



**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière



DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Mathématiques

Option : Probabilité et Statistiques

Par : Beggas Sana

Thème

**Mouvement Brownien fractionnaire et
techniques d'estimation du paramètre de Hurst**

Version de :30 /09 /2020

Devant le jury composé de :

Mr	Akti Mohamed	Universite Kasdi Merbah-Ouargla	Président
Mr	Mansoul Brahim	Universite Kasdi Merbah-Ouargla	Examineur
Mr	Abdelmalek Boussaad	Universite Kasdi Merbah-Ouargla	Rapporteur

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

Ames très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils, eur affection et leurs encouragements.

Je vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

Et je le dédie :

Atous les membres de ma famille,
mes frères « Houssam » et « Sofian » et « Said » et « Wail ».
Mes chers amis « Sara » « Asma » « Manoubia » « Ikram » « Imane » « Amina »
« Zoubaida »...

AToutes mes copines et camarades de classe avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

Atouts les enseignants et les collègues.

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions notre Dieu le tout puissant de nous avoir donné la force d'atteindre notre objectif et accomplir notre travail.

*Tout d'abord, nous aimerions remercier notre superviseur de la mémoire, **Dr. Abdelmalek Boussaad** Pour sa patience, sa bonne volonté et surtout ses sages conseils qui m'ont aidé à mettre en œuvre ce brief.*

Notre remerciements vont également aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en participant à l'évaluation de ce travail.

Je remercie chaleureusement mes parents pour leur aide et leur soutien moral.

Enfin, nous remercions mes amis qu'on n'a pas cités et qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Table des matières

Notations	1
Introduction	2
Chapitre 1 Rappels sur le mouvement brownien	1
1.1 Quelques concepts de base	1
1.1.1 Processus stochastique	1
1.1.2 Régularité des trajectoires	2
1.1.3 Autosimilarité	2
1.1.4 Martingales	2
1.1.5 Semimartingales	3
1.1.6 La p-variation du processus stochastique	3
1.1.7 Processus de Markov	3
1.1.8 Processus gaussien	3
1.2 Mouvement Brownien	4
1.2.1 Pont Brownien	4
1.2.2 Propriétés des trajectoires du Mouvement Brownien	5
1.2.3 Propriétés du mouvement brownien	5
1.2.3.1 Propriété de Markov	5
1.2.3.2 Le mouvement Brownien comme Martingale	6
1.2.4 Variation quadratique du mouvement Brownien	6
Chapitre 2 Mouvement Brownien Fractionnaire	7
2.1 Propriétés du Mouvement Brownien fractionnaire	9
2.1.1 Le MBF n'est pas markovien	9
2.1.2 La propriété de Hölder	10
2.1.3 Non différentiabilité des trajectoires	11

2.1.4	La dépendance à long et à court terme	12
2.1.5	Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semimartingale	13
2.1.6	La représentation du mouvement Brownien fractionnaire	15
2.1.6.1	Représentation par Moyenne Mobile :	15
2.1.6.2	Représentation harmonizable	15
2.1.6.3	Représentation de Levy-Hida	16
2.2	Etude de Variation	17
2.2.1	Variation Quadratique du Mouvement Brownien Classique	17
2.2.2	Variation du mouvement brownien Fractionnaire	17

Chapitre 3 Simulation d'un mouvement brownien fractionnaire et estimation du paramètre de Hurst **19**

3.1	Simulation de trajectoires du mouvement brownien fractionnaire	20
3.1.1	Méthode Cholesky	20
3.1.1.1	Programme de simulation d'un MBF sous R avec la méthode de Cholesky	20
3.1.1.2	Résultats de simulation	23
3.2	estimateurs du paramètre de Hurst	26
3.2.1	La méthode Log-périodogramme	26
3.2.2	Programme de la méthode Log-périodogramme sous R	28
3.2.3	Résultats de simulation	29
	Conclusion	32
	Bibliographie	33

Table des figures

3.1	Simulation d'un Mbf avec la méthode de Choleski $H = 0, 2, 0, 5, 0, 7$ et le nombre de points $n = 100$	23
3.2	Simulation d'un Mbf avec la méthode de Choleski $H = 0, 2, 0, 5, 0, 7$ et le nombre de points $n = 500$	24
3.3	Simulation d'un Mbf avec la méthode de Choleski $H = 0, 2, 0, 5, 0, 7$ et le nombre de points $n = 1000$	25

NOTATIONS

Ω	un ensemble.
$E(X)$	l'espérance de variable aléatoire X .
(Ω, F, P)	un espace de probabilité.
$B_{\mathbb{R}}$	la tribu borélienne sur \mathbb{R} .
B_t	mouvement brownien.
$p.s$	processus stochastique.
MBF	Mouvement Brownien Fractionnaire.
Γ	$cov(B_t^H, B_t^H)$.
$E(X/B)$	l'espérance conditionnelle de X sachant B .
$t \wedge s$	$\min(s, t)$.
\hat{H}	L'estimateur de H .
$\ \cdot\ $	la norme.
$\stackrel{d}{=}$	égalité de distribution

INTRODUCTION

Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF) $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ avec un paramètre de Hurst (ou exposant de Hurst) , est un processus stochastique très intéressant, il a attiré une grande attention des chercheurs en raison de ses propriétés particulières. D'une part, c'est un processus gaussien avec une fonction de covariance simple $R_H(t, s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$ qui offre à ses trajectoires une propriété Hölderienne d'ordre α (avec $\alpha < H$), d'une autre part comme montré dans [1], le MBF est une généralisation du mouvement Brownien standard qui possède des incréments non indépendants, n'est pas un processus de markov et aussi n'est pas une semi-martingale sauf dans le cas $H = \frac{1}{2}$. Le MBF est utilisé largement pour modéliser des processus réels qui représentent le phénomène de la mémoire longue et courte. Longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$, et courte mémoire si $H \leq \frac{1}{2}$. Par la combinaison de ces propriétés, beaucoup de processus qui se produisent dans des dispositifs de communications cellulaires, dans des systèmes physiques et biologiques et de même pour la finance et l'assurance peut être modélisés par le MBF [1].

Dans ce contexte, ce mémoire est focalisé sur les axes suivants : notion du mouvement brownien fractionnaire, propriétés principales concernant un MBF et techniques d'estimation du paramètre de Hurst. Le présent manuscrit est structuré de la manière suivante :

Chapitre 01 : Donne d'une manière détaillée les rappels et les propriétés de base concernant le mouvement brownien standard tels que, la régularité des trajectoires, l'autosimilarité, la propriété markovienne et la propriété de martingale.

Chapitre 02 : Présente les grandes lignes à propos du mouvement brownien fractionnaire.

Chapitre 03 : Comporte les parties suivantes :

- La simulation d'un mouvement brownien fractionnaire sous \mathbb{R} avec la méthode de Choleski qui exploite la positivité de la matrice de covariance.
- L'estimation du paramètre de Hurst par la technique Log-périodogramme.

A la fin, une conclusion générale est rédigée pour résumer le travail.

CHAPITRE

1

RAPPELS SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

Le but de ce chapitre est de passer en revue certains des concepts précédents et de donner une définition et des caractéristiques du mouvement brownien standard.

1.1 Quelques concepts de base

1.1.1 Processus stochastique

Définition : [3] Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une famille de variables aléatoires indexées par un ensemble de temps T , toutes définies sur un même espace de probabilité (Ω, F, P) à valeurs dans un espace mesurable (E, ξ) appelé espace d'états du processus $X : (t, w) \mapsto X_t(w)$.

