جامعة قاصدي مرباح-ورقلة
كلية الرياضيات-علوم المادة
قسم الفيزياء

مذكرة

لإستكمال متطلبات الحصول على

شهادة الماستر

تقديم:

بقي قطرالندى و مسعودي أم الخير

الموضوع

دراسة بعض المعادلات النسبية وغير النسبية في إطار مبدأ الإرتياب المعمم

الميدان: علوم المادة

الشعبة: الفيزياء

التخصص: الفيزياء النظرية

نوقشت يوم 2020/09/28

أمام اللجنة:

الرئيس:	الحاج بالشراير بلغيثار	أستاذ مساعد أ	جامعة ورقلة
المشرف:	خوجة الأمين	أستاذ محاضر أ	جامعة ورقلة
المُناقش:	بن الزائر هجيرة	أستاذ محاضر أ	جامعة ورقلة

السنة الجامعية 2020/2019

الإهـــــــداء

الحمــد لله الذي وفقــنـا و أنــار دربنـا بالعـــلـم والمعــرفة فياربـ لك الحمــد و كما ينبغــي لجلال وجهــك وعظـيم سلطانــك ، وصل الله على خــير الأنام محمـــد عليه الصــلاة والسـلام ....

A

نهــدي ثمــرة جهــدنا إلى: ....

إلى والديــنا الكــــريمــين حفظهــما الله وإلى مــن حفــزونا إلى التقدم أخــوتنا وأخواتــنا رعاهــــم الله إلى كــل من علمـــنا حرفـا في سبيــل العــلم والمعــــرفة ،إلي جميـــع أصدقائنـا وزملائنـا

إلى من يدعون لنا جهرا و في الخفاء

A

★★★ قطرالندى و أم الخير ★★★

الشكر والتقدير

أولا وقبل كل شيء نشكر الله عز وجل الذي وفقنا وألهمنا القدرة على إنجاز هذا العمـل ...

كما يسعدنا أن نتقـدم بالشكر والتقدير إلى الأستـاذ المشرف خـوجة الأميــن لما قدمه لنا من توجيهات فجـــزاه الله عنا خير جزاء، وأشكر اللجنــة المنـاقشة على قبولهـا منـاقشة هذه المــذكرة ...

وفـي الأخير سوف نتـقدم بالشكر الجزيل لكل من سـاعدنـا ودعمنـا من قـريب أو من بعيـد من أجـل إنجـاز هذه المــذكرة.

الفهرس

قائمة الأشكال

مقدمة عامة

في السنوات الأخيرة قدمت عدة أعمال حول جبر هايزنبارغ المعمم في ميكانيكا الكم انطلاقا من نظريات الأوتار والجاذبية الكمومية والتي أدت إلى وجود حد أدنى في الطول في حدود طول بلانك [1, 2] هذا ما أدى إلى اهتمام كبير من الباحثين بدراسة مسائل ميكانيكا الكم في وجود الطول الأصغري . فقد تمت دراسة مثلا معادلات شرودنغر ،ديراك وكلاين-جوردن في وجود كومنات مختلفة مثل كمون كولوم (Coulomb) ،يوكاوا (Yukawa) ،وود-ساكسون (Woode-Saxon) ، كراتزر (Kratzer) [3] .

في هذه المذكرة في :

- **الفصل الأول** سنلقي الضوء على مفاهيم الطول الأصغري والتمثيلات الممكنة في ميكانك الكم.
- **الفصل الثاني** نحاول حل معادلة ذاتDKP بعد واحد في وجود الطول الأصغري وتحت تأثير حقل سلمي .
- **الفصل الثالث** سندرس معادلة شرودنغر في كمون هارتمان ونحاول إيجاد التصحيحات في الطاقة بإستعمال نظرية الإضطرابات .
- **الفصل الرابع** نطبق الطول الأصغري على معادلة كلاين-جوردن ذات بعد واحد في وجود حقل كهربائي ثابت ونحاول إيجاد الحلول التحليلية للمعادلة .

نختم هذه المذكرة بخلاصة عامة .

الفصل I

مقدمة حول نظرية الطول الأصغري

1.I مقدمة

منذ عدة سنوات سابقة كانت هناك [1] دراسات في نظرية الأوتار ونظرية الجاذبية الكمية اقترحت تصحيحات بسيطة على علاقة عدم اليقين لهايزنبارغ [4, 5, 6, 7] والتي تشير الى وجود حد أدنى غير معدوم للموضع $(\Delta X)_{min}$

يمكن رؤية هذا كمجال في واضح في الفضاء الزكاموني للأبعاد من رتبة طول "بلانك" $l_p = 10^{-35}m$ [8]

اذا أن الطابع النقطي للجسيمات مسلمة أساسية في ميكانيك الكم ونتائجها الأساسية هي تموقع الجسيمات في الطاقات الكبيرة كما يمكن حساب موضع الجسيم في ارتياب صغير وهذا يوضح بعلاقة عدم اليقين لهيزنبارغ المعتادة [4] . وهذا مادفع الفيزيائيين في السنوات الأخيرة الى الاهتمام بفكرة الطول الأصغري في معالجة المسائل الفيزيائية في ميكانيك الكم من خلال تصحيحات للعلاقات التبديلية

تمت دراسة جبر هايزنبارغ من قبل kempf واخرون [4, 5, 7] لذلك نحاول تطبيق هذا الجبر المعدل على بعض الظواهر الفيزيائية [9] ، ولتحليل النتائج المتحصل عليهامع الميكانيك الكوانتي العادي .

2.I مبدأ عد اليقين المعمم (GUP)

العديد من النظريات تقدم مفهوم الطول الأصغري ،خاصة النظريات التي تعتمد على مبدأعدم اليقين المعمم (GUP) ،مع النسبية الخاصة المشوهة (DSR) [10, 9]

نفرض أنه عند زيادة كمية حركة الجسيم فان،p شعاع الموجة $\vec{k}$ لايجب أن يتجوز قيمة قصوى من رتبة

$(1/l_m)$[11]. ونتيجة لذلك نحصل على انحرافات مرتبطة بعلاقة خطية تالية $p = h\vec{k}$ أي عند اقتراب p من السلم $(\hbar \setminus l_m)$

وهذا يفسر فيزيائيا بأن جسيمات لا يمكن ان تمتلك أطوال موجية صغيرة $(2\pi/k)$ [12]

نفرض وجود علاقة $p = F(k)$ ولتبسيط الأمر نأخذ بعين الأعتبار هذه المسلمة في بعد واحد .

$$p = \frac{\hbar}{l_m} \tan h^{-1}(l_m k) \tag{I.1}$$

باستخدام النشر : $\tan y = y + \frac{y^3}{3}....$ حتى الرتبة الثانية لـ p, l_m نكتب العبارة كالتالي:

$$p = \hbar \left(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + ... \right) \tag{I.2}$$

بفرض $\hat{k}$ و $\hat{X}$ يحققان المبدل $\left[\hat{X}, \hat{k} \right] = i\delta_{ij}$ والعلاقة العامة

$$\left[\hat{X}, \hat{A}\left(k\right) \right] = i\frac{\partial A}{\partial K} \tag{I.3}$$

نحصل على تعريف هاينبارغ المعدل :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\left(k\right) \right] = i\frac{\partial \hat{P}}{\partial K} \tag{I.4}$$

بتعويض (I.4) في العبارة (I.2):

$$i\frac{\partial \hat{P}}{\partial K} = i\hbar \left(1 + l_m^2 \hat{k}^2 + ... \right)$$

ولدينا :

$$l_m^2 \hat{k}^2 \approx \frac{l_m^2 \hat{P}^2}{\hbar^2} + O(l_m^4) \tag{I.5}$$

اذا نجد :

$$\left[\hat{X},\hat{P}\left(k\right)\right]=i\hbar\left(1+\left(\frac{l_m^2}{\hbar}\right)^2\hat{P}^2+....\right) \tag{I.6}$$

نضع

$$\beta=\left(\frac{l_m^2}{\hbar}\right)^2 \tag{I.7}$$

في هذه الحالة فإن الطول الأصغري يكتب :

$$l_m=\hbar\sqrt{\beta} \tag{I.8}$$

بالتعويض نجد:

$$\left[\hat{X},\hat{P}=i\hbar(1+\beta\hat{P}^2+.....\right] \tag{I.9}$$

ترتبط علاقة عدم اليقين مباشرة بعلاقة التبديل في ميكانيك الكم من خلال العبارة [13]:

$$(\triangle A)(\triangle B)\geq\frac{1}{2}\mid\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\mid \tag{I.10}$$

ومنه فإنه يمكن أن نكتب :

$$(\triangle X)(\triangle P)\geq\frac{1}{2}\mid\left\langle\frac{\partial\hat{P}}{\partial K}\right\rangle\mid \tag{I.11}$$

عند أخذ المعامل β من الرتبة الأولى تصبح معادلة عدم اليقين معدلة على نحو التالي :

$$(\triangle X)(\triangle P) = \frac{\hbar}{2}(1 + \beta\left\langle \hat{P}^2 \right\rangle) \tag{I.12}$$

حسب تعريف الانحراف التربعي المتوسط $(\triangle P)^2 = \left\langle \hat{P}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{P} \right\rangle^2$. يمكن كتابة :

$$(\triangle X)(\triangle P) \geq \frac{\hbar}{2}\left\{1 + \beta(\triangle p)^2 + \gamma\right\} \tag{I.13}$$

حيث $\gamma = \beta\left\langle \hat{P} \right\rangle^2$.

تشير علاقة عدم اليقين (I.13) الى أدنى حد من عدم اليقين المعمم للموضع وتمت دراستها من طرف Kempf واخرين [4, 5, 14]

3.I التمثيل النظري لعلاقات عدم اليقين المعممة:

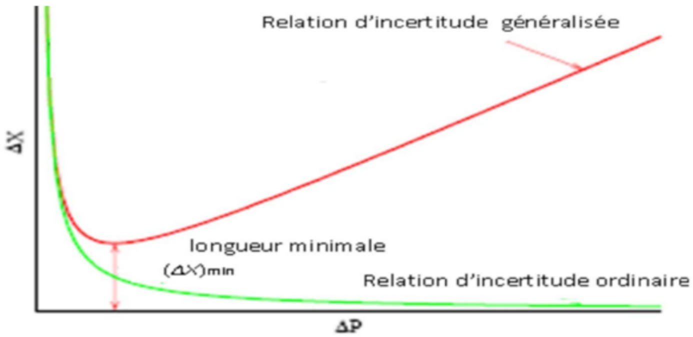
من عبارة عدم اليقين المعممة (I.13) :

$$(\triangle X)(\triangle P) \geq \frac{\hbar}{2}\left\{1 + \beta(\triangle p)^2 + \gamma\right\} \tag{I.14}$$

حيث β و γ معاملات موجبة حيث β مرتبط بالطول الأصغري بعلاقة $l_m = \hbar\sqrt{\beta}$ γ يعتمدعلى القيمة الوسطية لكمية الحركة في الصيغة التالية $\gamma = \beta\left\langle \hat{P} \right\rangle^2$

في ميكانيك الكم العادي توضع $(\beta = \gamma = 0)$, اذا كانت $\triangle P$ كبيرة بما يكفي لتكون $\triangle X$ صغيرا مما يعني أنه يمكن حلها في أبعاد المسافات الصغيرة باستخدام جسيمات تملك طاقة كبيرة بالشكل الكافي

يمكن أن نمثل العلاقة بين الميكانيك الكمي والميكانيك الكمي المعمم على النحو التالي :



الشكل 1.I: منحنى علاقة عدم اليقين المعممة بإدراج " الحد الادنى للطول"

من خلال منحنى علاقة عدم اليقين الممثلة في الشكل (1.1) نلاحظ انه من اجل القيم الصغيرة من $\triangle P$ وعلاقة عدم اليقين المعممة وعلاقة عدم اليقين العادية المتطابقان تقريبا وتصبح بشكل ملحوظ مختلفة عندما تكون $\triangle P$ كبيرة.

تعطى علاقة الارتياب المعممة العامة بالعبارة التالية :

$$(\triangle X)(\triangle P) \geq \frac{h}{2}\left\{1+\alpha\left(\triangle X^{2}\right)+\beta(\triangle P)^{2}+\gamma\right\} \tag{I.15}$$

حيث

$$\gamma=\alpha\left\langle\hat{X}\right\rangle^{2}+\beta\left\langle\hat{P}\right\rangle^{2}$$

نقتصر دراستنا فقط على الحالة $\alpha=0$ وهذا يعني اننا نعتبر وجود حد الادنى على الموضع فقط تمثل هذه الحالة اهتماما خاصا في ميكانيك الكم المعمم .

