REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté Des Mathématiques et des Sciences de la Matière Département De Mathematiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatiques

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et Géométrie

PAR

Roumaïssa Redouani

Sujet

Représentations linéaires des groupes finis

Devant le jury:

Président :	Bahayou M.Amine	**M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla**
Rapporteurs :	Boussaid Mohamed	**M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla**
Examinateur :	Ben Moussa M.Tayeb	**M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla**
Examinateur :	Gerboussa Yacine	**M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla**

Promotion : 2019/2020

Dédicace

Nous dédions le fruit de nos efforts à ceux qui ont beauoup souffert pour nous rendre joyeux et heureux .

A ceux qui se sont sacrifiés pour nous mettre sur la voie de connaissance et de savoir :

Nos tendres parents .

Nous dédions également ce travail à ceux qui nous ont permis d'accéder à ce cher succés :

Nos professeurs à qui , nous exprimons nos sincères reconnaissances et considérations .

Nous dédions ,enfin, ce grand labeur scientifique,à ceux qui nous ont côtoyées durant le cycle universitaire :

Nos chers amis

Roumaïssa Redouani

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donne le courage et la patience pour realiser ce travail.

Je remercie mon encadreur Mr Boussaid Mohamed Professeur à l'université de Kasdi Merbah Ouaragla qui a accepté de prendre en charge mon travail de mémoire de magister.

Je remercie en coure Dr Ben Moussa M.Tayeb et Dr Gerboussa Yacine, Dr Bahayou M. Amine Professeurs du comité de discussion

A tous les enseignants qui m'ont accordé leurs temps, leur éclairage scientifique et leur soutien moral durant ma carrière académique

A messieurs les membres du jury qui ont accepté de disposer de leurs temps pour juger ce travail.

J'adresse toute mon affection a ma famille et mon parents,merci pour votre soutien et vos encouragements durant toutes ces annees. Je tiens egalement a remercier sans oublier toute ma grande famille petits et grands tout on espérant du dieu qu'il nous unisse pour le bien .

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Roumaïssa Redouani

Table des matières

Notations générales

- ► G : disigne un groupe fini
- ► S_n : le groupe symetrique d'ordre n (le groupe de permutation de n éléments)
- ► $GL_n(K)$: le groupe des matrices $n \times n$ inversible a valeurs dans K
- ► $GL(V)$: l'ensemble des isomorphisme de V dans V (groupe par la loi composition des application)
- ► χ_ρ : le caractère d'une représentation
- ► T_r : désigne automorphisme de groupe G
- ► $KerF$: noyau de F
- ► ImF : image de F
- ► $\oplus$: la somme direct
- ► ρ_s : disigne $\rho(s)$
- ► $Aut(G)$: désigne automorphisme de groupe G
- ► D_n : le groupe deadral.
- ► $\mathscr{L}_k(E, F)$: l'ensemble des applications $k - linaire$ de E dans F.

Introduction

En mars 1896, **Richard Dedkind** a écrit une lettre à **Georg Frobenius** dans laquelle il définit son concept de ≪ détermination des types ≫ d'un groupe fini et expose ses résultats concernant la factorisation d'un polynôme lorsque le groupe G est abélien.

Dans une seconde lettre en avril, il a formulé quelques conjectures lorsque G est non-abélien. **Frobenius** s'attaqua immédiatement au problème et fit des progrès substantiels à l'été 1896. On peut dire que ces deux lettres deviennent l'origine du concept de : représentations des groupes finis. Notre travail est composé de trois parties :

Dans le premier chapitre, nous allons décrire quelques concepts et propriétés liés à la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

Le deuxième chapitre est consacré aux définitions des premiers concepts de théorie des représentations linéaires des groupes finis (Représentation linéaire, sous représentation linéaire, représentation irréductible, représentation induite ...), ainsi que des résultat sur ces concepts.

Le troisième chapitre concerne les caractères des représentations linéaires et leur propriété, et quelques exemples de représentations linéaires seront présenter à la fin de ce chapitre.

Chapitre 1

Preliminaires

1.1 Groupes

Définition 1.1. *Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ qui vérifie :*

1. *La loi de composition est associative :*

$$\forall x, y, z, \in G : (xy)z = x(yz).$$

2. *La loi possède un élément neutre noté e :*

$$\exists e \in G : \forall x \in G, ex = xe = x.$$

3. *Tout élément x de G possède un symétrique (ou inverse) x' :*

$$\forall x \in G \exists x' \in G : xx' = x'x = e$$

Remarque 1.1. *Si de plus on a* $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, *on dit que* ***G est abélien(ou commutatif).***
Souvent, on parle d'un groupe G *sans citer sa loi, et dans ce cas on utilise la notation multiplicative* yx *au lieu de* $y * x$.

Exemple 1.1.

- $(\mathbb{Z}, +)$ le groupe des entiers relatifs.
- $(\mathbb{R}, +)$ le groupe des nombres réels muni de la loi additive.

Définition 1.2. *Soit* G *un groupe,* $a \in G$ *et* $m \in \mathbb{Z}$.

- *Si* $m > 0$ *on note* a^m *l'élément* $(a.a.a....), m$ *fois,*
- *Si* $m < 0$ *on note* a^m *l'élément* $(a^{-1}.a^{-1}.a^{-1}....), -m$ *fois,*
- *Si* $m = 0 : a^0 = e$ *(l'élément neutre de* G *).*

Ainsi se trouvent définis tous les éléments $a^n, n \in \mathbb{Z}$, *comme on peut vérifier les règles de calcul usuelles telles que :* $a^{n+m} = a^n.a^m$ *et* $(a^n)^m = a^{nm}$, *pour tous les éléments* m, n *de* $\mathbb{Z}$.

1.1.1 Sous-groupes

Définition 1.3. *Soit* G *un groupe et* $H \subset G, H$ *est un sous groupe de* G *si :*

- H *contient l'élément neutre de* G *:* $e \in H$.
- H *est stable par la loi de composition de* G *:*$x, y \in H \Longrightarrow xy \in H$.
- H *est stable par inverse :* $x \in H \Longrightarrow x^{-1} \in H$.

