UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Facultédes mathématiques et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et Géométrie

Par : Rebiha MAHAMMEDI

Thème

Représentation de fonctionnement des Système par structures d'événements

Soutenu publiquement : 20/10/2020

Devant le jury composé de :

Mr. Bahayou M.Amine	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Mr .Boussaid Mohammed	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Rapporteur
Mr. Guerboussa Yacine	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur
Mr. Ben Moussa Mohammed Tayeb	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur

Année Scollaire : 2019/2020

Dédication

Je dédie cet humble travail à **mon pére** , qui ne m'a jamais rien épargné, et **à ma mére**, qui m'a fourni de la tendresse et de l'amour, et **à mes fréres** et **toute ma famille**, à mon superviseur **Mohammed Boussaid**, qui m'a aidé dans mes recherches et une lumiére éclairant les ténébres qui parfois se dressaient sur mon chemin. À **tous mes professeurs** de l'universite Kasdi Merbah Ouargla , sans exception. Puis à tous ceux qui m'ont appris littéralement.

Et à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé à continuer sur la bonne voie, en particulier
mes amis (F, A, I, S, W, K , Z ,M).

Remerciement

Je remercie Dieu Tout-Puissant, qui m'a accordé la grâce de la raison et de la religion Aussi, dans la loyauté, l'appréciation et la reconnaissance de ma gratitude, je transmets mes sincères remerciements à moi, mon directeur professeur **Boussaid Mohammed**. Si vous dites merci, alors mes remerciements ne vous satisferont pas.Vraiment vous avez poursuivi, donc la quête était reconnaissante. Je voudrais remercier tout particulièrement les professeurs **Bahayou M.Amine** , **Ben Moussa Mohammed Tayeb** , **Guerboussa Yacine** et tous les professeurs Qui n'a pas arrêté de me soutenir.

Et le devoir de loyauté et de gratitude me rend impératif de consacrer mes sincères remerciements et ma gratitude **À mes chers parents**, que Dieu bénisse leur vie, et j'adresse mes sincères remerciements **à mes camarades du département de mathématiques**.

Enfin, je demande à Dieu Tout-Puissant que j'ai réussi à préparer ce message, et que Dieu aide et accorde le succès.

Table des matières

Notations

- $(E, \leq)$ Ensemble ordonné.
- # Relation de conflit.
- $(E, \leq, \#)$ Structure d'événement.
- $(E, \leq, \#, e, A)$ Structure d'événement étiquetée.
- $\#_I$ Relation de conflit immédiat.
- $\longleftrightarrow$ concurrent.
- $\nearrow$ consistant.
- # Relation conflit.
- // bloc d'événement.
- $(E, \leq, \#)$ I'ensemble des configuration finies.

Introduction

Pour accélérer la réalisation d'une tache donné il était toujours l'idée de la partagé en sous tâches indépendante pour les réaliser en parallèle (calcul parallèle). De la Vien l'idée
de représenter.
le fonctionnement des systèmes. Il y a plusieurs méthode de représenter le fonctionnement d'un système. Parmi ces représentation .
Les structures d'événements ont été introduites en **1980** dans la thése de **Glynn Winskel** ([wins.(1)]), comme outil d'étude des fonctions stables (extension pour le parallélisme
des fonctions séquentielles), qui consiste à voir l'ensemble des événements comme ensemble ordonné (ordre sur les événements) et une relation binaire appelé de **conflit** pour représenté l'incompatibilité des événements dous ce travail nous allons utiliser **la théorie des ensembles ordonnés et certains résultats** sur les treillis pour rendre claire certains notions et pratiques de cette représentation.

Chapitre 1

STRUCTURES D'ÉVÉNEMENTS

1.1 Relation d'ordre

Définition 1.1.1
Une relation binaire R dans un ensemble non vide E est dit ***relation d'ordre*** *sur E si et seulement si elle verifie les trois proprietes suivant :*

$*$ ***Reflexivite*** *: $\forall x \in E$ x R x.*
$*$ ***Transitivite*** *: si x R y et y R z alors x R z.*
$*$ ***Antisiyimetrie*** *: si x R y et y R x, alors $x = y$.*

1. *l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de la relation d'ordre : $x \leq y$.*
2. *l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité :définie par :*

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} : y = ax$$

3. *$P(E)$ muni de la relation d'inclusion : $x \subset y$ (E étant un ensemble quelconque).*

1.2 Éléments particuliers

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

A) **Elément maximal, elément minimal**

Définition 1.2.1
M maximal dans E $\Leftrightarrow$ *(*$M \in E$ *et* $\forall\ x \in M,\ M \nleq x$ *).*

Définition 1.2.2
$M^{'}$ *minimal dans E* $\Leftrightarrow$ *(* $M^{'} \in E$ *et* $\forall\ x \in E;\ x \nleq M^{'}$ *).*

B) **Maximum, minimum**

Définition 1.2.3
p minimum dans E $\Leftrightarrow$ *(* $p \in E$ *et* $\forall\ x \in E;\ p \leq x$ *).*

Définition 1.2.4
$p^{'}$ *maximum dans E* $\Leftrightarrow$ *(* $p^{'} \in E$ *et* $x \in E,\ x \leq p^{'}$ *).*

C) **Majorant, minorant**
A une partie de E .

Définition 1.2.5
M majorant de A $\Leftrightarrow$ *(* $M \in E$ *et* $\forall\ x \in A\ ;\ x \leq M$*).*

Définition 1.2.6
$M^{'}$ *minorant de A* $\Leftrightarrow$ *(*$M^{'} \in E$ *et* $\forall\ x \in A\ ;\ m^{'} \leq x$*).*

D) **Borne superieure, borne inférieure**

Définition 1.2.7
On appelle ***borne supérieure*** *d'une partie A de E tout élément s de E tel que :*

$$\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in A, x \leq s (s \text{ est un majorant de } A). \\ \bullet \text{ pour tout majorant } m \text{ de } A, s \leq m. \end{cases}$$

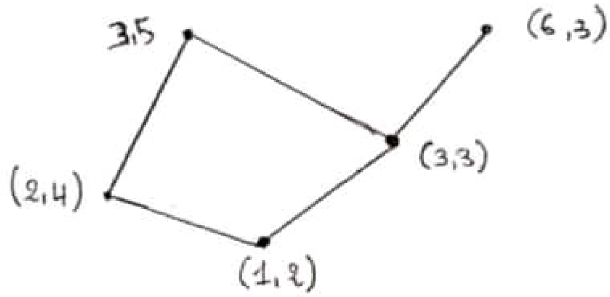
Définition 1.2.8
On appelle ***Borne inférieure*** *d'une partie A de E :* $\ell \in E$ *tel que :*

$$\begin{cases} \bullet\ \ell \text{ est un minorant de } A. \\ \bullet\ \text{ Pour tout minorant } m^{'} \text{ de} A, m^{'} \leq \ell. \end{cases}$$

Exemple 1.2.1 *:*
Sur R^2 *on définie la relation* $(\leq)$ *par :*

$$(x, y) \in R^2, (a, b) \in R^2, ((x, y) \leqslant (a, b)) \Leftrightarrow \begin{matrix} x \leqslant a \\ y \leqslant b \end{matrix}\ )$$

$\leq$ *est une relation d'ordre.*
$E = \{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (3,\ 5),\ (6,\ 3)\}$.



