$	0
$\cos_{\varepsilon}(m^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})$	0
$\sin_{\varepsilon}(m^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})\cos_{\varepsilon}(n^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})$	0
$\sin_{\varepsilon}(m^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})\cos_{\varepsilon}(m^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})$	0
$\sin_{\varepsilon}(m^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})\sin_{\varepsilon}(m^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})$	$\pi^{\varepsilon}/\Gamma(1+\varepsilon)$
$\cos_{\varepsilon}(n^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})\cos_{\varepsilon}(n^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})$	$\pi^{\varepsilon}/\Gamma(1+\varepsilon)$
$\frac{\sin_{\varepsilon}[(2n+1)\mu/2]^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon}\sin_{\varepsilon}(\mu/2)^{\varepsilon}}$	$\pi^{\varepsilon}/\Gamma(1+\varepsilon)$

خاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة بتطبيق حساب التفاضل والتكامل الكسري المحلي لحل الدوال غير القابلة للتفاضل ، والتي تعتمد على أهم التعاريف والخصائص للمشتقات والتكاملات الكسرية المحلية ، و بعض المقارنات و الدوال المعرفة على المجموعات الفراكتالية ، و كذلك مبرهنة *Taylor* الكسرية المحلية في الدوال غير القابلة للتفاضل و سلسلة *Taylor* الكسرية المحلية في الدوال المرجعية . وتكمن أهمية هذه الطريقة في الوصول إلى النتيجة المرجوة بشكل مبسط ودقيق .

المراجع العلمية

[1] X.-J. Yang, Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science,New York, 2012.

[2] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal, Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions, Chaos 6 (4) (1996) 505–513.

[3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations North-Holland Mathematical Studies, vol. 204, Elsevier (North-Holland)Science Publishers, Amsterdam, London, New York, 2006.

[4] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A.T. Machado, Advances in Fractional Calculus, Springer,Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

[5] A. Carpinteri, F. Mainardi, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics,Springer, New York, 1997.

[6] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[7] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal, Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives, Pramana 48 (1) (1997) 49–68.

[8] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal, Local fractional Fokker-Planck equation, Phys. Rev. Lett.80 (2) (1998) 214.

[9] A. Carpinteri, P. Cornetti, A fractional calculus approach to the description of stress and strain localization in fractal media, Chaos Soliton. Fract. 13 (1) (2002) 85–94.

[10] A. Carpinteri, B. Chiaia, P. Cornetti, Static-kinematic duality and the principle of virtual work in the mechanics of fractal media, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 191 (1)(2001) 3–19.

[11] A. Carpinteri, B. Chiaia, P. Cornetti, The elastic problem for fractal media: basic theory and finite element formulation, Comput. Struct. 82 (6) (2004) 499–508.

[12] A. Carpinteri, P. Cornetti, K.M. Kolwankar, Calculation of the tensile and flexural strength of disordered materials using fractional calculus, Chaos Soliton. Fract. 21 (3) (2004)623–632.

[13] Y. Chen, Y. Yan, K. Zhang, On the local fractional derivative, J. Math. Anal. Appl. 362 (1) (2010) 17–33.

[14] F.B. Adda, J. Cresson, About non-differentiable functions, J. Math. Anal. Appl. 263 (2)(2001) 721–737.

[15] A. Babakhani, V. Daftardar-Gejji, On calculus of local fractional derivatives, J. Math.Anal. Appl. 270 (1)(2002) 66–79.

[16] X.-J. Yang, Local fractional integral transforms, Prog. Nonlinear Sci. 4 (1) (2011) 1–225.

[17] W. Chen, Time-space fabric underlying anomalous diffusion, Chaos Soliton. Fract. 28 (4)(2006) 923–929.

[18] W. Chen, H. Sun, X. Zhang, D. Korovsak, Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives, Comput. Math. Appl. 59 (5) (2010) 1754–1758.

[19] J.-H. He, A new fractal derivation, Therm. Sci. 15 (Suppl. 1) (2011) 145–147.