Remarque 1.2. *Soit* G *un groupe. Une partie* H *de* G *est un sous-groupe de* G *si :*

1. H *non vide*
2. $xy \in H \Longrightarrow xy^{-1} \in H$

Exemple 1.2.

1. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $\{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{R}$ pour la loi " + ".

1.1.2 Groupe engendré

On dit qu'une partie A d'un groupe G est un ensemble ou système de générateurs de G, ou que G est engendré par A si $\langle A \rangle = G$.

1.1.3 Groupe cyclique

Définition 1.4. *Lorsqu'un groupe G fini est engendré par un seul élément a de G, on dit que G est cyclique.*
Et on note $G = \langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ le groupe engendré par a.

Proposition 1.1. *si G est un groupe cyclique, alors :*
ou bien G est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}$ ou bien G est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

1.1.4 Ordre d'un groupe, d'un élément

Définition 1.5. *Un groupe G est dit fini s'il n'a qu'un nombre fini d'éléments.Dans ce cas, le cardinal de G s'appelle **l'ordre** du groupe G et est noté $|G|$.*
*Soient G un groupe et x un élément de G. On appelle **ordre** de x, qu'on note $o(x)$, le cardinal de $\langle x \rangle$. Si ce cardinal est infini, on dit que x est d'ordre infini.*

Remarque 1.3.

1. Soient G un groupe fini et x un élément de G, alors $o(x)$ divise $|G|$.
2. Dans tout groupe G, l'élément neutre est le seul élément d'ordre 1.
3. Dans $(\mathbb{Z}, +)$, tout les éléments non nuls sont d'ordre infini.

Proposition 1.2. *Soient G un groupe et x un élément d'ordre fini de G. Alors $o(x)$ est le plus petit entier positif s tel que $x^s = 1_G$.*

1.1.5 Groupes quotients

Relation d'équivalence

Définition 1.6. *Une relation d'équivalence R_g est dite compatible à gauche avec la loi interne de G, si :*

$$x \equiv y(R_g) \Rightarrow \alpha x \equiv \alpha y(R_g) \forall \alpha \in G$$

- *Si R_g existe alors elle est de la forme $x \equiv y(R_g) \Leftrightarrow x^{-1}y \in \overline{e}$, ($\overline{e}$ étant la classe de l'élément neutre de G).*
- *$\overline{e}$ est un sous groupe de G.*
- *Reciproquement, H étant un sous groupe de G, la relation définie par : $x \Re y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ est une relation d'équivalence compatible à gauche avec la loi de groupe.*

> En résumé une relation d'équivalence compatible à gauche avec la loi de groupe, est de la forme $x^{-1}y \in H$, H étant un sous groupe quelconque de G.
> On peut introduire de même, les relations d'équivalence compatibles à droite et montrer qu'elles sont de la forme $xy^{-1} \in H, H$ sous groupe de G.

♣ Classes selon un sous-groupe

R_g (respectivement R_d) étant une relation d'équivalence compatible à gauche (respectivement à droite), H le sous groupe qui la caractérise, $\overline{x_g}$ (respectivement $\overline{x_d}$) la classe d'un élément x modulo R_g (respectivement R_d) alors :

- $\overline{x_g} = \{xy : y \in H\} = xH$.
- $\overline{x_d} = \{yx : y \in H\} = Hx$
- xH et Hx seront dites classe à gauche et classe à droite modulo H.
- Les classes $\overline{e_g}$ et $\overline{e_d}$ de l'élément neutre e de G sont égales à H. ($\overline{e_g} = \overline{e_d} = H$)
- L'application de H dans xH définie par $z \longmapsto xz$ est une bijection.
- Si $xH \cap yH$ n'est pas vide alors $xH = yH$. Ce qui nous permet de déduire ;
- Dans un groupe fini, l'ordre(nombre d'éléments) d'un sous groupe quelconque est un diviseur de l'ordre du groupe.

- L'ensemble quotient mod R_g est noté $G\diagup R_g$ ou $(G\diagup H)_g$; ses éléments sont les classes à gauche.
  $(G\diagup H)_g = \{xH, x \in H\}$; de même $(G\diagup H)_d = \{Hx, x \in H\}$.

♣ Cas d'un groupe commutatif

H sous-groupe de G étant donné, $R_g = R_d = \Re$.
Il est alors possible de munir l'ensemble quotient $\dfrac{G}{\Re}$ (noté aussi $\dfrac{G}{H}$) d'une loi :

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}.$$

♣ Cas d'un groupe non commutatif

Dans ce cas R_g et R_d engendrées par la donnée d'un sous-groupe H sont généralement distinctes. On se propose de choisir convenablement H de sorte qu'elles soient équivalentes (on entend par là, que les classes à gauche et à droite de tout élément x coincident)

- On a alors :

$$\forall x \in G : xH = Hx; H = xHx^{-1} = x^{-1}Hx.$$

  Un tel sous-groupe est dit distingué dans G et on note dans ce cas $H \lhd G$.

- De tels sous-groupes existent toujours.
  ($\{e\}$ et G par exemple).

- Il est alors possible de munir $(G\diagup H)_g = (G\diagup H)_d = G\diagup H$ d'une loi :

$$\overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}.$$

  qui en fasse un groupe, $G\diagup H$ est dit groupe quotient de G par H.

1.2 Homomorphisme de groupe

Définition 1.7. *Soit G et G' deux groupes, un homomorphisme de groupes (ou simplement homomorphisme) de G dans G' est une application $f : G \longrightarrow G'$ vérifiant :*

$$\forall x, y \in G : f(xy) = f(x)f(y)$$

1 *On vérifie alors que :*

- $f(e) = e'$ *(e et e' sont les éléments neutres de G et G')*
- $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

2 *Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupes si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de G dans G', dans ce cas G et G' sont dits isomorphes et l'on note $G \cong G'$*

3 *Un homomorphisme de G dans G est appelé endomorphisme de G*

4 *Un isomorphisme de G dans G est appelé automrphisme de G*

Remarque 1.4.