4.I الهرمترية والحالات الذاتية لمؤثر الموضع

في ميكانيك الكم العادي يتم تمثيل المؤثرين $\hat{P}$ و $\hat{X}$ اللذان يؤثران على الدوال الموجية في فضاء الاحداثيات او كمية الحركة .

$$(\psi(x)=\langle x \mid \psi\rangle \text{ او } \psi(P)=\langle P \mid \psi\rangle)$$

$|X\rangle$ و $|P\rangle$ هي حالات ذاتية لـ $\hat{X}$ و $\hat{P}$

بالمعنى الدقيق $\langle X \mid$ و $\langle P \mid$ ليست حالات فيزيائية لانها ليست قابلة للتنظيم ، وبالتالي لا تنتمي الى اي فضاء "هيلبرت". و مع ذلك المؤثران $\hat{P}$ و $\hat{X}$ مرافقان هرميتان وحالتهما الذاتية يمكن تقريبها بدقة كبيرة وكنتيجة فان الارتياب يمكن اعطاءه بالكتابة التالية [2]:

$$\lim_{n\to\infty} (\triangle X)_{|\psi n)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (\triangle P)_{|\psi n)} = 0,$$

حيث ان $\langle \psi_{\mathrm{n}} \mid$ تمثل الحالات الفيزيائية.

بادخال الطول الادنى يمكن كتابة الارتياب على النحو التالي:

$$(\triangle X)_{|\psi\rangle} = \left\langle \psi \mid \left(\hat{\mathrm{X}} - \left\langle \psi \mid \hat{X} \mid \psi \right\rangle\right)^2 \mid \psi \right\rangle \geqslant (\Delta X)_{min}\, , \forall \mid \psi\rangle \tag{I.16}$$

وهذا يعني عدم وجود الحالات للمؤثر $\hat{X}$ لان الحالة الذاتية له يجب ان تملك ارتيابا معدوما.

بما انه لا يوجد حالات ذاتية لـ $\langle X \mid$ في تمثيل جبر "لهايزنبرغ" اذا من غير الممكن الحصول على تمثيل في فضاء هيلبرت من خلال الدوال الموجية $\langle X \mid \psi\rangle$

1.4.I الجداء السلمي و علاقة الانغلاق :

أهم شرط يجب ان يستوفيه التمثيل :

$$\hat{X} = i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p}،\hat{\mathrm{P}} = P \tag{I.17}$$

هو الحفاظ على تناظر المؤثرين $\hat{X}$,$\hat{P}$ بحث تكون قيمتهما الذاتية حقيقية , طالما لم يتم تغيير $\hat{P}$ اذا تناظره واضح ليس كما هو الحال بالنسبة للمؤثر $\hat{X}$ في الواقع شرط التناظر مكتوب [2]

$$(\left\langle \psi \middle| \hat{X}) \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \psi \middle| (\hat{X} \middle| \varphi \right\rangle) \tag{I.18}$$

من السهل ان ترى ان هذا الشرط غير محقق بالنسبة لجداء سلمي عادي:

$$\langle \psi \mid \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^{*}(p) \varphi(p) \tag{I.19}$$

ليكن المؤثر $\hat{X}$ متناظر من الضروري تعديل الجداء السلمي بالطريقة التالية:

$$\langle \psi \mid \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^{2}} \psi^{*}(p) \varphi(p) \tag{I.20}$$

المعامل $(1+\beta p^{2})$ للحفاظ على التنظر ويمكن أن نكتب :

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| (\hat{X} \right| \varphi \right\rangle) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^{2}} \psi^{*}(p) \left[i\hbar \left(1+\beta p^{2}\right) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right] \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^{*}(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \end{aligned}$$

بالتكامل بالتجزئة و باعتبار $\varphi(p)$ و $\psi(p)$ معدومتين عند المالانهاية نجد:

$$\left\langle \psi \left| (\hat{X} \right| \varphi \right\rangle) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^{\star}(p) \right) \varphi(p)$$

من ناحية اخرى نجد:

$$\begin{aligned} (\left\langle \psi \left| \hat{X}) \right| \varphi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^{2}} \left[i\hbar \left(1+\beta p^{2}\right) \frac{\partial}{\partial p} \psi(\mathrm{p}) \right]^{*} \varphi(p) \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^{*}(p) \right) \varphi(p) \end{aligned}$$

هذا يدل على ان $\hat{X}$ متناظرة بالنسبة لجداء سلمي (11.1).

تعديل الجداء السلمي يعني علاقة الانغلاق حيث تكتب على الشكل الجديد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^{2}} \mid p \rangle \langle p \mid = 1 \tag{I.21}$$

من خلال ادخال هذه العلاقة الاخيرة في الجداء السلمي لشعاعين ذاتيين لمؤثر كمية الحركة نحصل على:

$$\langle \mathrm{p"}|\mathrm{p'}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p" \mid p\rangle \langle p \mid p'\rangle \tag{I.22}$$

و منه نستنتج علاقة التعامد التالية:

$$\langle p \mid p'\rangle = \left(1+\beta p^2\right) \delta \left(\mathrm{p\text{-}p'}\right) \tag{I.23}$$

2.4.I الدوال الذاتية لمؤثر الموضع:

في فضاء كمية الحركة القيم الذاتية لمؤثر الموضع $\hat{X}$ تكتب كما يلي :

$$\hbar \left(1+\beta p^2\right) \frac{\partial}{\partial p} \psi_x(p) = x\psi_x(p) \tag{I.24}$$

حيث $\psi(\mathrm{x}) = \langle p \mid x\rangle$, $\mid x\rangle$ اشعة ذاتية للمؤثر $\hat{X}$ الدوال $\psi_x(p)$ ستعتبر "كدوال ذاتية منظمة " لمؤثر الموضع.

حل المعادلة (I.24) يعطى بالصيغة التالية :

$$\psi_x(p) = C \exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \tan^{-1}\sqrt{\beta}p\right) \tag{I.25}$$

C ثابت التنظيم ريتم حسابه باستخدام العلاقة (I.20) نحصل على :

$$\begin{aligned} CC^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} &= \frac{CC^*\pi}{\sqrt{\beta}} = 1, \\ \Rightarrow \qquad C &= \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \end{aligned}$$

اذا الدوال الذاتية المنظمة لمؤثر الموضع لها الشكل التالي:

$$\psi_{\mathrm{x}}(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \tan^{-1}\sqrt{\beta}p\right) \tag{I.26}$$

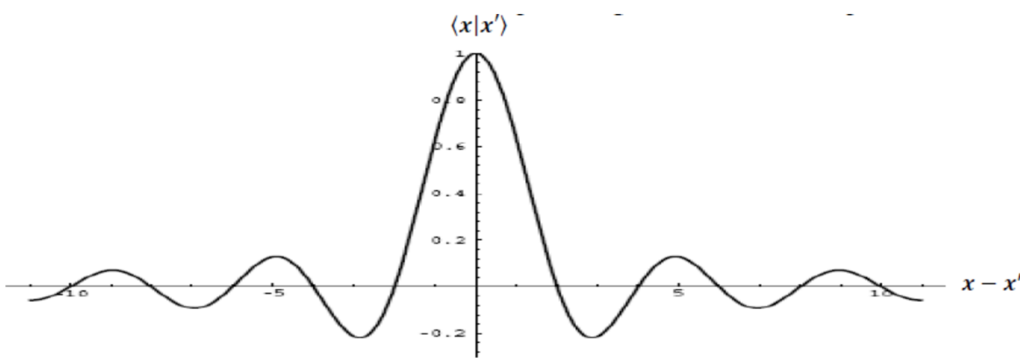
باستخدام العلاقات (I.23) و (I.26) يمكننا ان نكتب علاقة الانغلاق للاشعة $\langle x \mid$ لديها الشكل التالي:

$$\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \mid x\rangle\langle x \mid = 1 \tag{I.27}$$

الان بحساب الجداء السلمي بين الحالتين التنظيميتين $\langle x \mid$ و $\langle x' \mid$:

$$\begin{aligned}\langle x' \mid x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}\psi_x^*\left(p\right)\psi_x\left(p\right)\\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\exp\left[-i\frac{(x-x')}{\hbar\sqrt{\beta}}\tan^{-1}\sqrt{\beta}p\right]\\ &= \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi\left(x-x'\right)}\sin\left(\frac{(x-x')}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right)\end{aligned} \tag{I.28}$$

المنحنى الذي يمثل هذه العلاقة السابقة يعطى في الشكل (2.1)



الشكل 2.I: منحنى الجداء السلمي للحالات المنظمة $\langle x|x'\rangle$ بدلالة $x = x'$ في وحدة $(\Delta x) = \hbar\sqrt{\beta}$

في الواقع لدينا:

نلاحظ من خلال العلاقة (I.28) أن الحالات المنظمة للموضع ليست دائما متعامدة وشرط التعامد يكون من أجل القيم :

$$\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi = n\pi, n = \pm 1, \pm 2..........$$

او

$$x - x' = 2n\hbar\sqrt{\beta}$$

في هذه الحالة لدينا:

$$\left\langle (x+2n)\,\hbar\sqrt{\beta} \mid (x+2n')\,\hbar\sqrt{\beta} \right\rangle = \delta_{n,n'} \tag{I.29}$$

3.4.I علاقة عدم اليقين المعمم في N بعد:

إن علاقات التبديل والتي تحقق مبدأ عدم اليقين (GUP) يمكن أن تكتب على الشكل التالي :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}\left(1+\beta\hat{P}^2\right), \tag{I.30}$$

$$\hat{P}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} \hat{P}_i^2. \tag{I.31}$$

حيث :

$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0, \tag{I.32}$$

علاقة جاكوبي تعطى:

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = \frac{2\beta i\hbar}{1+\beta\hat{P}^2}\left(\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i\right) \tag{I.33}$$

مما يؤدي الى جبر لهايزنبارغ غير التبديلي .

انطلاقا من العلاقة (I.30) يمكن أن نكتب علاقة عدم اليقين على النحو التالي:

$$\left(\varDelta X_i\right)\left(\varDelta P_j\right) \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left(1+\beta\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\varDelta P_{\mathrm{k}}\right)^2 + \left\langle P_k\right\rangle^2\right]\right) \tag{I.34}$$

N هو بعد الفضاء. يمكن بسهولة ان نكتب:

$$(\Delta X_i)_{min} = \hbar\sqrt{N\beta}, \forall i \tag{I.35}$$

في فضاء كمية الحركة التمثيل بسيط و يحقق العلاقة (I.30) بالصيغة:

$$\hat{X}_i = i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p_i}, \hat{P} = P_i \tag{I.36}$$

بالنسبة للجداء السلمي فانه يكتب من الشكل [4]:

$$\langle\psi \mid \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^N P}{1+\beta P^2}\psi^*(p)\,\varphi(p) \tag{I.37}$$

علاقة التبديل الاكثر تعميما تكتب :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\left[\delta_{ij}\left(1+\beta\hat{P}^2\right)+\beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\right], (\beta, \beta') > 0 \tag{I.38}$$

حيث:

$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0, \tag{I.39}$$

علاقة جاكوبي والتي تحقق جبر غير تبديلي يمكن أن تعمم على النحو التالي:

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\hbar\frac{(2\beta-\beta')+\beta(2\beta-\beta')p^2}{1+\beta p^2}\left(\hat{P}_i\hat{X}_j, \hat{P}_j\hat{X}_i\right) \tag{I.40}$$

بافتراض ان ΔP لا يتعلق بـ j يمكن ان نبين بسهولة علاقة عدم اليقين و انطلاقا من التبديل (I.38):

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left(1+(N\beta+\beta')(\Delta P)^2+\gamma\right) \tag{I.41}$$

$$\gamma=\beta\sum_{k=1}^{N}\langle P_{\mathrm{k}}\rangle^{2}+\beta'\langle P_{i}\rangle^{2}$$

$$(\Delta X_{i})_{min}=\hbar\sqrt{(N\beta+\beta')},\forall i \tag{I.42}$$

توجد عدة تمثيلات لـ P و X في فضاء كمية الحركة والتي تحقق المبدلات المعممة السابقة .يمكن مثلا كتابة X_i في فضاء كمية الحركة على النحو التالي :

$$\hat{X}_{i}=\hat{X}_{i}+\beta\frac{\hat{P}^{2}\hat{X}_{i}+\hat{X}_{i}\hat{P}^{2}}{2}+\beta'\frac{\hat{P}_{i}\hat{P}_{j}\hat{X}_{j}+\hat{X}_{j}\hat{P}_{i}\hat{P}_{j}}{2},\hat{P}_{i}=P_{i} \tag{I.43}$$

$$\hat{\mathrm{x}}_{i}=i\hbar\frac{\partial}{\partial P_{i}},\hat{P}_{i}=P_{i}$$

العبارة (I.43) يمكن كتابتها على النحو التالي [8]:

$$\hat{X}_{i}=i\hbar\left[\left(1+\beta p^{2}\right)\frac{\partial}{\partial p_{i}}+\beta' p_{i}p_{j}\frac{\partial}{\partial p_{j}}+\left(\beta+\frac{N+1}{2}\beta'\right)p_{i}\right],\hat{P}=P_{i} \tag{I.44}$$

شكل اخر مشابه في (I.43) اعطي في المرجعين [15] حيث.

$$\hat{X}_{i}=i\hbar\left[\left(1+\beta p^{2}\right)\frac{\partial}{\partial p_{i}}+\beta' p_{i}p_{j}\frac{\partial}{\partial p_{j}}+\tilde{\gamma}p_{i}\right],\hat{P}=P_{i} \tag{I.45}$$

حيث:

$$\hat{X}_{i}=\left(1+\beta p^{2}\right)\hat{\mathrm{X}}_{i}+\beta' p_{i}p_{j}\hat{X}_{j}+\tilde{\gamma}p_{i},\hat{P}=P_{i} \tag{I.46}$$

4.4.I التمثيل التقريبي للموضع:

حلول معادلة شرودينغر باستعمال التمثيل (I.45) نادرا ما تكون بسيطة, خصوصا عندما يتعلق الكمون بمؤثرات الموضع بطريقة كبيرة كما في كمون "كولوم "متناسب عكسيا مع الجذر التربيعي للمؤثرات $\hat{X}_1^2+\hat{X}_2^2+\hat{X}_3^2$. لهذا السبب لجأ العديد من المؤلفين [8] الى التمثيل التقريبي للموضع. اين تم ايجاد عبارات للمؤثرين $\hat{\mathrm{X}}_i$ و $\hat{P}_j$ تحقق

علاقة التبديل (I.38) المعدلة في المرجع [16] المؤلف اعتبر الحالة $\beta' = 2\beta$ في المبدلات بين الموضع (I.40) مع اخذ التقريب الاول لـ β في هذه الحالة:

$$\hat{X}_i = \hat{X}_i, \hat{P}_i = \hat{P}_i\left(1 + \beta\hat{P}\right) \tag{I.47}$$

مع:

$$\hat{X}_i = \hat{X}_i, \hat{P}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

هذا التمثيل سهل جدا و ذلك باستخدام نظرية الاضطرابات.