[20] J.-H. He, S.K. Elagan, Z.-B. Li, Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus, Phys. Lett. A 376 (4) (2012)257–259.234 Bibliography

[21] X.-J. Yang, Local Fractional Functional Analysis and Its Applications, Asian Academic Publisher Limited, Hong Kong, 2011.

[22] X.-J. Yang, H.M. Srivastava, J.-H. He, D. Baleanu, Cantor-type cylindrical-coordinate method for differential equations with local fractional derivatives, Phys. Lett. A 377 (28)(2013) 1696–1700.

[23] X.-J. Yang, D. Baleanu, H.M. Srivastava, Local fractional similarity solution for the diffusion equation defined on Cantor sets, Appl. Math. Lett. 47 (2015) 54–60.

[24] E.C.D. Oliveira, J.A.T. Machado, A review of definitions for fractional derivatives and integral, Math. Probl. Eng. (2014) Article ID 238459, 6 pages.

[25] Y. Zhang, Solving initial-boundary value problems for local fractional differential equation by local fractional Fourier series method, Abstr. Appl. Anal. (2014) Article ID912464, 5 pages.

[26] W. Chen, X.-D. Zhang, D. Korovsak, Investigation on fractional and fractal derivative relaxation-oscillation models, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 11 (1) (2010) 3–10.

[27] A.-M. Yang, Y.-Z. Zhang, Y. Long, The Yang-Fourier transforms to heat-conduction in a semi-infinite fractal bar, Therm. Sci. 17 (3) (2013) 707–713.

[28] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[29] M.D. Ortigueira, Fractional central differences and derivatives, J. Vib. Control. 14 (9-10)(2008) 1255–1266.

[30] M.D. Ortigueira, J.J. Trujillo, Generalized Grünwald-Letnikov fractional derivative and its Laplace and Fourier transforms, J. Comput. Nonlinear Dyn. 6 (3) (2011) Article ID 034501.

[31] J.A.T. Machado, Fractional derivatives: probability interpretation and frequency response of rational approximations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14 (9) (2009) 3492–3497.

[32] J.A.T. Machado, Fractional coins and fractional derivatives, Abstr. Appl. Anal. (2013)Article ID 205097, 5 pages.

[33] M.D. Ortigueira, F. Coito, From differences to derivatives, Fract. Calc. Appl. Anal. 7 (4)(2004) 459.

[34] A. Atangana, A. Secer, A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions, Abstr. Appl. Anal. (2013) Article ID 279681,8 pages.

[35] G. Jumarie, On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to (dt) , Appl. Math. Lett. 18 (7) (2005) 739–748.

[36] G. Jumarie, Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results, Comput. Math. Appl. 51 (9) (2006) 1367–1376.

[37] G. Jumarie, Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven by Brownian motions, Appl. Math. Model. 32 (5) (2008) 836–859.

[38] G. Jumarie, Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for nondifferentiable functions, Appl. Math. Lett. 22 (3)(2009) 378–385.

[39] C.-P. Li, Z.-G. Zhao, Introduction to fractional integrability and differentiability, Eur.Phys. J. 193 (1) (2011) 5–26.

[40] R. Khalil, M. Al-Horani, A. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, J. Comput. Appl. Math. 264 (2014) 65–70.

[41] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, J. Comput. Appl. Math. 279 (2015)57–66.

[42] U.N. Katugampola, New approach to a generalized fractional integral, Appl. Math.Comput. 218 (3) (2011) 860–865.

[43] M. Caputo, M. Fabrizio, A new definition of fractional derivative without singular kernel, Prog. Fract. Differ. Appl. 1 (2) (2015) 73–85.

[44] J. Losada, J.J. Nieto, Properties of a new fractional derivative without singular kernel,Prog. Fract. Differ. Appl. 1 (2) (2015) 87–92.

[45] K.J.Falconer , The Geometry Of Fractal Sets - Google Book .

الملحق

التشبيهات للدوال المثلثية المعرفة على مجموعات $Cantor$

التشبيهات للدوال المثلثية التقليدية المعرفة على مجموعات $Cantor$. هنا نقدم البراهين لتشبيهات الدوال المثلثية [1, 6, 21].