En général $T = [0, T] = [0, \infty] = \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R} .

— pour t fixé, $w \in \Omega \mapsto x_t(w)$ est un variables aléatoires.

— pour w fixé, $t \in T \mapsto x_t(w)$ est une fonction est appelée trajectoire du processus.

1.1.2 Régularité des trajectoires

Définition : Un processus stochastique X est continu (respectivement continu à droite, continu à gauche) si $\forall w \in \Omega$, la trajectoire

$$t \mapsto X_t$$

est continue (respectivement continue à droite, continue à gauche).

Définition : On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^d$ est dite γ -Höldérienne s'il existe $C < \infty$ tel que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|^\gamma$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme ambiante de \mathbb{R}^p ou de \mathbb{R}^d .

Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'un processus stochastique ait une modification continue avec des trajectoires Höldériennes .

1.1.3 Autosimilarité

Définition : Un processus X est autosimilaire si pour tout $\alpha > 0, \exists \beta > 0$

$$X_{\alpha t} \stackrel{d}{=} \beta X_t, \forall t \in \mathbb{R}$$

H est le coefficient d'autosimilarité où bien le paramètre de Hurst.

1.1.4 Martingales

Définition : Soit $X = \{X_t, F_t, t \geq 0\}$ un processus intégrable alors X est a :

- **Martingale** si et seulement si $E(X_t | F_s) = X_s$. pour $0 \leq s < t < \infty$
- **sur-martingale** si et seulement si $E(X_t | F_s) \leq X_s$. pour $0 \leq s < t < \infty$
- **sous-martingale** si et seulement si $E(X_t | F_s) \geq X_s$. pour $0 \leq s < t < \infty$

1.1.5 Semimartingales

Définition : Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique, on dit que X est une martingale locale continue s'il existe une suite croissante $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt vérifiant $\tau_n \rightarrow \infty$ comme $n \rightarrow \infty$, telle que, le processus stochastique $(X_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale uniformément intégrable.

Définition : Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est appelé semimartingale continu s'il peut se décomposer en :

$$X_t = M_t + A_t,$$

où $\{M_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale locale et $\{A_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de variation finie.

1.1.6 La p-variation du processus stochastique

soit $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique et soit $P = t_0 = 0, \dots, t_n = T$ une partition de $[0, T]$

- Définissez la p-variation du processus stochastique X pour $p > 0$ comme suit.
- Le processus stochastique X est une p-variation infinie sur $[0, T]$ si V_p est finie.

1.1.7 Processus de Markov

Définition : [9] Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus défini sur (Ω, F, P) à valeur dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$, $F_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)$ la filtration naturelle du processus X_t .

On dit que le processus X_t de Markov $\iff 0 \leq s < t$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable est bornée, on a :

$$E(f(X_t)/F_s^X) = E(f(X_t)/X_s).$$

Définition : La chaîne de Markov est un processus stochastique markovien à temps discret, et la chaîne de Markov à temps continu est un processus stochastique markovien à état discret et à temps continu .

1.1.8 Processus gaussien

Définition : Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est gaussien Ssi toute combinaison linéaire finie de X_t est une variable aléatoire gaussienne c-à-d

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1, \dots, t_n \geq 0, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ est gaussien.

Proposition : Un processus gaussien est stationnaire ssi $E(X_t)$ est une constante.

1.2 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien standard est défini comme suit :

- $B_0 = 0$ (issue de 0).
- Si $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les accroissements $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ sont indépendantes .

Proposition :

- B_t est un processus gaussien dont la fonction de covariance est $\gamma(s, t) = \text{Cov}(B_t, B_s) = \min(t, s) = t \wedge s$.
- Pour tout $t \geq 0$, B_t suit la loi normale centrée de variance t .
- pour $s, t \geq 0$ tq : $s \leq t$, $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.
- Autosimilarité : Pour tout $a > 0$, $\{a^{\frac{1}{2}} B_{at}\}$ est un mouvement Brownien.
- Symétrie : $\{-B_t, t \geq 0\}$ est également un mouvement brownien.

Théorème : Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et si $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ alors $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Preuve :

Soit $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, alors le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_{n+1}-t_n})$ est composé de variables aléatoires gaussiennes et indépendantes (d'après la définition du mouvement brownien), ce vecteur donc est un vecteur gaussien.

Il est donc de même pour $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

1.2.1 Pont Brownien

Le mouvement brownien standard $\{B_t; t \geq 0\}$ défini sur $[0, 1]$, et conditionné sur $\{B_1 = 0\}$ est appelé pont brownien. Autrement dit, le pont brownien est un mouvement brownien sur $[0, 1]$ conditionné à retourner à 0 à l'instant 1.

Remarque : Ce conditionnement est spécifique .

Considérons un mouvement brownien $\{B_t; t \in [0, 1]\}$, il satisfait la relation

$$B_t = B_t - tB_1 + tB_1 = \tilde{B}_t + tB_1$$

pour $\tilde{B}_t = B_t - tB_1$ Donc \tilde{B}_t est un processus gaussien.

Fixons $t \in [0, 1]$; le couple (\tilde{B}_t, B_1) est un vecteur gaussien centré avec

$$E(\tilde{B}_t, B_1) = (B_t, B_1) - tE(B_1^2) = t - t = 0$$

D'ou l'indépendance entre \tilde{B}_t et B_1 cela implique l'indépendance entre le processus

$\{\tilde{B}_t; t \in [0, 1]\}$ et la variable B_1 . Par conséquent

$$\{\tilde{B}_t; t \in [0, 1] \mid B_1 = 0\} = \{\tilde{B}_t + tB_1; t \in [0, 1] \mid B_1 = 0\}$$

$$= \{\tilde{B}_t; t \in [0, 1] \mid B_1 = 0\} = \{\tilde{B}_t; t \in [0, 1]\} \text{ en loi.}$$

1.2.2 Propriétés des trajectoires du Mouvement Brownien

Il est naturel d'étudier les propriétés des trajectoires Browniennes en tant que fonction du temps.

Théorème : [7] Il existe une version de B_t telle que, pour tout $\gamma < \frac{1}{2}$, les trajectoires sont Höldériennes d'exposant γ sur tout intervalle compact.

Corollaire : Presque sûrement les trajectoires du mouvement brownien sont Höldériennes dans $[0, \frac{1}{2}[$.

Proposition : Presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas différentiables.[7]

1.2.3 Propriétés du mouvement brownien

1.2.3.1 Propriété de Markov

La propriété de Markov du MB est utilisée sous la forme suivante : pour tout s , le processus $(W_t)_{t \geq 0}$ définie par : $W_t = B_{t+s} - B_t$ est un mouvement Brownien indépendant de F_s .

1.2.3.2 Le mouvement Brownien comme Martingale

Soit $F_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$ La filtration naturelle du mouvement Brownien .

Proposition :

est $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien. Alors les processus suivants sont des (F_t^B) Martingales [8]

- $(B_t)_{t \geq 0}$.
- $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t})_{t \geq 0}$.

Preuve :

- Puisque la filtration F_t^B est générée par le processus B , et $B_t \sim N(0, t)$, alors B_t est adapté au F_t^B et intégrable pour tout t .
- Pour chaque $0 \leq s < t$, B_s est mesurable par les F_s^B et

$$\begin{aligned} E(B_t | F_s^B) &= E(B_t + B_s - B_s | F_s^B) \\ &= E(B_t - B_s | F_s^B) + B_s \\ &= B_s. \end{aligned}$$

Alors B est F_t^B -martingale pour tout t .