أن نكتب صيغة أعم لتمثيل الموضع حيث:

$$\hat{X}_i = \hat{X}_i + (\beta - \delta)\,\frac{\hat{P}^2\hat{X}_i + \hat{X}_i\hat{P}^2}{2} + (\beta' - 2\delta)\,\frac{\hat{P}_i\hat{P}_j\hat{X}_j + \hat{X}_j\hat{P}_i\hat{P}_j}{2}$$

$$\hat{P}_i = \hat{P}_i\left(1 + \delta\hat{P}^2\right). \tag{I.48}$$

هذه التمثيل هو تقريبي حتى الدرجة الاولى لـ β و β'.

الفصل II

معادلة DKP في نظرية عدم اليقين المعمم

1.II المقدمة :

في هذا الفصل نحاول دراسة معادلة (Duffin-Kemmer-Petiau) DKP ذات البعدين في وجود حقل [17]

2.II الامكانيات الخطية العددية :

لايجاد حلول الحالة المنظمة لمعادلة DKP في وجود جهد خطي محض تحقيقا لهذه الحالة نسعى لايجاد تصحيح من الدرجة الاولى في β

$$C^2\hat{P}^2\phi - C^2\left[\hat{P},\hat{M}\right]\hat{M^{-1}}\hat{P}\phi + \left[\hat{M}^2 - (E-\hat{V})^2\right]\phi = 0 \tag{II.1}$$

لتبسيط نفصل المعادلة الى حدين مع تجاهل c^2 و ϕ:

$$(1) = \hat{P}^2 - \left[\hat{P},\hat{M}\right]\hat{M^{-1}}\hat{P} \tag{II.2}$$

$$(2) = \left[\hat{M}^2 - (E-\hat{V})^2\right] \tag{II.3}$$

حيث:

$$M = mc^2 + \hat{S} \tag{II.4}$$

$$\hat{S}(\hat{X}) = \lambda \hat{X} \tag{II.5}$$

يمثل $\hat{S}$ كمون سلمي و $\hat{X}$ كمون شعاعي لدينا

$$\hat{P} = \left(1 + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^2\right)\hat{P}; \hat{X} = \hat{X}, \left[\hat{\mathrm{X}}, \hat{P}\right] = i\hbar \tag{II.6}$$

و التي تمثل النسخة احادية البعد من تمثيليات Brau , حيث :

$$\hat{P} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \hat{X} \equiv X \tag{II.7}$$

بالتعويض في المعادلة (II.1) فاننا نحصل على المعادلة التاليةحيث أخذنا التقريبات حتى الدرجة الاولى لـ β:

$$\begin{aligned}\left[\hat{P}, \hat{M}\right] &= \hat{P}\hat{M} - \hat{M}\hat{P} = \left(1 + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^2\right)\hat{P}\hat{M} - \hat{M}\left(1 + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^2\right)\hat{P} \\ &= \hat{P}\hat{M} + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^3\hat{M} - \hat{M}\hat{P} - \frac{1}{3}\beta \hat{M}\hat{P}^3\end{aligned} \tag{II.8}$$

$$\hat{M^{-1}}\hat{P} = \hat{M^{-1}}\left(1 + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^2\right)\hat{P} = \hat{M^{-1}}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta \hat{M}^{-1}\hat{P}^3 \tag{II.9}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{P}, \hat{M}\right]\hat{M^{-1}}\hat{P} &= \left(\hat{P}\hat{M} + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^3\hat{M} - \hat{M}\hat{P} - \frac{1}{3}\beta \hat{M}\hat{P}^3\right)\left(\hat{M^{-1}}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta \hat{M}^{-1}\hat{P}^3\right) \\ &= \hat{P}\hat{M}\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^3\hat{M}\hat{M}^{-1}\hat{P} - \hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P} - \frac{1}{3}\beta \hat{M}\hat{P}^3\hat{M}^{-1}\hat{P} \\ &+ \frac{1}{3}\beta \hat{P}\hat{M}\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 + \frac{1}{9}\beta^2 \hat{P}^3\hat{M}\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 - \frac{1}{3}\beta \hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 - \frac{1}{9}\beta^2 \hat{M}\hat{P}^3\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 \\ &= \hat{P}^2 + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^4 - \hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P} - \frac{1}{3}\beta \hat{M}\hat{P}^3\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta \hat{P}^4 - \frac{1}{3}\beta \hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P}^3\end{aligned} \tag{II.10}$$

$$(1) = \left(1 + \frac{1}{9}\beta^2 \hat{P}^4 + \frac{2}{3}\beta \hat{P}^2\right)\hat{P}^2 - \hat{P}^2 - \frac{1}{3}\beta\hat{P}^4 + \hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\hat{M}\hat{P}^3\hat{M}^{-1}\hat{P} - \frac{1}{3}\beta\hat{P}^4 + \frac{1}{3}\beta\hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P}^3$$
$$= \hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\hat{M}\hat{P}^3\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P} \tag{II.11}$$

لدينا

$$\hat{p}\hat{M} - \hat{M}\hat{p} = -i\hbar\lambda \Rightarrow \hat{M}\hat{p} = i\hbar\lambda + \hat{p}\hat{M} \tag{II.12}$$

$$(1) = \left(i\hbar\lambda + \hat{P}\hat{M}\right)\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\left(i\hbar\lambda + \hat{P}\hat{M}\right)\hat{P}^2\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\left(i\hbar\lambda + \hat{P}\hat{M}\right)\hat{M}^{-1}\hat{P}^3$$
$$= \hat{P}^2 + i\hbar\lambda\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}i\hbar\lambda\beta\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 + \frac{1}{3}\beta\hat{P}^4 + \frac{1}{3}i\hbar\lambda\hat{P}^2\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\hat{P}\hat{M}\hat{P}^2\hat{M}^{-1}\hat{P}$$
$$= \hat{P}^2 + i\hbar\lambda\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}i\hbar\lambda\beta\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 + \frac{1}{3}\beta\hat{P}^4 + \frac{1}{3}i\hbar\lambda\hat{P}^2\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\hat{P}\left(i\hbar\lambda + \hat{P}\hat{M}\right)\hat{P}\hat{M}^{-1}\hat{P}$$
$$= \hat{P}^2 + i\hbar\lambda\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}i\hbar\lambda\beta\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 + \frac{1}{3}\beta\hat{P}^4 + \frac{2}{3}i\hbar\lambda\hat{P}^2\hat{M}^{-1}\hat{P} + \frac{1}{3}\beta\hat{P}^2\left(i\hbar\lambda + \hat{P}\hat{M}\right)\hat{M}^{-1}\hat{P}$$
$$(1) = \hat{P}^2 + \frac{2}{3}\beta\hat{P}^4 + i\hbar\lambda\hat{M}^{-1}\hat{P} + i\hbar\lambda\beta\left(\frac{1}{3}\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 + \hat{P}^2\hat{M}^{-1}\hat{P}\right)$$

بالعودة الي (2)نجد :

$$\left[\hat{M}^2 - (E - \hat{V})^2\right] = \left(\hat{M}^2 - E^2\right) + \left(-\hat{V}^2 + 2E\hat{V}\right) \tag{II.13}$$

ومنه تصبح المعادلة (II.1) على النحو التالي :

$$c^2\hat{P}^2\phi + \frac{2}{3}\beta c^2\hat{P}^4\phi + i\hbar\lambda c^2\hat{M}^{-1}\hat{P}\phi + i\hbar\lambda\beta c^2\left(\frac{1}{3}\hat{M}^{-1}\hat{P}^3 + \hat{P}^2\hat{M}^{-1}\hat{P}\right)\phi + \left(\hat{M}^2 - E^2\right)\phi = 0 \tag{II.14}$$

يمكننا اعادة كتابة المعادلة (II.14) على النحو التالي(تم حذف الرمز ∴ من أجل التبسيط):

$$\begin{aligned}
P^2M^{-1}P+\frac{1}{3}M^{-1}P^3 &= \frac{1}{3}(P^2M^{-1}P+M^{-1}P^3)+\frac{2}{3}P^2M^{-1}P\\
&= \frac{1}{3}\left(2M^{-1}P^3+\left[P^2,M^{-1}P\right]\right)+\frac{2}{3}P^2M^{-1}P\\
&= \frac{2}{3}\left(M^{-1}P^3+i\hbar\lambda M^{-1}PM^{-1}P+P^2M^{-1}P\right)\\
&= \frac{2}{3}\left\{M^{-1}P\left(P^2+i\hbar\lambda M^{-1}P\right)+P^2M^{-1}P\right\}
\end{aligned}$$

لدينا $[P^2,M^{-1}P]=2i\hbar\lambda M^{-1}PM^{-1}P$ و $M=mc^2+\lambda X$ اذن يمكننا كتابة المعادلة (II.14) على الشكل :

$$P^2+i\hbar\lambda M^{-1}P\equiv\left(E^2-M^2\right)/C^2$$

$$M^{-1}P\equiv\frac{1}{i\hbar\lambda C^2}\left(E^2-M^2-c^2P^2\right)$$

$$P^2M^{-1}P+\frac{1}{3}M^{-1}P^3\equiv\frac{2}{3}\left\{C^{-2}M^{-1}P\left(E^2-M^2\right)+\frac{1}{i\hbar\lambda C^2}\left(E^2-M^2-c^2P^2\right)\right\}$$

$$P^2M^{-1}P+\frac{1}{3}M^{-1}P^3\equiv\frac{2}{3i\hbar\lambda C^2}\left\{\left(P^2+i\hbar\lambda M^{-1}P\right)\left(E^2-M^2\right)-C^2P^4\right\}$$

$$\begin{aligned}
P^2M^{-1}P+\frac{1}{3}M^{-1}P^3 &\equiv\frac{2}{3i\hbar\lambda C^2}\left\{\left(E^2-M^2\right)\left(P^2+i\hbar\lambda M^{-1}P\right)-C^2P^4-\left[P^2+i\hbar\lambda M^{-1}P,M^2\right]\right\}\\
&\equiv\frac{2}{3i\hbar\lambda C^2}\left\{\left(E^2-M^2\right)^2/C^2-C^2P^4-\left[P^2+i\hbar\lambda M^{-1}P,M^2\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\left[P^2+i\hbar\lambda M^{-1}P,M^2\right]=-4i\hbar\lambda MP$$

$$P^2M^{-1}P+\frac{1}{3}M^{-1}P^3\equiv\frac{2}{3i\hbar\lambda C^2}\left\{\left(E^2-M^2\right)^2/C^2-C^2P^4+4i\hbar\lambda MP\right\}\tag{II.15}$$

$$C^2\hat{P}^2\phi+\frac{2}{3}i\hbar\lambda C^2\left(\hat{M}^{-1}+\frac{8\beta}{3C^2}\hat{M}\right)\hat{P}\phi+\left(1-\frac{4\beta}{3C^2}E^2\right)\hat{M}^2\phi+\frac{2\beta}{3C^2}\hat{M}^4\phi-\left(1-\frac{2\beta}{3C^2}E^2\right)E^2\phi=0 \tag{II.16}$$