(1) *maximum = n'existe pas.*

(2) *l'ensemble des majorants = M(F)={(x, y) / 6 ≤ x et 5 ≤ y}*

(3) *èléments maximaux : (3, 5), (6, 3).*

(4) *Borne superieur :* $\sup F = \min M(F)$ *=(6, 5) .*

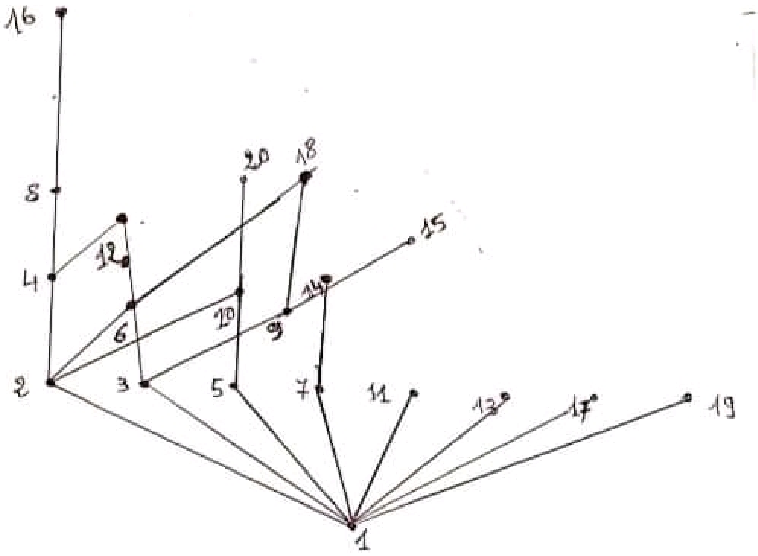
(5) *minorant = (1, 2).*

(6) *Borne inférieure = (1, 2).*

(7) *èlément minimal = (1, 2) .*

(8) *minimum = (1, 2).*

Exemple 1.2.2
Soit $(\leq, \mathbb{N}^*)$ *est un ensemble ordonné .*
$(x \leq y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} : y = ax)$
Soit l'ensemble E={1, 2, 3, 4,......., 20}



(1) *maximum : n'existe pas .*

(2) *l'ensemble des majorants = { k (4× 4× 5× 9× 7× 11× 17× 19× 13) /* $k \in \mathbb{N}^*$*}*

(3) *l'ensemble des maximaux = {16, 12, 20, 18, 14, 15, 11, 13, 17, 19 } .*

(4) *Borne superieur =4× 4× 5× 9× 7× 11× 17× 19× 13 .*

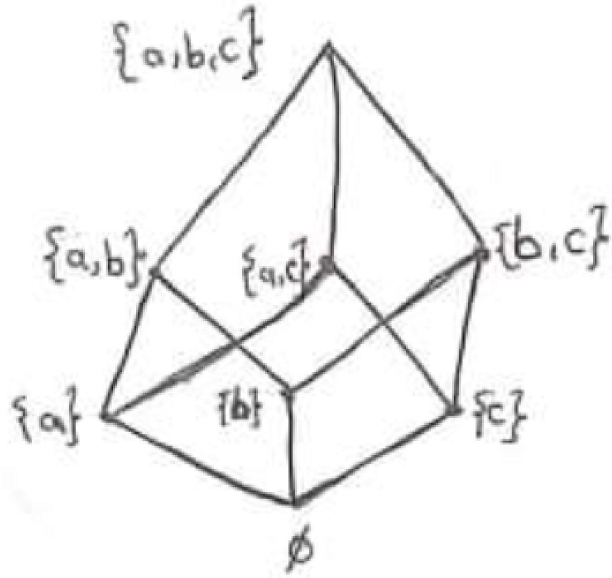
(5) *minorant= 1*

(6) *Borne inférieure= 1*

(7) *èlément minimal = 1*

(8) *minimum = 1*

Exemple 1.2.3 *:*
Soit $(\subseteq, P(E))$ *est un ensemble ordonné.*
Soit l'ensemble E=(a, b, c) , P(E)={ϕ*, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}*



(1) *maximum* $= \{a,\ b,\ c\}$.

(2) *majorant* $= \{a,\ b,\ c\}$.

(3) *èlément maximal* $=\{a,\ b,\ c\}$.

(4) *Borne superieur* $= \{a,\ b,\ c\}$.

(5) *minorant* $= \phi$.

(6) *Borne inférieure* $= \phi$.

(7) *èlément minimal* $= \phi$.

(8) *minimum* $= \phi$.

Proposition 1.2.1
Si $B \subset A \subset E$: $\sup_E B \leq \sup_E A$ *et* $\inf_E A \leq \inf_E B$ *(sous réserve de l'existence de ces bornes supérieures et inférieures).*

Preuve
$S = \sup_E A$ est un majorant de A, donc aussi de B, donc $\sup_E B \leq S$. $I = \inf_E A$ est un minorant de A, donc aussi de B, donc $I \leq \inf_E B$ ∎

Proposition 1.2.2
Si $A \subset F \subset E$: $\sup_E A \leq \sup_F A$ *et* $\inf_F A \leq \inf_E A$.

Preuve
$S' = \sup_F A$ est un majorant de A appartenant à F, donc appartenant à E, donc $\sup_E A \leq S'$. Raisonnement analogue pour les bornes inférieures. ∎

Remarque 1.2.1 *:*
On a l'équivalence : $a = \max(A) \Leftrightarrow a \in A$ *et* a *majore* A
Une partie A est dite majorée (respectivement minorée) lorsqu'elle admet au moins un majorant (respectivement un munorant), et enfin est dite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque 1.2.2 :
Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure, et $\sup(A) = \max(A)$ *mais A peut trés bien avoir une borne supérieure sans avoir de maximum.*

Preuve :
En effet : Supposons que A admet un maximum, disons a. On note S l'ensemble des majorants de A (S n'est pas vide puisqu'il contient a).
Soit $b \in S$.
Alors $a \leq b$ puisque $a \in A$ et b est un majorant de A.
Ainsi, $\forall$ b $\in$ S, a $\leq$ b. donc a est le minimum de S.
Donc a est la borne supérieure de A. ■

Notations

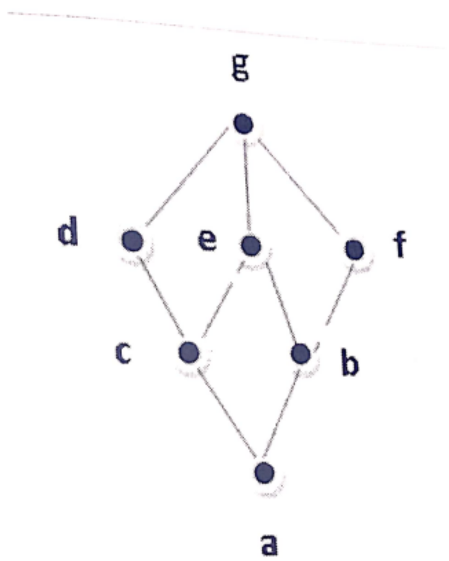
Soit f : D $\rightarrow$ E, où D est un ensemble quelconque.(E est toujours ordonné par $\leq$)
Si l'ensemble image $f(D) = \{f(x), x \in D\}$ admet une borne supérieur, on l'appelle la borne supérieur de f est on la note $\sup(f)$ ou $\sup f(x)$

Définition 1.2.9
Si E est un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre sur E , on appelle passé (respectivement futur), d'un élément **e** *de E, l'ensemble des éléments x de E $x \leq$* **e**, *noté $\downarrow$* **e** *(resp.* **e** *$\leq x$ noté $\uparrow$* **e***)*

1.3 Treillis

Soit (E, $\leq$) un ensemble ordonné.

