UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et sciences de la matiére

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par :Saim Khouloud

Thème

Étude d'existence de quelques problèmes aux limites en résonance

Soutenu publiquement le :30/09/2020

Devant le jury composé de :

Mr.**Abassi Houcin**	M. A.A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.**Bouaid Issa**	M. C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Mammeri Mohammed**	M. C.B universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Kouidri Mohammed**	M. C.B université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2019/2020

Dédication

Je dédie cette mémoire...
À ma chère mère Warda et cher père Farouk

Merci pour votre gentillesse, votre affection, vos encouragements et votre soutien.
Vos prières et bénédictions m'ont été utiles pour terminer mes études et réussir ma carrière universitaire, merci merci merci camarade Derby
Que Dieu Tout-Puissant vous protège et protège votre santé, votre bien-être, votre longévité, votre tranquillité d'esprit et votre bonheur dans la vie.
Ce travail est le résultat de vos efforts et de vos sacrifices.
À ma petite famille
Je remercie ma seule sœur FATIMA et mes frères RAMZI et ABED ALRAHMAN et ALLA d'être avec moi. Mon grand-père, ma grand-mère, mes tantes, les fils de mes tantes, mon cher oncle.
Et je n'oublie pas de soutenir mes amis bien-aimés INAS et HAYAT,ils m'ont accompagné au début du voyage, et NAWAL et MESSAOUDA et NESRIN. À tous mes amis, merci pour votre entreprise.
À ma deuxième famille
La famille Doumane, merci aux chers, chers et bien-aimés **IBRAHIM**.
A toute la famille SAIM, petits et grands.

Remerciement

Avant toute considération,je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.
Tout d'abord, je remercie mon encadreur Monsieur **Kouidri Mohammed** de m'avoir fourni ce sujet important en mathématiques, et je le remercie pour son soutien et ses encouragements et pour son aimable traitement et merci pour le temps que vous avez passé avec moi pour m'aider dans ce travail.
Je remercie tous les membres du département de mathématiques, y compris les professeurs, les administrateurs et les travailleurs, d'avoir fourni les conditions nécessaires pour terminer le travail.
Je remercie tous ceux qui ont contribué avec moi pour terminer ce travail

Table des matières

Notations

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
- (M, d) : espace métrique.
- $d(.,.)$: application de distance.
- $C([a, b])$: l'espace des fonctions continues.
- Ω : un ensemble ouvert borné.
- $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$: c'est la fermeture de Ω.
- U : un ensemble ouvert.
- $\overline{C}^K(.,.)$: l'espace des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, K fois différentiable dans Ω.
- deg : degré topologique.
- deg_B : degré topologique de Brouwer.
- deg_{LS} : degré topologique de Leray-Schauder.
- $\overline{B}$: la boule unité fermée.
- Im : image d'une application.
- Ker : noyau.
- P, Q : deux projections continues.
- $\oplus$: la somme direct.

- L : l'opérateur de Fredholm.
- dom : domaine.
- ind : indice.
- dim : dimension.
- $codim$: codimension.
- $coker$: conoyau.
- K_p : l'opérateur linéaire.
- N : L-compact sur $\overline{\Omega}$.
- $\|.\|_{\infty}= max|.|$.
- $W^{3,1}$: espace de Sobolev.
- α, β, γ : fonctions $\in L^1[0,1]$.

Introduction

Dans ce mémoire, on étude l'existence de quelque problémes aux limites en résonance, qu' écrit sous la forme :

$$D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), u'(t)),\ avec\ t \in (0, 1),$$

avec conditions non local suivente :

$$D_{0+}^{\alpha-2}u(0) = 0, \eta u(\xi) = u(1),$$

où $1 < \alpha < 2$,$0 < \xi < 1$ et $\eta\xi^{\alpha-1} = 1$. Pour trouver l'existence de quelque problémes, on utilise la théorie de degré coïncidence de Mawhin.

Les monographies [10, 20, 21, 22] sont couramment citées pour la théorie du fractionnement dérivés et intégrales et applications aux équations différentielles d'ordre fractionnaire. Des contributions à la théorie des problèmes de valeurs initiales et aux limites pour les équations différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire ont été apportées par plusieurs auteurs y compris une monographie récente [13] et les articles [1, 2, 9, 15, 24]. Bien qu'une application de la théorie du degré de coïncidence à un problème d'ordre fractionnaire ne soit pas connue pour l'auteur, on peut rendre compte de plusieurs résultats qui ont été consacrés à la fois aux développements théoriques [5, 17, 19] et aux applications [23] à différents types de frontières et les problèmes de valeur initiale. Un large éventail de scénarios de problèmes résonnants ont été étudiées dans le cadre des équations différentielles et différentielles ordinaires [17] (plus généralement, équations dynamiques sur des échelles de temps [3, 11]) sur borné et illimité [12] domaines avec des conditions aux limites périodiques [18], non locales [4, 6, 7, 8, 23] ainsi que problèmes de valeur limite avec impulsions [14].

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie) puis le théorème du point fixe de Schauder (qui est la "généralisation" en dimension infinie) Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

1.1 Théorème du point fixe

Dans cette section, nous présentons quelque théories et caractéristiques du poit fixe de Banach, et aussi point fixe pour l'application ne soit pas une contraction sur tout l'espace métrique, avec etudier les principes de continuité.

1.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Définition 1 ***(Point fixe)*** *Soit $T : X \longrightarrow X$ une application . On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.*

Définition 2 ***(L'application lipschitzienne)*** *Soit (M,d) un espace métrique complet et l'application $T : M \longrightarrow M$, on dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x,y de M, l'inégalité :*

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)), \forall x, y \in M \tag{1.1}$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.
Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théoréme 3 *[27]* ***(Théorème du point fixe de Banach(1922))*** *Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $T : M \longrightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus on a :*
Si $x_0 \in M$ et $x_n = T(x_{n-1})$,$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ et

$$d(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_1, x_0) \qquad n \geq 1, \tag{1.2}$$

x étant le point fixe de T .

Preuve.
(1) Nous montrons d'abord l'unicité :
On suppose que il existe $x, y \in M$ avec $x = T(x)$ et $y = T(y)$ alors
$d(x, y) = d(T(x), T(y) \leq kd(x, y)$.
Puisque $0 < k < 1$ alors la dernier inégalité implique que $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$, alors $\exists! x \in M$ tel que $T(x) = x$.
(2)Pour montrer l'existence :
sélectionnez $x \in M$. Nous montrons d'abord que x_n est un suite de cauchy.
Remarquez pour $n \in \{0, 1, ...\}$

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq .... \leq k^nd(x_0, x_1)$$

Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + (x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^nd(x_0, x_1) + k^{n+1}d(x_0, x_1) + ... + k^{m-1}d(x_0, x_1) \\ &\leq k^nd(x_0, x_1)\left[1 + k + k^2 + ...\right] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Pour $m > n, n \in \{0, 1, ...\}$ on a

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \tag{1.3}$$

alors x_n est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $x \in M$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x$$

De plus par la continuité de T

$$x = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n) = T(x)$$

Donc x est un point fixe de T.
Finalement, $m \longrightarrow \infty$ in (1.3), on obtient

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

■

Exemple 4 *Considérons l'application* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *défini par* $T(x) = \frac{x+sin(x)}{3}$, *alors* T *une contraction avec* $0 < k = \frac{2}{3} < 1$, *et admet comme point fixe* $x = 0$ *et* $\lim\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 0$.

Remarque : Les conditions du cette théoréme sont nécessaires, consdérons les exemples suivants .

Exemple 5 ***(Condition de fermeture)*** $T :]0, 1] \longrightarrow]0, 1]$, $T(x) = \frac{x}{2}$, *est contractante et vérifie* $T(]0, 1]) \subset]0, 1]$ *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $]0, 1]$ *n'est pas fermé :* $\lim x_n = 0$ *n'est pas contenue dans* $]0, 1]$.

Exemple 6 $T : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + 2$, *est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $T([0, 1]) \nsubseteq [0, 1]$ *et on ne peut pas itérer :* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, *mais* x_3 *n'est pas défini.*

Exemple 7 ***(Condition de contraction)*** $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ *vérifie* $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ *pour tout* $x \neq y$, *mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que* T *n'est pas contractante, et pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on obtient* $x_n \longrightarrow +\infty$.

1.1.2 Théorèmes du point fixe pour l'application ne soit pas une contraction sur tout l'espace métrique

Soit (M,d) un espace métrique complet, les fonctions définie seulement sur un sous-ensemble de M n'aura pas forcément un point fixe. Des conditions supplémentaires seront nécessaires, Pour assurer cela.

Théoréme 8 *Soient K un ensemble fermé dans M et $T : K \longrightarrow M$ une k-contraction. Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ et $r > 0$ tel que*

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K \qquad et \qquad d(x_0, T(x_0)) < (1-k)r$$

alors T a un unique point fixe $x^* \in B(x_0, r)$.

Théoréme 9 *Soit (M,d) un espace métrique complet, $T : M \longrightarrow M$ une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe $x^* \in M$.*

Preuve. comme T^p est une contraction, il en resulte du théorème 8 que T^p a un unique point fixe, donc $x^* = T^p x^*$. Alors $T^p(T(x^*)) = T(T^p(x^*)) = T(x^*)$, alors $T(x^*)$ est un point fixe de T^p . Mais T^p admet un unique point fixe, d'où $T(x^*) = x^*$. Donc T a un unique point fixe (x^*), et il est unique car tout point fixe de T est également point fixe de T^p ■

1.1.3 Principes de continuation

une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation. Celui-ci consiste à déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation connue sous le nom devra vérifier certaines condition voir [25].

Définition 10 ***(les application homotopes)*** *Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue*

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

telle que : $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. On note $f \simeq g$.

Remarque : En d'autres termes, pour cette définition , il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \longrightarrow H(x,t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continument.

Exemple 11 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to R^n$ l'application constante $f(x) = 0$, et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $g(x) = x$. Montrons que f et g sont homotopes. Il suffit de prendre :*

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$H(x,t) = tx.$$

Alors $H(x,0) = 0 * x = 0 = f(x)$ et $H(x,1) = x * 1 = g(x)$.

Exemple 12 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^n - \{0\}$, on considère cette fois, $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $g(x) = x$. On voit que f et g sont homotopes en prenant :*

$$H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

tel que : $H(x,t) = (1-t)i(x) + tp(x)$, on a

$$H(x,0) = (1-0) \times x + 0 \times \frac{x}{\|x\|} = x$$

et

$$H(x,1) = (1-1) \times x + 1 \times \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|}$$

alors $H(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$ et $H(x,0) = g(x)$ et $H(x,1) = f(x)$.

Définition 13 ***(Équivalence d'homotopie)*** *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_y$. On dit que X et Y sont du même type d'homotopie, et on note $X \simeq Y$.*

Exemple 14 *Soit $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $Y = S^{n-1}$, on prend alors $f : X \longrightarrow Y$ définie par $f(x) = x/\|x\|$, et $g : Y \longrightarrow X$ l'inclusion. Alors $f \circ g = id_Y$, et l'exemple (12) montre que $g \circ f \simeq id_X$. Donc $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a le même type d'homotopie que la sphère S^{n-1}.*

Soit (X,d) un espace métrique complet, et U un sous ensemble ouvert de X.

Définition 15 ***(Les propriétés d'homotopie)*** *on considére $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow$ deux contractions, on dit que F et G sont homotopes s'il existe $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow X$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) $H(.,0) = G$ et $H(.,1) = F$.

(2) $H(x,t) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \in [0,1]$.

(3) Il existe $\alpha \in [0,1)$ tel que $d(H(x,t); H(y,t) \leq \alpha d(x,y)$ pour tout $x, y \in \overline{U}$, et $t \in [0,1]$.

(4) Il existe $M \geq 0$ tel que $d(H(x,t), H(x,s) \leq M|t-s|$ pour tout $x \in \overline{U}$,et $t, s \in [0,1]$.

Théoréme 16 *Soit $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ deux applications homotopiquement con-tractives et G a un point fixe dans U. Alors, F admet un point fixe dans U.*

Preuve. On pose l'ensemble $Q = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x,\lambda)\}$ pour certain $x \in U$ et H est une homotopie entre F et G a décrite dans la définition (10) Notons que Q est non vide puisque G a un point fixe et que $0 \in Q$.
On montre que Q est à la fois ouvert et fermé dans [0,1] alors montre $Q = [0,1]$. Par conséquent F a un point fixe.
(i) montrons que Q est un ensemble fermé dans [0,1] :
soit $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ une suite dans Q telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = \lambda$, alors, nous devons montrer que $\lambda \in Q$. Comme $\lambda_n \in Q$ pour $n = 1, 2....$, il existe $x_n \in U$ où $x_n = H(x_n, \lambda n)$. On a pour $n, m \in \{1, 2, ...\}$

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(H(x_n, \lambda_n)H(x_m, \lambda_m) \\
&\leq d(H(x_n, \lambda_n)H(x_m, \lambda_m)) + d(H(x_n, \lambda_m), H(x_m, \lambda_m) \\
&\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m)
\end{aligned}$$

Alors,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|$$

Donc $\{x_n\}$est une suite de Cauchy de X(car $\{\lambda_n\}$l'est aussi) et, puisque X est complet, il existe $x \in \overline{U}$ telle que $\lim_{x\longrightarrow\infty} x_n = x$.
Par la continuité de H,

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = lim_{n\longrightarrow\infty} H(x_n, \lambda n) = H(x, \lambda)$$

Donc $\lambda \in Q$ et Q est fermé dans $[0,1]$.
(ii)montrons que Q est un ensemble ouvert dans [0,1] :
Soit $\lambda_0 \in Q$, Alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$. Puisque, par hypothèse, $x_0 \in U$, nous pouvons trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r) = \{x \in X : (x, x_0) < r\} \subseteq U$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}$ où $r \leq dist(x_0, \partial U)$, et $dist((x_0, \partial U)) = inf\{(x_0, x) : x \in \partial U\}$. Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. alors, pour $x_0 \in \overline{B(x_0, r)}$

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x, \lambda)) &\leq d(H(x_0, \lambda_0)H(x, \lambda_0)) + d(H(x, \lambda_0), H(x, \lambda) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda, \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha)r = r \end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ fixé

$$H(., \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}$$

Par le théorème (3), (8), on déduit que $H(., \lambda)$ un point fixe dans U. Alors, $\lambda \in Q$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.Et parconséquent Q est ouvert dans [0, 1] .
Donc Q=[0, 1]. ■
Remarque :Du théorème précédent, nous déduisons le résultat suivant.