- L'ensemble des endomorphismes de G est noté $End(G)$.
- L'ensemble des automorphismes de G est noté $Aut(G)$.
- Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

  1 H est un sous-groupe distingué dans G

  2 Il existe un groupe G' et un homomorphisme $f : G \longrightarrow G'$ tel que : $H = \ker(f) = \{x \in G \diagup f(x) = e'\}$.

1.3 Corps

Définition 1.8. *Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux lois de composition(deux opérations), notées $+$ et $\times$ vérifiant les conditions suivantes :*

1 *La loi de composition $+$ vérifie :*

- *Elle est associative* $(x+y)+z = x+(y+Z), \forall x, y, z \in \mathbb{K}$
- *Elle est commutative :* $x+y = y+x, \forall x, y \in \mathbb{K}$
- $\mathbb{K}$ *possède un élément neutre* $0 : x+0 = x, \forall x, \in \mathbb{K}$
- *Tout élément x de $\mathbb{K}$ possède un symétrique $(-x)$ par rapport à* $0 :$
  $x+(-x) = 0, \forall x \mathbb{K}$

2 *La loi de composition $\times$ vérifie :*

- *Elle est associative* $(x \times y) \times z = x \times (y \times z), \forall x, y, z \in \mathbb{K}$
- *Elle est distributive par rapport à la loi* $+ :$
  $x \times (y+z) = x \times y + x \times z, \forall x, y, z \in \mathbb{K}$
- $\mathbb{K}$ *possède un élément neutre* 1 *pour* $\times : x \times 1 = 1 \times x = x, \forall x \in \mathbb{K}$
- $\forall x \in \mathbb{K}$ *et* $x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in \mathbb{K} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

1.4 Espace Vectoriel

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ représente un corps commutatif. On considère un ensemble E sur lequel on suppose définies

- une loi de composition interne notée additivement $(+)$
- une loi composition externe. notée multiplicativement $(.)$, de :

$$\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$$

Définition 1.9. *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si*

1 $(E,+)$ *est un groupe abélien, de neutre* 0_E

2 $\forall(x,y) \in E^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2.$

- $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
- $1.x = x$ *où* 1 *est l'élément neutre pour la multiplication de* $\mathbb{K}$

1.4.1 Sous-espace vectoriels

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$:

Définition 1.10. *Une partie F de E est appelée* ***sous-espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$ ***de*** E *si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1 $(F,+)$ *est un sous-groupe de* $(E,+)$

2 $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda.x \in F$

1.4.2 Somme direct

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est somme directe de F et G(sont supplémentaires dans E) si :

$$\forall z \in E, \exists!(x,y) \in F \times G, z = x + y \Leftrightarrow \begin{cases} \forall z \in E, \exists(x,y) \in F \times G \\ \bullet\ z = x + y \\ \bullet\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

et on écrit $E = F \oplus G$.

1.4.3 Applications linéaires

Définition 1.11. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. Dire que f est une **application linéaire** ou un **morphisme** signifie que les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

Notation

- L'ensemble des application linéaires dans E est noté $End(E)$, $(End(E), +)$ est un groupe pour $(+)$ definie par : $\forall f, g \in End(E), (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ $f : E \longrightarrow F$ est application $k-linaire$
  1. si f est bijective on dit que f est un isomorphisme.
  2. si $f : E \longrightarrow E$ est un isomorphisme on dit que f est un automorphisme de E.
- L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$, $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

1.4.4 Groupe général linéaire d'un espace vectoriel

Définition 1.12.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. $GL(V)$ est le groupe des automorphismes de V, muni de la loi de composition $\circ$ d'élément neutre I.
$a \in GL(V)$ est une application linéaire de $V \to V$ inversible, d'inverse a^{-1} linéaire.

- On a $GL(V) \subset End(V)$.

Remarque 1.5.

$$f \in GL(V) \Leftrightarrow (B \;\; base\ de \;\; V \Rightarrow f(B) \;\; base \;\; de \;\; V)$$

Matrice d'une application linéaire

- E et V deux espace vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, $\dim E = \dim V = n$, $f : E \to V$ deux application $k - linaire$

1 Si on fixe $B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de E,
$\forall i = \overline{1, ..., n}; f(e_i) \in V \qquad B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base de V
on a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + ... + \alpha_{n1}v_n \\ f(e_2) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + ... + \alpha_{n2}v_n \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{ij} \in \mathbb{K} \\ f(e_n) &= \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + ... + \alpha_{nn}v_n \end{aligned}$$

le tableau $M_f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ est appelé
la matrice de f par rapport à B_1 et B_2 on a $M_{g\circ f} = M_g \times M_f$

2 Si f est un isomorphisme M_f est inversible et $(M_f)^{-1} = M_{f^{-1}}$
l'ensemble des matrices $n \times n$ à coéfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$

3 Si on fixe une base B de V on a $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL(V)$.

1.4.5 Projection

Définition 1.13.

Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E, c'est-à-dire : $E = F \oplus G$. Alors **la projection sur** F **parallélement à** G est alors l'application : $P : E = F \oplus G \longrightarrow F$ définie par :

$$\forall (x, y)) \in F \times G, P(x + y) = x.$$

Proposition 1.3.

L'application p qui est définie dans la définition 1.13 est un endomorphisme, idempotent ($p \circ p = p$), d'image $Im(p) = F$ et de noyau $ker(p) = G$.