نضع التحويل التالي:

$$\text{z=1+}\left(\lambda/mc^2\right)\text{x} \tag{II.17}$$

اذن x يكتب من الشكل:

$$x=\frac{mc^2}{\lambda}\left(z-1\right)$$

مع علاقات الاشتقاق التالية:

$$\frac{d}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{d}{dz} \qquad , \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\lambda}{mc^2}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}=\frac{\lambda}{mc^2}\frac{d}{dz}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dX^2}&=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{mc^2}\frac{d}{dz}\right)\\&=\frac{dz}{dx}\frac{d}{dz}\left(\frac{\lambda}{mc^2}\frac{d}{dz}\right)=\left(\frac{\lambda}{mc^2}\right)^2\frac{d^2}{dz^2}\end{aligned}$$

لدينا:

$$p=-i\lambda\frac{d}{dx} \tag{II.18}$$

$$\hat{M}=mc^2+s \tag{II.19}$$

$$s=\lambda\hat{x} \tag{II.20}$$

بالتعويض نحصل على :

$$c^2\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\phi+i\hbar\lambda c^2\left(\hat{M}^{-1}+\frac{8\beta}{3C^2}\hat{M}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\phi$$
$$+\left(1-\frac{4\beta}{3C^2}E^2\right)\hat{M}^2\phi+\frac{2\beta}{3C^2}\hat{M}^4\phi-\left(1-\frac{2\beta}{3C^2}E^2\right)E^2\phi=0 \qquad \text{(II.21)}$$

لتسهيل الحساب نحسب كل حد من المعادلة على حدى:

$$c^2\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\phi=-c^2\hbar^2\left(\frac{\lambda}{mc^2}\right)^2\frac{d^2}{dz^2}\phi$$

$$\begin{aligned}i\hbar\lambda c^2\left(\hat{M}^{-1}+\frac{8\beta}{3C^2}\hat{M}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\phi&=i\hbar\lambda c^2\left(\frac{1}{mc^2+\lambda x}+\frac{8\beta}{3c^2}\left(mc^2+\lambda x\right)\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\phi\\&=\hbar^2\lambda c^2\frac{\lambda}{mc^2}\left(\frac{1}{mc^2+\lambda\frac{mc^2}{\lambda}(z-1)}+\frac{8\beta}{3c^2}\left(mc^2+\lambda\frac{mc^2}{\lambda}(z-1)\right)\right)\frac{d}{dz}\phi\\&=\frac{\hbar^2\lambda^2c^2}{mc^2}\left(\frac{1}{mc^2(1+z-1)}+\frac{8\beta mc^2}{3c^2}(1+z-1)\right)\frac{d}{dz}\phi\\&=\frac{\hbar^2\lambda^2c^2}{mc^2}\left(\frac{1}{mc^2z}+\frac{8\beta mc^2}{3c^2}z\right)\frac{d}{dz}\phi\end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{4\beta}{3C^2}E^2\right)\hat{M}^2\phi=\left(1-\frac{4\beta}{3C^2}E^2\right)\left(mc^2+\lambda x\right)^2\phi \qquad =$$

$$\begin{aligned}\frac{2\beta}{3C^2}\hat{M}^4\phi&=\frac{2\beta}{3C^2}\left(mc^2+\lambda x\right)^4\phi\\&=\frac{2\beta}{3C^2}\left(mc^2+\lambda\frac{mc^2}{\lambda}(z-1)\right)^4\phi\\&=\frac{2\beta}{3C^2}\left(mc^2z\right)^4\phi\end{aligned}$$

نقوم بالتعويض في المعادلة (II.21) نجد:

$$-c^2\hbar^2\left(\frac{\lambda}{mc^2}\right)^2\frac{d^2}{dz^2}\phi+\frac{\hbar^2\lambda^2c^2}{mc^2}\left(\frac{1}{mc^2z}+\frac{8\beta mc^2}{3c^2}z\right)\frac{d}{dz}\phi$$
$$+\left(1-\frac{4\beta}{3C^2}E^2\right)\left(mc^2z\right)^2\phi+\frac{2\beta}{3C^2}\left(mc^2z\right)^4\phi-\left(1-\frac{2\beta}{3C^2}E^2\right)E^2\phi=0$$

نقسم على $c^2\hbar^2\left(\frac{\lambda}{mc^2}\right)^2$ نحصل على:

$$-\frac{d^2\phi(z)}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}+\frac{8\beta\left(mc^2\right)^2}{3c^2}z\right)\frac{d(z)}{dz}$$
$$+\left(\frac{\left(mc^2\right)^4}{\hbar^2\lambda^2c^2}\left(1-\frac{4\beta}{3C^2}E^2\right)z^2+\frac{2\beta\left(mc^2\right)^6}{3C^4\hbar^2\lambda^2}z^4\right)\phi(z)-\left(1-\frac{2\beta}{3C^2}E^2\right)E^2\phi(z)=0 \quad (II.22)$$

المعادلة (II.22) ينتج عنها المعادلة التفاضلية التالية:

$$-\frac{d^2\phi(z)}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\frac{d\phi(z)}{dz}+\left(\frac{z^2}{\overline{g}^2}+\frac{\overline{\beta}}{g^2}z^4\right)\phi(z)=\overline{\varepsilon}^2\phi(z) \quad (II.23)$$

حيث:

$$g=\lambda\hbar c/\left(mc^2\right)^2,\varepsilon=E/mc^2,\overline{\beta}=\frac{2}{3}\beta m^2c^2,\overline{g}=g^2/\left(1-2\overline{\beta}\varepsilon^2\right),\overline{\varepsilon}^2=\left(1-\overline{\beta}\varepsilon^2\right)\varepsilon^2/g^2$$

يوجد الحد Z^4 لايمكننا الحصول على حلول تحليلية اذا سنهمل هذا الحد من أجل ايجاد الحلول الدقيقة ونتعامل معه على حسب نظرية الاظطرابات من الدرجة الأولى

اذن المعادلة (II.23) في عدم وجود الحد Z^4 تكتب على الشكل :

$$\frac{d^2\phi(z)}{dz^2}-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\frac{d\phi(z)}{dz}+\left(\overline{\varepsilon}^2-\frac{z^2}{\overline{g}^2}\right)\phi(z)=0 \quad (II.24)$$

نضع:

$$\phi\left(\mathbf{z}\right)=z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}f\left(z\right) \tag{II.25}$$

نقوم باشتقاق $\phi\left(\mathrm{z}\right)$ بالنسبة لـ z :

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dz}&=\frac{d}{dz}\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}f\left(z\right)\right)\\
&=\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}-\alpha zz^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\right)f\left(z\right)+z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df\left(z\right)}{dz}\\
&=\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}f\left(z\right)+z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df\left(z\right)}{dz}\\
&=z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df\left(z\right)}{dz}+\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}f\left(z\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^{2}\phi}{dz^{2}}&=\frac{d}{dz}\frac{d\phi}{dz}\\
&=\frac{d}{dz}\left[\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}f\left(z\right)+z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df\left(z\right)}{dz}\right]\\
&=\left[\left(\gamma\left(1+\gamma\right)z^{\gamma-1}-\alpha\left(2+\gamma\right)z^{\gamma+1}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}-\alpha z\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\right]f\left(z\right)\\
&\qquad+\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df}{dz}+\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df}{dz}+\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\right)\frac{d^{2}f}{dz^{2}}\\
&=\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\right)\frac{d^{2}f}{dz^{2}}+\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}+\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df}{dz}\\
&\qquad+\left(\gamma\left(1+\gamma\right)z^{\gamma-1}-\alpha\left(2+\gamma\right)z^{\gamma+1}-\alpha\left(1+\gamma\right)z^{\gamma+1}+\alpha^{2}z^{3+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}f\left(z\right)\\
&=\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\right)\frac{d^{2}f}{dz^{2}}+2\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}\frac{df}{dz}\\
&\qquad+\left(\gamma\left(1+\gamma\right)z^{\gamma-1}-\alpha\left(3+2\gamma\right)z^{\gamma+1}+\alpha^{2}z^{3+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^{2}}f\left(z\right)
\end{aligned}$$

نعوض في المعادلة السابقة نجد:

$$\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\right)\frac{d^2f}{dz^2}+2\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\frac{df}{dz}+\left(\gamma\left(1+\gamma\right)z^{\gamma-1}-\alpha\left(3+2\gamma\right)z^{\gamma+1}+\alpha^2z^{3+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}f\left(z\right)$$
$$-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\frac{df\left(z\right)}{dz}+\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}f\left(z\right)\right)+\left(\overline{\varepsilon}^2-\frac{z^2}{\overline{g}^2}\right)z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}f\left(z\right)=0$$

$$\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\right)\frac{d^2f}{dz^2}+\left[2\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)z^{1+\gamma}\right]e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\frac{df}{dz}$$
$$+\left[\gamma\left(1+\gamma\right)z^{\gamma-1}-\alpha\left(3+2\gamma\right)z^{\gamma+1}+\alpha^2z^{3+\gamma}-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\left(\left(1+\gamma\right)z^{\gamma}-\alpha z^{2+\gamma}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\overline{\varepsilon}^2-\frac{z^2}{\overline{g}^2}\right)z^{1+\gamma}\right]e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}f\left(z\right)=0$$

$$\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\right)\frac{d^2f}{dz^2}+\left[2\left(\left(1+\gamma\right)z^{-1}-\alpha z\right)-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\right]z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\frac{df}{dz}$$
$$+\left(\gamma\left(1+\gamma\right)z^{-2}-\alpha\left(3+2\gamma\right)+\alpha^2z^2-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\left(\left(1+\gamma\right)z^{-1}-\alpha z\right)+\left(\overline{\varepsilon}^2-\frac{z^2}{\overline{g}^2}\right)\right)z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}f\left(z\right)=0$$

بالقسمة على $\left(z^{1+\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}z^2}\right)$ نجد:

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left[2\left(\left(1+\gamma\right)z^{-1}-\alpha z\right)-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\right]\frac{df}{dz}$$
$$+\left(\gamma\left(1+\gamma\right)z^{-2}-\alpha\left(3+2\gamma\right)+\alpha^2z^2-\left(\frac{1}{z}+4\overline{\beta}z\right)\left(\left(1+\gamma\right)z^{-1}-\alpha z\right)+\left(\overline{\varepsilon}^2-\frac{z^2}{\overline{g}^2}\right)\right)f\left(z\right)=0$$

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left[\frac{2\left(1+\gamma\right)}{z}-2\alpha z-\frac{1}{z}-4\overline{\beta}z\right]\frac{df}{dz}+$$
$$\left(\frac{\gamma\left(1+\gamma\right)}{z^2}-\alpha\left(3+2\gamma\right)+\alpha^2z^2-\frac{\left(1+\gamma\right)}{z^2}-4\overline{\beta}\left(1+\gamma\right)+\alpha+4\overline{\beta}\alpha z^2+\overline{\varepsilon}^2-\frac{z^2}{\overline{g}^2}\right)f\left(z\right)=0$$

بالتبسيط نجد:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2}+\left[(2\gamma+1)/z-2\left(\alpha^2+2\overline{\beta}\right)z\right]\frac{df(z)}{dz}+$$
$$\left[\left(\gamma^2-1\right)/z+\overline{\varepsilon}^2-2(\gamma+1)\left(\alpha+2\overline{\beta}\right)+\left(\alpha^2+4\alpha\overline{\beta}-1/\overline{g}^2\right)z^2\right]f(z)=0 \tag{II.26}$$

حيث:

$$\gamma^2=1,\alpha^2 4\overline{\beta}\alpha-1/\overline{g}^2=0$$

نضع

$$\alpha=\frac{1}{\overline{g}}-2\overline{\beta} \tag{II.27}$$

تصبح المعادلة (II.26) كالتالي:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2}+\left[(2\gamma+1)/z-2z/\overline{g}\right]\frac{df(z)}{dz}+\left[\overline{\varepsilon}^2-2(\gamma+1)/\overline{g}\right]f(z)=0 \tag{II.28}$$

نضع التحويل التالي:

$$t=z^2/\overline{g} \tag{II.29}$$

اذن z يكتب من الشكل التالي :

$$z=(\overline{g}t)^{\frac{1}{2}}$$

مع علاقة الاشتقاق التالية:

$$\frac{d}{dz}=\frac{dt}{dz}\frac{d}{dt}\Rightarrow\frac{dt}{dz}=\frac{2}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow\frac{d}{dz}=\left(\frac{2}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2}{dz^2}=\frac{d}{dz}\frac{d}{dz}=\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{2}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d}{dt}\right]$$
$$\Rightarrow=\frac{dt}{dz}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{2}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d}{dt}\right]=\left(\frac{2}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}\right)\frac{2}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}+t^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dt^2}\right)$$
$$\Rightarrow=\frac{4}{\overline{g}}t^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}+t^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dt^2}\right)=\frac{2}{\overline{g}}\frac{d}{dt}+\frac{4}{\overline{g}}t\frac{d^2}{dt^2}$$