Théoréme 17 *[25] **(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)** Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert d'un espace de Banach E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \longrightarrow E$ une contraction telle que $F(\overline{U})$ soit bornée. Alors un des deux énoncés suivant est vérifié :*

(a) F a un point fixe dans $(\overline{U})$.

(b) il existe $\lambda \in (0,1)$ et $x \in \partial U$ tels que $x = \lambda F(x)$.

Preuve. Supposons que (b) n'est pas vérifié et que F n'a pas de point fixe sur ∂U c'est à dire $x \neq \lambda F(x)$ pour tout $x \in \partial U$ et $\lambda \in [0,1]$.
Soit $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow E$ donnée par $H(x, \lambda) = \lambda F(x)$, et soit G l'application nulle (G(x)=0).
Notons que G a un point fixe dans U (à savoir $(G(0) = 0)$ et que F et G sont deux applications homotopiquement contractives. Par le théorème (16)F a également un point fixe et donc l'ennoncé (a) est vérifié. ■

1.2 Degré topologique

Dans cette section, nous donnons un brèf aperçu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, $deg(f, \Omega, y)$ de f dans Ω par rapport à y donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset X$, où $f : X \longrightarrow X$ est continue, $y \notin f(\partial\Omega)$ et X est un espace topologique métrique la plupart du temps. Voir [28] [29] [31] [32].

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Soit Ω un ouvert borné et de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}.\overline{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^n$, k fois différentiables dans Ω quI sont continues sur $\overline{\Omega}$. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.

Définition 18 ***(Jacobien)*** *Soit $x_0 \in \Omega$, si f est différentiable en x_0, on note par $J_f(x_0) = det f'(x_0)$ le Jacobien de f en x_0.*

Définition 19 ***(Le point critique)*** *Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω. Notons par $J_f(x_0)$ le Jacobien de f en un point x_0 de Ω .Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$. sinon, x_0 est dite point régulier.*

On pose $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques. C'est à dire :

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}$$

Définition 20 ***(Valeur régulière)*** *Considérons y un élément dans $\mathbb{R}^n$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$. Sinon, y est dit valeur singulière.*

Définition 21 ***(Degré topologique)*** *Soit $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f. On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y le nombre entier*

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} Sgn\ J_f(x)$$

où $Sgn\ Jf(x)$ Représente le signe de $J_f(x)$, défini par

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & si\ t>0 \\ -1 & si\ t<0 \end{cases}$$

Avec l'ajout de ces deux notes

1) si $f^{-1}(y) = \emptyset, deg(f, \Omega, y) = 0$.

2) $f^{-1}(y)$ contient un nombre fini d'éléments

Dans le cas où $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq 0$, Nous passons à le lemme suivant :

Lemme 1 ***(Lemme de Sard)*** *Soit une fonction $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Alors l'ensemble $f(S_f)$ des valeurs critiques de f est de mesure nulle.*

Nous verrons maintenant qu'on peut étendre la notion de degré au cas où la fonction f est est seulement continue.

Définition 22 *Soient $\Omega \subset R^n$ un ouvert borné, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$. On définit le degré topologique de f dans Ω par rapport y par*

$$deg(f, \Omega, y) = [\lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega, y)]$$

où $\{f_n\}_{n\in N^*}$ est une suite de fonction $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ qui converge uniformément vers f dans $\overline{\Omega}$.

Théoréme 23 *[28]****(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer)*** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et posons $A(\Omega) = \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega))\}$ .L'application $deg(f, \Omega, y) : A(\Omega) \to \mathbb{Z}$ satisfait les propriés suivantes*

1. (Normalisation) $deg(I; \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$ et $deg(I\Omega, y) = 0$ si $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ où I désigne l'application identité sur $\overline{\Omega}$.

2. (Solvabilité) Si $deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω.

3. (Invariance par homotopie) Pour tout $h : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et tout $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continues telles que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$, $deg(h(t, .), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.

4 .(Additivité) Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $y \notin f(\overline{\Omega} \diagdown (\Omega_1 \bigcup \Omega_2))$. Alors

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y)$$

5.$deg(f, \Omega, y)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^n \diagdown f(\partial\Omega)$

6.$deg(f,\Omega,y)=deg(f-y,\Omega,0)$.

7. Soit $g:\overline{\Omega}\to F_m$ *une application continue où* F_m *est un sous espace de* $\mathbb{R}^n$, $dimF_m=m$, $1\leq m\leq n$ *: Supposons que* y *est tel que* $y\notin(I-g)\partial\Omega$ *. Alors*

$$deg(f,\Omega,y)=deg((I-g)_{\overline{\Omega}\cap F_m},\Omega\cap F_m,y)$$

Remarque 24 *Dans le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans* $\mathbb{R}^n$*, la proprié (2) du théoréme ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérêt principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes, elles ont le méme degré.*

Exemple 25 *Soit* $\Omega=(-1;1)$ *et considérons*

$$h:(t;x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}\to h(t,x)=(1-t)x+t(x^2+1)e^x$$

Alors,

1. h est continue sur $[0;1]\times\overline{\Omega}$.

2.$h(0;x)=(1-0)x+0*(x^2+1)e^x=x=I(x)$.

3. $h(1;x)=(1-1)x+1*(x^2+1)e^x=(x^2+1)e^x=f(x)$.

4. Pour tout $t\in[0;1]$ *, les fonction I et f sont homotopes , Donc* $deg(f,(-1,1),0)=deg(I,(-1,1),0)=1$.

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $\Omega\subset X$ un ensemble ouvert et borné, $f:\bar{\Omega}\to X$ une fonction continue et $y\in X$ tel que $y\notin f(\partial\Omega)$ .Dans la section précédente, nous avons vu qu'en dimension finie, $C(\bar{\Omega},X)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré, le degré de Brouwer, satisfaisant les propriétés 1,2 et 3 du théorème . Malheureusement, en dimention infinie, $C(\bar{\Omega},X)$ ne l'est pas. En effet, un exemple du à Leray montre qu'il faut restreindre la classe des fonctions pour laquelle il y a existence et unicité d'une fonction degré de Leray-Schauder, a un ensemble strictement contenu dans $C(\bar{\Omega},X)$.

Définition 26 *[31] Soient X un espace de Banach et Ω une partie fermé de X. Si $T : \Omega \to X$ est un opérateur continu, on dit que T est compact si pour toute partie bornée B de Ω, $T(B)$ est relativement compact dans X.*

Remarque 27 *On notera en particulier que si T est compact, alors T est borné sur les parties bornées de X.*

Définition 28 *Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. On dit que l'application $T : \Omega \to X$ est de rang fini si $dim(Im(T)) < \infty$, autrement dit, si $Im(T)$ est un sous-espace de dimension finie de X.*

Lemme 2 *Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$. Un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension fini noté F et une application continue $T_\epsilon : \bar{\Omega} \to F$ telle que*

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \quad \forall \ x \in \bar{\Omega}.$$

Définition 29 *Soient X un espace de Banach , $\Omega \subset X$. Un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le degré de Brouwer $deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$ est bien défini comme dans le lemme 11. Par conséquent , nous définissons le degré de Leray-Schauder par*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0).$$

Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $Y \in X$ est tel que $y \notin (I - T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à y est défini comme étant

$$deg(I - T, \Omega, y) = deg(I - T - y, \Omega, 0).$$

Théoréme 30 *[28]**(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Leray-Schauder)** Soit X un espace de Banach et*

$$A = \left\{(I - T, \Omega, 0), \Omega \ \text{ un ouvert borné de } X, T : \overline{\Omega} \to X \ \text{ compacte } , 0 \notin (I - T)(\partial\Omega)\right\}$$

alors, il existe une unique application $deg(f, \Omega, y) : A \to \mathbb{Z}$ appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :

1. *(Normalité) Si* $0 \in \Omega$ *alors* $deg(I, \Omega, 0) = 1$.

2. *(Solvabilité) Si* $deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$, *alors exists* $x \in \Omega$ *tel que* $(I - T)x = 0$.

3. *(Invariance par homotopie) Soit* $H : [0, 1]\bar{\Omega}$ *une homotopie compacte, telle que* $0 \notin (I - H(t, .))(\partial\Omega)$. *Alors* $deg(I - H(t, .), \Omega, 0)$ *ne dépend de* $t \in [0, 1]$.

4. *(Additivité) Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous-ensembles disjoints ouverts de* Ω *et*

$$0 \notin (I - T)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

Alors,

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T, \Omega_1, 0) + deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

Remarque 31 *Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brower.*

Comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques en particulier l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

1.3 Théorème du point fixe topologiques

Théoréme 32 ***(Brouwer)*** *Soit* $\bar{B}$ *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \bar{B} \to \bar{B}$ *continue. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \bar{B}$ *tel que* $f(x) = x$.

Preuve. S'il existe un $x \in \partial B$, alors il n'y a rien à prouver. Sinon considérons l'application continue $h(t, x) = x - tf(x)$. Alors,
$h(0, x) = x - 0 * f(x) = x$ et $h(1, x) = x - 1 * f(x) = x - f(x)$. Si on suppose que $h(t, x_0) = 0$ comme $x_0 \in \partial B$, alors on obtient $x_0 = tf(x_0)$ ce qui implique comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, que $f(x_0) \in \partial B$, contradiction. Comme est une homotopie admissible entre $I - f$ et I. Donc

$$deg(I - f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

En conclusion, $\exists x \in B$, tel que $x - tf(x) = 0$ i.e. $f(x) = x$. ■

Théoréme 33 ***(Schauder)*** *Soit* $\bar{B}$ *la boule unité fermée d'un Banach* E *et* $f : \bar{B} \to \bar{B}$ *compacte. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \bar{B}$ *tel que* $f(x) = x$.

Preuve. Soit $h(t,x) = tf(x)$ fonction compacte sur $[0,1] \times \bar{B}$. Si, pour $t \in [0,1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - h(t,x) = 0$, alors $tf(x) = x$ comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$ donc un point fixe sur ∂B situation que l'on a exclue. On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne

$$1 = deg(I, B, 0) = deg(I - f, B, 0)$$

puisque $h(0,.) = 0$ et $h(1,0) = f$ donc l'existence d'un point fixe . ■

Théoréme 34 *[26] **(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)** Soit $\Omega \subset X$ un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach X tel que $0 \in \Omega$, et soit $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact. Alors un des deux énoncés suivants vérifié :*

(1) T a un point fixe dans Ω.

(2) il existe $\lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $Tx = \lambda x$.

Preuve. Si (2) est vraie alors on a rien à prouver. Sinon, on définit l'homotopie

$$H(t,x) = tTx \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Ainsi défini $H(t,x)$ est compacte, $H(0,x) = 0$ et $H(1,x) = Tx$. Supposons que $H(t,x_0) = x_0$ pour un certain $t \in [0,1]$ et $x_0 \in \partial\Omega$. Alors on a $tTx_0 = x_0$. Si $t = 0$ ou $t = 1$ on a (1) ? Sinon

$$Tx_0 = \frac{1}{t}x_0 \qquad \text{pour un certain } t \in (0,1),$$

et alors on a (2). Sinon, on a $deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$ et alors T a un point fixe dans Ω. ■

Théoréme 35 ***(Brouwer)*** *Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X, \|.\|)$ et soit $A : M \to M$ une application continue, alors A admet un point fixe .*

Théoréme 36 ***(Schauder)*** *Soit M une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach X et soit $A : M \to M$ une application compacte, alors A admet un point fixe.*

Théoréme 37 ***(Krasnoselskii)*** *Soit X un espace de Banach et M un ensemble non vide de X fermé, borné et convexe. U, V sont deux applications de M dans X telles que :*
U est une contraction (de constante k) et V est compacte et continue. $Ux + Vy \in M$ $\forall x, y \in M$, *Alors il existe* $x \in M$ *tel que* $Ux + Vx = x$.

Maintenant Considérons $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$.Si M est un sous ensemble de X .