1.2.4 Variation quadratique du mouvement Brownien

Proposition :

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien, pour $t \geq 0$, pour toute suite de subdivision Δ_n de $[0, 1]$, tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n[0, 1]| = 0$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} (B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{(i-1)t}{2^n}})^2 = t \quad p.s.$$

CHAPITRE

2

MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

Le mouvement fractionnaire brownien est un processus aléatoire qui s'écarte considérablement de la théorie et de la simulation du mouvement brownien, et d'autres théories de probabilité traditionnellement utilisées. En tant que processus gaussien central, il se caractérise par la stabilité de ses augmentations et une caractéristique de mémoire moyenne ou longue qui contraste fortement avec les processus de Martingales et de Markov. Le but de ce chapitre est de présenter ce processus et de présenter certaines de ses caractéristiques de base.

Définition : [12] un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0, 1]$ est noté par $(B_t^H)_{t \geq 0}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- un processus gaussien centré issu de 0

- la fonction de covariance est définie par :

$$\Gamma = Cov(B_t^H, B_s^H) = E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.1)$$

car $E[B_t^H] = 0$

Cas particulier

Pour $H = 1$, nous avons $B_t^1 = tB_1^1$;

$$\begin{aligned} var(B_t^1 - tB_1^1) &= E[(B_t^1 - tB_1^1)^2] \\ &= E[(B_t^1)^2] - 2tE[(B_t^1 B_1^1)] + t^2 E[(B_1^1)^2] \\ &= t^2 - 2t\left(\frac{1}{2}\right)(t^2 + 1 - (t - 1)^2) + t^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, $B_t^1 - tB_1^1 \sim N(0, 0)$, cela implique que, $B_t^1 = tB_1^1$ presque partout.

- B^H a des trajectoires continues.
- Le mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien de variance t^{2H}
- Le mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t \geq 0}$ de paramètre de Hurst $H \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ n'est pas un processus de Markov.

Proposition : vérifiant les propriétés suivantes :

- Autosimilarité :

Pour tout $a > 0$, $B_{at}^H \stackrel{d}{=} a^H B_t^H$.

- Accroissements stationnaires :

Pour tout $h > 0$, $(B_{t+h}^H - B_h^H)_{t \geq 0}$ a la même loi que $(B_t^H)_{t \geq 0}$. [12]

Preuve :

- Preuve Tout d'abord, prouvons la propriété d'autosimilarité. Nous avons ça

$$\begin{aligned} E(B_{at}^H B_{as}^H) &= \frac{1}{2}((at)^{2H} + (as)^{2H} - (a|t - s|)^{2H}) \\ &= a^{2H} E(B_t^H B_s^H) \\ &= E((a^H B_t^H)(a^H B_s^H)) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque tous les processus sont centrés et gaussiens, cela implique que

$$(B_{at}^H) \stackrel{d}{=} (a^H B_t^H)$$

- Seconde, nous montrons qu'elle a des incréments stationnaires. Notez que pour tout $h > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} E((B_{t+h}^H - B_h^H)(B_{s+h}^H - B_h^H)) &= E(B_{t+h}^H B_{s+h}^H) - E(B_{t+h}^H B_h^H) - E(B_{s+h}^H B_h^H) + \\ &E((B_h^H)^2) \\ &= \frac{1}{2}[(t+h)^{2H} + (s+h)^{2H} - |t-s|^{2H}] - ((t+h)^{2H} + h^{2H} - t^{2H}) - ((s+h)^{2H} + \\ &h^{2H} - s^{2H}) + 2h^{2H} \\ &= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \\ &= E(B_t^H B_s^H). \end{aligned}$$

Par conséquent, le mouvement Brownien fractionnaire est par incréments stationnaires.

Remarque :

Soit $(B_t^H)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien fractionnaire, pour $H = \frac{1}{2}$ on obtient le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$.

2.1 Propriétés du Mouvement Brownien fractionnaire

2.1.1 Le MBF n'est pas markovien

Théorème : (Processus de Markov gaussien)

Soit $T \subset \mathbb{R}$ et $X = \{X_t\}_{t \in T}$ un processus gaussien. Alors X est markovien si et seulement si, pour tout $s, t, u \in T$ tel que $s < t < u$

$$K(s, u) = \frac{K(s, t)K(t, u)}{K(t, t)},$$

où $K(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$.

Preuve : Voir [5] p19.

Théorème :

Si $H \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ alors, le mouvement brownien fractionnaire $B^H = \{B_t^H\}_{t \geq 0}$ avec le paramètre Hurst n'est pas markovien.

2.1.2 La propriété de Hölder

Définition : Soit

$$f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

f est Hölder continu de paramètre $\mu \in [0, 1]$ s'il existe $c > 0$ tel que :

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^\mu, s, t \in I$$

On va citer le théorème de KOLMOGROV qui est un théorème de base.

Théorème : Soit X_t un processus a valeurs réelles pour lequel il existe trois constantes strictement positives γ, c, ε telque :

$$E[|X_t - X_s|^\gamma] \leq |t - s|^{d+\varepsilon}$$

Alors il existe une modification \tilde{X} de X telque :

$$E[\sup_{t \neq s} |\tilde{X}_t - X_s| / |t - s|^\alpha]^\gamma < \infty$$

Pour chaque $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma]$

En particulier les trajectoires de \tilde{X}_t sont Hölder continues de paramètre α .

Preuve : Voir [4] page 26, 27.

Proposition :

Les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont Hölder continues de paramètre $\alpha < H$. Pour la démonstration on utilise le corollaire suivant :

Corollaire : Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire on a :

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H})$$

et Pour tous $t \geq 0$

$$E((B_t^H)^2) = t^{2H}$$

Preuve : on a :

$$E(|B_t^H - B_s^H|^2) = E(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|)$$

Par application de la linéarité de l'espérance et du corollaire précédent on a :

$$\begin{aligned} E(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|) &\leq E(|B_t^{2H}|) - 2E(|B_t^{2H} B_s^{2H}|) + E(|B_s^{2H}|) \\ &= |t^{2H}| + |s^{2H}| - |(t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H})| \\ &= |t - s|^{2H} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$E(|B_t^H - B_s^H|^2) = |t - s|^{2H} \quad (2.2)$$

On prend $\gamma = 2$, $d = 1$, $d + \varepsilon = 2H$ d'où $\varepsilon = 2H - 1$ d'après le théorème de KOLMOGOROV, B_t^H à une modification (version) \tilde{B}^H dont les trajectoire sont hölder continues de paramètre

$$\alpha \in [0, \varepsilon/\mu[= [0, \frac{2H - 1}{2}[= [0, H - \frac{1}{2}[$$

On à prouvé que \tilde{B}^H hölder continue de paramètre $\alpha < H$.