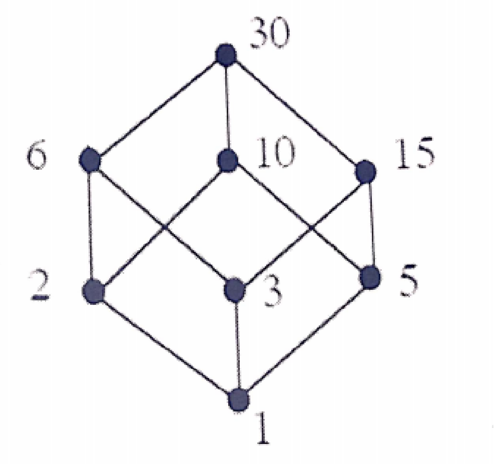
Définition 1.3.1
On dit que E est un treillis ssi : Toute partie de E formée de deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.



On note a $\vee$ b **la borne supérieure** , et a $\wedge$ b **la borne inférieure** de a et b.

Exemple 1.3.1 *: Soit $(N^*, \leq)$ est un treillis : $\forall\ x,\ y \in N^*\ x \leq y \Leftrightarrow x$ divise y.*

Soit l'ensemble $S =\{ 1, 2, 3, 6, 10, 15, 30\}$.
$(S, \leq)$ est un treillis



1.4 Treillis complémenté

$(E, \leq)$ un ensemble ordonné , a,b $\in$ E on note [a, b]= { x $\in$ E / a$\leq x \leq$ b }
on dit que x' est complément de x relativement a l'interval [a, b] si : $x \wedge x' = a$ et $x \vee x' = b$

Définition 1.4.1
Si $x \in E$ on appelle complément de x tout complément de x relativement à l'intervalle [0, 1].
$-E$ est dit un treillis complémenté si tout élément de E posséde au moins un complémént.

Remarque 1.4.1
Un complément x' de x, s'il en existe, est donc défini par :

$$x \wedge x' = 0 \text{ et } x \vee x' = 1.$$

Treillis $\wedge$-complémenté

Définition 1.4.2
On appelle $\wedge$-complément d'un élément x le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble $\{y \in E \ /\ x \wedge y = 0\}$.
Un treillis est dit $\wedge$-complémenté si tous ses éléments possédent un $\wedge$-complément (nécessairement unique).

1.5 Relation de conflit

Définition 1.5.1
*Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné , R une relation binaire sur E, R est dit de **conflit** si :*

1. *$\forall x \in E$ non(x R x) (**non reflexive**).*
2. *R est **symétrique** ($x\ R\ y \Leftrightarrow y\ R\ x$).*
3. *$\forall x, y, z \in E$ ($xRy, x \leq z$ et $x \neq z$) $\Rightarrow (yRz)$.*

*La relation R de **conflit** sera note # .*

1.6 Structure d'èvènements

Définition 1.6.1 *(**structure d'événements**)*
*On appelle **structure d'événements**,un triplet $(E, \leq, \#)$ où $(E, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné, muni d'un relation de conflit $\#$.*

Exemple 1.6.1
Considérons l'ensemble E={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12}⊂ N. On défini sur E les deux relations $\leq$ et $\#$ par : $\forall x \in E$ et $\forall y \in E$;
$x \leq y \Leftrightarrow x$ divise y et $x \# y \Leftrightarrow x$ et y n'ont pas de multiple commun dans E.
Il est évidant que $\leq$ est une relation d'ordre et $\#$ est une relation de conflit sur E.
On représentant les conflits minimaux (les conflits immédiats) sur le diagramme de Hsse de l'ensemble ordonné (E, $\leq$) ; on a le graphe suivant (Figure2.1).

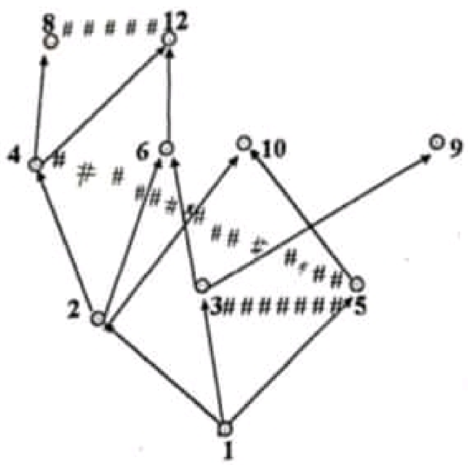


FIGURE 1.1 –

Remarque 1.6.1
(E, $\leq$, $\#$) est une structure d'événements, x et y deux événements en conflit :
$\forall x_1, y_1 \in E; x \leq x_1$ *et* $y \leq y_1 \Rightarrow x_1 \# y_1$.
(On dira que le conflit est hérité pour le futur).

Remarque 1.6.2
Soit $(E, \leq, \#)$ une structure d'événements, x et y deux événements on à : $x \# y \Rightarrow x$ et y sont incomparable pour la relation d'ordre $\leq$.

Remarque 1.6.3
*Soit (E, $\leq$, $\#$) une structure d'événements, deux éléments quelconques de E ; s'ils sont en conflit ils n'ont aucun **majorant commun** .*

Preuve
Soit x et y deux événements tel que x # y ; Suppoésons qu'il existe z ∈ E tel que : x≤ z et y ≤ z. x # y et y ≤ z ⇒ x # z absurde (x # z et x ≤ z contredit **la Remarque** 1.6.2) ■

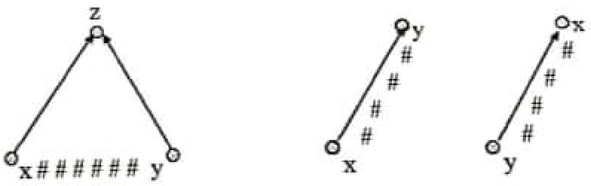


FIGURE 1.2 –

Exemple 1.6.2
Soient P et $P^{'}$ deux processeurs susceptibles d'utiliser en exclusion mutuelle une ressource gérée par un troisiéme processeur $P^{''}$.