Définition 38 ***(Ensemble borné)*** M *est borné, alors*
$\|u\| \leqslant r, \quad \forall u \in M$ *et* $r > 0$ *un nombre fixé.*

Définition 39 ***(Ensemble équicontinu)*** M *est équicontinu, alors*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad tq \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad et \quad \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$$

Théoréme 40 ***(Ascoli-Arzela)*** *si M est borné et équicontinu alors M est relativement compact.*

Théoréme 41 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *telle que*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *presque partout sur* Ω.
2. $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *presque partout sur* Ω, $\forall n$ *avec* $g \in L^p(\Omega)$. *Alors,*

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

1.4 Outils de base

on donne quelques définitions et propriétés que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

1.4.1 Fonctions utiles

La fonction Gamma :

La fonction Gamma (ou fonction d'Euler de deuxième espèce) est fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles.

Définition 42 *Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

(cette intégrale convergente pour tout $x > 0$).
En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x > 0$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La fonction Bêta :

Définition 43 *[4]*
Soit $x, y > 0$, la fonction Bêta (ou fonction d'Euler de premier espèce) est définit par :

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante

$$\forall x > 0, y > 0, \text{ on a } \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

1.5 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considère l'intervalle

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

plus généralement le n^{ime} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt \qquad (1.4)$$

Pour tout entier n.
Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riémann rendu compte que la second membre de (1.4) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suite :

Définition 44 *si $f \in C[a,b], \alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \text{ telle que } a \in]-\infty, +\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire (á gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α.

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \text{ tel que } b \in]-\infty, +\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire (á droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Cas particulier :
$I_{a^+}^{0} f(x) = f(x)$ (i.e $I_{a^+}^{0}$ est l'opérateur identité)

Théoréme 45 *Pour $f \in C[a,b]$ integrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :*

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x), \alpha, \beta > 0$$

Preuve. la preuve découle directement de la définition

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha))\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(s-t)^{\alpha-1}} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta})du}$$

Or $f \in C[a,b]$,d'après le théorème de Fubini on et par le changement $t = u + s(x-u)$ on obtient

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(x)] = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}} du = I_{\alpha_+}^{(\alpha+\beta)} f(x)$$

Ou $B(\alpha, \beta)$ désigne la fonction Beta. ■

Exemple 46 *On a $f(t) = (t-a)^m$.*
A l'aide de changement de variable $\tau = a + x(t-a)$on trouve :

$$I^{\alpha}(t-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^m d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^m dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m}\beta(m+1,\alpha)$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{\alpha+m}.$$

pour $\alpha = 0.5, m = 1$ *et* $a = 0$, *on aura*

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}$$

1.6 La dérivation fractionnaire

Nous donnons quelques définitions des dérivés fractionnaires.

1.6.1 Dérivées fractionnaire au sens de Grunwald-letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier$p$ (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction$f$ par la formule suivante

$$D^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh), avec \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)..(p-k+1)}{k!}$$

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leqslant n-1 < p < n$) et comme

$$(-1)^k\binom{p}{k} = \frac{-p(1-p)..(k-p-1)}{k!}$$

$$= \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}$$

Nous obtenons

$$ {}^{G}D^{p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)}f(t-kh) $$

$$ {}^{G}D^{p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)}f(t-kh) $$

Si f est de classe C^n, alors en utilisante l'intégration par parties on obtient :

$$ {}^{G}D^{-p}f(t) = \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)}\int_a^t (t-\tau)^{n+p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau\tau $$

Aussi

$$ {}^{G}D^{p}f(t) = \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)}\int_a^t (t-\tau)^{n+p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau\tau $$

Exemple 47 *1.* ***La dérivée d'une fonction*** $f(t) = c$ ***au sens de Grünwald-Letnikov*** *En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante*

Si $f(t) = c$ *et* p *non entier positif on a :*

$$ f^{(k)}(t) = 0 \text{ pour } k = 1, 2.., n $$

$$ \begin{aligned} {}^{G}D^{p}f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f^{n}(\tau)d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} \end{aligned} $$

2. ***La dérivée d'une fonction*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Grünwald-Letnikov*** *Soit* p *non entier et* $0 < n-1 < p < n$ *avec* $\alpha > n-1$ *alors on a :*

$$ f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, ..., n-1, $$

et

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}, $$

d'ou

$$ {}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{-p}d\tau. $$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on trouve :

$$
\begin{aligned}
{}^{G}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau. \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_a^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(\alpha-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}
$$

A titre d'exemple

$$
{}^{G}D^{1/2}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}
$$

1.6.2 Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 48 *Soit F une fonction intégrable sur $[a;t[$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$
\begin{aligned}
{}_a^{R}D^{p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-p}f(t)).
\end{aligned}
$$

Remarque 49 *Si f est de classe C^m alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient*

$$
{}_a^{R}D^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau \qquad =_a^G D^p f(t).
$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikow et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemple 50 *1.* ***La dérivée non entiére d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville.***

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a

$$ {}_a^R D^p C = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} $$

2. ***La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville.***
Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$ alors an a :

$$ {}_a^R D^p (t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha} d\tau $$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$ \begin{aligned} {}_a^R D^p (t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\beta(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p-1)}(t-a)^{\alpha-p} \end{aligned} $$

Par exemple ${}_0^R D^{0.5} t^{0.5} = \dfrac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$

Proposition 51

composition avec l'intégrale fractionnaire

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$$ {}^R D^p (I^p f(t)) = f(t), $$

en général on a

$$ {}^R D^p (I^q f(t)) = {}^R D^{p-q} f(t) $$

et si $p - q < 0, {}^R D^{p-q} f(t) = I^{q-p} f(t)$

- En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$ {}^R D^{-p}({}_a^R D_t^q f(t)) = {}^R D^{q-p} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [{}^R D_t^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)} $$

avec $m - 1 \leqslant q < m.$

Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si :$f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

$$\frac{d^n}{dt^n}(^R D^p f(t)) =^R D^{n+p} f(t),$$

mais

$$^R D^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) =^R D^{n+p} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}$$

Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n-1 \leqslant p < n$ *et* $m-1 \leqslant q < m$, *alors*

$$^R D^p(^R D_t^q f(t)) =^R D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(q-k+1)}$$

$$^R D^p(^R D_t^q f(t)) =^R D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-q-k+1)}$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^R D^p$ *et* $^R D^q (p = q)$, *ne commutent que si et*

$$[^R D^{p-k} f(t)]_{t=a} = 0$$

pour tout $k = 1, 2, .., n$, *et* $[^R D^{q-k} f(t)]_{t=a}$ *pour tout* $k = 1, 2, .., m$.

1.6.3 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Définition 52 *Soit* $p > 0$ *avec* $n-1 < p < n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, *et une fonction* f *donnée sur l'intervalle* $[a, b]$, *la dérivées fractionnaire d'ordre* p *de* f *au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} ^c D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p} \frac{d^n}{dt^n}(f(t)) \end{aligned}$$

Remarque 53 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $]n-1, n[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* $n-\alpha$ *suivit d'une dérivation classique d'ordre* n*, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 54 1. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo***

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$^{c}D^{p}C = 0$$

2. ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Caputo***

Soit p *un entier et* $0 \le n-1 < p < n$ *avec* $\alpha > n-1$*, alors on a*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$$

d'où

$$^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \tag{1.5}$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_a^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},
\end{aligned}$$

1.7 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo :

Théoréme 55 *Soit* $p \ge 0, n = [p]+1$*, si* f *posséde* $n-1$ *dérivée en* a *et si* $^{R}D_a^p$ *existe alors :*

$$^{c}D_a^p f(x) = ^{R}D_a^p[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k]$$

pour presque tout $x \in [a,b]$.

Preuve. D'après la définition on a :

$$
\begin{aligned}
{}^{R}D_a^p[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] &= {}^{R}D^n I_a^{n-p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-p-1}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]dt \\
&= \frac{-1}{\Gamma(n-p+1)}[(x-t)^{n-p}(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)]_a^x \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-p+1)}\int_a^x (x-t)^{n-p}[D(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)]dt \\
&= I_a^{n-p+1}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]
\end{aligned}
$$

de même façon pour n fois alors :

$$
I_a^{n-p}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] = I_a^{n-p}I_a^n D^n[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]
$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$ alors :

$$
\begin{aligned}
I_a^{n-p}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] &= I_a^{n-p}I_a^n D^n f(x) \\
&= D^n I_a^{n-p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] \\
&= D^n I_a^n I_a^{n-p} D^n f(x) \\
&= I_a^{n-p}D^n f(x) \\
&= {}^{c}D_a^p f(x)
\end{aligned}
$$

■

Remarque 56 *d'apres le relation on remarque que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction* f *est une dérivation fractionnaire de reste dans le développement de Taylor de* f.

1.8 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1.8.1 Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D^{\alpha}f(t)+\mu D^{\alpha}g(t)$$

1.8.2 La règle de Leibniz

Pour$n$ entier on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t))=f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^{p}(f(t)g(t))=f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t)+R_n^p(t)$$

ou $n>p+1$ et

$$R_n^p(t)=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t(t-\tau)^{-p-1}g(\tau)d\tau\int_{\tau}^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi$$

avec

$$lim\ R_n^p(t)=0$$

Si f et g sont continues dans $[a,t]$ ansi que toutes leurs dérivées ; la formule devient :

$$D^{p}(f(t)g(t))=f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t)$$

D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

1.9 Lemmes fondamentaux

Lemme 3 *Soit $p>0$ alors l'équation différentielles*

$$^{c}D^{p}f(t)=0$$

admet les solutions

$f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+...+c_{n-1}t^{n-1}, c_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2,...,n-1, n=[p]+1$

Preuve. Supposons que
$$ {}^{c}D^{p}f(t) = 0 $$
d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient
$$ I^{n-p}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) = 0 $$
c'est à dire
$$ \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^t (t-s)^{n-p-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)ds = 0. $$
puisque $\frac{1}{\Gamma(n-p)} \neq 0$, on a
$$ \int_0^t (t-s)^{n-p-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)ds = 0, $$
et par suite
$$ I^{n-p-1} * f^{(n)}(s) = 0. $$
On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité
$$ L(I^{n-\alpha-1} * f^{(n)}(t))(p) = L(0)(p) = 0 $$
Posant $F(p) = L(f)(p)$ on obtient
$$ \frac{\Gamma(n-p)}{p^{n-p}}\left(p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0)\right) = 0 $$
alors
$$ p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0) = 0. $$
donc
$$ F(p) = \sum_{k=1}^{n} p^{-k} f^{(k-1)}(0). $$
appliquant maintenant la transformée inverse de Laplace :
$$ L^{-1}(f(p))(t) = L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p^{-k} f^{(k-1)}(0)\right)(t) $$

il s'ensuit que

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) L^{-1}(p^{-k})(t)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0). \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)},$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ on trouve

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i.$$

Pour $c_i = \dfrac{f^i(0)}{i!}$ on a

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

supposons maintenant que

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo au deux membres de l'égalité

$${}^cD^p f(t) =^c D^p \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^c D^p t^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-p} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^i$$

puisque $(0 \leq i \leq n - 1 < n)$ on a

$${}^cD^p f(t) = 0$$

ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 4 *Soit $p > 0$, alors*

$$I^{pc} D^p f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, ..., n - 1, n = [p] + 1$.

Preuve. On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$^{c}D^{p}f(t) = I^{n-p}f^{(n)}(t),$$

On applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^{pc}D^{p}f(t) &= I^{p}I^{n-p}f^{(n)}(t) \\
&= I^{nRL}D^{n}f(t) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t\to 0} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I^{n-n}f(t) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} f(t)\right)(0) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} f^{(n-j)}(0).
\end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{pc}D^{p}f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^{k}}{k!} \\
&= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{k}^{1}t^{k}}{k!} \\
&= f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{k}t^{k}}{k!}.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Théorème de continuation de Mawhin

Dans ce chapitre, on fait la présentation du théorème de continuation de Mawhin. Mais avant de faire la présentation plus détaillée du théorème, faisons brièvement l'état de l'art sur les opérateurs de Fredholm ainsi que les principales notions qui s'y rapportent. En revanche comme nous le verrons par la suite, ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections, alors nous y consacrons une autre section.

2.1 Supplémentaire topologique

Définition 57 ***(Supplémentaire topologique)*** *Soit E et F deux sous-espaces fermés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé X. On dit que E est un supplémentaire topologique de F si X est la somme directe de F et E c-à-d $X = F \oplus E$.*

Remarque 58
1. *Tout sous espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire toppologique.*
2. *Tout sous espace vectoriel fermé de codimension finie admet un supplémentaire toppologique*

2.2 Projection

Définition 59 ***(Projection)*** *Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \longrightarrow X$ est une projection si $P(P(x)) = P(x), \forall\ x \in X$ (c-à-d si $P^2 = P$).*

Proposition 60 *Soit X, un espace vectoriel. Un opérateur linéaire* $P : X \longrightarrow X$ *est une projection si et seulement si* $(I - P)$ *est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continue si et seulement si* $(I - P)$ *est continue.*

Preuve. (1)On montre que : P projection $\Longleftrightarrow (I - P)$ projection
($\Longrightarrow$) P une projection, alors :

$$\begin{aligned}(I-P)^2 &= (I-P)[(I-P)(x)]\\ &= (I-P)[x-P(x)]\\ &= I(x-P(x)) - P(x-P(x))\\ &= x - P(x) - P(x) + P^2(x)\\ &= x - 2P(x) + P(x)\\ &= x - P(x)\\ &= (I-P)(x)\end{aligned}$$

donc (I-P) est une projection.
($\Longleftarrow$) (I-P) est une projection, alors $I - (I - P)$ projection et $I - (I - P) = I - I + P = P$ donc P est une projection.
(2) On montre que : P est continue $\Longleftrightarrow (I - P)$ est continue
($\Longrightarrow$) P est continue et I est continue , alors (I-P) continue
($\Longleftarrow$) (I-P) est continue, alors p est continue car(l'identité est une application continue) ■

Proposition 61 *Si P est une projection dans X, alors :*

$$Ker(P) = Im(I - P) \;\; et \;\; Im(P) = Ker(I - P).$$

Preuve. (1) On montre que $Ker(P) = Im(I - P)$
D'abord, on montre $Ker(P) \subset Im(I - P)$
Si $x \in Ker(P) \Longrightarrow P(x) = 0$. En remplaçant $P \;\; par \;\; (I - P)$ alors

$$(I - P)(x) = x - P(x) = x - 0 = x \Longrightarrow x \in Im(I - P)$$

Alors $Ker(P) \subset Im(I - P)$
En suite, On montre $Ker(P) \supset Im(I - P)$.