2.1.3 Non différentiabilité des trajectoires

Proposition :

Les trajectoires d'un mouvement brownien fractionnaire $B^H = B_t^H_{t \geq 0}$ avec le paramètre Hurst $H \in (0, 1)$ défini sur (Ω, F, P) ne sont pas différentiables. De plus, pour tout $t_0 \in [0, \infty[$

$$P \left(\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \right| = \infty \right) = 1 \quad (2.3)$$

Preuve : [10] Désignons que

$$R_{t,t_0} = \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0}.$$

Utilisons la propriété d'autosimilarité, on a :

$$R_{t,t_0} = (t - t_0)^{H-1} B_1^H$$

On définit

$$A_t(w) = \{s \geq 0 : \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{B_s^H}{s} \right| > d\}.$$

Puis, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui décroît vers 0.

on a :

$$A(t_{n+1}, w) \subseteq A(t_n, w).$$

Ainsi

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A(t_n))$$

et

$$P(A(t_n) \geq P(|\frac{B_s^H}{s}| > d) = P(|B_1^H| > t_n^{1-H} d) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad n \rightarrow \infty.$$

Cela implique que les trajectoires de B_H ne sont pas différenciables en probabilité.

2.1.4 La dépendance à long et à court terme

Définition : [2] Un processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est dit à long terme si $\gamma(n) = \text{Cov}(X_t, X_{t+n})$ satisfait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(n)}{cn^{-\alpha}} = 1$$

pour $\alpha \in [0, 1]$ et c une constante et $n \in \mathbb{N}$.

Le mouvement Brownien fractionnaire est l'un des processus les plus simples qui présente la dépendance à long terme.

Remarque :

Si un processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est à dépendance à long terme, la dépendance entre X_k et X_{k+1} diminue doucement quand $n \rightarrow \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(n) = \infty.$$

Proposition :

Le mouvement Brownien présente une dépendance à long terme si $H > \frac{1}{2}$, et une dépendance à court terme si $H < \frac{1}{2}$.

Preuve : On considère :

$$X_k = B_k^H - B_{k-1}^H, \quad X_{k+n} = B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H$$

Puisque le mouvement Brownien fractionnaire est centré, alors

$$\begin{aligned}
\gamma(n) &= E(X_k X_{k+n}) = E((B_k^H - B_{k-1}^H)(B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H)) \\
&= E(B_1^H (B_{n+1}^H - B_n^H)) = E(B_1^H B_{n+1}^H) - E(B_1^H B_n^H) \\
&= \frac{1}{2}[(n+2)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}] \\
&= \frac{1}{2}n^{2H}[(1 + \frac{1}{n})^{2H} 2 + (1 - \frac{1}{n})^{2H}] \\
&= \frac{n^{2H}}{2}[(1 + \frac{2H}{n}) + \frac{H(2H-1)}{n^2} - 2 + 1 - \frac{2H}{n} + \frac{H(2H-1)}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})] \\
&= H(2H-1)n^{2H-2} + o(n^{2H-2})
\end{aligned}$$

$$\gamma(n) = \frac{1}{2}[(n+2)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}] \quad (2.4)$$

Il s'ensuit que si $H > \frac{1}{2}$, on a

$$\gamma(n) > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(n) = \infty$$

et pour $H < \frac{1}{2}$, on a

$$\gamma(n) < 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(n) < \infty$$

Alors on dit que le mouvement Brownien fractionnaire a une dépendance à long terme si et seulement si $H > \frac{1}{2}$ et à court terme ssi $H \leq \frac{1}{2}$.

2.1.5 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semimartingale

Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une semimartingale continue s'il s'écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \quad (2.5)$$

où M est une martingale (nulle en $t = 0$) et A est un processus à variation finie. Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semimartingale pour $H \neq \frac{1}{2}$, en effet :

Soit $(X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique .

Considérons la subdivision $\Pi = 0 = t_0 < \dots < t_n = T$. Posons

$$S_p(X, \pi) = \sum_{i=1}^n |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p$$

la p variation de X dans l'intervalle $[0, T]$ est définie comme suit :

$$V_p(X, [0, T]) = \sup_{\pi} S_p(X, \pi)$$

où π est une subdivision finie de $[0, T]$.

L'indice de la p variation d'un processus est défini par :

$$I(X, [0, T]) = \inf\{p > 0, V_p(X, [0, T]) < \infty\}$$

On affirme que

$$I(B_H, [0, T]) = \frac{1}{H}$$

En effet, considérons pour $p > 0$

$$Y_{n,p} = n^{pH-1} \sum_{i=1}^n |B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H|^p$$

Comme B^H a la propriété d'autosimilarité, la suite $(Y_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ a la même distribution que

$$\tilde{Y}_{n,p} = n^{-1} \sum_{i=1}^n |B_i^H - B_{i-1}^H|^p$$

Par le théorème d'ergodicité $\tilde{Y}_{n,p}$ converge p.s vers $E(|B_1^H|^p)$ dans L^1 quand n tend vers l'infinie ; Donc il converge aussi en probabilité vers $E(|B_1^H|^p)$. il s'ensuit que :

$$V_{n,p} = \sum_{i=1}^n |B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H|^p \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} 0 & : pH > 1 \\ \infty & : pH < 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Donc on peut conclure que $I(B^H, [0, T]) = \frac{1}{H}$. Pour toute semimartingale X $I(X, [0, T])$ doit être dans $[0, 1] \cup \{2\}$; Le mouvement Brownien fractionnaire ne peut pas être une semimartingale sauf si $H = \frac{1}{2}$.

2.1.6 La représentation du mouvement Brownien fractionnaire

Dans [10] Mandelbort et Van Ness ont obtenu la représentation intégrale suivante du fBm.

$$\begin{aligned} B_H(t) &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^0 \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right\} dB(s) \right) \end{aligned}$$

où $H \in (0, 1]$, $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et représente la fonction gamma.

Rappelez-vous que, pour chaque $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$.

L'intégrale ci-dessus peut être écrite en termes d'intégrale itérative, suivant la formule de Cauchy d'intégration répétée :

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} g(s) ds = \int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} g(s) ds$$

Où l'intégration itérative est définie par $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-2} \leq t_{n-1} \leq t$.

Il existe de nombreuses représentations de fBm (pour plus de détails, voir [12]) certaines d'entre elles sont les suivantes ;

2.1.6.1 Représentation par Moyenne Mobile :

Le mouvement Brownien fractionnaire B^H a eu une représentation dans les travaux de Mandelbort et Van Ness (1968)[8] dans \mathbb{R} , présentée comme suit :

$$B_t^H = \frac{1}{C_t(H)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left((t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_u, t \in \mathbb{R} \right) \quad (2.7)$$

où

$$C_t(H) = \left(\int_{\mathbb{R}} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}} \right) ds + \frac{1}{2H} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et on note $x_+ = \max(x, 0)$.

2.1.6.2 Représentation harmonizable

Soit $0 < H < 1$. Le mouvement Brownien fractionnaire a la représentation suivante :

$$B_t^H = \frac{1}{C_t(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} - 1}{ix} |x|^{-(H-\frac{1}{2})} d\tilde{B}_x, \quad t \in \mathbb{R}$$

où \tilde{B}_x est un mouvement Brownien à valeur complexe, et $C(H) = \left(\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)} \right)^{\frac{1}{2}}$

2.1.6.3 Représentation de Levy-Hida

Il y a aussi une autre représentation du mouvement Brownien fractionnaire comme une intégrale de Wiener sur un intervalle finie $[0, T]$ de la forme ci-dessous :

On a un processus de Wiener B_s et le noyau :

$$K_H(t, s) = d_H(t-s)^{H-\frac{1}{2}} + s^{H-\frac{1}{2}}F_1\left(\frac{t}{s}\right)$$

avec d_H est une constante et

$$F_1 = d_H\left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^{z-1} \theta^{H-\frac{3}{2}}(1-(\theta+1)^{H-\frac{1}{2}})d\theta$$

si $H \in (0, \frac{1}{2})$ le noyau K_H est donné par :

$$K_H(t, s) = b_H \left(\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H - \frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}-H}\right) \int_s^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{3}{2}}du \right)$$

où

$$b_H = \left(\frac{2H}{1-2H\beta(1-2H, H+\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec β est la fonction Bêta ($\beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$)

si $H \in (\frac{1}{2}, 1)$:

Le noyau a la simple expression suivante :

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t |u-s|^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}du, \quad t > s$$

où

$$c_H = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la représentation de Levy-Hida du mouvement Brownien fractionnaire est la suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s)dB_s, \quad 0 < s < t < \infty$$

.