*Les actions individuelles pour les processeurs P et $P^{'}$ sont : **demander** la ressource $\{$ d , $d^{'}\}$, **la prendre** $\{p,\ p^{'}\}$, **l'utiliser** $\{u,\ u^{'}\}$, **la libérer** $\{l,\ l^{'}\}$ et **faire autre chose** $\{a,\ a^{'}\}$. le processeur $P^{''}$ peut donner les actions : donne la ressource à P ou $P^{'}$ $\{$ d , $d^{'}\}$ ou la récupérer $\{r,\ r^{'}\}$.*

L'ensemble des actions individuelles sont :
$A = \{d, p, u, l, a\}, A^{'} = \{d^{'}, p^{'}, u^{'}, l^{'}, a^{'}\}$ *et* $A^{''} = \{d, d^{'}, r, r^{'}\}$;

L'ensemble des événements est :
E=$\{d_1, d_2, ...d_m..., d^{'}_1, d^{'}_2...d^{'}_n, ..., p_1, p_2, ..., p_r, ..., p^{'}_1, p^{'}_2...p^{'}_s, ...u_1,$
$u_2, ...u_t...u^{'}_1, u^{'}_2, ...u^{'}_i, ...l_1, l_2, ...l_j...l^{'}_1, l^{'}_2, ...l^{'}_k, ...a_1, a_2, ..a_\alpha...a^{'}_1, a^{'}_2, ..a^{'}_\beta, ...r_1, r_2...r_\gamma...r^{'}_1, r^{'}_2, ...r^{'}_\lambda, ...\}$.

Il y a un ordre défini sur chaque processeur utilisé pour la causalité et partant des successions temporelles incontournable d, p, u, l et $d^{'}$, $p^{'}$, $u^{'}$, $l^{'}$, si on note $\leq$ cet ordre on a :
$d_n \leq p_n \leq u_n \leq l_n \leq d_{n+1} \leq p_{n+1}...etd^{'}_n \leq p^{'}_n u^{'}_n \leq l^{'}_n \leq d^{'}_n \leq p^{'}_n \leq u^{'}_n \leq l^{'}_n \leq d^{'}_{n+1} \leq p^{'}_{n+1}...,$

par exemple p_n est le successeur immédiat de d_n, u_n est le successeur immédiat de p_n... etc.

*Les événements de type **a** pourront survenir indifféramment aprés un événement de type **l** ou **d** et en nombre quelconque un événement de type **d** se produit aprés un événement de type **a**.*

Pour la relation # ; deux événements sont en conflit (incompatibles) s'ils pourraient survenir en un point donné et qu' aucune exécution ne pourra les contenir réunis. Le fonctionnement de ce systéme peut être représenter par le schéma (1.3).

Dans ce graphe on représente tous les événement possible ainsi que toute les liens qui les unissent ; c'est à dire ce diagramme n'est pas le graphe d'un comportement, mais celui de toute les comportements possible du système (ou réseaux) ; un déroulement particulier est la restriction de ce graphe à une de ses parties finies,pour que celle ci corresponde à un déroulement possible ; Nécessairement cette partie ne contien pas d'événements incompatibles et tous les événements figurent avec leur causes.

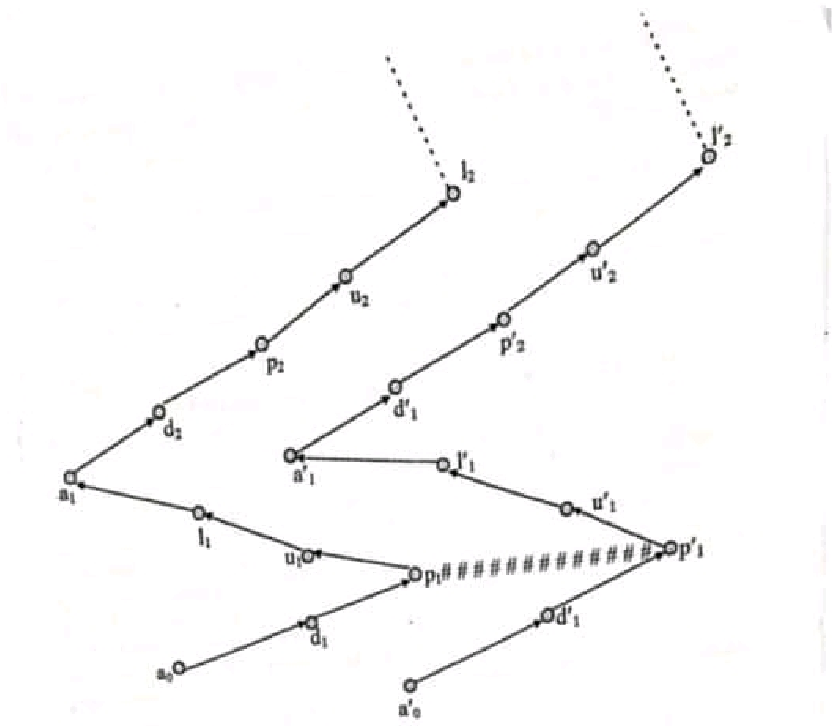


FIGURE 1.3 –

Si on considère les dèroulements suivant (1.4)(dans le même exemple) :

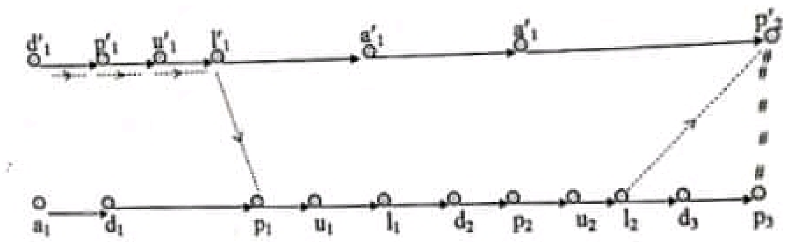


FIGURE 1.4 –

1.7 Structure d'événements étiquetée

Définition 1.7.1
Une structure d'événements étiquetée est un 5-uple $(E, \leq, \#, e, A)$ *,*$(E, \leq, \#)$ *est une structure d'événements* A *un ensemble et* e *une application de* E *dans* A *.*

Un étiquetage *d'une structure d'événements (E, ≤, #) est un couple (e, A) où : A est un alphabet et e est une application de E dans A .*

$$\mathrm{e : E \longrightarrow A}$$

$$\mathrm{x \rightarrow e(x)}$$

Chapitre 2

Etiquetage agréable

Définition 2.0.1
(E, $\leq$, #) une structure d'événements et x,y $\in$ E .

i) On dit que x est ***concurrent*** *à y et on note* $\boldsymbol{x} \longleftrightarrow \boldsymbol{y}$ *si et seulement si x et y ne sont pas en* ***conflit*** *et sont* ***incomparables*** *pour la relation d'ordre $\leq$. C'est à dire :*

$$x \longleftrightarrow y \Leftrightarrow non(\ x \# y \text{ ou } x \leq y \text{ ou } y \leq x).$$

ii) On dit que x et y sont en ***conflit immédiat****, et on note* $\boldsymbol{x} \#_I \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x \# y$ *et ($z \leq x$ et $z \neq x \Rightarrow$ non($z \# y$)) et ($z \leq y$ et $z \neq y \Rightarrow$ non($z \# x$)).*

iii) Un sous-ensemble C de E est dite ***sans conflit*** *ssi :*

$$\forall\ x,\ y \in C;\ non\ (\ x \# y\ ).$$

2.1 Etiquetage agréable

Définition 2.1.1
(E, $\leq$, #, e, A) une structure d'événement fini étiquetée, l'étiquetage (e,A) est dit ***agréable*** *ssi ($\forall x \in E$, $\forall y \in E$; $x \#_I y$ ou $x \longleftrightarrow y$)$\Rightarrow$ e(x) $\neq$ e(y).*