Si $x \in Im(I-P)$, on définie l'application :

$$P((I-P)(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0 \Longrightarrow x \in Ker(P)$$

alors $Ker(P) \supset Im(I-P)$. Donc $Ker(P) = Im(I-P)$
(2) On montre que $Im(P) = Ker(I-P)$.
D'abord, on montre que $Im(P) \subset Ker(I-P)$.
Si $x \in Im(P) \Longrightarrow P(x) = x$, on remplaçant P par $(I-P)$ alors

$$(I-P)(x) = x - P(x)x - x = 0 \Longrightarrow x \in Ker(I-P)$$

Alors, $Im(P) \subset Ker(I-P)$
En suite, on montre $Im(P) \supset Ker(I-P)$.
Si $x \in Ker(I-P)(x)$ alors $(I-P)(x) = 0 \Longleftrightarrow x - P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = P(x) \Longrightarrow x \in Im(P)$
alors $Im(P) \supset Ker(I-P)$. Donc $Im(P) = Ker(I-P)$ ■

Définition 62 ***(Un espace de Hausdorff)*** *Un espace topologique X est séparé (ou de Hausdorff) si* $\forall x \neq y \in X, \exists\ x \in V_x,\ y \in V_y$ *ouverts tel que* $V_x \cap V_y = \varnothing$.

Corollaire 63 *Toute projection continue dans un espace de Hausdorff est à image fermée. En particulier, les projections continues des espaces de Banach sont à images fermées.*

Théoréme 64 *Si P est une projection continue dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff X, alors X est la somme directe de* $Im(P)$ *et* $Ker(P)$*, (c-à-d* $X = Im(P) \oplus Ker(P)$*).*

Preuve. Par le corollaire précédant, $Im(P)$ *et* $Ker(P)$ sont fermé dans X, on a :

$$Ker(P) = \{x \in X; P(x) = 0\}.$$

et

$$Im(P) = \{x \in X; P(x) = x\}.$$

on pose

$$x = P(x) + (I-P)(x)$$

(1) $P(x) \in Im(P)$ car $P(P(x)) = P^2(x) = P(x)$.
$(I - P)(x) \in Ker(P)$ car $P((I - P)(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$.
Alors
$$X = Im(P) + Ker(P)$$

(2) $P(x) \in Im(P) = Ker(I - P) \Longrightarrow P(x) = (I - P)P(x) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$.
$(I - P)(x) \in Ker(P) \Longrightarrow (I - P)(x) = 0$.
Alors $x \in Im(P) \cap Ker(P) = \{0\}$.
D'aprés (1) et (2)
$$X = Im(P) \oplus Ker(P)$$

■

2.3 Sous-espace de dimension et de codimension finie

Lemme 5 ***(Projection sur un sous-espace de dimension finie)*** *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un projection P continu sur X tel que $Im(P) = E$.*

Preuve. On choisit une base $e_1, ..., e_n$ de E, et on désigne par B_k, $k = 1, ..., n$ les formes linéaires coordonnées sur E associées reprectivement à $e_1, e_2, ..., e_n$,

$$B_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ j = i \\ 0 & si\ j \neq i \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger $B_1, B_2, ..., B_n$ en formes linéaire $f_1, f_2, ..., f_n$ continues sur X, on obtient que l'application P définie par

$$\forall x \in X, \quad P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

est un projection continue de X sur E que répond au probléme. ■

Corollaire 65 *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, il existe un sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ tel que $X = E \oplus Y$.*

Définition 66 ***(Codimension d'un sous-espace vectoriel)****Si l'espace quotient X/Y est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ est de codimension finie dans X qu'on écrit*

$$codim(Y) = dim(X/Y)$$

Lemme 6 *Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espace vectoriels fermés de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $dim(M) = codim(N) < \infty$, alors $E = M \oplus N$.*

Preuve. Soit $\pi = \pi_{|N}$ la surjection canonique de E sur E/N. Comme $M \cap N = \{0\}$, l'application π_M est injective. D'où

$$dim(\pi(M)) = dim(M) = codim(N) = dim(E/N)$$

Ainsi $\pi(M) = E/N = \pi(E)$. Maintenant si $x \in E$ quelconque, alors $\pi(x) \in \pi(E) = \pi(M)$. Ainsi il existe $x_M \in M$ tel que $\pi(x) = \pi(x_M)$. D'où $\pi(x - x_M) \in Ker\pi = N$.
On en déduit donc que $x \in M + N$. Ceci prouve que $E = M + N$ et donc finalement $E = M \oplus N$. ■

2.4 Opérateur de Fredholm

Définition 67 ***(Opérateur de Fredholm)*** *Soient X et Y deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, on dit qu'une application linéaire $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes*

1. *$Ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ est de dimension finie.*
2. *$Im(L) = L(dom(L))$ est fermée et de codimension finie.*

   Rappelons que la codimension de $Im(L)$ est la dimension de $coker(L) = dim(Y/Im(L))$.

Définition 68 ***(L'ndice)*** *Si L est un opérateur de Fredholm, alors son indice est l'entier*

$$ind(L) = dim(Ker(L)) - codim(Im(L))$$

Exemple 69 *l'identité $I : X \longrightarrow X$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(I)) - codim(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dimcoKer(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dim\left(\frac{X}{Im(I)}\right) \\ &= dim\{0\} - dim\{0\} = 0 \end{aligned}$$

Exemple 70 *Si X et Y sont de dimensions finies, alors tout application linéaire $L : X \longrightarrow Y$ est de Fredholm avec*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dimcoKer(L) \\ &= dim(Ker(L)) - (dim(Y) - dim(Im(L))) \\ &= dim(Ker(L)) + dim(Im(L)) - dim(Y) \\ &= dim(X) - dim(Y) \end{aligned}$$

Exemple 71 *Si X et Y sont des espaces de Banach et $L : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire bijective alors L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. E n effet, il découle de la bijectivité que $Ker(L) = \{0_X\}$, dont la dimension est nulle, et $Im(L) = Y$ et sa codimension est nulle, ainsi*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dim\left(\frac{Y}{Im(Y)}\right) \\ &= dim\{0_X\} - dim\{0\} = 0 \end{aligned}$$

Théoréme 72 *Si L est un opérateur de Fredholm, K est une application linéaire compacte , alors $L + K$ est de Fredholm et*

$$ind(L + K) = ind(L).$$

En particulier, toute perturbation compacte de l'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 73 *Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, alors L est surjectif si et seulement si L est injectif.*

Preuve. L est surjective, alors $Im(L) = Y = Y + \{0\}$ et par suite, $dim\{0\} = dim(Ker(L)) = 0$, donc $Ker(L) = \{0\}$, d'où L est injective. ■

Dans tout ce qui suit (sauf mention de contraire) $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Si L est de Fredholm, alors d'aprés ce qui précède, (voir aussi [2] et [8]), il existe deux projections continues, $P : X \longrightarrow X$ et $Q : Y \longrightarrow Y$ tel que

$$Im(P) = Ker(L) \text{ et } Ker(Q) = Im(L)$$

On pose

$$X_1 = Im(I - P) = Ker(P) \text{ et } Y_1 = Im(Q)$$

alors,

$$X = Ker(L) \oplus X_1 et \quad Y = Im(L) \oplus Y_1$$

Considérons un isomorphisme

$$J : Ker(L) \longrightarrow Im(Q)$$

dont l'existence est assurée par le fait que $dimker(L) = dimIm(Q) = n$. Remarquons que

$$dom(L) = Ker(L) \oplus (dom(L) \cap X_1)$$

et que la restriction de L à $dom(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur $Im(L)$, notons par L_p cette restriction c'est à dire $L_p : dom(L) \cap X_1 \longrightarrow Im(L)$, alors

Lemme 7 *L_p est un isomorphisme algébrique.*

Preuve.
(1) Montrons que L_p est injective :
soit $x \in Ker(L_p) \subset Ker(L) = Im(P)$ alors, il existe un $y \in Dom(P)$ tel que $x = Py$. Comme P est une projection, on obtient $x = Py = P^2y = P(Py) = Px = 0$. Par conséquent, $x = 0$, et donc $Ker(L_p) = \{0\}$, alors L_p est injective.
(2) Montrons que L_p est surjection :

on a P est une projection , alors nous pouvons écrire l'espace vectoriel X comme somme directe $X = Ker(P) \oplus Im(P) = Ker(P) \oplus Ker(L)$.

Prenons $z \in Im(L)$, donc il existe $x \in dom(L) \subset X$ tel que $Lx = z$. Comme $X = Ker(P) \oplus Ker(L)$, alors il existe deux éléments uniques $e \in Ker(P)$ *et* $f \in Ker(L)$, tels que $x = e + f$. On a $z = Lx = L(e + f) = Le + Lf = Le + 0 = Le$, ainsi $e \in dom(L)$.

Finalement, on obtient $e \in dom(L), e \in Ker(P)$ *et* $L_p e = z$, d'où L_p est bien surjective. ■

Soit $K_p : Im(L) \subset Y \longrightarrow dom(L) \cap Ker(P)$ est bijectif, défini par $K_p := L_p^{-1}$, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés suivant :

Lemme 8 *a. Sur $Im(L)$, on a $LK_p = I$.*

b. Sur $dom(L)$, on a $K_pL = (I - P)$.

Preuve.

(a) Prenons $x \in Im(L)$, alors $LK_px = L(K_p(x)) = L_p(K_p(x)) = Ix$.

(b) Comme $Im(P) = Ker(L)$, alors $LP = 0$, et par suite $K_pL = K_pL(I - P)$. Donc montrer (b), revient à vérifier que $K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P)$.
Si on a $Im(I - P) \subseteq dom(L_p) = dom(L) \cap Ker(P)$, alors le résultat s'ensuit. Prenons $x \in dom(L)$ Comme $P(x) \in Ker(L) \subset dom(L)$ et $dom(L)$ est un sous espace vectoriel de X, on a $(x - Px) \in dom(L)$.
Puisque $P(x - Px) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$, alors $(x - Px) \in Ker(P)$ et par conséquent $(x - Px) \in dom(L) \cap Ker(P)$. D'ici obtient $Im(I - P) \subset dom(L) \cap Ker(P)$.
D'où en utilisant (a) $K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P) s'ensuit.$

■

Définition maintenant l'opérateur $K_{P,Q} : Y \longrightarrow X$ avec $K_{P,Q} = L_p^{-1}(I - Q)$ on a

Lemme 9 *L'opérateur $L + JP : dom(L) \longrightarrow Y$ est un isomorphisme et*

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$$

En particulier,

$$(L + JP)^{-1}x = J^{-1}x \quad \forall\ x \in Im(Q)$$

Preuve. Pour l'injectivité de $L + JP$, soit $x \in dom(L)$ tel que

$$(L + JP)x = 0$$

De cette égalité on en déduit que

$$Lx \in Im(L) \cap Im(J) = Ker(Q) \cap Im(Q) = \{0\}$$

d'où $x \in Ker(L)$. Par conséquence, Px=x et compte tenu de $u''' + f(t, u) = 0$ où $0 < t < 1$, $Jx = 0$, par suite $x = 0$. Pour la surjectivité de $L + JP$, $y \in Y$. Affirmons que

$$x = (K_{P,Q} + J^{-1}Q)y$$

est une solution de

$$(L + JP)x = y$$

Alors, comme $J^{-1}Qy \in Ker(L)$, il en résulte que

$$Lx = LK_{P,Q}y = LL_p^{-1}(I - Q)y = (I - Q)y$$

Comme $K_{P,Q}y \in dom(L) \cap Ker(P)$, il en s'ensuit que

$$JPx = JJ^{-1}Qy = Qy$$

Donc

$$(L + JP)x = (I - Q)y = Qy$$

et

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$$

■

Lemme 10 *Si* $N : dom(N) \subset X \longrightarrow X$ *est une application, le problème*

$$x \in dom(L) \cap dom(N),\ Lx = Nx$$

est équivalent au problème de point fixe

$$x \in dom(N),\ x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&[x \in dom(L) \cap dom(N),\ Lx = Nx] \\
\Leftrightarrow &[x \in dom(L) \cap dom(N),\ (L + JP)x = (N + JP)x] \\
\Leftrightarrow &\left[x \in dom(N),\ x = (L + JP)^{-1}(N + JP)x\right]
\end{aligned}$$

il s'ensuit que utilisantle lemme 9

$$\begin{aligned}
(L + JP)^{-1}(N + JP) &= (K_{P,Q} + J^{-1}Q)(N + JP) \\
&= K_{P,Q}N + K_{P,Q}JP + J^{-1}QN + J^{-1}QJP.
\end{aligned}$$

Puisque $Im(J) = Im(Q) = Ker(I - Q)$, il en résulte que

$$K_{P,Q}JP = L_p^{-1}(I - Q)JP = 0$$

Puisque $Q|_{Im(Q)} = I|_{Im(Q)}$ et $Im(J) = Im(Q)$, on en déduit que

$$J^{-1}QJP = J^{-1}JP = P$$

Donc, $(L + JP)^{-1}(N + JP) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N.$ ■

Soient X, Y deux espaces de Banach et $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Définition 74 ***(L'application L-compacte)*** *Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \longrightarrow Y$ est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si $QN(\overline{\Omega})$ est borné et $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte.*

Comme conséquence des lemmes (9) et (10) on a la définition suivant :

Définition 75 *[30]* ***(Le degré de Mawhin)*** *Si les opérateur L et N satisfont les propriétés mentionnées ci dessus, alors le degré de coïncidence de L et N sur Ω est définit par*

$$deg[(L, N), \Omega] = deg_{LS}(I - M, \Omega, 0)$$

où M désignera la quantité donnée par $M(P, J, Q) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$.