بالتعويض في المعادلة (II.28) نتحصل على :

$$\frac{4}{\overline{g}}t\frac{d^2f\left(t\right)}{dt^2}+\frac{2}{\overline{g}}\frac{df\left(t\right)}{dt}+\left[\left(2\gamma+1\right)/\left(\overline{g}t\right)^{\frac{1}{2}}-2\left(\overline{g}t\right)^{\frac{1}{2}}/\overline{g}\right]\frac{2}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}\frac{df\left(t\right)}{dz}+\left[\overline{\varepsilon}^2-2\left(\gamma+1\right)/\overline{g}\right]f\left(z\right)=0$$

$$\frac{4}{\overline{g}}t\frac{d^2f\left(t\right)}{dt^2}+\left[\frac{2}{\overline{g}}+2\left(2\gamma+1\right)/\overline{g}-4t/\overline{g}\right]\frac{df\left(t\right)}{dz}+\left[\overline{\varepsilon}^2-2\left(\gamma+1\right)/\overline{g}\right]f\left(z\right)=0 \tag{II.30}$$

بالقسمة على $\left(\frac{4}{\overline{g}}\right)$ نجد:

$$t\frac{d^2f\left(t\right)}{dt^2}+\left[\gamma+1-t\right]\frac{df\left(t\right)}{dz}+\left[\frac{\overline{g\varepsilon}^2}{4}-\left(\gamma+1\right)/2\right]f\left(z\right)=0 \tag{II.31}$$

هذه معادلة تفاضلية فوق هندسية متكدسة (confluent hypergeometric function) ويمكن كتابة حلها العام على الشكل التالي:

$$f\left(t\right)=AF\left(a,b;t\right)+Ct^{1-b}F\left(a+1-b,2-b;t\right) \tag{II.32}$$

حيث A و C ثوابت . يتم إعطاء المعاملين a و b من خلال:

$$a = (\gamma + 1)/2 - \overline{g\varepsilon}^2/4 \tag{II.33}$$

$$b = \gamma + 1 \tag{II.34}$$

3.II خلاصة الفصل:

في هذا الفصل استطعنا حل معادلة DKP في وجود حقل سلمي باستعمال مبدأ عدم اليقين المعمم. تحصلنا على حلول تحليلية دقيقة للمعادلة .كما كان بامكاننا حساب الطاقة وتصحيح باستعمال نظرية الاضطرابات (اعتبرنا الحد Z^4 حد اضطراب) ولكن الهدف من هذا الفصل هو ايجاد حلول المعادلة التفاضلية.

الفصل III

معادلة شرودنغر في وجود حقل هارتمان مع مبدأ عدم اليقين المعمم

1.III مقدمة

إن كمون هارتمان يستعمل لدراسة الجزيئات $\mathrm{NO}, \mathrm{N}_2, \mathrm{CO}...$ وهو كمون غير مركزي (أي أنه يتعلق بالاحداثيات الزاوية أيضا) .في هذا الفصل سنحاول دراسة معادلة شرودنغر تحت تأثير كمون هارتمان في نظرية الطول الأصغري ونحاول ايجاد التصحيحات في الطاقة .

كمون هارتمان يكتب من الشكل :

$$V(r,\theta) = \eta\sigma^2\Big(\frac{e^2}{r} + \frac{q\hbar^2}{2\mu r^2 \sin^2\theta}\Big) \tag{III.1}$$

2.III حلول معادلة هارتمان $V(r,\theta) = \eta\sigma^2\Big(\frac{e^2}{r} + \frac{q\hbar^2}{2\mu r^2 \sin^2\theta}\Big)$

في هذه الحالة نكتب معادلة شرودنغر :

$$\left[\frac{p}{2\mu} + \frac{\beta p^4}{\mu} + V(r,\theta)\right]\hat{\psi}(r,\theta,\varphi) = E^{(\beta)}\hat{\psi}(r,\theta,\varphi) \tag{III.2}$$

في هذه المعادلة كمون هارتمان في وجود الحد الادنى لطول يظهر في حد لاضطراب :

$$\frac{\beta p^4}{\mu} \tag{III.3}$$

نستخدم نظرية الاظطراب من الدرجة الأولى . من اجل $\beta = 0$ فإن حلول المعادلة (III.2) تُعطى على النحو التالي:

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{III.4}$$

مع

$$\begin{aligned}
\Phi(\phi) &= \frac{1}{2\pi}\exp(im\phi), \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots \\
\Theta(\theta) &= \frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+1)}\sqrt{\frac{(2n+2k+1)}{2^{2k+1}\Gamma(n+2k+1)}}\left(1-x^2\right)^{\frac{k}{2}} C_n^{(k+\frac{1}{2})}(x), \qquad x = \cos\theta \\
R_{N,n,m}(r) &= \left(\frac{\mu\eta\sigma^2 e^2}{\hbar^2 n'}r\right)^{1/2}\left[\frac{(n'-l-1)!}{n'\Gamma(n'+l+1)}\right]^{1/2}\left(\frac{2\mu\eta\sigma^2 e^2}{\hbar^2 n'}r\right)^{l+1} \times \exp\left(-\frac{\mu\eta\sigma^2 e^2}{\hbar^2 n'}r\right) L_N^{2l+1}\left(\frac{2\mu\eta\sigma^2 e^2}{\hbar^2 n'}r\right) \\
k &= \sqrt{m^2 + \frac{q\mu\hbar^2\sigma^2}{2\mu}}; n' = N + l + 1; l = n + k; N, n = 0, 1, 2, 3, \cdots
\end{aligned} \tag{III.5}$$

حيث الدوال $L_N^{(2l+1)}$ و $C_n^{(k+\frac{1}{2})}$ تحقق شروط التعامد التالية :

$$\int_{-1}^{1} dx(1-x^2)^{\upsilon-1/2}\left[C_n^{(\upsilon)}(x)\right]^2 = \frac{\pi 2^{1-2\upsilon}\Gamma(n+2\upsilon)}{n!(n+\upsilon)\left[\Gamma(\upsilon)\right]^2} \tag{III.6}$$

$$\int_{-1}^{1} dx e^{-x}x^{\upsilon}\left[L_n^{(\upsilon)}\right]^2 = \frac{\Gamma(n+\upsilon+1)}{n!} \tag{III.7}$$

3.III حساب عناصر المصفوفة $\langle N_1 n_1 m_1 \mid \frac{p^4}{2\mu} \mid N_2 n_2 m_2 \rangle$

باستعمال نظرية الاضطراب من الدرجة الأولى فان الحد $\frac{p^4}{2\mu}$ يكتب على الشكل :

$$\frac{\beta}{\mu}\left\langle N_1 n_1 m_1 \mid p^4 \mid N_2 n_2 m_2 \right\rangle = 4\mu\beta \Bigg[\left(E^{(0)}_{N_2 n_2 m_2}\right)^2 \delta_{N_1 N_2}\delta_{n_1 n_2}\delta_{m_1 m_2} - 2E^{(0)}_{N_2 n_2 m_2}\left\langle N_1 n_1 m_1 \mid V(r,\theta) \mid N_2 n_2 m_2 \right\rangle + \left\langle N_1 n_1 m_1 \mid (V(r,\theta))^2 \mid N_2 n_2 m_2 \right\rangle \Bigg] \tag{III.8}$$

لدينا الكمون

$$V(r,\theta) = \eta\sigma^2 \left(\frac{e^2}{r} + \frac{q\hbar^2}{2\mu r^2 \sin^2\theta} \right) \tag{III.9}$$

ويكتب من الشكل :

$$V(r,\theta) = \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\gamma}{r^2 \sin^2\theta} \tag{III.10}$$

حيث

$$\alpha = \eta\sigma^2 e^2, \gamma = \frac{\eta\sigma^2 q\hbar^2}{2\mu}$$

لدينا $\langle N_1 n_1 m_1 | V(r,\theta) | N_2 n_2 m_2 \rangle$ حيث :

$$|Nnm\rangle = \frac{1}{r} R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{III.11}$$

اذن نحاول أن نحسب كل حد على حدى، نعرف $R(r)$ و $\Theta(\theta)$ و $\Phi(\phi)$ كالتالي :

$$R_{Nnm}(r) = A_{N,n,m}(ar)^{l+1}e^{-\frac{a}{2}r}L_N^{(2l+1)}(ar$$
$$\Theta_{nm}(\theta) = B_{nm}(1-x^2)^{k/2}C_n^{(k+\frac{1}{2})}(x)$$
$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im\varphi)$$

بالتعويض $V(r,\theta)$ نجد :

$$\begin{aligned}\langle N_1n_1m_1|V(r,\theta)|N_2n_2m_2\rangle = \int \frac{1}{r^2}A_{N_1n_1m_1}(a_1r)^{l_1+1}e^{-\frac{a_1}{2}r}L_{N_1}^{(2l_1+1)}(a_1r)\\ \times B_{n_1m_1}(1-x^2)^{k_1/2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im_1\varphi)\left(\frac{\alpha}{r}+\frac{\gamma}{r^2\sin^2\theta}\right)\\ \times A_{N_2n_2m_2}(a_2r)^{l_2+1}e^{-\frac{a_2}{2}r}L_{N_2}^{(2l_2+1)}(a_2r)\times B_{n_2m_2}(1-x^2)^{k_2/2}C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)\\ \times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im_2\varphi)r^2dr\sin\theta d\varphi\end{aligned} \tag{III.12}$$

نفصل التكامل لتبسيط

$$\int_0^\infty \frac{1}{r^2}A_{N_1n_1m_1}(a_1r)^{l_1+1}e^{-\frac{a_1}{2}r}L_{N_1}^{(2l_1+1)}(a_1r)\left(\frac{\alpha}{r}\right)A_{N_2n_2m_2}(a_2r)^{l_2+1}e^{-\frac{a_2}{2}r}L_{N_2}^{(2l_2+1)}(a_2r)r^2dr \tag{III.13}$$
$$\int_0^{2\pi} B_{n_1m_1}(1-x^2)^{k_1/2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)B_{n_2m_2}(1-x^2)^{k_2/2}C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)\sin\theta d\theta \tag{III.14}$$

هذا الحد يتكرر مرتين :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \exp i(m_1-m_2)\varphi d\varphi \tag{III.15}$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{r^2}A_{N_1n_1m_1}(a_1r)^{l_1+1}e^{-\frac{a_1}{2}r}L_{N_1}^{(2l_1+1)}(a_1r)\left(\frac{\gamma}{r^2}\right)A_{N_2n_2m_2}(a_2r)^{l_2+1}e^{-\frac{a_2}{2}r}L_{N_2}^{(2l_2+1)}(a_2r)\times r^2dr \tag{III.16}$$
$$\int_0^{2\pi} B_{n_1m_1}(1-x^2)^{k_1/2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)\left(\frac{\gamma}{\sin^2\theta}\right)B_{n_2m_2}(1-x^2)^{k_2/2}C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)\sin\theta d\theta \tag{III.17}$$

يمكن كتابة التالي :

$$\langle N_1 n_1 m_1 | \frac{1}{r^s sin^{2t}\theta} | N_2 n_2 m_2 \rangle = \int_0^\infty R_{N_1 n_1 m_1}(r) R_{N_2 n_2 m_2}(r) r^{-s} dr \times \int_{-1}^{1} dx (1-x^2)^{-t} \Theta_{n_1 m_1}(x) \Theta_{n_2 m_2}(x) \tag{III.18}$$

1.3.III الجزء المركزي :

بالنسبة للجزء المركزي تم تقييم تكامل الاول في [18] وتعبير عليه يعطي على النحو التالي :

$$\begin{aligned}
\langle N_1 n_1 m_1 | r^s | N_2 n_2 m_2 \rangle &= \int_0^\infty R_{N_1 n_1 m_1}(r) R_{N_2 n_2 m_2}(r) r^s dr \\
&= \frac{\eta\sigma^2}{n_1 n_2} \sqrt{\frac{N_1! N_2!}{\Gamma(2L_1+N+2)\Gamma(2L_2+N+2)}} \left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_1+1} \left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_2+1} \\
&\times \left[\eta\sigma^2(1/n_1' + 1/n_2')\right]^{-s-l_1-l_2-3} \, {}^{[}m_1]N \sum \, {}^{[}m_2]N \sum \frac{(-1)^{2N+m_2}}{m_1! m_2!} \left(\frac{1/n_1' - 1/n_2'}{1/n_1' + 1/n_2'}\right)^{m_1+m_2} \\
&\times \Gamma(l_1+l_2+s+m_1+m_2+3) \, {}^{[}m_3 = 0]t \sum \begin{pmatrix} l_1+l_2+s+m_2+1 \\ N-m_1-m_3 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} l_1+l_2+s+m_1+1 \\ N-m_2-m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1+l_2+s+m_1+m_2+m_3+2 \\ m_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{III.19}$$