*(****c-a-d*** *les événement qui sont en* ***conflit immédial****, ou qui sont* ***concurrent*** *non jamais la même étiquète) si on note x//y si ($x \#_I y$ ou $x \longleftrightarrow y$).*
-On appelé ***bloc d'événement*** *toute partie de E dont les élément sont deux a deux en conflit immédiat ou concurrent. $F \subseteq E$, F bloc d'événements $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in F$, $\forall y \in F$; x // y) et en fin le degré d'une structure d'événement noté D((E, $\leq$, #)) est la borne supérieure dans N des cardinaux des bloc : D((E, $\leq$, #))= sup { | B | / B est un bloc d'événement. dans (E,$\leq$, #)}.*

Exemple 2.1.1
Considérons l'ensemble E={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12}$\subset$ N. On défini sur E les deux

relations $\leq$ *et* $\#$ *par :* $\forall x \in E$ *et* $\forall y \in E$;
$x \leq y \Leftrightarrow x$ *divise* y *et* $x \# y \Leftrightarrow x$ *et* y *n'ont pas de multiple commun dans E.*
Il est évidant que $\leq$ *est une relation d'ordre et* $\#$ *est une relation de conflit sur E.*

On représentant les conflits minimaux (les conflits immédiats) sur le diagramme de H'sse de l'ensemble ordonné (E, $\leq$*) ; on a le graphe suivant (Figure2.1).*

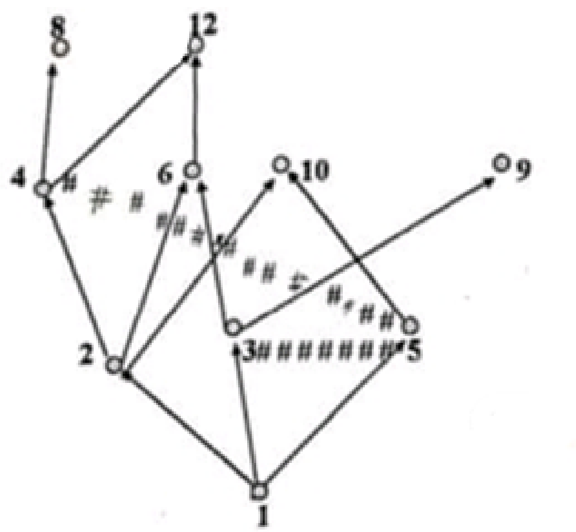


FIGURE 2.1 –

Pour les conflit on à : $3\#_I5$, *3 # 10, 3* $\#_I$ *8, 5 # 4, 5 # 6, 5# 9, 5# 8, 5# 12, 4 # 10, 4 # 9, 6 # 10, 6 # 9, 10 # 9, 10 # 8, 10 # 12, 9 # 8 et 9 # 12 et* $2\#_I9$, *8#6 .*
La structure d'eévénement (E, $\leq$, *#) est de degré 3 ({2, 5, 9} est une bloc et toute autre bloc d'eévénement sa taille est au plus 3).*
{4, 5, 6, 9} est un antichaine mais pas un bloc car 5 # 6 et le conflit n'est pas immédiat (3 $\leq$ *6 et 3 # 5) et {4, 5, 9} est un bloc.*

Théorème 2.1.1 ***(Théoréme de Dillworth)***
Soit (E , $\leq$ *) un ensemble ordonnée, le nombre minimum de chaines deux a deux disjointes recouarant l'ensemble E est égal au maximum fini de la taille des antichaine de (E ,* $\leq$ *).*

Dans une structure d'éuénement (E , $\leq$ *, #), si on a un étiquetage agréable les événement qui sont dans un ordre temporelle forcé peuvent avoir la même étiquéte. Autrement dit la donné d'un étiquetage agréable revient a la donné d'un recouurement de la structure par des chaines a deux disjointes.*

Remarque 2.1.1
Soit (E, $\leq$*, #) une structure d'événements; Toute blocs d'événements est une partie d'un antichaine de l'ensemble ordonné (E,* $\leq$ *).*

Preuve
D'après la définition Le probléme de l'etiquetage agréable est directement lie à un problème classique en théorie des ordres : celui des partitions d'un ensemble partiellement ordonné

en chaines. Le théoréme de Dilworth exprime le nombre minimum de chaines deux à deux disjointes recouvrant l'ensemble ordonné (E, $\leq$) ; est égal au maximum fini de la taille des antichaines de (E, $\leq$).
Dans une structure d'événements (E, $\leq$, #) ; si on a un étiquetage agréable les événements qui sont dans un ordre temporelle forcé peuvent avoir la même étiquette. Autrement dit la donner d'un étiquetage agréable revient à la donner d'un recouvrement de structure par des chaines deux à deux disjointes. ■

Remarque 2.1.2
Toute structure d'événements sans conflit de degré fini n admet un étiquetage agréáble fini sur un alphabet de n lettres.

Preuve
Si (E, $\leq$, #) est une structure d'événements sans conflit ; Les bloc d'événements sont exactement les antichaines de (E,$\leq$), D((E, $\leq$, #)) = n c'est à dire la taille maximal des antichaines est n ; d'après le théoréme de Dilworth (E, $\leq$) peut être recouverte par n chaines E=$\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ et $C_i \bigcap C_j = \phi$.
Soit A= { $a_1, a_2, ..., a_n$} et e : E $\longrightarrow$ A l'application défini par : $\forall$ i=1, 2,.....,n et e(x)=a_i $\forall x \in C_i$, (e, A) est un étiquetage agréable de (E, $\leq$, #). ■

Remarque 2.1.3
Soit (E, $\leq$, #) une structure d'événements, si la taille maximum des antichaines de l'ensemble ordonné (E, $\leq$) est un nombre fini n ; alors : (E, $\leq$, #) admet un étiquetage agréable à l'aide d'un alphabet de n lettres.

Preuve
D'après Dillworth E admet un recouvrement par n chaines deux à deux disjointes, et on étiquette agréablement la structure d'événements (E, $\leq$, #) comme dans la Remarque 2.1.2
Ces étiquetages agréables ne sont pas nécessairement minimaux. Même si toutes les antichaines sont finies, et le degré de la structure (E, $\leq$, #) est fini ; l'existences d'un étiquetage agréable fini n'est pas assuré **B.Rozoy[1]** formule les conjectures suivantes : ■

Conjectures

Si (E, $\leq$, #) est **une structure d'événements finitaire** de degré n alors :

1) (E, $\leq$, #) admet un étiquetage agréable sur un alphabet de n lettres au plus.
2) (E, $\leq$, #) admet un étiquetage agréable sur un alphabet A dont le cardinal est bornée par un polynome en n.
3) (E, $\leq$, #) admet un étiquetage agréable sur un alphabet A fini.