1.4.6 La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ sont appelés les **éléments diagonaux.** Sa **diagonale principale** est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Définition 1.14. *La **trace** de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,*

$$TrA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}. \tag{1.3}$$

Exemple 1.3.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors $TrA = 2 + 5 = 7$.
2. Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $TrB = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorèm 1.1. *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

1. $Tr(A + B) = TrA + TrB$,
2. $Tr(\alpha A) = \alpha TrA$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$
3. $Tr(A^T) = TrA$,
4. $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Chaptre 2

Représentation linéaire des groupes finis

Dans toute la suite, G désignera un groupe fini (pas forcément commutatif), noté multiplicativement. Si V est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps des complexes $\mathbf{C}$, on note comme d'habitude $GL(V)$ le groupe des applications linéaires bijectives de V dans V, muni de la loi $\circ$ (qu'on notera souvent également multiplicativement). Le choix d'une base de V permet alors d'identifier $GL(V)$ au groupe $GL_n(\mathbf{C})$ des matrices inversibles complexes de taille n.

2.1 Représentation linéaire

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on désigne par $GL(V)$ le groupe des isomorphismes $\mathbb{C}-$ linéaire de V :

Définition 2.1. *Soit G un groupe fini, d'élément neutre e et de loi de composition interne $(s,t) \mapsto st$.*
*Une **représentation linéaire** de G dans V est un homomorphisme de groupe $\rho : G \to GL(V)$.*
En d'autre termes : $\forall s,t \in G$: $\rho(s) \in GL(V)$ et on a $\rho(st) = \rho(s) \circ \rho(t)$ on a propriétés suivantes :

- $\rho(e) = I$,
- $\rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$.

• On note $\rho(s)$ par ρ_s pour simplifié l'écriture.

Remarque 2.1. *On pourrait définir la notion de représentation linéaire de la même façon sur tout corps commutatif à la place de* $\boldsymbol{C}$. *Néanmoins, la plupart des propriétés qui nous intéresseront dans ce travail utilisent fortement le fait qu'on est sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, d'où le choix de se restreindre aux espaces vectoriels complexes.*

Exemple 2.1.

1. Si $\forall s \in G : \rho_s = I, \rho$ est dite **la représentation trivial.**
2. Soient le groupe cyclique $G = \langle\overline{1}\rangle = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$
   et $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ espace vectoriel

$$\rho : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to GL(\mathbb{R}^3) \simeq GL_3(\mathbb{R})$$
$$\overline{0} \mapsto \rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to GL(\mathbb{R}^3) \simeq GL_3(\mathbb{R})$$
$$\overline{1} \mapsto \rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\rho_{\overline{2}} = \rho_{\overline{1}} \times \rho_{\overline{1}} \Rightarrow \rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

2.1.1 Le degré de la représentation :

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n, on dit aussi que n est le degré de la représentation considèrée.

• Dans l'exemple 2.1 ρ est une représentation de degré $3 = \dim \mathbb{R}^3$

2.1.2 Identification matricielle :

G un groupe fini V un $\mathbb{C}-espace$ vectoriel $\dim V = n$. Soit $\varphi : G \to GL(V)$ une représentation de G dans V.
Soit $(e_i)_n$ une base de V est soit $s \in G$ donc $\varphi_s \in GL(V)$, soit $R_s \in GL_n(\mathbb{C})$ la matrice de φ_s par rapport à cette base on a :

$$\det(R_s) \neq 0, \qquad R_{st} = R_s R_t \quad \text{si } s,t \in G$$

Si l'on note $r_{ij}(s)$ les coefficients de la matrice R_s alors : $r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s).r_{jk}(t)$, ($r_{ik}(st)$ c'est les coefficients de la matrice R_{st}) c'est ce que l'on appelle une représentation $\ll$ sous forme matricielle $\gg$.

2.2 Représentation semblables (ou isomorphies)

Soient ρ et ρ' deux représentation linéaire du même groupe G dans des espaces vectoriels V et V', on dit que ces représentation sont semblables (ou isomorphes), s'il existe un isomorphisme linéaire $\tau : V \to V'$ qui " transforme " ρ en ρ', c'est à dire vérifie :

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \forall s \in G$$

et on a le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(s)"] \arrow[d, "\tau"'] & V \arrow[d, "\tau"] \\ V' \arrow[r, "\rho'(s)"'] & V' \end{tikzcd}$$

Lorsque ρ et ρ' sont donneés sous forme matricielle par R_s et R'_s, ce la signifie qu'il existe une matrice inversible T associé à τ telle que :

$$(T.R_s = R'_s.T, \forall s \in G) \Leftrightarrow (R'_s = T.R_s.T^{-1}, \forall s \in G)$$

Remarque 2.2. *Comme τ est un isomorphisme linéaire alors V et V' sont de même dimension, en particulier, ρ et ρ' ont même degré.*

Exemple 2.2.

Soit $G = \{s, s^2, s^3 = e\} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ un groupe cyclique d'ordre 3

Soit $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^3)$ la représentation de G dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\rho_s(x, y, z) = (y, z, x)$.

On fixe la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

on a $\mathcal{R}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de ρ_s et soit $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'isomorphisme définie par $\tau(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$

cherchons ρ' représentation semblable à ρ

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\rho_s} & \mathbb{R}^3 \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow[\rho'_s]{} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

on a $\rho'_s \circ \tau = \tau \circ \rho_s$

$\rho'_s(x, y, z) = \left(\dfrac{x+y}{2} + z, \dfrac{x-y}{2} - z, \dfrac{x+y}{2} \right)$

$$\mathcal{R}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrice de } \rho_s$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice de } \tau$$

$$\mathcal{R}'_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ matrice de } \rho'_s$$

on a bien $\mathcal{R}'_s T = T\mathcal{R}_s$, $\mathcal{R}'_{s^2} T = T\mathcal{R}_{s^2}$ et $\mathcal{R}'_{s^3} T = T\mathcal{R}_{s^3}$

$$\left(\begin{array}{c} car : \quad \mathcal{R}'_s T = T\mathcal{R}_s \Rightarrow \mathcal{R}'_s = T\mathcal{R}_s T^{-1} \\ \mathcal{R}'_{s^2} = \mathcal{R}'_s \times \mathcal{R}'_s = T\mathcal{R}T^{-1} \times T\mathcal{R}_s T^{-1} = T\mathcal{R}_s\mathcal{R}_s T^{-1} = T\mathcal{R}_{s^2} T \end{array} \right)$$

ρ' est semblable a ρ.