★

$$\sin_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon) = \frac{1 - cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}
\sin_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon) &= \left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) - E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)}{2i^\varepsilon}\right)^2 \\
&= \frac{(E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) - E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon))^2}{4i^{2\varepsilon}} \\
&= \frac{E_\varepsilon^2(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) + E_\varepsilon^2(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon) - 2}{4i^{2\varepsilon}} \\
&= \frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon(2\mu)^\varepsilon) + E_\varepsilon(-i^\varepsilon(2\mu)^\varepsilon) - 2}{4i^{2\varepsilon}} \\
&= \frac{1 - \cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

★

$$\cos_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon) = \frac{1 + cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
\cos_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon) &= \left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) + E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) + E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon))^2}{4i^{2\varepsilon}} \\
&= \frac{E_\varepsilon^2(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) + E_\varepsilon^2(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon) + 2}{4} \\
&= \frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon(2\mu)^\varepsilon) + E_\varepsilon(-i^\varepsilon(2\mu)^\varepsilon) + 2}{4} \\
&= \frac{1 + \cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

★

$$\cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon = \cos_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon) - \sin_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\cos_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon)-\sin_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon)&=\frac{1+\cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}-\frac{1-\cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}\\&=\cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon\end{aligned}$$

★

$$\cos_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon)+\sin_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon)=1$$

البرهان:

$$\begin{aligned}\cos_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon)+\sin_\varepsilon^2(\mu^\varepsilon)&=\frac{1+\cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}+\frac{1-\cos_\varepsilon(2\mu)^\varepsilon}{2}\\&=1\end{aligned}$$

★

$$\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)=\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)&=\left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)+E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)}{2}\right)\left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\eta^\varepsilon)+E_\varepsilon(-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)}{2}\right)\\&=\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon+i^\varepsilon\eta^\varepsilon)+E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)+E_\varepsilon(i^\varepsilon\eta^\varepsilon-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)+E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)}{4}\\&=\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4}+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4}\\&+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4}+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4}\\&=\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}\end{aligned}$$

★

$$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)=-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)&=\left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)-E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)}{2i^\varepsilon}\right)\left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\eta^\varepsilon)-E_\varepsilon(-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)}{2i^\varepsilon}\right)\\&=-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4}+\frac{\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon-\mu^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon-\mu^\varepsilon)}{4}\\&+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4}-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4}\\&=-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4}+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4}\\&+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4}-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4}\\&=-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}\end{aligned}$$

★

$$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon) = \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}
\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon) &= \left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)-E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)}{2i^\varepsilon}\right)\left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\eta^\varepsilon)+E_\varepsilon(-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)}{2}\right)\\
&= \frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon+i^\varepsilon\eta^\varepsilon)+E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)-E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon+i^\varepsilon\eta^\varepsilon)-E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}\\
&= -\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}\\
&-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}\\
&= \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}
\end{aligned}$$

★

$$\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon) = \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}
\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon) &= \left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)+E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)}{2}\right)\left(\frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\eta^\varepsilon)-E_\varepsilon(i^\varepsilon\eta^\varepsilon)}{2i^\varepsilon}\right)\\
&= \frac{E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon+i^\varepsilon\eta^\varepsilon)+E_\varepsilon(i^\varepsilon\eta^\varepsilon-i^\varepsilon\mu^\varepsilon)-E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)-E_\varepsilon(-i^\varepsilon\mu^\varepsilon-i^\varepsilon\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}\\
&= \frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}+\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}\\
&-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}-\frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)}{4i^\varepsilon}\\
&= \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}
\end{aligned}$$

★

$$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon) = \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)+\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}
\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon) &= \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}\\
&+\frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2}\\
&= \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)+\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)
\end{aligned}$$

★

$$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon) = \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)-\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon) &= \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2} \\ &- \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2} \\ &= \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)-\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)\end{aligned}$$

★

$$\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)=\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)-\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon) &= \frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2} \\ &+ \frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2} \\ &= \cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)-\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)\end{aligned}$$