2.5 Théorème de Mawhin

Théoréme 76 *Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est L-compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $Lx \neq \lambda Nx$ *pour tout* $(x, \lambda) \in [(dom(L) \backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0, 1[$.

(ii) $QNx \neq 0$ *pour tout* $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.

(iii) $deg_B(J^{-1}QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$, *où* $Q : Y \longrightarrow Y$ *est la projection définie ci dessus avec* $Im(L) = Ker(Q)$.

Alors l'équation $Lx = Nx$ *admet au moins une solution dans* $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Preuve. Pour $\lambda \in [0, 1]$, considérons la famille de problèmes

$$x \in dom(L) \cap \overline{\Omega}, Lx = \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx \tag{2.1}$$

Soit $M : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow Y$ une homotopie définie par

$$M(\lambda, x) = Px + J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx$$

En vertu du(10), le problème (2.1) est équivalent à un problème de point fixe $x \in \overline{\Omega}$ et

$$\begin{aligned} x &= Px + J^{-1}Q(\lambda N + (1 - \lambda)QN)x + K_{P,Q}(\lambda N + (1 - \lambda)QN)x \\ &= Px + \lambda J^{-1}QNx + (1 - \lambda)J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx + (1 - \lambda)K_{P,Q}QNx \\ &= M(\lambda, x) \end{aligned}$$

Donc, cette dernière équation est équivalente à un problème de point fixe

$$x \in \overline{\Omega}, \quad x = M(\lambda, x). \tag{2.2}$$

S'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que $Lx = Nx$, alors nous avons terminé. Maintenant supposons que

$$Lx \neq Nx \text{ pour tout } x \in dom(L) \cap \Omega \tag{2.3}$$

et d'autre part

$$Lx \neq \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx \tag{2.4}$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (dom(L) \cap \Omega)$. Si

$$Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)QNx$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (dom(L) \cap \Omega)$, on obtient par application de Q aux deux membres de l'égalité précédente

$$QNx = 0, \quad Lx = \lambda Nx$$

La première de ces égalités et la condition (ii) impliquent que $x \notin Ker(L) \cap \partial\Omega$ *i.e* $x \in \partial\Omega \cap (dom(L) \backslash Ker(L))$ et donc la seconde égalité contredit (i). En utilisant une nouvelle fois (ii), il s'ensuit que

$$Lx \neq QNx \quad pour\ tout\ x \in dom(L) \cap \partial\Omega. \tag{2.5}$$

En vertu de (2.3), (2.4) et (2.5), on déduit que

$$x \neq M(\lambda, x) \;\; pour\ tout \;\; (\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega \tag{2.6}$$

Il est facile de vérifier que $M(\lambda, x)$ est compacte car N est L-compacte sur $\overline{\Omega}$, dés lors en utilisant la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, on obtient

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0) \tag{2.7}$$

D'autre part on a

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0) \tag{2.8}$$

Mas le rang de $P + J^{-1}QN$ est contenu dans $Ker(L)$, d'où en utilisant la propriété de reduction du degré de Leray-Schauder et le fait que $P|_{Ker(L)} = I|_{Ker(L)}$, (car $Ker(L) = Im(P) = Ker(I - P)$), on obtient

$$\begin{aligned} deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0) &= deg_B(I - (P + J^{-1}QN), \Omega \cap Ker(L), 0) \\ &= deg_B(J^{-1}QN, \Omega \cap Ker(L), 0) \end{aligned} \tag{2.9}$$

En vertu de (2.7), (2.8) et (2.10), il s'ensuit que $deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0) \neq 0$, et donc la propriété d'existence du degré de Leray-Schauder implique l'existence d'un $x \in \Omega$ tel que $x = M(1, x)$ *i.e* $x \in dom(L) \cap \Omega, Lx = Nx$ ■

Chapitre 3

Application de théorème de continuation de Mawhin

3.1 Introduction

Ce chapitre est une étude du problème de valeur de l'ordre fractionnaire avec conditions non-local suivente :

$$D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), u'(t)),\ avec\ t \in (0,1),$$

$$D_{0+}^{\alpha-2}u(0) = 0, \eta u(\xi) = u(1),$$

où $1 < \alpha < 2$,$0 < \xi < 1$ et $\eta\xi^{\alpha-1} = 1$.On lui montrera que, avec le présent le choix des états de frontière, le problème de valeur est à la résonance. Nous appliquer un théorème bien connu de théorie de degré pour des coïncidences dues à Mawhin [16].

3.2 Préliminaires techniques

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et théorèmes que nous utiliserons pour la preuve des principaux résultats.

Nous commençons par présenter au lecteur les outils fondamentaux de la calcul et théorie des degrés de coïncidence dans chapitre 1 et 2.

Dans cette note nous sommes concernés par opérateur de Fredholm de l'index zéro. De

Définition 77 *Il suit que là existent les projecteurs continus* $P : X \longrightarrow X$ *et* $Q : Z \longrightarrow Z$ *tels que*

$$ImP = kerL,\ kerQ = ImL,\ X = kerL \oplus kerP,\ Z = ImL \oplus ImQ$$

et que opérateur

$$L|_{domL\cap kerP} : domL \cap kerP \longrightarrow ImL$$

est linéaire et sur. L'inverse de $L|_{domL\cap kerP}$ *nous dénotons par* $K_p : ImL \longrightarrow domL \cap kerP$*. L'inverse généralisé de L dénoté par* $K_{P,Q} : Z \longrightarrow domL \cap kerP$ *est défini par* $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$*. Si L est opérateur de Fredholm de l'index zéro, puis, pour chaque* $J : ImQ \longrightarrow kerL$ *l'opérateur* $JQ + K_{P,Q} :\longrightarrow domL$ *est un isomorphisme et, pour chaque* $u \in domL$*,*

$$(JQ + K_{P,Q})^{-1}u = (L + J^{-1}P)u$$

L'existence d'une solution de l'équation $Lu = Nu$ sera montrée en utilisant [16, Théorème IV.13].

Théoréme 78 *Soit* $\Omega \subset X$ *ouvert et borné, L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est L-compact sur* $\overline{\Omega}$*. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $Lu \neq \lambda Nu$ *pour tout* $(u, \lambda) \in [(dom(L)\backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0, 1[$.

(ii) $Nu \notin ImL$ *pour tout* $u \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.

(iii) $deg_B(JQN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$*, où* $Q : Z \longrightarrow Z$ *est la projection définie ci dessus avec* $Im(L) = Ker(Q)$ *et* $J : ImQ \longrightarrow kerL$ *est un isomorphisme.*

Alors l'équation $Lu = Nu$ *admet au moins une solution dans* $dom(L) \cap \overline{\Omega}$*.*

Supposons maintenant que la fonction f satisfait les conditions de Carath par rapport à $L^p[0, 1]$,$p \geq 1$, c'est-à-dire que les conditions suivantes sont réunies :

(c1) pour chaque $z \in \mathbb{R}^n$, la cartographie $t \longmapsto f(t, z)$ est mesurable par Lebesgue.

(c2) pour a. e.$t \in [0, 1]$, le mappage $t \longmapsto f(t, z)$ est continu sur $\mathbb{R}^n$.

(c3) pour chaque $r > 0$, il existe un $\phi_r \in L_p[0, 1]$ non négatif tel que, pour a. e. $t \in [0, 1]$ et tout z tel que $|z| \leq r$, on a $|f(t, z)| \leq \phi_r(t)$.

3.3 Principaux résultats

Dans ce section,on étude d'existence de solution de l'equation diffrentielle :

$$D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), u'(t)),\ t \in (0,1), \tag{3.1}$$

d'ordre fractionnaire $1 < \alpha < 2$, avec les conditions :

$$D^{\alpha-2}u(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$\eta u(\xi) = u(1), \tag{3.3}$$

où $0 < \xi < 1$ et

$$\eta \xi^{\alpha-1} = 1. \tag{3.4}$$

et l'ypothése suivante : (P) $p > \frac{1}{\alpha-1}$ et $q = \frac{p}{p-1}$.
Soit AC(0,1] l'espace de fonctions absolument continues sur chaque intervelle $[a,1] \subset (0,1]$.
Nous introduisons l'espace

$$X_0 = \{u : u \in AC[0,1], u' \in AC_{loc}(0,1], D^{\alpha}u \in L^p[0,1]\}.$$

Alors que AC[0,1] l'espace de fonctions absolument continues sur l'intervelle [0,1] et $AC^n[0,1] = \{u \in AC[0,1] : u^{(n)} \in AC[0,1]\}, n = 0,1,2,...$
Soit

$$X = \{u \in C[0,1] \cap C^1(0,1] : \lim_{t\to 0^+} t^{2-\alpha}u'(t) existe\}$$

avec la norme $\|u\| = max\{\|u\|_0, \|t^{2-\alpha}u'\|_0\}$ où $\|.\|_0$ est la norme max et $\|t^{2-\alpha}v\|_0 = \sup_{t\in(0,1]} |t^{2-\alpha}v(t)|$. Soit $Z = L^p[0,1]$ avec la norme habituelle $\|.\|_p$ avec p satisfait (P). Définissez l'opérateur $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Z$ avec

$$domL = \{u \in X_0 : u\ satisfait\ (3.2) et (3.3)\}$$

et $Lu(t) = D^{\alpha}u(t)$. Soit l'opérateur $N : X \longrightarrow Z$ défini par $Nu(t) = f(t, u(t), u'(t))$ alors le problme limites (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) sera équivalent à $Lu(t) = Nu(t)$.
Nous donnons à présent le théorème principale de ce chapitre, soit celui d'existence de solution du problème (3.1)et (3.2), (3.3), (3.4).

Lemme 11 *L'opérateur $L : domL \subset X \longrightarrow Z$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.*

Preuve. On a $ker(L) = \{u(t) \in dom(L), Lu(t) = 0\}$
$Lu(t) = 0 \Longleftrightarrow D^{\alpha}u(t) = 0 \Longleftrightarrow u(t) = ct^{\alpha-1} + a$
où a et c sont constantes réelles, on trouve $a = 0$, donc : $kerL = \{ct^{\alpha-1} : c \in \mathbb{R}\}$.
Nous affirmons que :

$$ImL = \{g \in Z : \eta I^{\alpha}g(\xi) = I^{\alpha}g(1)\}$$

(1) Montre que $\{g \in Z : \eta I^{\alpha}g(\xi) = I^{\alpha}g(1)\} \subseteq ImL$
Soit $g \in Z$ et

$$u(t) = I^{\alpha}g(t) + ct^{\alpha-1}, c \in \mathbb{R}$$

ensuite $D^{\alpha}u(t) = g(t)$ avec $t \in (0, 1)$. Par théorème(45),

$$\begin{aligned}
D^{\alpha-2}u(t) &= I^{2-\alpha}u(t) \\
&= I^{2-\alpha}(I^{\alpha}g(t) + ct^{\alpha-1}) \\
&= I^{2-\alpha}I^{\alpha}g(t) + cI^{2-\alpha}t^{\alpha-1} \\
&= I^{2}g(t) + c\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}s^{\alpha-1}ds
\end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = xt$ on trouve :

$$\begin{aligned}
D^{\alpha-2}u(t) &= I^{2}g(t) + c\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 t^{1-\alpha}(1-x)^{1-\alpha}t^{\alpha-1}x^{\alpha-1}tdx \\
&= I^{2}g(t) + c\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{1-\alpha}x^{\alpha-1}tdx \\
&= I^{2}g(t) + c\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}tB(2-\alpha, \alpha) \\
&= I^{2}g(t) + c\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}t\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2)} \\
&= I^{2}g(t) + c\Gamma(\alpha)t
\end{aligned}$$

où, $D^{\alpha-2}u(0) = 0$. On peut facilement vérifier que, compte tenu de 3.4, u satisfait 3.3

on a $\eta\xi^{\alpha-1} = 1$ alors,

$$\begin{aligned}
\eta u(\xi) &= \eta(I^\alpha g(\xi) + c\xi^{\alpha-1}) \\
&= \eta(I^\alpha g(\xi)) + c\eta\xi^{\alpha-1} \\
&= \eta(I^\alpha g(\xi)) + c \\
&= I^\alpha g(1) + c
\end{aligned}$$