2.3 Sous représentation

- **Sous Espace vectoriel stable par une représentation**

Définition 2.2.

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation. Un sous espace vectoriel W de V est dit **stable** par ρ si : $(\forall s \in G), \rho_s(W) \subset W$.

- **Sous représentation**

Définition 2.3.

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation, W un sous-espace vectoriel de V stable par ρ. La restriction ρ_s^W de ρ_s à W est alors un isomorphisme de W dans W et l'on a : $\rho_{st}^W = \rho_s^W.\rho_t^W$

Ainsi $\rho^W : G \to GL(W)$ est une représentation linéaire de G dans W, et on dit ρ^W est une **sous représentation de** ρ, on dit aussi que W est une sous représentation de V.

Exemple 2.3.

1 Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire. Le sous-espace nul $\{0\} \subset V$ est stable par ρ. La représentation associée est la sous représentation nulle.

2 On va utiliser l'exemple 2.1 précédent

Posons $W = \{(x, y, z) \diagup x + y + z = 0\}$ est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dim 2

$W = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$ $\rho_s(W) \subseteq W \quad \forall s \in G$, donc W est sous-représentation de dégré 2.

Définition 2.4.

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire de G dans V. Soit $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables par ρ. On dit alors que ρ est la somme directe des sous-représentation $\rho^i : G \to GL(V_i)$ associées de ρ et on note $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho^i$. (avec $\rho^i = \rho^{V_i}$)

L'intérêt des notions précédentes, tient au théorème suivant et à son corollaire, qui dit en quelque sorte qu'une sous-représentation est toujours un " facteur direct" de la représentation de départ.

Théorèm 2.1. *Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G. Soit W un sous-espace de V stable par ρ. Alors il existe un sous-espace supplémentaire W^0 de W dans V, qui est stable par ρ.*

Preuve:

On commence à choisir un supplémentaire quelconque W' de W dans V donc $V = W \oplus W'$, et on appelle p le projecteur sur W parallèlement à V. Soit g le cardinal de G, posons :

$$p^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_t p (\rho_t)^{-1}. \tag{2.1}$$

On observe que $Imp^0 \subset W$ (d'aprés la proposition $Imp = W$ et W stable par ρ), et si $x \in W$, alors $(\rho_t)^{-1}(x) \in W$ puisque W stable par ρ, et donc $p(\rho_t^{-1}(x)) = \rho_t^{-1}(x)$, ce qui donne :

$$p^0(x) = \left(\frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_t p (\rho_t)^{-1} \right)(x) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} I(x) = \frac{1}{g}(g.x) = x.$$

Il en résulte que p^0 est un projecteur de V sur W. Définissons $W^0 = \ker p^0$. On observe qu'on a l'égalité $\rho_s p^0 = p^0 \rho_s$, pour tous $s \in G$. En effet :

$$\rho_s p^0 \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_{st} p \rho_{(st)^{-1}} = p^0.$$

vu que l'application $t \mapsto st$ est une bijection de G dans lui-même. On a bien W^0 est stable par ρ, et c'est bien un supplémentaire de W dans V. ■

Corollaire 2.1. *Pour toute sous-représentation $\rho^W : G \to GL(W)$ de ρ, il existe une sous-représentation $\rho^{W^0} : G \to GL(W^0)$ telle que $\rho = \rho^W \oplus \rho^{W^0}$.*

Preuve: Il suffit en effet de prendre un supplémentaire W^0 de W stable par ρ grâce au théorème précédent. ■

2.4 Représentation irréductibles

Définition 2.5. *Soit G un groupe fini. Une représentation linéaire $\rho : G \to GL(V)$ est dite irréductible (ou simple) si $V \neq \{0\}$ et V n'admet aucun sous-espace stable par ρ autre que V et $\{0\}$.*

Remarque 2.3. *D'aprés le corollaire 2.1, il est équivalent de dire que la seule décomposition de ρ en somme directe de sous représentations correspond à la décomposition triviale $V = V \oplus \{0\}$. Par exemple, toute représentation de degré 1 est de manière évidente irréductible (noter par contre que par convention, la représentation $V = \{0\}$ n'est pas irréductible).*

L'intérêt de cette notion réside dans le théorème suivant :

Théorèm 2.2. *Soit G un groupe fini. Soit V un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie. Alors, toute représentation $\rho : G \to GL(V)$ est somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles.*

Preuve:

On procède par récurrence sur la dimension de V. $\dim V = 1$, toute représentation est irréductible (et noter que pour $V = \{0\}$, le théorème est encore vrai en prenant la somme vide). Supposons que dimension $V \geq 2$. Si ρ est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Sinon, le corollaire 2.1 assure qu'il existe une décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ en somme directe de sous-espaces stables par ρ et de dimension inférieur à dimension de V. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèses de récurrence aux sous représentations de ρ correspondant à V_1 et V_2. ■

Exemple 2.4.

1. On va utiliser l'exemple 2.1 précédent, soit $H = \{(x, y, z) / x = y = z\}$ il est claire que H est représentation de dégré 1 à cause de $H = \langle(1, 1, 1)\rangle$ donc, elle est sous représentation de V et aussi on peut dire que H est représentation irréductible parce que elle est de dégré égale à 1.

2 $G = \{s, s^2, s^3 = e\} \simeq \mathbb{Z}/\rho\mathbb{Z}$

Soit

$$\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^2)$$
$$s \longmapsto \rho_s$$

definie par :

$$\rho_s(x, y) = \left(xcos\frac{2\pi}{3} - ysin\frac{2\pi}{3}, xsin\frac{2\pi}{3} + ycos\frac{2\pi}{3}\right).$$

Une représentation de G dans l'espace $\mathbb{R}^2$ si W est un sous espace propre de $\mathbb{R}^2$. Alors W est une droite $\exists a \in \mathbb{R}, \quad W = \{(x, ax)/x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ W est non stable par $\rho_s \quad \rho_s(W) \nsubseteq W$.