★

$$\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)=\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon) &= \frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)+\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2} \\ &- \frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon+\eta^\varepsilon)-\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon-\eta^\varepsilon)}{2} \\ &= \cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\cos_\varepsilon(\eta^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\sin_\varepsilon(\eta^\varepsilon)\end{aligned}$$

★

$$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=2\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon\right]\cos_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon\right]$$

البرهان :

$$\begin{aligned}2\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon\right]\cos_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon\right] &= \sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon+\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^\varepsilon\right] \\ &+ \sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon-\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^\varepsilon\right] \\ &= \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)+\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\end{aligned}$$

★

$$\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)-\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)=2\cos_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon\right]\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^\varepsilon\right]$$

البرهان :

$$
\begin{aligned}
2\cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right]\sin_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] &= \sin_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}+\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] \\
&- \sin_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}-\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] \\
&= \sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})-\sin_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

★

$$
\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})+\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = 2\cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right]\cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right]
$$

البرهان :

$$
\begin{aligned}
2\cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right]\cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] &= \cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}+\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] \\
&+ \cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}-\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] \\
&= \cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})+\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

★

$$
\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})-\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon}) = -2\sin_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right]\sin_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right]
$$

البرهان :

$$
\begin{aligned}
-2\sin_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right]\sin_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] &= \cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}+\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] \\
&- \cos_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\mu+\eta}{2}\right)^{\varepsilon}-\left(\frac{\mu-\eta}{2}\right)^{\varepsilon}\right] \\
&= \cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})-\cos_{\varepsilon}(\mu^{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

★

$$
[E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})]^{k} = \left(\cos_{\varepsilon}\left[(k\mu)^{\varepsilon}\right]+i^{\varepsilon}\sin_{\varepsilon}\left[(k\mu)^{\varepsilon}\right]\right)
$$

البرهان :

لما $k=0$ و $k=1$ فهذا صحيح.

لما $k=n$ نفترض أن :

$[E_{\varepsilon}(i^{\varepsilon}\mu^{\varepsilon})]^{k} = \cos_{\varepsilon}\left[(k\mu)^{\varepsilon}\right]+i^{\varepsilon}\sin_{\varepsilon}\left[(k\mu)^{\varepsilon}\right]$

لما $k=n+1$ نجد :

$$\begin{aligned}
[E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)]^{k+1} &= \left(\cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]+i^\varepsilon\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]\right)\left(\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)+i^\varepsilon\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\right)\\
&= \cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)+i^\varepsilon\cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\\
&+ i^\varepsilon\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)-\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)\\
&= \frac{\cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon+\mu^\varepsilon]+\cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon-\mu^\varepsilon]}{2}\\
&+ i^\varepsilon\frac{\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon+\mu^\varepsilon]-\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon-\mu^\varepsilon]}{2}\\
&+ i^\varepsilon\frac{\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon+\mu^\varepsilon]+\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon-\mu^\varepsilon]}{2}\\
&+ \frac{\cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon+\mu^\varepsilon]-\cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon-\mu^\varepsilon]}{2}\\
&= \cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon+\mu^\varepsilon]+i^\varepsilon\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon+\mu^\varepsilon]\\
&= \cos_\varepsilon[(k+1)^\varepsilon\mu^\varepsilon]+i^\varepsilon\sin_\varepsilon[(k+1)^\varepsilon\mu^\varepsilon]
\end{aligned}$$

* في هذه الحالة ، نستخدم الصيغة التالية :

$$[E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)]^k=\left(\cos_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]+i^\varepsilon\sin_\varepsilon[(k\mu)^\varepsilon]\right)=E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(k\mu)^\varepsilon\right]$$

لتكن

$$\theta^\varepsilon=\sum_{n=1}^{k}\cos_\varepsilon(n\mu)^\varepsilon$$

و

$$\vartheta^\varepsilon=\sum_{n=1}^{k}\sin_\varepsilon(n\mu)^\varepsilon$$

بعد ذلك ، يمكننا بناء دالة :

$$\begin{aligned}
\Theta &= \theta^\varepsilon+i^\varepsilon\vartheta^\varepsilon\\
&= \sum_{n=1}^{k}E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(n\mu)^\varepsilon\right]
\end{aligned}$$