Donc $\eta(I^\alpha g(\xi)) = I^\alpha g(1)$. Il est évident que $u \in AC[0,1]$. Alors u' existe. Pour a $t \in (0,1]$, et par Théorème(45),

$$u'(t) = I^{\alpha-1} g(t) + c(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

et,

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} t^{2-\alpha} u'(t) = c(\alpha-1)$$

puisque

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} t^{2-\alpha} |I^{2-\alpha} g(t)| \leq \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{t^{1/q}\|g\|_p}{\Gamma(\alpha-2)((\alpha-2)q+1)^{1/q}} = 0$$

car :

$$\begin{aligned}
t^{2-\alpha}|I^{2-\alpha}g(t)| &= \frac{t^{2-\alpha}}{|\Gamma(\alpha-1)|}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-2} g(s)ds\right| \\
&\leq \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-2)q} ds\right)^{1/q}\left(\int_0^t g(s)^p ds\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\left[\frac{(t-s)^{(\alpha-2)q+1}}{(\alpha-2)q+1}\right]_0^t\right)^{1/q} \|g\|_p \\
&\leq \frac{t^{2-\alpha} t^{((\alpha-2)q+1)^{1/q}}}{\Gamma(\alpha-1)((\alpha-2)q+1)^{1/q}}\|g\|_p \\
&\leq \frac{t^{1/q}\|g\|_p}{\Gamma(\alpha-1)((\alpha-2)q+1)^{1/q}} \underset{t\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Soit $t_1, t_2 \in (0,1)$ et $t_1 \leq t_2$ alors
$|I^{\alpha-1}g(t_2) - I^{\alpha-1}g(t_1)|$
$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-2}g(s)ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-2}g(s)ds\right|$
$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-2}g(s)ds + \int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-2} - (t_1-s)^{\alpha-2})g(s)ds\right|$

$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-2}|g(s)|\,ds+\int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-2}-(t_1-s)^{\alpha-2})|g(s)|\,ds\right)$
$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\left[\frac{(t_2-s)^{(\alpha-2)q+1}}{(\alpha-2)q+1}\right]_{t_1}^{t_2}\right)^{1/q}\|g\|_p+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\left(\left[\frac{(t_2-s)^{(\alpha-2)q+1}}{(\alpha-2)q+1}\right]_0^{t_1}\right)^{1/q}-\left(\left[\frac{(t_1-s)^{(\alpha-2)q+1}}{(\alpha-2)q+1}\right]_0^{t_1}\right)^{1/q}\right)\|g\|_p$
$\leq \frac{-1}{\Gamma(\alpha-1)((\alpha-2)q+1)^{1/q}}(t_2-t_1)^{\alpha-2+1/q}\|g\|_p$
$+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)((\alpha-2)q+1)^{1/q}}\left((t_2-t_1)^{(\alpha-2)+1/q}-t_2^{(\alpha-2)+1/q}+t_1^{(\alpha-2)+1/q}\right)\|g\|_p$
$\leq c_1(t_1^{(\alpha-2)+1/q}-t_2^{(\alpha-2)+1/q})\|g\|_p$
où c_1 est une constante générique qui ne dépend que de α et p. Ainsi $u' \in AC_{loc}(0,1]$. En combinant lest observations précédentes, nous obtenons que $u \in domL$. Donc $\{g \in Z : \eta I^\alpha g(\xi) = I^\alpha g(1)\} \subseteq ImL$

(2) Montrer que $ImL \subset \{g \in Z : \eta I^\alpha g(\xi) = I^\alpha g(1)\}$
Soit $u \in domL$.alors pour $D^\alpha u \in ImL$, par théorème(51)et(3.2), On a

$$I^\alpha D^\alpha u(t) = D^{\alpha-\alpha}u(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}\left(\frac{d^{2-k-1}}{dt^{2+k-1}}I^{2-\alpha}u\right)(0)$$
$$= u(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}u(0) - \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}D^{\alpha-2}u(0)$$
$$= u(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}u(0)$$

Ce que, en raison des conditions aux limites (3.2),(3.3)et(3.4) implique que $D^\alpha u$ satisfies $\eta I^\alpha D^\alpha u(\xi) = I^\alpha D^\alpha u(1)$. Par conséquent, $ImL \subset \{g \in Z : \eta I^\alpha g(\xi) = I^\alpha g(1)\}$. Donc $ImL = \{g \in Z : \eta I^\alpha g(\xi) = I^\alpha g(1)\}$.

Définie $Q : Z \longrightarrow Z$ par

$$Qg(t) = k(\eta I^\alpha g(\xi) - I^\alpha g(1))t^{\alpha-1}$$

où

$$k = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\xi^\alpha - 1)}$$

alors,

$$Q^2g(t) = k(\eta I^\alpha Qg(\xi) - I^\alpha Qg(1))t^{\alpha-1}$$
$$= k\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\xi(\xi-s)^{\alpha-1}Qg(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}Qg(s)ds\right)t^{\alpha-1}$$
$$= k\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\xi(\xi-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}ds\right)Qg(t)$$

A l'aide de changement de variable $s = x\xi$ on trouve :
$Q^2g(t) = k\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(\xi - x\xi)^{\alpha-1}(x\xi)^{\alpha-1}\xi dx - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}ds\right)Qg(t)$
$= k\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\xi^{2\alpha-1}\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}(x)^{\alpha-1}dx - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}ds\right)Qg(t)$
$= k\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\xi^{2\alpha-1}B(\alpha,\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\alpha)\right)Qg(t)$
$= k\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\xi^{2\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)}\right)Qg(t)$
$= k\left(\frac{\eta\xi^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\right)Qg(t)$
$= k(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)})(\eta\xi^{2\alpha-1}-1)Qg(t) = \frac{\eta\xi^{2\alpha-1}-1}{\xi^{\alpha}-1}Qg(t) = \frac{\eta\xi^{\alpha-1}\xi^{\alpha}-1}{\xi^{\alpha}-1}Qg(t) = \frac{\xi^{\alpha}-1}{\xi^{\alpha}-1}Qg(t) = Qg(t)$
en vue de (3.4).
Par conséquent, $Q : Z \longrightarrow Z$ est un projecteur linéaire continu avec $kerQ = ImL$.
Maintenant montrer que $Z = ImL \oplus ImQ$

Soit $g \in Z$ s'écrit $g = (g - Qg) + Qg$ avec $g - Qg \in kerQ = ImL\ et\ Qg \in ImQ$. Donc $Z = ImL + ImQ$. Soit $g \in ImL \cap ImQ$ et $g(t) = ct^{\alpha-}$ obtenir ce la :

$$\begin{aligned}
\eta I^{\alpha}g(\xi) - I^{\alpha}g(1) &= \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}g(s)ds\\
&= \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-1}cs^{\alpha-1}ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}cs^{\alpha-1}ds\\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{\xi}\eta(\xi-s)^{\alpha-1}cs^{\alpha-1}ds - \int_0^1(1-s)^{\alpha-1}cs^{\alpha-1}ds\right)\\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left(\eta\xi^{\alpha-1}B(\alpha,\alpha) - B(\alpha,\alpha)\right)\\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\eta\xi^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\right)\\
&= \frac{c\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}(\eta\xi^{2\alpha)-1})\\
&= \frac{c\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}(\xi^{\alpha)-1})\\
&= \frac{c}{k} = 0 \Longrightarrow c = 0
\end{aligned}$$

D'où $0 = ImL \cap ImQ$ et donc $Z = ImL \oplus ImQ$.
Puisque ImQ=ker L alors dim ker L=dim ImQ =codim Im(L) donc

$$IndL = dimkerL - codimImL = 0$$

C'est -à-dire que L est un opéra teur de Fredholm d'indice zéro. ■

Définiosons maintenant la projection $P : X \longrightarrow X$ par

$$Pu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha-1}u(0)t^{\alpha-1}$$

puisque $0 < \alpha - 1 < 1$,

$$Pu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} u(s) ds$$

On remmarque que $ImP = kerL$ et $kerP = \{u \in X : D^{\alpha-1}u(0) = 0\}$. Montrons que P est projection. En effet,

$Pu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha-1}u(0)t^{\alpha-1} \Longleftrightarrow P^2u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha-1}(pu)(0)t^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned}
P^2u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} Pu(s) ds \right) |_{t=0} t^{\alpha-1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha-1}u(0)s^{\alpha-1} ds \right) |_{t=0} t^{\alpha-1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} s^{\alpha-1} ds \right) |_{t=0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha-1}u(0)t^{\alpha-1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} s^{\alpha-1} ds \right) |_{t=0} Pu(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t t^{1-\alpha}(1-x)^{1-\alpha} t^{\alpha-1} x^{\alpha-1} dx \right) |_{t=0} Pu(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} t \int_0^t (1-x)^{1-\alpha} x^{\alpha-1} dx \right) |_{t=0} Pu(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} B(2-\alpha, \alpha) Pu(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} Pu(t) = \frac{Pu(t)}{\Gamma(2)} = Pu(t)
\end{aligned}$$

Donc P est une projection.

On a montre que $X = KerL \oplus KerP$

(1) On montre que $X = KerL + KerP$
   Pour $u \in X$, on a : $u(t) = (u(t) - Pu(t)) + Pu(t)$ avec $(u(t) - Pu(t)) \in KerP$ car $(P^2u = Pu)$ et $Pu(t) \in ImP = KerL$, alors $X = KerL + KerP$

(2) On montre que $KerL \cap KerP = 0$

Si $u \in KerP \Longrightarrow Pu = 0$

Si $u \in KerL = ImP \Longrightarrow \exists u_1 \in X telque Pu = u_1 \Longleftrightarrow u_1 = 0 (car Pu = 0)$

Donc $u \in KerL \cap KerP, alors KerL \cap KerP = \{0\}$

D'aprs (1) et (2), $X = KerL \oplus KerP$, Pour $u \in X$,

$$\begin{aligned}\|Pu\|_0 &= \max_{t\in(0,1]} \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha-1}u(0)t^{\alpha-1}\right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|t^{2-\alpha}(Pu)'\|_0 &= \sup_{t\in(0,1]} \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha-1}u(0)t^{\alpha-2}(\alpha-1)\right| \\ &= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right| \\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)!} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right| \\ &= \frac{1}{(\alpha-2)!} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right|\end{aligned}$$

Donc :

$$\|Pu\| = max\{\|Pu\|_0, \|t^{2-\alpha}(Pu)'\|_0\} = \|Pu\|_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right| \tag{3.5}$$

Définissons l'opérateur $K_p : ImL \longrightarrow domL \cap KerP$ par

$$K_p g(t) = I^\alpha g(t), t \in (0,1)$$

par proposition(51). Pour $g \in ImL$ on a :

$$LK_p g(t) = D^\alpha I^\alpha g(t) = g(t)$$

pour $u \in domL \cap KerP$ c'est dire $D^{\alpha-2}u(0) = 0$ et $D^{\alpha-1}u(0) = 0$. Alors par proposition (51),

$$\begin{aligned}K_p Lu(t) &= I^\alpha D^\alpha u(t) \\ &= u(t) - \frac{D^{\alpha-1}u(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} - \frac{D^{\alpha-2}u(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-2} = u(t)\end{aligned}$$

Donc $K_p = (L|_{domL\cap KerP})^{-1}$
On a pour tout $g \in ImL$ et $t \in [0,1]$. Comme $(K_pg)'(t) = I^{\alpha-1}g(t)$ alors

$$\begin{aligned}
\|t^{2-\alpha}(K_pg)'\|_0 &= \sup_{t\in(0,1]} \left|t^{2-\alpha}(K_pg)'(t)\right| \\
&= \sup_{t\in(0,1]} \left|t^{2-\alpha}I^{\alpha-1}g(t)\right| \\
&= \sup_{t\in(0,1]} \left|t^{2-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}g(s)ds\right| \\
&\leq \sup_{t\in(0,1]} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\left|g(s)\right| ds \\
&\leq \sup_{t\in(0,1]} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-2)q}ds\right)^{1/q} \|g\|_p \\
&\leq \sup_{t\in(0,1]} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\left[\frac{(t-s)^{(\alpha-2)q+1}}{(\alpha-2)q+1}\right]_0^t\right)^{1/q} \|g\|_p \\
&\leq \sup_{t\in(0,1]} \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{t^{((\alpha-2)q+1)^{1/q}}}{((\alpha-2)q+1)^{1/q}} \|g\|_p \\
&\leq \sup_{t\in(0,1]} \frac{t^{1/q}}{\Gamma(\alpha-1)((\alpha-2)q+1)^{1/q}} \|g\|_p \\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)((\alpha-2)q+1)^{1/q}} \|g\|_p
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|K_pg\|_0 &= \max_{t\in(0,1]} |K_pg(t)| \\
&\leq \max_{t\in(0,1]} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|g(s)\right| ds \\
&\leq \max_{t\in(0,1]} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q}ds\right)^{1/q} \|g\|_p \\
&\leq \max_{t\in(0,1]} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\left[\frac{(t-s)^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1}\right]_0^t\right)^{1/q} \|g\|_p \\
&\leq \max_{t\in(0,1]} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{t^{(\alpha-1)+1/q}}{((\alpha-1)q+1)^{1/q}} \|g\|_p
\end{aligned}$$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{((\alpha-1)q+1)^{1/q}} \|g\|_p$

alors

$$\begin{aligned}\|K_p g\| &= max\{\|K_p g\|_0, \|t^{2-\alpha}(K_p g)'\|_0\} \\ &\leq max\{\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)((\alpha-2)q+1)^{1/q}}, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{((\alpha-1)q+1)^{1/q}}\} \|g\|_p\end{aligned}$$