Théorèm 2.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1 *G est commutatif.*

2 *Toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1.*

2.4.1 Lemme de Shur

Lemme 2.1. *Soit G un groupe fini, soient $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ et $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ deux représentation irréductibles de G. Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire vérifiant, $(\forall s \in G), \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$, Alors :*

1 *Si f n'est pas bijective (en particulier si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes), alors $f = 0$.*

2 *Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, alors f est une homothétie, c'est à dire : $(\exists \lambda \in \mathbb{C})/f = \lambda.I$*

Preuve:

♣ **Montrons(1)**

Par contraposée, si $f \neq 0$, montrons que f est bijective, on a :

$$f \neq 0 \Longrightarrow Kerf \neq V_1. \tag{2.2}$$

et puisque $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$, alors $Kerf$ stable par ρ^1, or $Kerf \neq V_1$ et $Kerf$ stable par ρ^1 qui est irréductible ce qui donne $Kerf = \{0\}$, ce qui implique que f est injective.
Et de même technique et par irréductibilité de ρ^2 on a $Imf = V_2$ donc f est surjective et par linéarité de f en conclut que f est un isomorphisme.

♣ **Montrons(2)**

Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$. Alors, puisqu'on est dans le corps $\mathbb{C}$, donc $(\exists\lambda \in \mathbb{C})$ tel que λ une valeur propre de l'endomorphisme f, et comme $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ et $\rho^1 = \rho^2$ alors $\rho_s^2 \circ (f - \lambda.I) = (f - \lambda.I) \circ \rho_s^1$, or $Ker(f - \lambda.I) \neq \{0\}$ (car : f admet une valeur propre) d'où $(f - \lambda.I)$ n'est pas isomorphisme, et d'aprés 1) on en déduit que $f - \lambda.I = 0$. c'est à dire : $(\exists\lambda \in \mathbb{C}) / f = \lambda.I$. ■

2.5 La somme direct de représentation

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G et soient $\rho_1 : W_1 \to GL(W_1)$
$\rho_2 : W_2 \to GL(W_2)$ (ρ_1, ρ_2 sont les restriction de ρ dans W_1, W_2)
on dit que $W = W_1 \oplus W_2$ est somme direct de représentation si $V = W_1 \oplus W_2$ comme des espace vectoriel et $\rho(s)(w_1 + w_2) = \rho_1(s)(w_1) + \rho_2(s)(w_2)$ pour tout $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ et tout $s \in G$

Exemple 2.5. *On va utiliser l'exemple 2.1 précédent, on choisi que $V = W \oplus H$ somme direct alors on peut dire aussi que $V = W \oplus H$ est une somme direct de deux sous-représentation de V. Si W et H sont deux sous-représentations.*

2.6 Représentation indécomposable

Soient G un groupe fini, V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation linéaire de G dans V

1 ρ est dite réductible $\Leftrightarrow \exists W$ sous espace propre de V, tel que $\rho_s(W) \subseteq W \ \ \forall s \in G$.

2 ρ est dite décomposable $\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \ \rho \, est \, reductible \rho_s(W_1) \subseteq W_1 \\ \bullet \ V = W_1 \oplus W_2 \, et \, \rho = \rho^{W_1} \oplus \rho^{W_2} \end{cases}$

3 ρ est dite indécomposable si ρ n'est pas décomposable

Définition 2.6. *Soit $\varphi : G \to GL(V)$ une représentation de G, Alors cette représentation est indécomposable et W_1 stable par φ, si $V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow W_1 = \{0\}$ et $W_2 = V$ ou le contraire.*

Proposition 2.1. *$\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation de G dans V un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel*

$$\rho \ est \ irrductibles \ \Leftrightarrow \ \rho \ est \ indcomposable.$$

2.7 Représentation linéaire ordinare et modulare

On peut divise la théorie de représentation de groupes finis en deux partie comme suivant :

2.7.1 Représentation ordinaire(ou semi simple)

C'est une représentation tel que la caractiristique du corp $\mathbb{K}$ c'est **0** ou **premier avec l'ordre de groupe** G.

Exemple 2.6.

Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$ et $V = \mathbb{C}^2$ donc la représentation

$$\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \simeq GL(\mathbb{C}^2)$$
$$\overline{1} \longmapsto \rho(\overline{1}).$$

On identifié $\rho(s)$ a la matrice de $\rho(s)$ dans la base canonique.

Alors

$$\rho(\overline{1}) = \begin{pmatrix} cos(\frac{2\pi}{n}) & -sin(\frac{2\pi}{n}) \\ sin(\frac{2\pi}{n}) & cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\overline{1}}.$$

On a $Carct(\mathbb{C}) = 0$ donc d'apré la définition cette représentation est ordinaire.

2.7.2 Représentation modulaire(ou non semi semple)

C'est une représentation tel que la caractiristique du corp $\mathbb{K}$ divise l'ordre de groupe G. ($Carct(\mathbb{K}) = p$ et p $divise$ $|G|$)

Exemple 2.7.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ et $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc la représentation

$$\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow GL(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
$$\overline{1} \longmapsto \rho(\overline{1})$$

Alors

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{1+1} = \rho_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $Carct(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2$ et $ord(G) = 2$ donc cette représentation est modulaire $Car2$ $divise2$.

Chapitre 3

Le Caractère d'une représentation et applications

Dans ce chapitre, nous allons voir une généralisation de la notion de caractère d'un groupe abélien.

3.1 Le caractère d'une représentation linéaire

Définition 3.1. *Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G. **Le caractère** de ρ est la fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ définie par :*
$\chi(s) = Tr(\rho_s)$ pour tout $s \in G$, où Tr désigne la trace.

Remarque 3.1.

On note aussi χ_ρ pour désigner le caractère d'une représentation ρ.

Proposition 3.1. *Si χ est le caractère d'une représentation ρ de degré n, Alors on a :*

1. $\chi(e) = n$.
2. $\forall s \in G,\ \chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$.
3. $\forall (s,t) \in G^2,\ \chi(tst^{-1}) = \chi(s)$.