2.2 Etude de Variation

On procède dans ce de facon similaire à l'article de F. Russo, P Valois.

2.2.1 Variation Quadratique du Mouvement Brownien Classique

Nous verrons la différence carrée du mouvement brownien.

(Voir[14]).

Définition :

Un processus X est dit à variation quadratique finie sur $[0, T]$ si pour toute famille de subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ on a :

$$\sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

Pour que les subdivisions sur $[0, T]$ vérifient : $(t_i^n)_{i=0}^{N(n)}$ et $\delta(n) = \sup_i (t_{i+1}^n - t_i^n)$

Proposition : Pour toute famille de subdivision (t_i^n) tel que $\delta(n) \rightarrow 0$

$$\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \rightarrow TP, ps$$

Remarque :

En fait, on peut montrer la convergence dans L^2 ce qui signifie que :

$$E \left(\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right) \rightarrow TP, ps$$

2.2.2 Variation du mouvement brownien Fractionnaire

En cela, nous calculerons les variations α du mouvement brownien fractionnaire.

Définition :

Un processus X est dit à α variation finie si pour toute famille de subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ on a :

$$\sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^\alpha$$

qui converge en probabilité vers une variable aléatoire Y , dans ce cas Y sera appelée la α variation de X .

Proposition :

La α variation de B_t^H vaut $TE(|N|^\alpha)$ pour $\alpha = \frac{1}{H}$.

Lemme : Soit

$$A = \frac{Cov(B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H, B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H)}{(t_{i+1} - t_i)^H (t_{j+1} - t_j)^H}$$

Alors $\sup_{ij} A \rightarrow 0 \quad \forall i, j$.

CHAPITRE

3

SIMULATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE ET ESTIMATION DU PARAMÈTRE DE HURST

Dans ce chapitre nous essayons de réaliser des simulations de trajectoires du MBF basées sur la méthode de Choleski sous le langage R, ensuite nous exposons la technique du Log-périodogramme qui estime le paramètre d'autosimilarité d'un MBF avec une implémentation sous R.

3.1 Simulation de trajectoires du mouvement brownien fractionnaire

3.1.1 Méthode Cholesky

[6] La méthode de Cholesky se formule avec la façon suivante :

- Soit Γ la matrice de covariance du MBF discrétisée aux instants $t_i = \frac{i}{n}/i = 0; \dots; n - 1$. On a d'après l'équation (2.1) :

$$\Gamma_{i,j} = Cov(B_{t_i}^H, B_{t_j}^H) = \frac{1}{2} \left(|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H} \right) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{i}{n} \right|^{2H} + \left| \frac{j}{n} \right|^{2H} - \left| \frac{i}{n} - \frac{j}{n} \right|^{2H} \right)$$

- Posons Γ' la matrice Γ privée de sa première ligne et de sa première colonne. Par la décomposition de Cholesky nous pouvons écrire $\Gamma' = LL^t$ avec L est une matrice triangulaire inférieure (puisque Γ' est une matrice définie positive et symétrique).
- La simulation d'une trajectoire d'un MBF aux instants $t_i = \frac{i}{n}$ est effectuée par un vecteur aléatoire Y généré de $(n - 1)$ composantes gaussiennes standard indépendantes avec la manière suivante : $B^H = (0, (LY)^t)^t$ (ou le vecteur B^H définit une trajectoire discrétisée d'un MBF aux instants $t_i = \frac{i}{n}$).
 En effet, le vecteur LY est un vecteur gaussien centré et de plus

$$E(LY(LY)^t) = LE(YY^t)L^t = LL^t = \Gamma$$

Finalement, l'ordre de complexité des calculs de cette méthode est $(O(n)^3)$.

3.1.1.1 Programme de simulation d'un MBF sous R avec la méthode de Cholesky

```
N<-scan$(n=1)#nombre de points.
```

```
#-----
```

```
H<-c(0.2,0.5,0.7)# Les différentes valeurs de H.
```

```

#-----
time <- (0:(n - 1))/n
m<-length(time)
a<-matrix(0,m,m)
for(i in (1:3)){
a[i,]<-fbm(H[i], n)
}
#-----

layout(matrix(1:3,3,1))

plot(time, a[1,], type = "l", main = "mbf avec le paramètre
  H=0.2",xlab="t",ylab="fbm(t)",col="blue")
grid()
plot(time, a[2,], type = "l", main = "mbf avec le paramètre
  H=0.5",xlab="t",ylab="fbm(t)",col="blue")
grid()
plot(time, a[3,], type = "l", main = "mbf avec le paramètre
  H=0.7",xlab="t",ylab="fbm(t)",col="blue")
grid()
La fonction fbm
#-----
fbm<-function(H,n){
H2 <- 2 * H
matcov <- matrix(0, n - 1, n - 1)
for(i in (1:(n - 1))) {
j <- i:(n - 1)
r <- 0.5 * (abs(i)^H2 + abs(j)^H2 - abs(j - i)^H2)
r <- r/n^H2
matcov[i, j] <- r
matcov[j, i] <- matcov[i, j]
}
}

```

```
L <- chol(matcov)
Z <- rnorm(n - 1)
Bm <- t(L) %*% Z
Bm <- c(0, Bm)
return(Bm)
}
```