Donc

$$\|K_p g\| \leq \Lambda \|g\|_p \tag{3.6}$$

avec

$$\Lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} max \left\{ \frac{\alpha-1}{((\alpha-2)q+1)^{1/q}}, \frac{1}{((\alpha-1)q+1)^{1/q}} \right\} \tag{3.7}$$

Nous introduisons

$$\begin{aligned}QNu(t) &= k\left(\eta I^\alpha Nu(\xi) - I^\alpha Nu(1)\right) t^{\alpha-1} \\ &= k\left(\eta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1} f(s,u(s),u'(s))ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s),u'(s))ds\right) t^{\alpha-1} \\ &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left(\eta \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1} f(s,u(s),u'(s))ds - \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s),u'(s))ds\right) t^{\alpha-1}\end{aligned}$$

et comme $K_{p,Q} = K_p(I-Q)$ alors

$$\begin{aligned}K_{p,Q}Nu(t) = K_p(I-Q)Nu(t) = K_p(Nu(t) - Qu(t)) &= I^\alpha(Nu(t) - Qu(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(Nu(s) - QNu(s))ds\end{aligned}$$

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver les résultats de l'existence.
Nous imposons les condition :

$(H1)$ Il existe une constante positive K tel que $u \in domL \setminus kerL$ avec $\min_{t\in[0,1]} |D^{\alpha-1}(t)| > K$ implique $QNu(t) \neq 0$ sur (0,1].

$(H2)$ Il exist $\delta, \beta, t^{\alpha-1}, \rho \in L^p[0,1]$ et une fonction continue non décroissante $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ est $x_0 > 0$ avec les proprités :

(a)

$$\|\beta\|_p + \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p < \frac{\Gamma(\alpha)}{1+\Gamma(\alpha)\Lambda}.$$

(b) Pour tout $x \geq x_0$

$$x \geq \frac{K + (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\|\delta\|_p}{\Gamma(\alpha) - (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)(\|\beta\|_p + \|t^{\alpha-2}\gamma\|_p)} + \frac{(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\|\rho\|_p}{\Gamma(\alpha) - (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)(\|\beta\|_p + \|t^{\alpha-2}\gamma\|_p)}\phi(x). \tag{3.8}$$

(c) $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$|f(t,x,y)| \leq \delta(t) + \beta(t)|x| + \gamma(t)|y| + \rho(t)\phi(|x|).$$

$(H3)$ Il existe une constante B>0 telle que , pour tout $c \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|c| > B$ on a

$$sgn\,[c(\eta I u_c(\xi) - I u_c(1))] \neq 0.$$

avec $u_c(t) = ct^{\alpha-1}$.

Théoréme 79 *Si les hypothèses(P),(H1)-(H3) sont satisfaites, alors la frontière problème de valeur (3.1) et (3.4)a une solution.*

Preuve. Soit $\Omega_1 = \{u \in domL \setminus KerL : Lu = \lambda Nu \; pour\; certains \lambda \in (0,1)\}$

(1) D'abord montre que Ω_1 borné :
Applique $(H_1), QNu(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Il existe donc $t_0 \in (0,1]$ tel que $|D^{\alpha-1}(t_0)| \leq K$.

$$\begin{aligned} ID^\alpha u(t_0) &= D^{\alpha-1}u(t_0) - D^{\alpha-1}u(0) - D^{\alpha-2}u(0)t_0^{-1} \\ &= D^{\alpha-1}u(t_0) - D^{\alpha-1}u(0) \end{aligned}$$

puisque $u \in domL$. Autrement dit,

$$D^{\alpha-1}u(0) = D^{\alpha-1}u(t_0) - \int_0^{t_0} D^\alpha u(s)ds, \tag{3.9}$$

Ce que implique

$$\begin{aligned} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right| &\leq \left|D^{\alpha-1}u(t_0)\right| + \int_0^{t_0} |D^\alpha u(s)|\,ds \\ &\leq K + |D^\alpha u(t)| \int_0^{t_0} ds \leq K + \|Lu\| \leq K + \lambda\|Lu\|_p < K + \|Nu\|_p \end{aligned}$$

par (3.5),

$$\|Pu\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left|D^{\alpha-1}u(0)\right| < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(K + \|Nu\|_p). \tag{3.10}$$

puisque $(I-P)u \in domL \cap KerP = ImK_p$

pour $u \in \Omega_1$,

$$\begin{aligned}\|(I-P)u\| = \|K_pL(I-P)u\| \leq \Lambda \|L(I-P)u\|_p &\leq \Lambda \|Lu\|_p \\ &\leq \Lambda\lambda \|Nu\|_p \\ &< \Lambda \|Nu\|_p\end{aligned}$$

par (3.6)et(3.7). On a $Pu \in ImP = KerL \subset domL$ et par conséquent

$$\|u\| \leq \|Pu\| + \|(I-P)u\| < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(K + \|Nu\|_p) + \Lambda \|Nu\|_p < \frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \Lambda\right) \|Nu\|_p$$

D'après $(H2)$ et l'inégalité précédente, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 &< \frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \Lambda\right) \left\|Nt^{2-\alpha}u'\right\|_p \\ &< \frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \Lambda\right) \left\|f(t,u,t^{2-\alpha}u')\right\|_p \\ &< \frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \Lambda\right) \left(\|\delta\|_p + \|\beta\|_p \|u\|_0 + \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p \left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 + \|\rho\|_p \phi(\|u\|_0)\right)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 - \left(\frac{1+\Gamma(\alpha)\Lambda}{\Gamma(\alpha)}\right) \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p \left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 < \frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1+\Gamma(\alpha)\Lambda}{\Gamma(\alpha)}\right) (\|\delta\|_p + \|\beta\|_p \|u\|_0 \\ + \|\rho\|_p \phi(\|u\|_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 \left(1 - \frac{1+\Gamma(\alpha)\Lambda}{\Gamma(\alpha)} \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p\right) < \frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1+\Gamma(\alpha)\Lambda}{\Gamma(\alpha)}\right) (\|\delta\|_p + \|\beta\|_p \|u\|_0 \\ + \|\rho\|_p \phi(\|u\|_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 \left(\frac{\Gamma(\alpha) - (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)}{\Gamma(\alpha)} \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p\right) < \left(\frac{K + (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)}{\Gamma(\alpha)}\right) (\|\delta\|_p + \|\beta\|_p \|u\|_0 \\ + \|\rho\|_p \phi(\|u\|_0))\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 < \frac{K+(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|\delta\right\|_p}{\Gamma(\alpha)-(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p} + \frac{K+(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|\beta\right\|_p}{\Gamma(\alpha)-(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p}\left\|u\right\|_0 \tag{3.11}$$

$$+\frac{K+(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|\rho\right\|_p}{\Gamma(\alpha)-(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p}\phi(\left\|u\right\|_0) \tag{3.12}$$

Compiner l'inégalité ci-dessus avec

$$\left\|u\right\|_0 < \frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\Lambda\right)\left(\left\|\delta\right\|_p + \left\|\beta\right\|_p\left\|u\right\|_0 + \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 + \left\|\rho\right\|_p\phi(\left\|u\right\|_0)\right)$$

On obtient

$$\begin{aligned}\left\|u\right\|_0 < & \frac{K+(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|\delta\right\|_p}{\Gamma(\alpha)-(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)(\left\|\beta\right\|_p+\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p)} \\ & + \frac{(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\left\|\rho\right\|_p}{\Gamma(\alpha)-(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)(\left\|\beta\right\|_p+\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p)}\phi(\left\|u\right\|_0),\end{aligned}$$

pour tout $u \in \Omega_1$. Supposons que Ω_1 n'est pas borné. Si $\{\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 : u \in \Omega_1\}$ n'est pas borné, alors, par (3.11), est donc $\{\left\|u\right\|_0 : u \in \Omega_1\}$. Donc il suffit de considérer le cas où $\{\left\|u\right\|_0 : u \in \Omega_1\}$ n'est pas borné. Puis, au vu de(3.3), on arrive à un contradiction. Par conséquent, Ω_1 est borné.

(2) Deuxièmement preuve l'ensemble $\Omega_2 = \{u \in KerL : Nu \in ImL\}$ est borné
Soit $u_c \in \Omega_2$ alors $u_c \in KerL$ est donné par $u_c(t) = ct^{\alpha-1}, c \in \mathbb{R}$. Alors $(QN)(ct^{\alpha-1}) = 0$ puisque $Nu \in ImL = KerQ$. Il découle de (H_3)que

$$\begin{aligned}\left\|u_c\right\| &= max\left\{\left\|u_c\right\|_0, \left\|t^{2-\alpha}u_c'\right\|_0\right\} \\ &= max\left\{\underset{t\in[0,1]}{max}\left|ct^{\alpha-1}\right|, \underset{t\in[0,1]}{sup}\left|(\alpha-1)c\right|\right\} \\ &= max\left\{\left|c\right|, (\alpha-1)\left|c\right|\right\} \\ &= \left|c\right| \leq B\end{aligned}$$

c'est -à -dire Ω_2 borné.

(3) Définissons l'isomorphisme $J : ImQ \longrightarrow KerL$ par $Ju_c = u_c$, avec $u_c(t) = ct^{\alpha-1}$ pour $c \in \mathbb{R}$. Soit l'ensemble $\Omega_3 = \{u \in KerL : -\lambda J^{-1}u + (1-\lambda)QNu = 0, \lambda \in [0,1]\}$

Si $sgn[c(\eta Iu_c(\xi)-Iu_c(1))]=-1$. Alors $u\in\Omega_3$ implique $\lambda c=(1-\lambda)(\eta Iu_c(\xi)-Iu_c(1))$. Si $\lambda=1$, alors $c=0$ et, si $\lambda\in[0,1)$ et $|c|>B$, alors $0<\lambda c^2=(1-\lambda)c(\eta Iu_c(\xi)-Iu_c(1))<0$, ce qui est une contradiction. Soit
$\Omega_3=\{u\in KerL: -\lambda J^{-1}u+(1-\lambda)QNu=0, \lambda\in[0,1]\}$ si $sgn[c(\eta Iu_c(\xi)-Iu_c(1))]=1$, et nous arrivons à nouveau à une contradiction. Donc$\|u_c\|\leq B$, Pour tout $u_c\in\Omega_3$. Donc Ω_3 borné.
Soit Ω ouvert et borné de telle sorte que $\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}\overline{\Omega}_i\subset\Omega$. alors les hypothèses (i) et (ii) du théorème(78) sont remplies.

Maintenant, montre que l'opérateur N est L-compact sur Ω :

En effet nous devons montrer que l'application $QN(\overline{\Omega})$ est borne et $K_p(I-Q)N:\overline{\Omega}\longrightarrow X$ est compacte. Comme Ω est borné, il existe une constante $r>0$ telle que $\|u\|\leq r$ pour tout $u\in\overline{\Omega}$. On a :

$|QNu|=|k\,(\eta I^\alpha Nu(\xi)-I^\alpha Nu(1))\,t^{\alpha-1}|$
$=\left|\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left(\eta\int_0^\xi(\xi-s)^{\alpha-1}f(s,u(s),u'(s))ds-\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s),u'(s))ds\right)t^{\alpha-1}\right|$
$\leq\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left(\eta\int_0^\xi(\xi-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds+\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds\right)t^{\alpha-1}$
$\leq\underset{t\in[0,1]}{max}\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left(\eta\int_0^\xi(\xi-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds+\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds\right)t^{\alpha-1}$
$\leq\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left(\eta\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds+\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds\right)$
$\leq\frac{k}{\Gamma(\alpha)}(\eta+1)\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds$
Comme la condition (c) du les condition $(H2)$, on obtient

$$\|QNu\|_p\leq\frac{k}{\Gamma(\alpha)}(\eta+1)\left(\|\delta\|_p+\|\beta\|_p\|u\|_0+\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p\left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0+\|\rho\|_p\,\phi(\|u\|_0)\right)$$

puisque $\|u\|_0\leq\|u\|$ et $\|t^{2-\alpha}u'\|_0\leq\|u\|$ alors

$$\|QNu\|_p\leq\frac{k}{\Gamma(\alpha)}(\eta+1)\left(\|\delta\|_p+(\|\beta\|_p+\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p)\|u\|+\|\rho\|_p\,\phi(\|u\|)\right)$$

puisque $\|u\|\leq r$ alors on obtient :

$$\|QNu\|_p\leq\frac{k}{\Gamma(\alpha)}(\eta+1)\left(\|\delta\|_p+(\|\beta\|_p+\left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p)r+\|\rho\|_p\,\phi(r)\right)\tag{3.13}$$