Preuve:

♣ **Montrons(1)**

Puisque $\dim(V) = n$ et $\rho(e) = I$, alors $\chi(e) = Tr(I) = n = \dim(V)$.

♣ **Montrons(2)**

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$, des valeurs propres complexes de ρ_s, x_i leurs vecteurs propres associés alors :

$$\begin{aligned}[G\, est\, fini] &\Longrightarrow (\forall s \in G)(\exists n \in \mathbb{N}^*) \diagup s^n = e \\ &\Longrightarrow (\rho(s))^n = \rho(s^n) = \rho(e) = I \\ &\Longrightarrow \underbrace{\rho_s \circ ... \circ \rho_s}_{n(fois)} = I \\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1, ..., r\}, \lambda_i^n = 1 (\rho_s(x_i) = \lambda.x_i, (x_i \neq 0)) \\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1, ..., r\}, |\lambda_i| = 1 \\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1, ..., r\}, (\lambda_i)^{-1} = \overline{\lambda_i}, \left(\overline{\lambda_i}.\lambda_i = |\lambda_i|^2 = 1\right).\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{(\forall s \in G), \chi(s^{-1}) = Tr(\rho_s^{-1}) = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \overline{\lambda_i} = \overline{\chi(s)}.} \tag{3.1}$$

♣ **Montrons(3)**

Le fait que deux matrices semblables ont même trace et puisque :

$$\boxed{\forall (s, t) \in G^2; \rho_{tst^{-1}} = (\rho_t) \circ \rho_s \circ (\rho_t)^{-1}} \tag{3.2}$$

Alors :

$$\boxed{\chi(tst^{-1}) = Tr(\rho_{tst^{-1}}) = Tr(\rho_s) = \chi(s).} \tag{3.3}$$

■

Exemple 3.1.

Posons $G = \{e, g\}$ tel que $g^2 = e$ et $V = \mathbb{C}^2$. définissons les deux applications $\rho, \phi : G \to GL_2(\mathbb{C})$ par :

$$\rho_e = \phi_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors ρ et ϕ sont deux représentations linéaires.

Soient χ_ρ, χ_ϕ les caractères respectivement de ρ et ϕ, alors on a :

$\chi_\rho(e) = \chi_\phi(e) = Tr(\rho_e) = 2, \chi_\rho(g) = Tr(\rho_g) = 0, \chi_\phi(g) = Tr(\phi_g) = 0.$

Vérifions maintenant les trois propriétés de la proposition 3.1.

On a bien $\chi_\rho(e) = \chi_\phi(e) = 2 = \dim(V)$.

On a $\forall g \in G, g^{-1} = g$ d'où :

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \chi_\rho(g).$$

$$\chi_\phi(g^{-1}) = \chi_\phi(g).$$

On a $\forall (t, g) \in G^2, gtg^{-1} = t$ (car G abélien) d'où :

$$\chi_\rho(gtg^{-1}) = \chi_\rho(t).$$

$$\chi_\phi(gtg^{-1}) = \chi_\phi(t).$$

3.2 Application

Application 3.1.

Posons $S_3 = \{f = \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} / f$ bijective $\}$ le groupe fini d'ordre $3! = 6$ et $V = \mathbb{R}^2$

$S_3 = \{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\delta_2^2 = \delta_1 \circ \delta_1 = I.$
- $\delta_2^2 = \delta_3^2 = I.$
- $\delta_4^3 = \delta_5^3 = I.$
- $\delta_4^2 = \delta_5.$
- $\delta_4\delta_5 = I.$
- $\circ(\delta_1) = \circ(\delta_2) = \circ(\delta_3) = 2$
- $\circ(\delta_4) = \circ(\delta_5) = 3$

On fixe la base $\{(1,0),(0,1)\}$ $\varphi : S_3 \to GL(\mathbb{R}^2)$ homomorphisme de groupe
$S_3 = \langle \delta_2, \delta_4 \rangle = \{I, \delta_2, \delta_4, \delta_4^2, \delta_2\delta_4, \delta_2\delta_4^2\}$. Il suffit de déterminer $\varphi(\delta_2)$ et $\varphi(\delta_4)$

1 $\varphi(I) = I_{\mathbb{R}^2}$ (φ hom de groupe)

2 Cherchons $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $f \circ f = I_{\mathbb{R}^2}, \varphi(\delta_2) = f = \varphi_{\delta_2}$ et $\circ(\varphi_{\delta_2}) = \circ(\delta_2) = 2$:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1) \\ f(0,1) &= (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 (x,y) &= x(1,0) + y(0,1) \\ f(x,y) &= x(f(1,0)) + y(f(0,1)) \\ &= x(0,1) + y(1,0) \\ &= (0,x) + (y,0) \\ f(x,y) &= (y,x) \quad \text{où } f \equiv \varphi_{\delta_2} \end{aligned}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x,y)) = f(y,x) = (x,y) \qquad f \circ f = I_{\mathbb{R}^2} \qquad \mathcal{R}_{\delta_2} \text{ la matrice de } \varphi_{\delta_2}$$

$$\mathcal{R}_{\delta_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \circ(\mathcal{R}_{\delta_2}) = \circ(\delta_2) = 2.$$

donc $\varphi(\delta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ Cherchons $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $h \circ h \circ h = I_{\mathbb{R}^2}$

$\varphi(\delta_4) = h = \varphi_{\delta_4}$ et $\circ(\varphi_{\delta_4}) = \circ(\delta_4) = 3$.