Pour n= 0 ; E=ϕ. On prend A=ϕ et e est l'unique application de ϕ dans ϕ (e :$\phi \longrightarrow \phi$) (e, A) est un étiquetage agréable de (E, $\leq$, #).
Pour n= 1 ;(E, $\leq$) est une chaine. On prend A = a et e est l'application de E dans A définie par $\forall$ x $\in$ E ; e(x)= a ;(e, A) est clairement un étiquetage agréable de (E, $\leq$, #). Pour n = 2 B.Rozoy[1] à démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.1.1
Toute structure d'événements finitaire de degré 2 admet un étiquetage agréable sur un alphabet à deux éléments.

La conjecture forte de l'étiquetage agréable est fausse pour $n \geqslant 3$; le contre exemple suivant (Figure2.2) donné par ***J.M.Brochet*** *la met en défaut.*

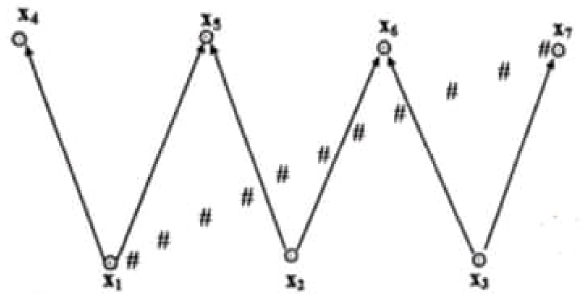


FIGURE 2.2 –

E=$\{x_1,x_2,...,x_7\}$ est l'ensemble des événements, on prend le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné

$(E, \leq)$ *sur lequel on représente les conflits immédiat de la structure d'événements.*

$(E, \leq, \#)$ *Il y a un seul conflit immédiat $x_1 \; \#_I \; x_7$ (représenté par les # # # # sur le diagramme), ce qui donne obligatoirement les deux conflits non immédiat $x_4 \# x_7$ et $x_5 \; \# \; x_7$.*
$x_1 \#_I x_7, x_4 \# x_7$ et $x_5 \# x_7$ sont tous les conflits de cette structure d'événements.

La taille maximum des blocs est 3 ($\{x_1, x_2, x_3\}$ est une bloc, et il n'y a aucune bloc d'événements contenant 4 éléments) alors que tout étiquetage agréable doit avoir au moins quatre lettres :

en effet supposons qu'on a un étiquetage (e, A) agréable sur un alphabet A de 3 lettres A=$\{a, b, c\}$.
Les événements x_1, x_2 et x_3 sont dans le même bloc donc doivent avoir des étiquettes distinctes disons :
$e(x_1) = a, e(x_2) = b$ et $e(x_3)= c$.

Maintenant si on cherche à étiqueter les autres événements de la structure ;x_4 ne peut pas être étiqueter par les lettres b ou c ($\{x_2, x_4\}$ et $\{x_3, x_4\}$ sont des blocs) donc $e(x_4)$=a, et on ne peut pas étiqueter x_5 par a ou c($\{x_4, x_5\}$ et $\{x_3, x_5\}$ sont des blocs) .

donc $e(x_5)$= b, de même on est contraint d'étiqueter l'événement x_6 par l'étiquette c (les blocs $\{x_4, x_6\}$ et $\{x_5, x_6\}$ interdisent les étiquettes a et b) mais x_7 ne peut être étiqueté par aucune des 3 étiquettes($\{x_1, x_7\}$, $\{x_2, x_7\}$ et $\{x_6, x_7\}$ sont des blocs).

Ce qui montre que tout étiquetage agréable de cette structure d'événements doit avoir au moins 4 lettres et le degeé de la structure est 3.

Le contre exemple *précédant s'étend aux structure d'événements (finies ou infinies finitaires) de degré n.*

Remarque 2.1.4
Pour tout entier $n \geqslant 3$; il existe une structure d'événements finie de degré n qui n'admet aucun étiquetage agréable de n lettres.

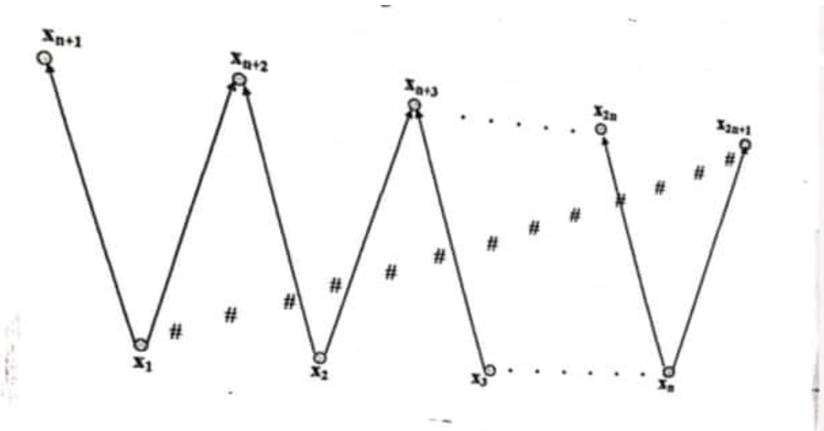


FIGURE 2.3 –

Cette structure d'événements contient 3 conflits (dont un est immédiat $x_1 \#_I x_{2n+1}$ *et les deux autres non immédiat* $x_{2n+1} \# x_{n+1}$ *et* $x_{2n+1} \# x_{n+2}$*) ; son degré est clairement n ; mais on ne peut jamais l'étiqueter agréablement a l'aide de n étiquettes (le même raisonnement que précédemment).*
La structure d'événements représent par la Figure 2.3 admet un étiquetage agréable minimum de n+1 lettres.
On peut construire des structure d'événements de même degré et même propriétés pour l'étiquetage agréable et avec une infinité de niveaux.

Remarque 2.1.5
Pour tout entier n⩾ 3 ; il existe une structure d'événements infinie et finitaire de degré n et qui n'admet aucun étiquetage agréable de n lettres.

Considérons la structure d'événements représenter par le diagramme de Hasse suivant(2.4) sur lequel en représente les conflits immédiats.