القيم الوحيدة التي تساهم في حساب عناصر المصفوفة الواردة في [19] هي : $s = \{-1, -2, -3, -4\}$ ، وعليه تصبح المعادلة (III.13)

$$\int_0^\infty R_{N_1 n_1 m_1} R_{N_2 n_2 m_2} \left(\frac{\alpha}{r}\right) dr = \int_0^\infty A_{N_1 n_1 m_1} (a_1 r)^{l_1+1} e^{-\frac{a_1}{2} r} L_{N_1}^{(2l_1+1)}(a_1 r) \times \left(\frac{\alpha}{r}\right)$$
$$A_{N_2 n_2 m_2} (a_2 r)^{l_2+1} e^{-\frac{a_2}{2} r} L_{N_2}^{(2l_2+1)}(a_2 r) dr = \alpha \int_0^\infty R_{N_1 n_1 m_1} R_{N_2 n_2 m_2} r^{-1} dr$$

حالة $s=-1$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\eta\sigma^2 e^2\right)\frac{\eta\sigma^2}{n_1 n_2}\sqrt{\frac{N_1!N_2!}{\Gamma(2L_1+N+2)\Gamma(2L_2+N+2)}}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_1+1}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_2+1}\\
&\times\left[\eta\sigma^2(1/n_1'+1/n_2')\right]^{-l_1-l_2-4}\ \overset{[}{m_1}]N\sum\ \overset{[}{m_2}]N\sum\frac{(-1)^{2N+m_2}}{m_1!m_2!}\left(\frac{1/n_1'-1/n_2'}{1/n_1'+1/n_2'}\right)^{m_1+m_2}\\
&\times\Gamma(l_1+l_2+m_1+m_2+2)\ \overset{[}{m_3}=0]t\sum\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_2\\ N-m_1-m_3\end{pmatrix}\\
&\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1\\ N-m_2-m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1+m_2+m_3+1\\ m_3\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{III.20}
$$

في حالة $s=-2$ تصبح المعادلة (III.17):

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{q\hbar^2}{2\mu}\right)\frac{\eta\sigma^2}{n_1 n_2}\sqrt{\frac{N_1!N_2!}{\Gamma(2L_1+N+2)\Gamma(2L_2+N+2)}}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_1+1}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_2+1}\\
&\times\left[\eta\sigma^2(1/n_1'+1/n_2')\right]^{-l_1-l_2-5}\ \overset{[}{m_1}]N\sum\ \overset{[}{m_2}]N\sum\frac{(-1)^{2N+m_2}}{m_1!m_2!}\left(\frac{1/n_1'-1/n_2'}{1/n_1'+1/n_2'}\right)^{m_1+m_2}\\
&\times\Gamma(l_1+l_2+m_1+m_2+1)\ \overset{[}{m_3}=0]t\sum\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_2-1\\ N-m_1-m_3\end{pmatrix}\\
&\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1-1\\ N-m_2-m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1+m_2+m_3\\ m_3\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{III.21}
$$

2.3.III الجزء الزاوي :

بالنسبة للجزء الزاوي نستخدم التكامل التالي لكثيرات الحدود [20] مع $\theta>-1/2,\mu>-1/2,\lambda>-1/2$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1/2}C_l^{(\theta)}(x)C_m^{(\mu)}(x) = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\theta)}\times\sum_{k=0}^{l/2}\Bigg[&\frac{(l-2k+\lambda)}{(l-2k)!k!s!}\\
&\times\frac{\Gamma(l-\theta-k)}{\Gamma(l+\lambda-k+1)}\frac{\Gamma(l-2k+2\lambda)\Gamma(m+\mu-s)}{\Gamma(m+\lambda-s+1)}(\theta-\lambda)_k(\mu-\lambda)_s\Bigg]
\end{aligned}
\tag{III.22}
$$

حيث نغير المتغير كما يلي : $x=\cos\theta$ بالتالي $\sin\theta d\theta = dx$. مما يعني

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{(1-x^2)} \tag{III.23}$$

بالتعويض نجد أن العبارة (III.14):

$$\gamma\int_{-1}^{1}B_{n_1m_1}(1-x^2)^{(k_1+k_2)/2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})(x)}\times B_{n_2m_2}C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)dx \Longleftrightarrow \gamma\int_{-1}^{1}C_l^{(\theta)}(x)C_m^{(\mu)}(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx \tag{III.24}$$

بالمطابقة نجد:

$$l\longrightarrow n_1, m\longrightarrow n_2, \theta\longrightarrow k_1+1/2, \mu\longrightarrow k_2+1/2 \tag{III.25}$$

بالتالي

$$\lambda-1/2\longrightarrow\frac{k_1+k_2}{2}\Rightarrow\lambda=\frac{k_1+k_2-1}{2}$$

$$\left[\frac{\pi 2^{2-k_1-k_2}}{\Gamma(k_1+1/2)\Gamma(k_2+1/2)}\sum_{k=0}^{1/2}\left[\frac{(n_1-2k+\frac{k_1+k_2-1}{2})}{(n_1-2k)!k!s!}\times\frac{\Gamma(n_1-k_1+12-k)}{\Gamma(n_1+\frac{k_1+k_2-1}{2}-k+1)}\right]\right]$$
$$\times\frac{\Gamma(n_1-2k+2\frac{k_1+k_2-1}{2})\Gamma(n_2+k_2+1/2-s)}{\Gamma(n_2+\frac{k_1+k_2-1}{2}-s+1)}(k_1+1/2-\frac{k_1+k_2-1}{2})_k(k_2+1/2-\frac{k_1+k_2-1}{2})_s$$

بالتعويض في المعادلة (III.18) نجد :

$$\gamma\int_{-1}^{1}B_{n_1m_1}(1-x^2)^{(k_1+k_2)/2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)\times B_{n_2m_2}C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)\times\left(\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$
$$\Longleftrightarrow\gamma\int_{-1}^{1}C_l^{(\theta)}(x)C_m^{(\mu)}(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$$

بالمطابقة نجد :

$$l \longrightarrow n_1, m \longrightarrow n_2, \theta \longrightarrow k_1 + 1/2, \mu \longrightarrow k_2 + 1/2 \tag{III.26}$$

بالتالي

$$\lambda - 1/2 \longrightarrow \frac{k_1 + k_2}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{k_1 + k_2 - 1}{2}$$

$$\left[\frac{\pi 2^{2-k_1-k_2}}{\Gamma(k_1+1/2)\Gamma(k_2+1/2)} \overset{[}{k}= 0][n_1/2]\sum\left[\frac{(n_1 - 2k + \frac{k_1+k_2-1}{2})}{(n_1-2k)!k!s!} \times \frac{\Gamma(n_1 - k_1 + 1/2 - k)}{\Gamma(n_1 + \frac{k_1+k_2-1}{2} - k + 1)}\right]\right]$$
$$\times \frac{\mathit{\Gamma}(n_1 - 2k + k_1 + k_2 - 1)\mathit{\Gamma}(n_2 + k_2 + 1/2 - s)}{\mathit{\Gamma}(n_2 + \frac{k_1+k_2-1}{2} - s + 1)}(k_1 + 1/2 - \frac{k_1+k_2-1}{2})_k(k_2 + 1/2 - \frac{k_1+k_2-1}{2})_s$$

ومنه تصبح المعادلة (III.12):

$$A_{N_1 n_1 m_1} A_{N_2 n_2 m_2} \left(\eta\sigma^2 e^2\right) \frac{\eta\sigma^2}{n_1 n_2}\sqrt{\frac{N_1!N_2!}{\mathit{\Gamma}(2L_1+N+2)\mathit{\Gamma}(2L_2+N+2)}}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_1+1}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_2+1}$$
$$\times\left[\eta\sigma^2(1/n_1' + 1/n_2')\right]^{-l_1-l_2-4}\sum_{m_1}^{N}\sum_{m_2}^{N}\frac{(-1)^{2N+m_2}}{m_1!m_2!}\left(\frac{1/n_1' - 1/n_2'}{1/n_1' + 1/n_2'}\right)^{m_1+m_2}$$
$$\times\mathit{\Gamma}(l_1+l_2+m_1+m_2+2)\sum_{m_3=0}^{t}\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_2 \\ N-m_1-m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1 \\ N-m_2-m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1+m_2+m_3+1 \\ m_3\end{pmatrix}$$
$$\times B_{n_1 m_1} B_{n_2 m_2}\frac{\eta\sigma^2 q\hbar^2}{2\mu}\times\frac{\pi 2^{2-k_1-k_2}}{\mathit{\Gamma}(k_1+1/2)\mathit{\Gamma}(k_2+1/2)}\sum_{k=0}^{n_1/2}\left[\frac{(n_1 - 2k + \frac{k_1+k_2-1}{2})}{(n_1-2k)!k!s!}\times\frac{\mathit{\Gamma}(n_1-k_1+1/2-k)}{\mathit{\Gamma}(n_1+\frac{k_1+k_2-1}{2}-k+1)}\right]$$
$$\times\frac{\mathit{\Gamma}(n_1 - 2k + 2\frac{k_1+k_2-1}{2})\mathit{\Gamma}(n_2+k_2+1/2-s)}{\mathit{\Gamma}(n_2+\frac{k_1+k_2-1}{2}-s+1)}(k_1+1/2-\frac{k_1+k_2-1}{2})_k\left(k_2+1/2-\frac{k_1+k_2-1}{2}\right)_s$$
$$+A_{N_1 n_1 m_1} A_{N_2 n_2 m_2}\left(\eta\sigma^2 e^2\right) = \left(\frac{q\hbar^2}{2\mu}\right)\frac{\eta\sigma^2}{n_1 n_2}\sqrt{\frac{N_1!N_2!}{\mathit{\Gamma}(2L_1+N+2)\mathit{\Gamma}(2L_2+N+2)}}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_1+1}\left(\frac{2\eta\sigma^2}{n_1'}\right)^{l_2+1}$$
$$\times\left[\eta\sigma^2(1/n_1'+1/n_2')\right]^{-l_1-l_2-5}\overset{[}{m_1}]N\sum\overset{[}{m_2}]N\sum\frac{(-1)^{2N+m_2}}{m_1!m_2!}\left(\frac{1/n_1'-1/n_2'}{1/n_1'+1/n_2'}\right)^{m_1+m_2}$$

$$\times \Gamma(l_1+l_2+m_1+m_2+1)\ \overset{[}{m}_3=0]t\sum \begin{pmatrix} l_1+l_2+m_2-1 \\ N-m_1-m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1-1 \\ N-m_2-m_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_1+l_2+m_1+m_2+m_3 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

$$\times B_{n_1m_1}B_{n_2m_2}\frac{\eta\sigma^2 q\hbar^2}{2\mu}\times\frac{\pi 2^{2-k_1-k_2}}{\Gamma(k_1+1/2)\Gamma(k_2+1/2)}\sum_{k=0}^{n_1/2}\left[\frac{(n_1-2k+\frac{k_1+k_2-1}{2})}{(n_1-2k)!k!s!}\times\frac{\Gamma(n_1-k_1+1/2-k)}{\Gamma(n_1+\frac{k_1+k_2-1}{2}-k+1)}\right]$$
$$\times\frac{\Gamma(n_1-2k+k_1+k_2-1)\Gamma(n_2+k_2+1/2-s)}{\Gamma(n_2+\frac{k_1+k_2-1}{2}-s+1)}(k_1+1/2-\frac{k_1+k_2-1}{2})_k(k_2+1/2-\frac{k_1+k_2-1}{2})_s \tag{III.27}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\langle N_1n_1m_1|V(r,\theta)|N_2n_2m_2\rangle &= \alpha A_{N_1n_1m_1}A_{N_2n_2m_2}\langle N_1n_1m_1|r^{-1}|N_2n_2m_2\rangle \\ &\times\int_{-1}^{1}B_{n_1m_1}B_{n_2m_2}(1-x^2)^{(k_1+k_2)/2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)dx\times\delta_{m_1m_2} \\ &+\gamma A_{N_1n_1m_1}A_{N_2n_2m_2}\langle N_1n_1m_1|r^{-2}|N_2n_2m_2\rangle \\ &\times\ \gamma\int_{-1}^{1}B_{n_1m_1}B_{n_2m_2}(1-x^2)^{(k_1+k_2)/2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)dx\times\delta_{m_1m_2}\end{aligned} \tag{III.28}$$

لدينا

$$V^2(r,\theta)=\left(\eta\sigma^2\right)^2\left(\frac{e^2}{r}+\frac{q\hbar^2}{2\mu r^2\sin^2\theta}\right)^2 \tag{III.29}$$