Donc $QNu(\overline{\Omega})$ est borné. Montrons présent que $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est compacte pour tout $u \in (\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned}
\|Nu\|_p &= \|f(t,u(s),u'(s))\|_p \\
&\leq \Big(\|\delta\|_p + \|\beta\|_p \|u\|_0 + \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p \left\|t^{2-\alpha}u'\right\|_0 + \|\rho\|_p \phi(\|u\|_0)\Big) \\
&\leq \Big(\|\delta\|_p + \|\beta\|_p \|u\| + \|\gamma\|_p \|u\| + \|\rho\|_p \phi(\|u\|)\Big) \\
&\leq \Big(\|\delta\|_p + (\|\beta\|_p + \|\gamma\|_p)r + \|\rho\|_p \phi(r)\Big)
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
|K_P(I-Q)Nu(t)| &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(I-Q)Nu(s)ds\right| \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}(I-Q)Nu(s)\right| ds \\
&\leq \max_{t\in[0,1]}\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|(I-Q)Nu(s)\right| ds \\
&\leq \max_{t\in[0,1]}\int_0^t \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\left|(I-Q)Nu(s)\right| ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |Nu(s)-QNu(s)|ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (|Nu(s)|+|QNu(s)|)ds
\end{aligned}$$

Donc

$$\|K_P(I-Q)Nu(t)\|_0 \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}(\|Nu\|_p+\|QNx\|_p) \tag{3.14}$$

et

$$\begin{aligned}
|t^{2-\alpha}[K_P(I-Q)Nu]'(t)| &= \left|t^{2-\alpha}(I^{\alpha-1}(I-Q)Nu)(t)\right| \\
&= \left|t^{2-\alpha}\frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}(I-Q)Nu(s)ds\right| \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}\max_{t\in[0,1]} t^{2-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\left|(I-Q)Nu(s)\right| ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}\max_{t\in[0,1]} t^{2-\alpha}\int_0^t t^{\alpha-2}|Nu(s)-QNu(s)|ds
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|t^{2-\alpha}[K_P(I-Q)Nu]'(t)\right\|_0 \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}(\|u\|_p+\|QNu\|_p) \tag{3.15}$$

alors

$$\|K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})\|\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}(\|Nu\|_p+\|QNu\|_p) \tag{3.16}$$

Donc $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est borné. Prouvons maintenant que $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu. En effet pour $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$, on a :

$|K_P(I-Q)Nu(t_1) - K_P(I-Q)Nu(t_2)|$

$= \left|\frac{k}{\Gamma(\alpha)}(\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}(I-Q)Nu(s)ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(I-Q)Nx(s)ds)\right|$

$\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}(I-Q)Nu(s)ds + \int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1})(I-Q)Nu(s)ds\right|$

$\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\left|(I-Q)Nu(s)\right|ds + \int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1})\left|(I-Q)Nu(s)\right|ds$

$\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left(\left(\left[\frac{(t_2-s)^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1}\right]_{t_1}^{t_2}\right)^{1/q} - \left(\left[\frac{(t_2-s)^{(\alpha-1)q+1}-(t_1-s)^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1}\right]_0^{t_1}\right)^{1/q}\right)\|(I-Q)Nu\|_p$

$\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)+\frac{1}{q})}\left((t_2-t_1)^{\alpha-1+\frac{1}{q}} + ((t_2-t_1)^{(\alpha-1)q+1} - t_2^{(\alpha-1)q+1} - t_1^{(\alpha-1)q+1})^{\frac{1}{q}}\right)\|(I-Q)Nu\|_p$

$\leq c_2\left((t_2-t_1)^{\alpha-1+\frac{1}{q}} + ((t_2-t_1)^{(\alpha-1)q+1} - t_2^{(\alpha-1)q+1} - t_1^{(\alpha-1)q+1})^{\frac{1}{q}}\right)\|(I-Q)Nu\|_p$

et

$|t^{2-\alpha}[K_P(I-Q)Nu]'(t_2) - t^{2-\alpha}[K_P(I-Q)Nu]'(t_1)|$

$= |t^{2-\alpha}(I^{\alpha-1}(I-Q)Nu(t_2) - I^{\alpha-1}(I-Q)Nu(t_1))|$

$= \left|t^{2-\alpha}\frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-2}(I-Q)Nu(s)ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-2}(I-Q)Nu(s)ds\right)\right|$

$= \left|t^{2-\alpha}\frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-2}(I-Q)Nu(s)ds + \int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-2} - (t_1-s)^{\alpha-2})(I-Q)Nu(s)ds\right)\right|$

$\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-2}\left|(I-Q)Nu(s)\right|ds + \int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-2} - (t_1-s)^{\alpha-2})\left|(I-Q)Nu(s)\right|ds\right)$

$\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha-1)((\alpha-2)+\frac{1}{q})}\left((t_2-t_1)^{\alpha-2+\frac{1}{q}} + \left((t_2-t_1)^{(\alpha-2)q+1} - t_2^{(\alpha-2)q+1} - t_1^{(\alpha-2)q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\|(I-Q)Nu\|_p$

$\leq c_3\left((t_2-t_1)^{\alpha-2+\frac{1}{q}} + \left((t_2-t_1)^{(\alpha-2)q+1} - t_2^{(\alpha-2)q+1} - t_1^{(\alpha-2)q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\|(I-Q)Nu\|_p$

où c_2 et c_3 est une constante générique qui ne dépendque de α et p.
Donc $\|K_P(I-Q)Nu(t_2) - K_P(I-Q)Nu(t_1)\| \longrightarrow 0$ quand $t_1 \longrightarrow t_2$ par conséquent $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu, alors d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est compacte, donc N est L-compacte sur $\overline{\Omega}$. Le lemmme (11)établit que L est un Fredholm de l'indice zéro.
Définir

$$H(u,\lambda) = \pm\lambda Idu + (1-\lambda)JQNu$$

par la propriété de degré d'invariance sous une homotopie, si $u \in KerL \cap \partial\Omega$, alors

$$\begin{aligned} deg(JQN|_{Ker(L)\cap\partial\Omega}, \Omega \cap Ker(L), 0) &= deg(H(.,0), \Omega \cap Ker(L), 0) \\ &= deg(H(.,1), \Omega \cap Ker(L), 0) \\ &= deg(\pm Id, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0 \end{aligned}$$

par conséquent, l'hypothése(iii) du théoréme (78) est remplie et la preuve est complétée. ■
Supposons que l'hypothèse (H2) soit remplacée par

$(H2')$ Il exist $\delta, \beta, t^{\alpha-2}\gamma, t^{\alpha-2}\rho \in L^p[0,1]$ et une fonction continue non décroissante ϕ : $[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ est $y_0 > 0$ avec les propriétés :

(a)

$$\|\beta\|_p + \left\|t^{\alpha-2}\gamma\right\|_p < \frac{\Gamma(\alpha)}{1+\Gamma(\alpha)\Lambda}.$$

(b) pour tout $y \in [0,\infty)$ et $t \in [0,1]$,

$$t^{2-\alpha}\phi(y) \leq \phi(2-\alpha y).$$

(c) pour tout $y \geq y_0$

$$\begin{aligned} y \geq & \frac{K + (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\|\delta\|_p}{\Gamma(\alpha) - (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)(\|\beta\|_p + \|t^{\alpha-2}\gamma\|_p)} \\ & + \frac{(1+\Gamma(\alpha)\Lambda)\|\rho\|_p}{\Gamma(\alpha) - (1+\Gamma(\alpha)\Lambda)(\|\beta\|_p + \|t^{\alpha-2}\gamma\|_p)}\phi(y). \end{aligned}$$

(d) $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$|f(t,x,y)| \leq \delta(t) + \beta(t)|x| + \gamma(t)|y| + \rho(t)\phi(|y|).$$

Alors nous avons le critère d'existence suivant dont la preuve est analogue à celle du théorème 79

Théoréme 80 *Si les hypothèses(P),(H1),(H2′),(H3) sont satisfaites, alors la frontière problème de valeur (3.1) et (3.4) a une solution.*

Conclusion

Dans cette thése, nous avons présenté une étude de l'existence de quelque problémes aux limites en résonance, en appliquant la théorie de coïncidence de Mawhin, et cela en réalisant trios conditions pour prouver l'existence d'une solution, par l'utilisation de théorème et des lemmes auxiliaires.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Benchohra, and B. A. Slimani ; Existence results for differential equations with fractional order and impulses, Mem. Differential Equations Math. Phys. 44 (2008), 1-21.

[2] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas, and A. Ouahab ; Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 1340-1350.

[3] P. Amster, P. De N´apoli, and J. P. Pinasco ; On Nirenberg-type conditions for higher-order systems on time scales, Comp. Math. Appl., 55 (2008), 2762–2766.

[4] W. Feng, J. R. L. Webb ; Solvability of three point boundary value problem at resonance, Nonlinear Anal. 30 (1997), 3227–3238.

[5] W. Ge and J. Ren ; An extension of Mawhin's continuation theorem and its application to boundary value problems with a p-Laplacain, Nonlinear Anal. 58 (2004), 477–488.

[6] C. P. Gupta ; A second order m-point boundary value problem at resonance, Nonlinear Anal. 24 (1995), 1483–1489.

[7] G. Infante and M. Zima ; Positive solutions of multi-point boundary value problems at resonance, Nonlinear Anal. 69 (2008), 2458–2465.

[8] E. R. Kaufmann ; A third order nonlocal boundary value problem at resonance, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Spec. Ed. 1 (2009), 1-11.

[9] E. R. Kaufmann and K. D. Yao ; Existence of solutions for a nonlinear fractional order differential equation, Electron. J. Differ. Equ. 2009 (2009), n. 71, 1–9.

[10] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo ; Theory and Applications of fractional differential equations, North Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier.

[11] N. Kosmatov ; Multi-point boundary value problems on time scales at resonance, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006), 253–266.

[12] N. Kosmatov ; Multi-point boundary value problems on an unbounded domain at resonance, Nonlinear Anal. 68 (2008), 2158–2171.

[13] V. Lakshmikantham, S. Leela, and J. Vasundhara ; Theory of fractional dynamic systems, Cambridge Academic, Cambridge, UK, 2009.

[14] Y. Liu, P. Yang, and W. Ge ; Solutions of two-point BVPs at resonance for higher order impulsive differential equations, Nonlinear Anal. 60 (2005), 887–923.

[15] G. M. Mophou and G. M. N'Gu´er´ekata ; Existence of the mild solution for some fractional differential equations with nonlocal conditions, Semigroup Forum 79 (2009) 315-322.

[16] J. Mawhin ; Topological degree methods in nonlinear boundary value problems,in "NSF-CBMS Regional Conference Series in Math." No. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.

[17] J. Mawhin, Reduction and continuation theorems for Brouwer degree and applications to nonlinear difference equations, Opuscula Math. 28 (2008), 541–560.

[18] J. J. Nieto ; Impulsive resonance periodic problems of first order, Appl. Math. Lett. 15 (2002), 489–493.

[19] D. O'Regan and M. Zima ; Leggett-Williams norm-type theorems for coincidences, Arch. Math. (Basel) 87 (2006), 233–244.

[20] I. Podlubny ; Fractional differential equations, Mathematics in Sciences and Applications, Academic Press, New York, 1999.

[21] J. Sabatier, O. P. Agrawal, and J. A. Tenreiro-Machado ; Advances in fractional calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, Springer, The Netherlands, 2007.

[22] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Mirichev ; Fractional integral and derivatives (theory and applications), Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[23] J. R. L. Webb and M. Zima ; Multiple positive solutions of resonant and non-resonant nonlocal boundary value problems, Nonlinear Anal. 71 (2009), 1369–1378.

[24] Y. Zhou, F. Jiao, and J. Li ; Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay, Nonlinear Anal. 71 (2009), 3249–3256. W. Feng, J. R. L. Webb ; Solvability of three point boundary value problem at resonance, Nonlinear Anal. 30 (1997), 3227–3238.

[25] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[26] R. P. Agarwal, Focal boundary value problems for differential and difference equations, Kluwer Academic Publ., 1998.

[27] V. IS. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.

[28] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer, Berlin, 1985.

[29] G. Dinca, J. Mawhin, Brouwer degree and applications, January 17, 2009.

[30] J. R. Graef, B. Yang, Positive solutions of a third order eigenvalue problem, Dynam. Systems Appl. 15 (2006), 97-110.

[31] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math Ematiques Applications. Springer-Verlag, 1993.

[32] D. O'Regan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen, Topological degree theory and applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman Hall/CRC, (2006).

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس قابلية وجود الحل لمسألة القيمة الحدية في حالة الرنين لمعادلة تفاضلية غير خطية لرتب كسرية، بتطبيق نظرية معروفة هي نظرية الدرجة للمصادفات بسبب موهين.

الكلمات الرئيسية: مشكلة الحدود، نظريات النقطة الثابتة، الرنين.

Abstract

In this dissertation, we study the ability of a solution to the problem of boundary values at the resonance of a nonlinear differential equation for a fractional order, we apply a well-known theorem of degree theory for coincidences due to Mawhin.

Key words: boundary problem, fixed point theorems, resonance.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'abilité d'existence d'une solution au problème aux limites à la résonance d'une équation différentielle non linéaire pour un ordre fractionnaire, nous appliquer un théorème bien connu de théorie de degré pour des coïncidences dues à Mawhin.

Mots clés: problème aux limites, théorèmes de point fixe, résonance.