و بالتالي نحصل على :

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)\Theta &= E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)(\theta^\varepsilon+i^\varepsilon\vartheta^\varepsilon)\\
&= E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)\left\{\sum_{n=1}^{k}E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(n\mu)^\varepsilon\right]\right\}\\
&= \sum_{n=2}^{k+1}E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(n\mu)^\varepsilon\right]
\end{aligned}$$

لذلك ، لدينا :

$$\Theta(E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)-1)=E_\varepsilon\left[i^\varepsilon((k+1)\mu)^\varepsilon\right]-E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon)$$

التي تؤدي إلى :

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \theta^\varepsilon + i^\varepsilon \vartheta^\varepsilon \\
&= \frac{E_\varepsilon\left[i^\varepsilon((k+1)\mu)^\varepsilon\right] - E_\varepsilon(i^\varepsilon \mu^\varepsilon)}{(E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) - 1)} \\
&= \frac{E_\varepsilon(-i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon) E_\varepsilon\left[i^\varepsilon((k+1)\mu)^\varepsilon\right] - E_\varepsilon(i^\varepsilon \mu^\varepsilon)}{E_\varepsilon(-i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon)(E_\varepsilon(i^\varepsilon\mu^\varepsilon) - 1)} \\
&= \frac{E_\varepsilon\left[i^\varepsilon((k+\frac{1}{2})\mu)^\varepsilon\right] - E_\varepsilon(i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon)}{E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon\right] - E_\varepsilon\left[-i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon\right]} \\
&= E_\varepsilon\left[i^\varepsilon\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]\left\{\frac{E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(\frac{k\mu}{2})\mu)^\varepsilon\right] - E_\varepsilon(-i^\varepsilon(\frac{k\mu}{2})^\varepsilon)}{E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon\right] - E_\varepsilon\left[-i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon\right]}\right\} \\
&= E_\varepsilon\left[i^\varepsilon\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]\left\{\frac{\frac{E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(\frac{k\mu}{2})\mu)^\varepsilon\right] - E_\varepsilon(-i^\varepsilon(\frac{k\mu}{2})^\varepsilon)}{2i^\varepsilon}}{\frac{E_\varepsilon\left[i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon\right] - E_\varepsilon\left[-i^\varepsilon(\frac{\mu}{2})^\varepsilon\right]}{2i^\varepsilon}}\right\} \\
&= E_\varepsilon\left[i^\varepsilon\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]\left\{\frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{k\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}\right\} \\
&= \left\{\frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{k\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}\right\}\left\{\cos_\varepsilon\left[\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right] + i^\varepsilon \sin_\varepsilon\left[\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]\right\}
\end{aligned}
$$

وبالتالي ، نحصل على :

$$
\theta^\varepsilon = \sum_{n=1}^{k} \cos_\varepsilon(n\mu)^\varepsilon = \left\{\frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{k\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}\right\}\cos_\varepsilon\left[\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]
$$

و

$$
\vartheta^\varepsilon = \sum_{n=1}^{k} \sin_\varepsilon(n\mu)^\varepsilon = \left\{\frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{k\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}\right\}\sin_\varepsilon\left[\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]
$$

حيث : $\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right] \neq 0$

الآن ، يمكننا تقديم الصيغة التالية :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k} \cos_\varepsilon(n\mu)^\varepsilon &= \frac{1}{2} + \left\{\frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{k\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}\right\}\cos_\varepsilon\left[\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right] \\
&= \frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right] + 2\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{k\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]\cos_\varepsilon\left[\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]}{2\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]} \\
&= \frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right] + \sin_\varepsilon\left[\left(\frac{k\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]\cos_\varepsilon\left[\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]}{2\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]} \\
&= \frac{\sin_\varepsilon\left[\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\mu\right)^\varepsilon\right]}{2\sin_\varepsilon\left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^\varepsilon\right]}
\end{aligned}
$$

$$D_{k,\varepsilon}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k} \cos_\varepsilon (n\mu)^\varepsilon = \frac{\sin_\varepsilon \left[\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \mu \right)^\varepsilon \right]}{2 \sin_\varepsilon \left[\left(\frac{\mu}{2} \right)^\varepsilon \right]}$$