تكتب من الشكل :

$$V^2(r,\theta)=\frac{\alpha^2}{r^2}+\frac{\gamma^2}{r^4\sin^4\theta}+\frac{2\gamma\alpha}{r^3\sin^2\theta} \tag{III.30}$$

$$\begin{aligned}\langle N_1n_1m_1|V^2(r,\theta)|N_2n_2m_2\rangle &= \int \frac{1}{r^2}R_{N_1n_1m_1}(r)\frac{\alpha^2}{r^2}R_{N_2n_2m_2}(r)\times r^2dr\int \Theta_{n_1m_1}(\theta)\Theta_{n_2m_2}(\theta)dx\times\delta_{m_1m_2}\\ &+\frac{1}{r^2}R_{N_1n_1m_1}(r)\frac{\gamma^2}{r^4}R_{N_2n_2m_2}(r)\times r^2dr\int \Theta_{n_1m_1}(\theta)\frac{1}{\sin^4\theta}\Theta_{n_2m_2}(\theta)dx\times\delta_{m_1m_2}\\ &+\frac{1}{r^2}R_{N_1n_1m_1}(r)\frac{2\gamma\alpha}{r^3}R_{N_2n_2m_2}(r)\times r^2dr\int \Theta_{n_1m_1}(\theta)\frac{1}{(1-x^2)}\Theta_{n_2m_2}(\theta)dx\times\delta_{m_1m_2}\end{aligned} \tag{III.31}$$

باستعمال تغيير المتغير المستعمل سابقا بالتالي تصبح كما يلي:

$$\begin{aligned}\langle N_1n_1m_1|V^2(r,\theta)|N_2n_2m_2\rangle &= \alpha^2 A_{N_1n_1m_1}A_{N_2n_2m_2}\int R_{N_1n_1m_1}(r)r^{-2}R_{N_2n_2m_2}(r)dr\\ &\times\int B_{n_1m_1}B_{n_2m_2}\frac{(1-x^2)^{(k_1+k_2)/2}}{(1-x^2)}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)dx\\ &+\gamma^2\int R_{N_1n_1m_1}(r)r^{-4}R_{N_2n_2m_2}(r)dr\\ &\times\int B_{n_1m_1}B_{n_2m_2}(1-x^2)^{(k_1+k_2)/2-2}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)dx\\ &+2\alpha\gamma\int R_{N_1n_1m_1}(r)r^{-3}R_{N_2n_2m_2}(r)dr\\ &\times\int B_{n_1m_1}B_{n_2m_2}(1-x^2)^{(k_1+k_2)/2-1}C_{n_1}^{(k_1+\frac{1}{2})}(x)C_{n_2}^{(k_2+\frac{1}{2})}(x)dx\delta_{m_1m_2}\delta_{m_1m_2}\end{aligned} \tag{III.32}$$

في النهاية فان عبارة التصحيح في الهاملتوني تُعطى بـ:

$$\begin{aligned}&\frac{\beta}{4\mu}\left\langle N_1n_1m_1\mid p^4\mid N_2n_2m_2\right\rangle = \frac{\mu^2\left(\eta\sigma^2\right)^4e^8}{4\hbar^2}\left(n_2'\right)^{-4}\delta_{N_1N_2}\delta_{n_1n_2}\delta_{m_1m_2}\\ &+\frac{\mu\left(\eta\sigma^2\right)^4e^6}{\hbar^2}\left(n_2'\right)^{-2}\left\langle N_1n_1m_1\mid r^{-1}\mid N_2n_2m_2\right\rangle+\left(\eta\sigma^2\right)^2e^4\left\langle N_1n_1m_1\mid r^{-2}\mid N_2n_2m_2\right\rangle\\ &+\left[\frac{\left(\eta\sigma^2\right)^4e^6q}{2}\left(n_2'\right)^{-2}\left\langle N_1n_1m_1\mid r^{-2}\mid N_2n_2m_2\right\rangle+\frac{\left(\eta\sigma^2\right)e^2q\hbar^2}{\mu}\left\langle N_1n_1m_1\mid r^{-3}\mid N_2n_2m_2\right\rangle\right]\\ &\times\frac{\Gamma(2k_1+1)\Gamma(2k_1+1)}{\Gamma(k_1+1)\Gamma(k_1+1)}\left[\frac{(2n_1+2k_1+1)}{2^{2(k_1+k_2+1)}\Gamma\left(n_1+2k_1+1\right)}\frac{(2n_2+2k_2+1)}{\Gamma\left(2n_2+2k_2+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\times\frac{\pi 2^{2-k_1-k_2}}{\Gamma(k_1+\frac{1}{2})\Gamma(k_2+\frac{1}{2})}\mid\cos\frac{\pi}{2}\left(n_1+n_2\right)\mid\times\sum\left[\frac{[n_1-2p+(k_1+k_2-1)/2]}{(n_1-2p)!p!s!}\right.\end{aligned}$$

$$\times \frac{\Gamma(n_1-2p+k_1+k_2-1)\Gamma(n_2-k_1-s-1/2)}{\Gamma(n_2+\frac{k_1+K_2+1}{2}-s)} \times \frac{\Gamma(n_1-p+k_1-1/2)}{\Gamma(n_1+\frac{k_1+K_2+1}{2}-p)} \left(\frac{k_1+K_2}{2}+1\right)_p \left(\frac{k_1+K_2}{2}+1\right)_s \Bigg]$$

$$+ \left|\cos\frac{\pi}{2}(n_1+n_2)\right| \left(\eta\sigma^2\right)^2 \frac{q^2\hbar^4}{4\mu} \times \frac{\Gamma(2k_1+1)\Gamma(2k_1+1)}{\Gamma(k_1+1)\Gamma(k_1+1)} \left[\frac{(2n_1+2k_1+1)}{2^{2(k_1+k_2+1)}\Gamma(n_1+2k_1+1)} \frac{(2n_2+2k_2+1)}{\Gamma(2n_2+2k_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \frac{\pi 2^{2-k_1-k_2}}{\Gamma(k_1+\frac{1}{2})\Gamma(k_2+\frac{1}{2})} \times \sum \Bigg[\frac{[n_1-2p+(k_1+k_2-3)/2]}{(n_1-2p)!p!s!} \times \frac{\Gamma(n_1-2p+k_1+k_2-1)\Gamma(n_2-k_1-s-1/2)}{\Gamma(n_2+\frac{k_1+K_2+1}{2}-s)}$$

$$\times \frac{\Gamma(n_1-p+k_1-1|2)}{\Gamma(n_1+\frac{k_1+K_2+1}{2}-p} \left(\frac{k_1+K_2}{2}+2\right)_p \left(\frac{k_1+K_2}{2}+2\right)_s \Bigg] \times \langle N_1 n_1 m_1 \mid r^{-4} \mid N_2 n_2 m_2 \rangle \quad \text{(III.33)}$$

نلاحظ أن هذه العبارة تتعلق بالعد الكمي l فان هذا التصحيح يرفع لنا التوالد (الحالات المتوالدة)

4.III خلاصة الفصل

في هذا الفصل درسنا معادلة شرودنغر في وجود حقل هارتمان بالنسبة للطول الأصغرى .

وباستعمال نظرية الاضطرابات تحصلنا على عبارات التصحيح في عناصر مصفوفة الهاميلتوني والتي تمكننا من حساب التصحيحات في الطاقة .وقد لاحظنا أن هذا التصحيح يتعلق بالعدد الكمي l مما يزيل الحالات المتوالدة لمستويات الطاقة .

الفصل IV

حل معادلة كلاين جوردن في بعد واحد في وجود ثابت كهربائي

1.IV مقدمة

في هذا الفصل سنحاول ايجاد حلول معادلة كلاين -جوردن في بعد واحد في وجود حقل كهربائي ثابت

2.IV حلول المعادلة

تكتب معادلة كلاين - جودرن في وجود حقل على نحو التالي :

$$\left[(P_\mu - eA_\mu)^2 - m^2\right] \Psi(t,x) = 0, \qquad \mu = 0,1 \tag{IV.1}$$

في حالة حقل كهربائي ثابت فإن الكمون A_μ يكتب على الشكل :

$$A_1 = 0, \quad A_0 = -Ex \tag{IV.2}$$

بالتعويض في العلاقة (IV.1) نجد :

$$\left[(P_0 - eA_0) + (P_1 - eA_1)^2 - m^2\right]\Psi(t,x) = 0$$
$$\left[(P_0 - eA_0) + P^2 - m^2\right]\Psi(t,x) = 0 \tag{IV.3}$$

نضع

$$\Psi(t,x) = \exp(-i\omega t)\,\psi(x) \tag{IV.4}$$

وبالتعويض في المعادلة (IV.3) نحصل على :

$$\left[(\omega + eEX)^2 - P^2 - m^2\right]\psi(x) = 0 \tag{IV.5}$$

باستخدم التمثيل :

$$X = x \quad , \quad P = \frac{\hbar}{i}\left(1 - \alpha x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

فان العبارة (IV.5) تصبح من الشكل :

$$\left[(\omega + eEX)^2 - \left(\frac{\hbar}{i}\left(1-\alpha x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\left(1-\alpha x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\right) - m^2\right]\psi(x) = 0$$
$$\left[(\omega + eEX)^2 - \frac{\hbar^2}{i^2}\left(1-\alpha x^2\right)\left(-2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \left(1-\alpha x^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - m^2\right]\psi(x) = 0$$

$$\left[(\omega + eEX)^2 - \hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right]\psi(x) = 0 \tag{IV.6}$$

بالقسمة على $\hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)^2$ نحصل:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)2\alpha x}{\hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\left(\omega+eEX\right)^2-m^2}{\hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)^2}\right]\psi\left(x\right)=0$$

ثم نحصل على ما يلي معادلة كلاين-جوردون المعدلة:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)2\alpha x}{\hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\left(\omega+eEX\right)^2-m^2}{\hbar^2\left(1-\alpha x^2\right)^2}\right]\psi=0 \tag{IV.7}$$

معادلة كلاين-جوردون المعتادة $(\alpha=0)$ للمجال الكهربائي الثابت واحدة التفرد عند اللانهاية ويمكن كتابة الحل بدلالة الدوال الاسطوانية المكافئة. من اجل هذه المعادلة نضع المتغير التالي في (IV.7)

$$\begin{aligned}\zeta=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}x}{1-\sqrt{\alpha}x}\right)&\Rightarrow 2\sqrt{\alpha}\zeta=\ln\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}x}{1-\sqrt{\alpha}x}\right)\\&\Rightarrow \exp\left(2\sqrt{\alpha}\zeta\right)=\frac{1+\sqrt{\alpha}x}{1-\sqrt{\alpha}x}\\&\Rightarrow x=\frac{1-e^{2\sqrt{\alpha}\zeta}}{\sqrt{\alpha}\left(-1-e^{2\sqrt{\alpha}\zeta}\right)}=\frac{e^{2\sqrt{\alpha}\zeta}-1}{\sqrt{\alpha}\left(1+e^{2\sqrt{\alpha}\zeta}\right)}=\frac{e^{\sqrt{\alpha}\zeta}\left(e^{\sqrt{\alpha}\zeta}-e^{-\sqrt{\alpha}\zeta}\right)}{e^{\sqrt{\alpha}\zeta}\sqrt{\alpha}\left(e^{\sqrt{\alpha}\zeta}+e^{-\sqrt{\alpha}\zeta}\right)}\end{aligned} \tag{IV.8}$$

لدينا :

$$\tanh\left(z\right)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} \tag{IV.9}$$

اذن x يكتب من الشكل :

$$x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right) \tag{IV.10}$$

مع علاقات الاشتقاق التالية :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\zeta}\,,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)}\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{IV.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}&\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{1}{1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\\&\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{2\sqrt{\alpha}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)}{\left(1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{\left(1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\end{aligned} \tag{IV.12}$$

بعد تعويض (IV.11) و (IV.12) في (IV.7) نحصل على :

$$\left[\frac{1}{\left(1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{2\sqrt{\alpha}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)}{\left(1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)}{\left(1-\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\omega+eE\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2}{\left(1-\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2\right)^2}-\frac{m^2}{\left(1-\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2\right)^2}\right]\psi=0$$

نقسم على $\frac{1}{\left(1-\tanh^2\left(\sqrt{\alpha}\zeta\right)\right)^2}$ نتحصل على :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\left(\omega+\frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\tanh\sqrt{\alpha}\zeta\right)^2-m^2\right]\psi=0 \tag{IV.13}$$

هذه المعادلة هي معادلة الهزاز التوافقي من أجل المتغيير

$$\Omega^2=\left(\omega+\frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\tanh\sqrt{\alpha}\zeta^2\right)^2-m^2 \tag{IV.14}$$

نلاحظ انه هناك قيمتين لتردد نرمز لها ب $\Omega_{\pm}$ في هذه الحالة الحلول تكتب من الشكل :

$$\psi_{\pm} \propto \frac{\exp\left(\mp i\Omega_{-}\zeta\right)}{\sqrt{2\Omega_{-}}}; \Omega_{-} = lim\Omega = \sqrt{\left(\omega - \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2} - m^{2}} \tag{IV.15}$$

$$\psi^{\pm} \propto \frac{\exp\left(\pm i\Omega_{+}\zeta\right)}{\sqrt{2\Omega_{+}}}; \Omega_{+} = lim\Omega = \sqrt{\left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2} - m^{2}} \tag{IV.16}$$