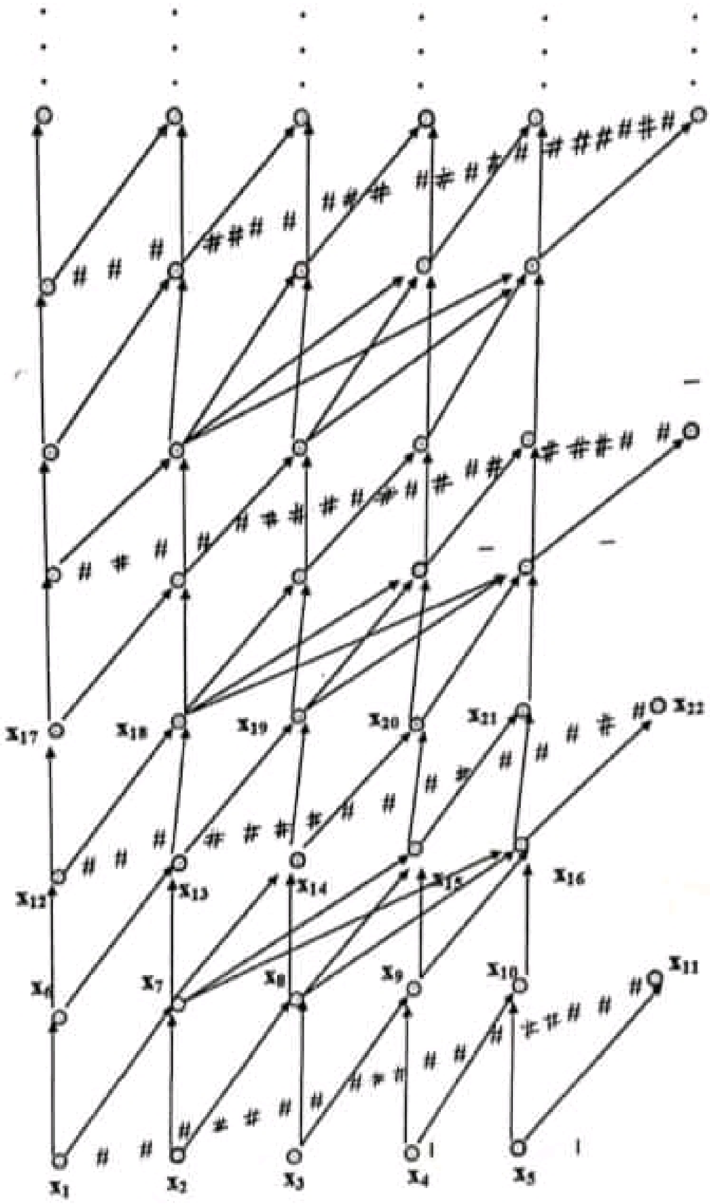


FIGURE 2.4 –

La structure représenté par le diagramme (Figure 2.4) est clairement de degré 5 . ($N_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ est une classe d'événements, et toute autre classe d'événements est de taille au plus 5), alors que tout étiquetage agréable doit avoir au moins 6 lettes ; le même raisonnement que précédemment tient on considérons les niveaux N_0 et N_1.

On prenons la même allure du diagramme (2.4)mais avec des niveaux à n ou n+1 éléments ($N_0 = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, N_1 = \{x_{n+1}, x_{n+2}, ...x_{2n+1}...\}$) on obtient une structure d'événements de degré n, et elle ne peut pas être étiquete par n étiquettes agréablement.

*Si (E, $\leq$, #) est une structure d'événements finitaire on note i(E) la taille minimum d'un étiquetage agréable (notation utilisé par **R.Assous** et C.Charretton).*

*Autrement dit : i(E)=min{|A| / A est l'alphabet d'un étiquetage agréable} et le **seuil** est l'application s : N$\longrightarrow$ N définie par $\forall$ n $\in$ N; s(n)=max {i(f) /(F, $\leq$, #) est une structure d'événements et de degré n }.*

(C'est a dire s(n) est le cardinal de l'alphabet avec laquelle on peut étiqueter agréablement toute structure d'événements de degré n)

D'aprés ce qui précéde on a : s(n)= n pour n<3 et s(n) $\geqslant$ n+1 pour n $\geqslant$ 3.
La conjecture forte est à écarter ; donc reste deux possibilités pour la fonction s :

- *s est une fonction polynomial (s(n)=P(n)).*
- *s n'est pas polynomial donc du type fonction de ramsey.*

2.2 Structure d'événements vue comme ensemble ordonné

D'après le résultat de **M.pouzet** et **E.C.Milner[6]** : si un ensemble ordonné est sans suite infinie strictement décroissante (condition réalise par les structures d'événements finitaires) ; cet ensemble admet une partition finie ou dénombrable dont les parties sont des niveaux. Donc les structures d'événements finitaires même dans le cas où l'ensemble d'événements est infini le classement des événements par niveaux est encore possible, et l'indexation peut se faire par les entiers naturels (à condition que la structure d'événements soit finitaire).

Si (E, $\leq$, #) est une structure d'événements finitaire alors on peut toujours écrire l'ensemble ordonné (E, $\leq$) comme réunion dénombrable d'antichaine deux à deux disjointes.On note L(E,$\leq$) le maximum dans N des tailles des antichaines et on l'appelle **largeur** de l'ensemble ordonné (E,$\leq$).

On remarque clairement que toute structure d'événements finitaire admet des événements minimaux (N_0 est l'ensemble des éléments minimaux).

Les remarques suivantes sont des conséquences d'un résultat classique en théorie des ensemble ordonné **le théorème de ramsey** : si on partage l'ensemble des paires d'éléments d'un ensemble infini E en un nombre fini $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ de sous-ensemble alors :il existe une partie infinie F de E et un entier k $\in$ {1,2,.....,n} tel que : l'ensemble des paires d'éléments de l'ensemble F sont tous dans U_k.

Remarque 2.2.1
Si $(E, \leq, \#)$ est une structure d'événements finitaire et de degré fini ; alors :
toute antichaine infinie contient une partie infinie d'événements deux à deux en conflit non immédiat.

Preuve
Soit A une antichaine infinie, considérons la partition de A×A en trois ensemble U_1, U_2 et U_3 avec : $U_1 = \{(x, y) \in A \times A$ / x et y sont en conflit non immédiat$\}$ $U_2 = \{(x, y) \in A \times A$ / x et y sont en conflit immédiat $\}$ et $U_3 = \{(x, y) \in A \times A$ / x et y sont non en conflit$\}$; d'aprés le théoréme de ramsey ; $\exists F \subseteq A$, F est infini tel que $F \times F \subseteq U_1$ ou $F \times F \subseteq U_2$ ou $F \times F \subseteq U_3$.
Si $F \times F \subseteq U_2 \Rightarrow \forall$ x et y de F ; x et y sont incomparables et x$\#_I$ y c'est à dire F est une bloc, ce qui contredit le degré de (E, $\leq$, #) est fini ; d'ou $F \times F \subseteq U_1$ ou $F \times F \subseteq U_3$; de même si $F \times F \subseteq U_3 \Rightarrow \forall x$ et y deux éléments de F ; x et y sont incomparables et ne sont pas en conflit. Alors $F \times F \subseteq U_1$; autrement dit F est un esemble infini d'événements deux à deux en conflit non immédiat.
■

Proposition 2.2.1
Soit $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événements finitaire, tel que l'ensemble ordonné* $(E, \leq)$ *est de largeur fini ; alors cette structure admet un étiquetage agréable contenant au plus L(E,* $\leq$ *) étiquettes.*