3.1.1.2 Résultats de simulation

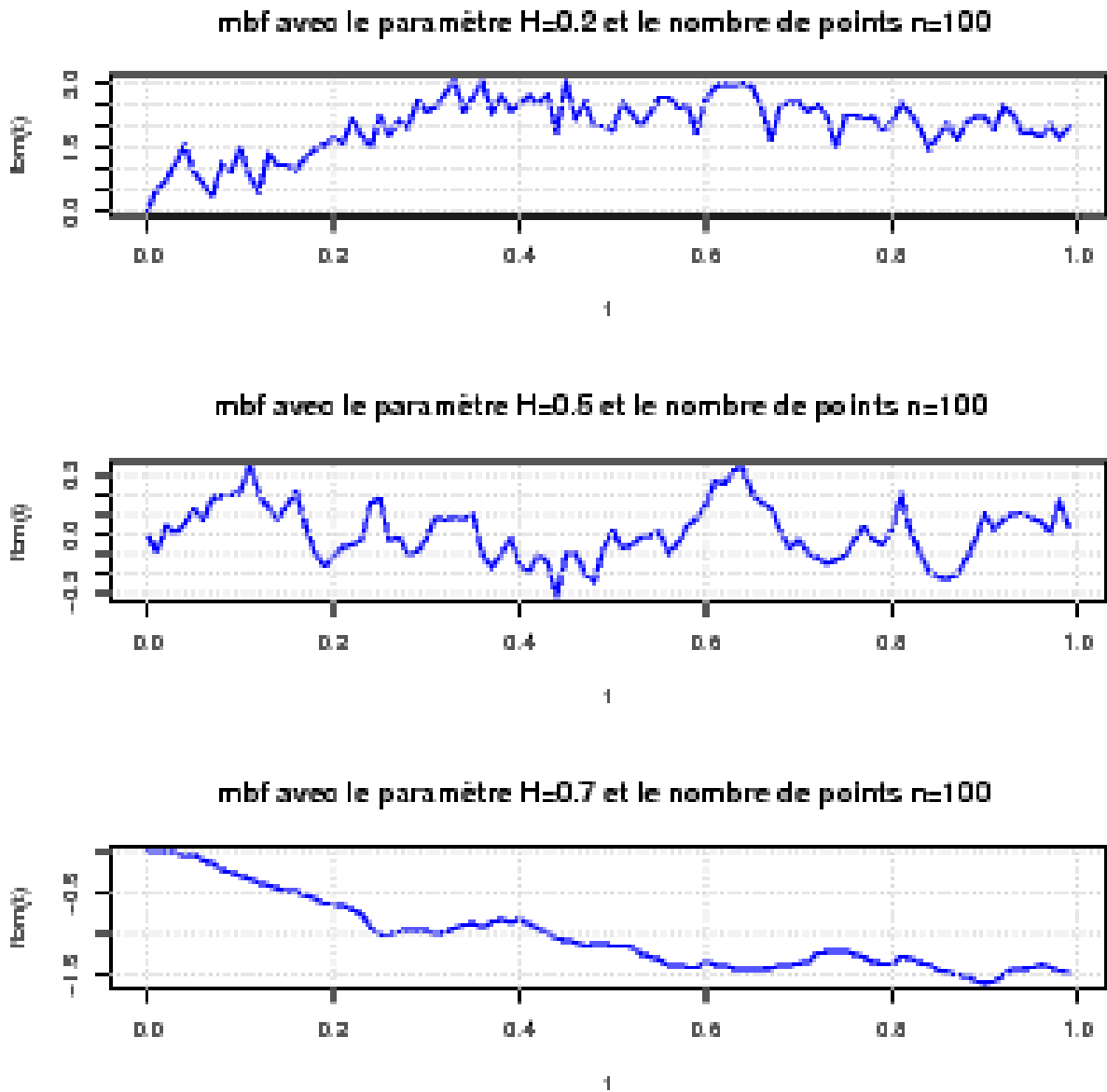


FIGURE 3.1: Simulation d'un Mbf avec la méthode de Choleski $H = 0, 2, 0, 5, 0, 7$ et le nombre de points $n = 100$

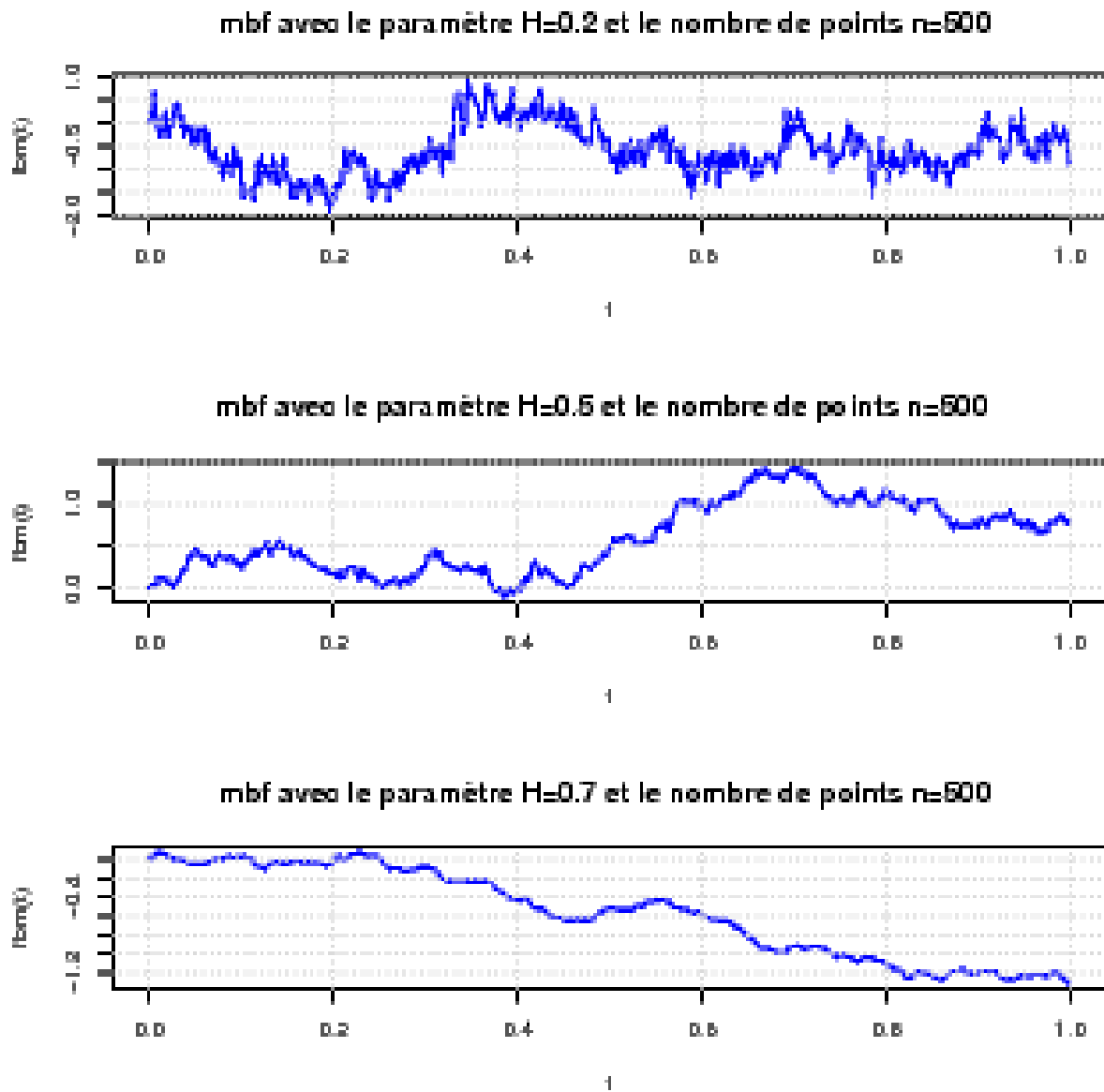


FIGURE 3.2: Simulation d'un Mbf avec la méthode de Choleski $H = 0, 2, 0, 5, 0, 7$ et le nombre de points $n = 500$