لتكن دالة الظل المعرفة على مجموعات *Cantor* حيث :

$$\tan_\varepsilon(\mu^\varepsilon) = \frac{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)}{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)}$$

لتكن دالة ظل التمام المعرفة على مجموعات *Cantor* حيث :

$$\cot_\varepsilon(\mu^\varepsilon) = \frac{\cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)}{\sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon)}$$

حيث $\mu \in R$ و $0 < \varepsilon \leq 1$

$$\tan_\varepsilon(\mu^\varepsilon) = \frac{\sin_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]}{1 + \cos_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]} = \frac{1 - \cos_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]}{\sin_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]}$$

البرهان :

$$\begin{aligned} \tan_\varepsilon(\mu^\varepsilon) &= \frac{2 \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon) \cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)}{2 \cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon) \cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)} \\ &= \frac{\sin_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]}{1 + \cos_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]} \end{aligned}$$

وبالتالي ، نحصل على :

$$\begin{aligned} \tan_\varepsilon(\mu^\varepsilon) &= \frac{2 \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon) \cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)}{2 \sin_\varepsilon(\mu^\varepsilon) \cos_\varepsilon(\mu^\varepsilon)} \\ &= \frac{1 - \cos_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]}{\sin_\varepsilon \left[(2\mu)^\varepsilon \right]} \end{aligned}$$

مقدمة في المشتقات و التكاملات الكسرية المحلية

الملخص

إن الهدف من هذا العمل هو إعطاء لمحة موجزة عن موضوع المشتقات والتكاملات الكسرية المحلية ، وذلك بإعطاء التعاريف و النظريات الأساسية بإعتباره موضوعا حديث النشأة ، و هذا من الأهمية نظرا للدور الكبير الذي يلعبه في نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية التي عجزت الرياضيات الكلاسيكية عن التعبير عنها ، وكذا حل العديد من المسائل خاصة ما تتعلق بالدوال غير القابلة للتفاضل ، حيث تم تطبيق المشتقات و التكاملات الكسرية المحلية لحلها ، كما تم تحويل العديد من الظواهر الفيزيائية إلى معادلات تفاضلية كسرية حققت نتائج دقيقة.

الكلمات المفتاحية:

المشتقات و التكاملات الكسرية المحلية - غير القابلة للتفاضل - معادلات تفاضلية كسرية - الفراكتال

Introduction to local fractional derivatives and integrals

Abstract

The aim of this work It is to give a brief overview of the topic of local fractional derivatives and integrals , and that by giving basic definitions and theories as a subject newly established ,This is importance given the big role which he plays in modeling many natural phenomena which classical mathematics failed to express ,as well as solving many of problems especially when it comes to functions non-dffierentiable , as well as applying local fractional derivatives and integrals to solve it ,as been transformation many of physical phenomena to fractional dffierential equations It achieved accurate results .

key words :

local fractional derivatives and integrals - non-dffierentiable - fractional dffierential equations - fractal

pour dérivation et intégration fractionnaire local

Résumé

Le but de ce travail Il est de donner un bref aperçu du sujet des dérivation et intégration fractionnaire local, et qu'en donnant des définitions de base et des théories comme un sujet nouvellement établi , Ceci est important étant donné le grand rôle qu'il joue dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels que les mathématiques classiques n'ont pas réussi à exprimer, ainsi que dans la résolution de nombreux problèmes , en particulier lorsqu'il s'agit des fonctions non dffiérentiables , ainsi qu'en appliquant des dérivation et intégration fractionnaire local pour le résoudre, comme cela a été la transformation de nombreux phénomènes physiques aux équations dffiérentielles fractionnaires il a obtenu des résultats précis .

Mots clés :

dérivation et intégration fractionnaire local - non dffiérentiables - équations dffiérentielles fractionnaires - fractal