$$h(1,0) = \left(cos\frac{2\pi}{3}, sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$h(0,1) = \left(-sin\frac{2\pi}{3}, cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$
$$h(x,y) = x(h(1,0)) + y(h(0,1))$$
$$= x\left(cos\frac{2\pi}{3}, sin\frac{2\pi}{3}\right) + y\left(-sin\frac{2\pi}{3}, cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$h(x,y) = \left(xcos\frac{2\pi}{3} - ycos\frac{2\pi}{4}, xsin\frac{2\pi}{3} + ycos\frac{2\pi}{3}\right)$

donc $\varphi(\delta_4) = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{3} & -sin\frac{2\pi}{3} \\ sin\frac{2\pi}{3} & cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\delta_4}$

la matrice de $h = \varphi_{\delta_4}$

$\varphi_{\delta_4}^2 = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{3} & -sin\frac{2\pi}{3} \\ sin\frac{2\pi}{3} & cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{3} & -sin\frac{2\pi}{3} \\ sin\frac{2\pi}{3} & cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} cos\frac{4\pi}{3} & -sin\frac{4\pi}{3} \\ sin\frac{4\pi}{3} & cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}$

$\varphi_{\delta_4}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\circ(\varphi_{\delta_4}) = 3$ et $\varphi_{\delta_1} \times \varphi_{\delta_4} \times \varphi_{\delta_2} \times \varphi_{\delta_4} = I$

donc $S_3 \simeq \langle \varphi_{\delta_2}, \varphi_{\delta_4} \rangle \subseteq GL_2(\mathbb{R})$

• Le caractère :

$\chi(I) = 2$

$\chi(\delta_2) = 0$

$\chi(\delta_4) = cos\frac{2\pi}{3} + cos\frac{2\pi}{3} = 2cos\frac{2\pi}{3}$

Application 3.2.

Représentation linéaire de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathbb{R}^2$:

Soient le groupe $(\mathbb{R}, +)$ et $V = \mathbb{R}^2$,

$$\varphi : (\mathbb{R}, +) \to GL_2(\mathbb{R}) \simeq GL(\mathbb{R}^2)$$
$$\alpha \mapsto \varphi_\alpha$$

donc :

$$\varphi_\alpha(1,0) = (cos\alpha, sin\alpha)$$
$$\varphi_\alpha(0,1) = (-sin\alpha, cos\alpha)$$
$$donc\ \ \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

• Le caractère : $\chi(\alpha) = cos\alpha + cos\alpha$

Application 3.3.

Représentation linéaire du groupe de quaternions $(Q_8, \cdot)$ dans $\mathbb{C}^2$:
Soient le groupe $Q_8 = \{\pm 1 \pm i, \pm j, \pm k\}\ \ et\ \ V = \mathbb{C}^2$

$$\varphi : Q \longrightarrow G_2(\mathbb{C}) \simeq G(\mathbb{C}^2)$$
$$1 \longmapsto \varphi_1$$
$$i \longmapsto \varphi_i$$
$$j \longmapsto \varphi_j$$
$$k \longmapsto \varphi_k$$

▶ $\varphi(1) = I$
▶ $\varphi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
▶ $\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
▶ $\varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
On a $ij = k$ donc $\varphi_k = \varphi_{ij} = \varphi_i \varphi_j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -I$
• Le caractère :
$\chi(1) = 2, \chi(i) = 0, \chi(j) = 0, \chi(k) = 0.$

Application 3.4.

La représentation du groupe deadral D_n tel que $|D_n| = 2n$, on defini φ_a isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ tel que $\circ(\varphi_a) = 2$:

$$\varphi : D_n \to GL_2(\mathbb{C}) \simeq GL(\mathbb{C}^2)$$
$$a \mapsto \varphi_a$$

$\varphi_a(1,0) = (1,0)$

$\varphi_a(0,1) = (0,-1)$

$\varphi_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On defini φ_b isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ tel que $\circ(\varphi_b) = n$:

$$\varphi : D_n \longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \simeq GL(\mathbb{C}^2)$$

$$b \longmapsto \varphi_b$$

$$\varphi_b = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{n} & -sin\frac{2\pi}{n} \\ sin\frac{2\pi}{n} & cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

$\varphi_a\varphi_b\varphi_a\varphi_b = I$

$D_n \simeq \langle \varphi_a, \varphi_b. \rangle$

• Le caractère :

$\chi(a) = 0,$

$\chi(b) = cos\dfrac{2\pi}{n} + cos\dfrac{2\pi}{n}$

Bibliographie

[1] **Jean-Pierre Serre :** Représentations linéaires des groupes finis, HERMANN ÈDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS, Paris, Janvier 1998.

[2] **James, G., and Liebeck.M.** (2001). Characters. In Representations and Characters of Groups, Cambridge : Cambridge University Press.

[3] **D.Harari.** Représentations linéaires des groupes finis.

[4] Cour théorie des groupes, Master 1.

[5] **Steven H. Weintraub.**Representation Theory of finite Groups : Algebra and Arithmetic.

[6] **Daniel Guin et Thomas Hausberger.** L3M1 Algèbre I, Groupes, Corps et Théorie de Galois.

[7] **R.Cairoli** .Algèbre linéaire, Enseignement des mathématiques.

[8] **Daniel.Alibert**. Espaces vectoriels Applications linéaires Matrices Diagonalisation et trigonalisation.

Résumé

Le but de ce travail est de se familiariser avec la théorie des représentations et celles des caractères. Ces concepts participent fortement à la resolution des problèmes scientifiques dans plusieurs domaines tel que la chimie quantique, la physique ainsi que les mathématiques.

Mots clés : Groupe - représentation linéaire - espace vectoriel - homomorphisme caractère - le groupe linéaire d'un espace vectoriel.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو التعرف على نظرية التمثيلات ونظرية المميزات. تساهم هذه المفاهيم بقوة في حل المشكلات العلمية في عدة مجالات مثل كيمياء الكم والفيزياء و الرياضيات.

الكلمات المفتاحية: الزمر - التمثيل الخطي - الفضاء الشعاعي - خواص التماثل - الزمر الخطية لفضاء شعاعي.

Abstract

The goal of this work is to become familiar with the theory of representations and those of characters. These concepts strongly participate in the resolution of scientific problems in several fields such as quantum chemistry, physics and mathematics.

Key words : Group - linear representation - vector spaces - character homomorphism - the linear group of a vector space.