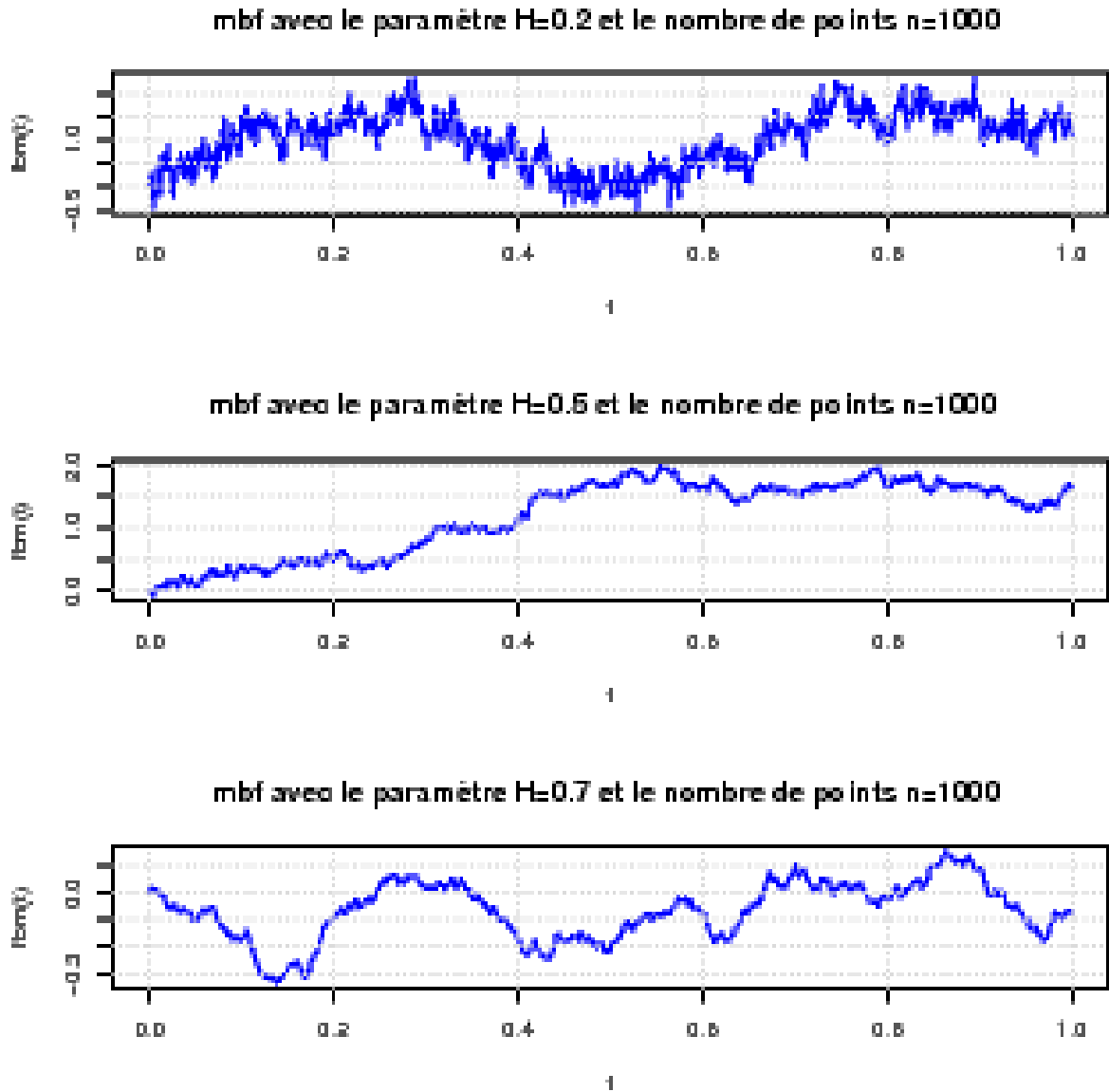


FIGURE 3.3: Simulation d'un Mbf avec la méthode de Choleski $H = 0, 2, 0, 5, 0, 7$ et le nombre de points $n = 1000$

3.2 estimateurs du paramètre de Hurst

3.2.1 La méthode Log-périodogramme

Log-périodogramme est une méthode que a été utilisée dane l'estimation du paramètre de Hurst pour un mbf .Elle est classée dans les méthodes spectrales qui sont des méthodes semi-paramétrèques. Dans ce contexte nous essayons d'explèquer cette la technique ci-dessous.

Définition : Soit $(B_t^H)_{t \geq 0}$ est un MBF.

- Posons $X_t = B_{t+1} - B_t$, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé bruit gaussien fractionnaire (BGF).
- $r(j) = E(X_0 X_j) / j \in Z$ représent la fonction d'autocovariance.
- La densité spectrale du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est la transformée de faurier de $r(j)$ est définie par

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r(j) e^{-i\lambda j}$$

Théorème ; Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ bruit gaussien fractionnaire définie par :

$X_t = B_{t+1}^H - B_t^H$ où $(B_t^H)_{t \geq 0}$ est un MBF, alors

- $r(j) = \frac{1}{2} \left(|j+1|^{2H} - 2|j|^{2H} + |j-1|^{2H} \right)$.
- $h(\lambda) = C_H \left(2 \sin \left(\left| \frac{\lambda}{2} \right| \right) \right)^2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}}$

où $\lambda \in [-\pi, \pi]$ et C_H est une constante.

Remarque : $h(\lambda) \sim C_H |\lambda|^{1-2H}$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

Démonstration : On a :

$$h(\lambda) = C_H \left(2 \sin \left(\left| \frac{\lambda}{2} \right| \right) \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}}$$

au voisinage de $\lambda = 0$.

$$h(\lambda) \sim C_H |\lambda|^2 \left(\frac{1}{|\lambda|^{2H+1}} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}} \right).$$

$$\Rightarrow h(\lambda) \sim C_H |\lambda|^{1-2H} + C_H |\lambda|^2 \left(\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}} \right).$$

$$C_H |\lambda|^2 \left(\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}} \right) \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

puisque est une quantité bornée.

$$\Rightarrow h(\lambda) \sim C_H |\lambda|^{1-2H}$$

Définition : (Le périodogramme)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique pasous : $t_k = \frac{k}{n}$ et $\lambda_k = \frac{2\pi k}{n}$ avec $k = 0, \dots, n$

Le périodogramme pour les fréquences λ_k de $(X_t)_{t \geq 0}$ est défini par l'expressions suivante :

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} e^{-it_k \lambda_k} \right|^2$$

Théorème : Soit $h(\lambda)$ est une densité spectrale d'un BGF, $(X_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie la condition suivante :

$$h(\lambda) \sim C_H |\lambda|^{1-2H}$$

quand $\lambda \rightarrow 0$. alors $I_n(\lambda)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale $h(\lambda)$.

Finalement la méthode Log-périodogramme est basée sur le théorème précédent avec la manière suivante :

D'après le théorème précédente on a :

$$E(I_n(\lambda)) = h(\lambda) \sim C_H |\lambda|^{1-2H} \quad / \lambda \rightarrow 0.$$

$$\Leftrightarrow \log(E(I_n(\lambda))) = \log(C_H) + (1 - 2H) \log |\lambda| \quad / \lambda \rightarrow 0.$$

Donc il y a une relation affine entre $\log(E(I_n(\lambda)))$ est $\log |\lambda|$ au voisinage de zéro.

$\Rightarrow \exists m_1, m_2$ au voisinage de zéro tq : la droite de $y = \log(C_H) + (1 - 2H)\lambda$ est une droite de régression linéaire $\{\log |\lambda_k|\}_{m_1 \leq k \leq m_2}$ de $\{\log(I(\lambda_k))\}_{m_1 \leq k \leq m_2}$.

Alors l'estimateur de H par la méthode Log-périodogramme est défini par la relation suivante :

$$\hat{H}_n(m_1, m_2) = \frac{1}{2}(1 - \hat{\alpha}_n)$$

avec $\hat{\alpha}_n$ est l'estimateur du coeffiaient targeute de la droite de regression.