يمكن التحقق من هذه المعادلات على النحو التالي :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \Omega^2\left(\zeta\right)\right]\psi = 0 \tag{IV.17}$$

أين

$$\Omega^2\left(\zeta\right) = \left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\tanh\sqrt{\alpha}\zeta^2\right)^2 - m^2$$

نحسب عند الالانهاية $\zeta \to -\infty$ مع $\tanh\left(-\infty\right) = -1$

$$\Omega\left(-\infty\right) = \sqrt{\left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\tanh\left(-\infty\right)\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 - m^2} = \Omega_{-} \tag{IV.18}$$

بالتالي تصبح المعادلة (IV.17) :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \Omega_{-}^2\right]\psi = 0 \tag{IV.19}$$

حلها من الشكل :

$$\psi_{\mp} \ltimes \frac{e^{\pm i\Omega_{-}\zeta}}{\sqrt{2\Omega_{-}}} \tag{IV.20}$$

بالنسبة للحد $\zeta \to +\infty$ مع $\tanh(+\infty) = +1$

$$\Omega(+\infty) = \sqrt{\left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\tanh(+\infty)\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 - m^2} = \Omega_+ \tag{IV.21}$$

بالتالي تصبح المعادلة (IV.17) :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \Omega_+^2\right]\psi = 0 \tag{IV.22}$$

وحلها

$$\psi^{\mp} \ltimes \frac{e^{\mp i\Omega_+\zeta}}{\sqrt{2\Omega_+}} \tag{IV.23}$$

في المعادلة (IV.13) نقوم بوضع المتغير الجديد :

$$y = \frac{1}{1+e^{2\sqrt{\alpha}\zeta}} \Rightarrow \frac{1-y}{y} = e^{2\sqrt{\alpha}\zeta} \tag{IV.24}$$

$$\Rightarrow \frac{1-2y}{y} = e^{2\sqrt{\alpha}\zeta} - 1 \tag{IV.25}$$

لدينا :

$$\Omega^2 = \left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\tanh\sqrt{\alpha}\zeta^2\right)^2 - m^2 \tag{IV.26}$$

$$= \left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\frac{e^{2\sqrt{\alpha}\zeta}-1}{1+e^{2\sqrt{\alpha}\zeta}}\right)^2 - m^2 \tag{IV.27}$$

$$= \left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}}2y\frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 - m^2 \tag{IV.28}$$

حساب المشتقات

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\zeta} &= \frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial y} = -2\sqrt{\alpha}\,(1-y)\,y\frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} &= 4\alpha\,(1-y)\,y\frac{\partial}{\partial y}\,(1-y)\,y\frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} &= 4\alpha\,(1-y)^2\,y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4\alpha\,(1-2y)\,(1-y)\,y\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

بالتالي تصبح المعادلة (IV.13) كالاتي :

$$\left[4\alpha\,(1-y)^2\,y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4\alpha\,(1-2y)\,(1-y)\,y\frac{\partial}{\partial y} + \left(\omega + \frac{eE}{\sqrt{\alpha}} - 2y\frac{eE}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 - m^2\right]\psi = 0 \qquad \text{(IV.29)}$$

يمكننا أن نلاحظ أن :

$$\frac{1}{(1-y)\,y} = \frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{y} \qquad \text{(IV.30)}$$

بالتالي

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{\frac{\Omega_+^2}{4\alpha}}{y} + \frac{\frac{\Omega_-^2}{4\alpha}}{(1-y)} - \frac{e^2E^2}{\alpha^2}\right]\frac{1}{(1-y)\,y}\right]\psi = 0 \qquad \text{(IV.31)}$$

هذه المعادلة التفاضلية هي من الشكل معادلة ريمان والتي تكتب على الشكل :

$$f^{(2)} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}\right)f^{(1)} + \frac{1}{z(1-z)}\left(\frac{aa'}{z} - bb' + \frac{cc'}{1-z}\right)f = 0 \qquad \text{(IV.32)}$$

بالمطابقة فان :

$$aa' = \frac{\Omega_+^2}{4\alpha} \tag{IV.33}$$
$$bb' = \frac{\Omega_-^2}{4\alpha} \tag{IV.34}$$
$$cc' = \frac{e^2E^2}{\alpha^2} \tag{IV.35}$$

نختار :

$$a = -a' = i\frac{\Omega_+}{4\alpha}, b = b' = i\frac{\Omega_-}{4\alpha}, c = 1 - c' = \frac{1}{2} - i\vartheta \tag{IV.36}$$
$$\vartheta = \sqrt{\frac{e^2E^2}{\alpha^2} - \frac{1}{4}} \tag{IV.37}$$

حلول هذه المعادلة تكتب على الشكل :

$$\psi_1 = y^a (1-y)^{c'} F\left(\frac{1}{2} + i\vartheta; \frac{1}{2} - i\vartheta; 1 + 2a; y\right) \tag{IV.38}$$
$$\psi_2 = y^{a'} (1-y)^{c'} F\left(\frac{1}{2} + i\vartheta; \frac{1}{2} - i\vartheta; 1 - 2a; y\right) \tag{IV.39}$$
$$\psi_3 = y^{a'} (1-y)^{c'} F\left(\frac{1}{2} + i\vartheta; \frac{1}{2} - i\vartheta; 1 + 2c; 1-y\right) \tag{IV.40}$$
$$\psi_4 = y^a (1-y)^{c'} F\left(\frac{1}{2} + i\vartheta; \frac{1}{2} - i\vartheta; 1 - 2a; 1-y\right) \tag{IV.41}$$

وهي الحلول العامة لمعادلة كلاين-جوردن في وفي وجود حقل كهربائي ثابت حيث α يمثل مربع للطول الأصغري

3.IV خلاصة الفصل

في هذا الفصل تمكننا من حل معادلة كلاين-جوردن في وجود حقل كهربائي ثابت حسب مبدأ الطول الأصغري وباستعمال عدة تحويلات رياضية تمكنا من الوصول الى حل نهائي تحليلي لهذه المعادلة .

خلاصة عامة

في هذه المذكرة قمنا بتقديم مفاهيم حول مبدأ الارتياب المعمم لهايزنبارغ وعلاقته بالطول الأصغري وأعطينا التمثيلات الممكنة في ميكانيك الكم المعمم.

ثم طبقنا هذه المفاهيم على دراسة الحالات الفزيائية التالية:

- درسنا معادلة DKP في فضاء ذو بعدين (1+1) في وجود حقل سلمي ثابت .في فضاء كمية الحركة وباستعمال تحويلات رياضية استطعنا الوصول الى حلول تحليلية للمعادلة .
- طبقنا الطول الأصغري على معادلة شرودنغر في وجود كمون هارتمان .في فضاء الموضع توصلنا باستعمال نظرية الإضطرابات من الدرجة الأولى الى تصحيحات في عناصر الهاملتوني والتي تمكننا من حساب تصحيحات في الطاقة ، وقد لاحظنا أن هذه التصحيحات تتعلق بالعدد الكمي l مما يرفع بعض درجات الانحطاط (أو التوالد)
- أخيرا بالنسبة لمعادلة كلاين-جوردن ذو بعدين $(1+1)$ في وجود حقل كهربائي ثابت وبإستعمال تمثيل كمية الحركة ، تحصلنا بعد تحويلات رياضية إلى معادلة تفاضيلة ذات حلول تحليلة معروفة مع وجود حد من الدرجة الرابعة إعتبرناه حد اضطرابي .باستعمال نظرية الاضطرابات يمكننا حساب التصحيحات في الطاقة .

رغم أن مبدأ الارتياب المعمم لهايزنبارغ يجعل من المعادلات الرياضية أكثر تعقيدا وأن الحلول لا تكون عادة بالسهولة المعهودة في الحالة العادية (ميكانيك الكم العادي) فإن النتائج المتحصل عليها تكون قريبة من القياسات التجريبية مما يدفع الباحثين إلى مواصلة الأعمال في هذا المجال

المراجع

[1] Achim Kempf. Noncommutative geometric regularization. *Physical Review D*, 54(8):5174, 1996.

[2] Sabine Hossenfelder. The minimal length and large extra dimensions. *Modern Physics Letters A*, 19(37):2727–2744, 2004.

[3] Lay Nam Chang, Djordje Minic, Naotoshi Okamura, and Tatsu Takeuchi. Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations. *Physical Review D*, 65(12):125027, 2002.

[4] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B Mann. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*, 52(2):1108, 1995.

[5] Haye Hinrichsen and Achim Kempf. Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta. *Journal of Mathematical Physics*, 37(5):2121–2137, 1996.

[6] Michele Maggiore. The algebraic structure of the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B*, 319(1-3):83–86, 1993.

[7] Achim Kempf and Gianpiero Mangano. Minimal length uncertainty relation and ultraviolet regularization. *Physical Review D*, 55(12):7909, 1997.

[8] Achim Kempf. Non-pointlike particles in harmonic oscillators. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(6):2093, 1997.

[9] Ulrich Harbach, Sabine Hossenfelder, Marcus Bleicher, and Horst Stöcker. Signatures of a minimal length scale in high precision experiments. *arXiv preprint hep-ph/0404205*, 2004.

[10] S Hossenfelder. A note on theories with a minimal length. *Classical and Quantum Gravity*, 23, 03 2006.

[11] Chang-Yuan Chen, Cheng-Lin Liu, and Dong-Sheng Sun. The normalized wavefunctions of the hartmann potential and explicit expressions for their radial average values. *Physics Letters A*, 305(6):341–348, 2002.

[12] Ulrich Harbach, Sabine Hossenfelder, Marcus Bleicher, and Horst Stöcker. Probing the minimal length scale by precision tests of the muon g- 2. *Physics Letters B*, 584(1-2):109–113, 2004.

[13] Kurt Gottfried. Quantum mechanics-vol. 1: Fundamentals. *qume*, 1966.

[14] Achim Kempf. Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, 35(9):4483–4496, 1994.

[15] MM Stetsko and VM Tkachuk. Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with minimal length. *Physical Review A*, 74(1):012101, 2006.

[16] Fabian Brau. Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(44):7691, 1999.

[17] Luis B Castro and Angel E Obispo. Generalized relativistic harmonic oscillator in minimal length quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(28):285202, 2017.

[18] Chang-Yuan Chen, Dong-Sheng Sun, and Cheng-Lin Liu. The general calculation formulas and the recurrence relations of radial matrix elements for hartmann potential. *Physics Letters A*, 317(1-2):80–86, 2003.

[19] Martin Sprenger, Piero Nicolini, and Marcus Bleicher. Physics on the smallest scales: an introduction to minimal length phenomenology. *European Journal of Physics*, 33(4):853, 2012.

[20] Fouzia El Wassouli. An integral involving gegenbauer polynomials. *African Journal Of Mathematical Physics*, 5:51–56, 2007.

ملخص

في هذه المذكرة عرفنا مبدأ الإرتياب المعمم لهايزنبارغ وكيفية بناء ميكانيك كمي معمم انطلاقا من علاقات تبادل جديدة. وطبقنا هذا المبدأ على الحالات التالية :

- معادلة DKP في بعد واحد في وجود حقل سلمي حيث تمكنا من إيجاد حلول تحليلية للمعادلة .
- استعملنا نظرية الاضطرابات من الدرجة الأولى على معادلة شرودنغر في وجود كمون هارتمان واستطعنا حساب التصحيحات في عناصر الهاملتوني .
- معادلة كلاين-جوردن ذات بعد واحد في وجود حقل كهربائي ثابت .

الكلمات المفتاحية : مبدأعدم اليقين - معادلة DKP - معادلة كلاين-جوردن - الطول الأصغري .

Astract

In this thesis ,we have presented the generahzed Hesenberg un certainty principle and we have constructed a generahzed quantum mecanw es from the new commwtation relations .

we have applied this princeiple to the follourng cases:

- unidensional DKP equation with scalar freld and we have obtained analytical solntions
- schrodinger equation with Hartmann potential ,and by the use of the pertnabattion theorg at the fist order ,we have obtained corractions of hamiltonian matrix elements
- unidensional Klein-Gordon eqnation under a comstant electric fieled.

Kegwords: Generalized uncertainty principle -DKP equaton -Klein-Gordon eqation -Minimal length

Resume

Dane ce memoire nous avons introduit le principe d'incertitude generalise de heisenberg et nous avons montre romme,t construine une mecanique generalisee a partir des nouvelles relation de commutation

Nous avons applique ce principe sur les cas suivantnts:

- equation de DKP unidimensinnelle dans un champ scalaire et nus avons obtenu des solutions analytiques
- En applicant la theorie des pertnrbtions aus premier ordre sur l'e'quation de Sschrodinger dans un potentral de Hartmann,on a obtenu des correctons des e'lements de l'hamiltonuen.
- Equation de Klein-Gordon unidensionnelle dans un champ electrique constant .

Mots_cle's: Principe d'incrtitude ge'neralise - Equetion de DKP - Equation de Klein-Gordon -Longueur minimale.