Preuve
On a $L(E, \leq) = n$ **(Dilworth)** : il existe n chaines $C_1, C_2, ..., C_n$ recouvrant E l'étiquetage (e, A) tel que : $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ et $e : E \longrightarrow A$ est l'application définie par :$\forall x \in E; \exists i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $x \in C_i$ on pose $e(x) = a_i$ est clairement agréable. ■

Proposition 2.2.2
Soit (E, $\leq$*, #) une structure d'événements de degré fini n, dans laquelle il y a au plus m conflit cette structure admet un étiquetage agréable à l'aide de m+n+1 lettres au plus.*

Preuve
Soit B une antichaine de la structure d'événements (E, $\leq$, #) ; B contient au plus m conflit (immédiat ou non) donc au plus m+1 événements qui sont dans un conflit, et n événements deux à deux non en conflit (D(E, $\leq$, #) = n) d'où : /B/ $\leq$ m+n+1. Donc toute antichaine est au plus de taille m+n+1 c'est à dire la largeur de (E, $\leq$) , (L(E, $\leq$)) $\leq$ m+n+1, d'après la Proposition on à le résultat. ■

Proposition 2.2.3
Si (E, $\leq$, #) est une sturcture d'événements finitaire de degré fini n ; alors :
tout niveaux de l'ensemble ordonné (E, $\leq$) est fini.

Preuve
Vue la correspondance entre ensemble ordonnés et graphes orientés ; on peut aussi voir les structure d'événements comme graphes. Dans le petit paragraphe suivant on va seulement signaler certains faits. ■

Définition 2.2.1

1. *x est **prédécesseur immédiat** de y , noté x $\not\lesssim$ y ssi*

$$x \leq y,\ x \neq y \text{ et } (\ \forall\ z \in E\ (\ x \leq z \leq y \Rightarrow x = z \text{ ou } z = y\ ))$$

2. *On dite **enfin** que x est en conflit différé avec y, noté x $\#^{\uparrow}$y ssi e est en conflit avec y, mais pas en conflit immédiat.*
3. *E_s **finitaire** ssi le passé de tout élément est fini :*

$$\forall\ x \in E\ card{=}(\ \downarrow x\ ){=}\ card(\{\ y \in E\ /\ y \leq x\})<\infty.$$

4. *Le sous ensemble C est **clos dans le passè** ssi :*

$$\forall\ x \in C \downarrow x \subset C.$$

5. *On appelle **configuration** de ES tout sous-ensemble de E, sans conflit et clos dans le passé. On notera τ_{ES}^{∞}*

Proposition 2.2.4

- *Si ES est une structure d'èvenements et x un èlèment de E alors le passè de x est une configuration.*
- *Toute configuration est rèunion du passè de ses èlèmènt.*

Preuve

1. Soit x un èlèmènt de la structure d'èvénements E_s le passè de x, $\downarrow$ x $\in$ E_s $\Rightarrow$ x $\in$ E $\downarrow$ x $\in$ E clos dans passè ! Il est ègalement sans conflit ; en effet si y et z ètaient dans $\downarrow$ x avec y # z, alors on aurait : (y $\leq$ x et y # z d'où f # x) puis (f $\leq$ x et z # x donc x # x) ce qui est absurde puisque la relation de conflit est irrèflexive. Donc $\downarrow$ x est une configuration quel que soit x dans E.
2. Soit C **une configuration** de ES et x un èlèmènt de C. puisque C est close dans le passè, le passè de x est inclus dans C, et on a bien

$$\mathrm{C}{=}\bigcup\ \{\ \downarrow \mathrm{x}\ /\ \mathrm{x} \in \mathrm{C}\ \}.$$

■

Définition 2.2.2
Soit (X, $\leq$) un ensemble ordonné.
• *Un ensemble Y est dit consistant, s'il admet un majorant dans X. on notera $\nearrow$ Y pour Y consistant, c'est à dire :*

$$(\nearrow Y) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E : \forall\, y \in E\ y \leq x)$$

Pour $Y = \{x, z\}$, *on notera* $x \nearrow z$ *au lieu de* $\nearrow \{ x,z \}$.

• *Un ensemble Y est dit consistant par paire si tout couple d'élément de Y admet un majorant dans X.*

• *L'ensemble partiellement ordonné (X,* $\leq$ *) sera dit cohérent si tout sous-ensemble Y de X consistant par paire admet une borne supérieure dans X, Il sera dit finiment cohérent si cette propriété, est vraie pour les sous-ensemble finis.*

Lemme 2.2.1
Soient ES une structure d'événements, et τ *l'ensemble des configurations finies de ES, muni de l'inclusion.*
Alors τ *est un ensemble finitaire finiment cohérent.*

Preuve
Soit Y un ensemble fini de configurations finies , $Y = \{C_1, C_2..., C_n\}$, avec Y consistant paire. Si e_i et e_j sont respectivement dans C_i et C_j alors ils admettent un majorant commun et donc ne sont pas en conflit. L'ensemble réunion des C_i, C= $\bigcup$ { C_i / i=1...n}, est alors clos dans le passé, puisque ainsi est chaque C_i, et sans conflit ; c'est donc une configuration finie de ES. On établit d'ailleurs aisément qu'il s'agit de la borne supérieure de la famille. ■

Théorème 2.2.2
Soit ES=(E , $\leq$*, #) une structure d'événements.*
Alors $\Upsilon(ES) = (\tau_{ES}, \subset)$ *est un ensemble ordonné, finitaire, algébrique, et finiment cohérent, dont l'ensemble des éléments premiers est :*

$$PR(ES) = \{\downarrow e / e \in E\}.$$

De plus, la structure d'événements initial est reconstructible à partir de ses configurations.

Bibliographie

[1] B.Rozoy, Un modéle de parallélisme le monoide distribué, Laboratoire d'informatique de l'université de caen 1987.

[2] DanielPonasse,Jean-Claude carrega ,Masson Paris New york Barcelone Milan 1979.

ملخص

في هذا العمل إستعملنا بنية الحوادث لتمثيل إشتغال النظم بعد إعطاء خصائص و ملاحظات حول هذا التمثيل.
كان السؤال المطروح ماهو عداد الأرقام لترقيم بنية حوادث درجتها عدد منته n ترقيما مريحا (أي كل حادثتين في نفس الجناح لايمكن لهما أن يحملا نفس الرقم).
للجواب إستعملنا بعض نظريات ونتائج جبر التراتيب لتخطي بعض الصعوبات لكن الجواب كان جزئيا لم يشمل الحالة العامة

Résumé

Dans ce travail nous avons utilisés les structures d'événements pour represeuter le foctionnement des systémes la question posé été quel est le nombre d'étiquetes pour étiqueter une structure d'événements de degré n agreablement (i.e deux événements dans le même bloc ne porte jamais la même étiquete).

Pour répondre a cette question on a utiliser certains résultats et proprietes de l'algébre ordinal pour sur monté quelques dificultés, Mais la réponse n'est que partielle.

Abstract

In this work we used the event structures to represent the functioning of the systems the question asked was what is the number of labels to label an event structure of degree n agreeably (ie two events in the same block do not never wear the same label).
To answer this question nautilize some results and properties of ordinal algebra for over mounted some di fi culties, But the answer is only partial .