3.2.2 Programme de la méthode Log-périodogramme sous R

```
#Estimation du paramètre de hurst avec la méthode log-périodogramme
n<-scan(n=1)
H<-scan(n=1)
N<-scan(n=1)
HN<-matrix(0,1,N)
for(i in (1:N)){
HN[i]<-Hurst(n,H)
}
Hest<-mean(HN)
print(Hest)
La fonction Hurst:
Hurst<-function(n,H){
MBF<-fbm(H,n)
#-----
#Le choix des fréquence
#-----
m1 <- 1
m2 <- trunc((length(MBF) - 1)/2)
#-----
BGF<- c(MBF[1], diff(MBF))
n <- length(BGF)
#-----
#Le périodogramme
#-----
I<- (Mod(fft(BGF, inverse = F)))^2/(2 * pi * n)
lam<- (2 * pi * (m1:m2))/n
I<- I[m1:m2]
#-----
#Regression
#-----
```

```
Reg<- lsfit(log(lam), log(I), intercept = T)
Hurst<- 0.5 * (1 - Reg$coef[2])
return(Hurst)
}
```

3.2.3 Résultats de simulation

Posons

- \hat{H}_n : L'estimateur de H par la méthode Log-périodogramme.
- n : Nombre de points.
- N : Nombre de réalesations de \hat{H}_n .
- $E(\hat{H})$: L'expérance de \hat{H} (La valeur moyenne de \hat{H}).

Pour $N = 10$

n	H	$E(\hat{H})$
100	0.2	0.0794
	0.3	0.2384
	0.5	0.5552
	0.6	0.6187
	0.8	0.8635
500	0.2	0.1076
	0.3	0.2591
	0.5	0.4979
	0.6	0.6095
	0.8	0.8492
1000	0.2	0.1120
	0.3	0.2560
	0.5	0.5025
	0.6	0.5996
	0.8	0.8259

TABLE 3.1: Tableau 01

Pour $N = 100$

n	H	$E(\hat{H})$
100	0.2	0.5456
	0.3	0.2253
	0.5	0.4849
	0.6	0.6099
	0.8	0.8597
500	0.2	0.0866
	0.3	0.2353
	0.5	0.4976
	0.6	0.6135
	0.8	0.8444
1000	0.2	0.1057
	0.3	0.2452
	0.5	0.4983
	0.6	0.6142
	0.8	0.8458

TABLE 3.2: Tableau 02

Pour $N = 1000$

n	H	$E(\hat{H})$
100	0.2	0.4642
	0.3	0.1981
	0.5	0.4714
	0.6	0.6135
	0.8	0.8846
500	0.2	0.0994
	0.3	0.2397
	0.5	0.4933
	0.6	0.6129
	0.8	0.8502
1000	0.2	0.1087
	0.3	0.2486
	0.5	0.4963
	0.6	0.6134
	0.8	0.8411

TABLE 3.3: Tableau 03

Remarque :

D'après les résultats des tableaux précédents, on remarque que l'estimateur de H par la méthode Log-périodogramme est sans biais si $H > 1/2$, si $H \leq 1/2$ l'estimateur est biaisé.

CONCLUSION

Durant la préparation de ce modeste travail que nous nous sommes fixé, nous avons essayé de donner d'une manière détaillée la majorité des propriétés de base concernant le mouvement brownien standard (MB) dans le premier volet, puis nous avons concentré sur le mouvement brownien fractionnaire (MBF) et ses caractéristiques qui affirment la différence avec le mouvement brownien standard si $H \neq 1/2$.

A la fin de ce mémoire nous avons réalisé une simulation d'un mouvement brownien fractionnaire sous R à l'aide de la méthode de Choleski qui exploite la positivité de la matrice de covariance, et nous avons estimé le paramètre de Hurst par la technique Log-périodogramme.

Finalement, nous espérons avoir la capacité de continuer à explorer le vaste monde du calcul stochastique fractionnaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Banna, Oksana; Mishura, Yuliya; Ralchenko, Kostiantyn, *Fractional Brownian Motion : Approximations and Projections*, John Wiley . Sons 2019.
- [2] Biagini F. Øksendal B. Hu Y. and Zhang T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer 2008.
- [3] Breton J-C. *Cours M2 mathématiques : Processus stochastique*. Université de Rennes1 (2017).
- [4] DANIEL .R(F-Paris7) , MARC Y (F-Paris6). *Continuous Martingales and Brownian Motion* .Third edition. Springer-Verlag, Berlin 1999.
- [5] Hazeb R. *Intégration stochastique par rapport aux mouvements Browniens fractionnaire et sous-fractionnaire et applications aux équations différentielles stochastiques*. Mémoire de master Université Dr Tahar Moulay-Saïda 2015-2016.
- [6] Jean-Francois Coeurjolly, *Simulation and identification of the fractional Brownian motion : a bibliographical and comparative study*, Journal of statistical software , vol5 (2000), *issue*7.
- [7] Jean-François LE GALL. *Mouvement Brownien, Martingales Et Calcul Stochastique*. Université Paris-Sud(30septembre2011).
- [8] Joachim Y. Nahmani. *Introduction to stochastic integration w.r.t fBm*. Institut of Mathematics A (*june*2009).
- [9] Lefebvre M. *Applied Stochastic Processes*. Springer 2007.

- [10] Mandelbrot, B. B. and Van Ness, J.W. *Fractional Brownian motions, fractional-noises and applications*. SIAM Review : 10, 422 – 437, 1968.
- [11] Mountford T. *Stochastic processes and construction of Brownian motion* Swiss Institute of technology EPFL 2013.
- [12] Nourdin I. *Selected aspects of fractional Brownian motion*. Série Bocconi Springer 2012.
- [13] P. ABRY and F. SELLAN. The wavelet-based synthesis for fractional brownian motion. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3(4) : 377–383, 1996.
- [14] RUSSO, F(F-Paris 13 – GL); P, VALLOIS(F-NANCY) *Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes, stochastic*. Rep.70(2000),no.1 – 2, 1 – 40.

Résumé

Notre objectif dans ce mémoire est de focaliser sur les propriétés générales d'un mouvement brownien fractionnaire (Mbf) avec un paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$, réaliser des simulations sous R concernant les trajectoires d'un mouvement brownien fractionnaire avec la méthode de Choleski et estimer le paramètre de Hurst par l'estimateur Log-périodogramme.

Mots-clés : processus stochastique , Mouvement Brownien ,Fractionnaire, Méthode de Choleski, Log-périodogramme.

Abstract

Our aim in this dissertation is to focus on the general properties of a fractional Brownian motion (Fbm) with a Hurst parameter $H \in]0, 1[$, perform simulations in R concerning the trajectories of a fractional Brownian motion with Choleski method and estimate the Hurst parameter by the Log-periodogram estimator.

Key Words : stochastic process, Brownian motion, Fractional Brownian motion, Cholesky method, Log-periodogram .

ملخص

هدفنا في هذه الرسالة هو التركيز على الخصائص العامة للحركة البراونية الكسرية بمعامل هرست ، وإجراء عمليات محاكاة في R فيما يتعلق بمسارات الحركة البراونية الكسرية باستخدام طريقة شولسكي وتقدير معلمة هرست بواسطة *Log - periodogram* مقدر.

الكلمات المفتاحية : العملية العشوائية ، الحركة البراونية ، الحركة البراونية الكسرية ، طريقة تشوليسكي ، تقنية *Log - pèriodogramme* .