رقم الترتيب :
....

جامعة قاصدي مرباح – ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة

لإستكمال متطلبات الحصول على

شهادة الماستر أكاديمي

الميدان : رياضيات و إعلام ألي

الشعبة : الرياضيات

التخصص : تحليل دالي

من إعداد الطالب :مومن مسعود محمد أمين

تــحــت عنـــوان

حلول بعض المسائل في معادلات آبل التكاملية

نوقشت يوم :2020/09/28 من طرف لجنة المناقشة :

لأستاذ :	عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح - ورقلة	رئيسا
الأستاذ :	قرفي عمارة	جامعة قاصدي مرباح - ورقلة	مشرفا
الأستاذ :	سعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح - ورقلة	مناقشا

السنة الجامعية : 2020/2019

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

الحمد الله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن الله ، الحمد الله الذي ألهمنا القوة والصبر
لإتمام هذا العمل المتواضع الذي نسأله أن ينفع به .

إلى من حملتني في بطنها تسعا، وأرضعتني حولا وحولا،غلى من سهرت من أجلي الليالي ،إلى القمر الذي أنا دربي ، إلى الشمس التي أشرقت على أرضي "أمي "الغالية ، إلى من رباني، ورعاني وحماني من شرور الدنيا ، إلى من يشقى لأنجع ويحزن لأفرح "أبي "العزيز.

إليهما أهدي هذا العمل فهما أغلى هدية، وأرق زهرة، وأعطر نسمة أطال الله في عمرهما وأغلى قدرهما،وأدامهما لي ذخرا نافعا .

كما لاننسى أساتذتنا الذين كانوا فيضا ننهل من علمهم ونصائحهم .

إلى العائلة الكريمة صغيرا وكبيرا و إلي إخوتي

أسامة و سمية و سالم وعبد الفتاح

إلى كل أصدقائي وزملائي وكل من يملكون مكانة لهم في قلوبنا وأخص بالذكر

غنبازي محمد وخالدي عبد المنعم و حنكة علي.

إلى كل من ساعدونا وساندونا في مسيرتنا الدراسية.

إلى كل أساتذة و طلبة قسم الرياضيات وجامعة قاصدي مرباح ورقلة.

من إعداد الطلبة :

❖ مومن مسعود محمد أمين

التشكرات

الشكر لله أولا وأخيرا الذي وفقني لإتمام هذه الدراسة المتواضعة.

تجسيدا لقوله صلى الله عليه وسلم ((من لم يشكر الناس لم يشكر الله)).

أتوجه بالشكر والتقدير والاحترام إلى الأستاذ الدكتور" عمارة قرفي " الذي تفضل بالإشراف على هذا البحث، وعلى صبره معي طوال هذه المدة بتوجيهاته العلمية التي كانت لي السند القويم وبكل فخر واعتزاز أتمنى له المزيد من التألق و النجاح في حياته العلمية.

كما نتقدم بالشكر و العرفان إلى:

كل أساتذة قسم الرياضيات إذ كان لنا الشرف العظيم في تعلمنا على أيديهم

وعلى مساندتهم ودعمهم وملاحظاتهم القيمة لنا.

و بالشكر كذلك إلى أصدقائي و إخوتي الذين كانوا لي خير عون وسند في إنجاز هذا العمل، وإلى كل عائلتهم المحترمة.

كما أتقدم بالشكر إلى كل زملائي في الدفعة.

وإلى كل من ساعدني ولو بكلمة طيبة أقول له شكرا.

الفهرس

مقدمة

في السنوات الأخيرة ازداد الاهتمام في المعادلات التكاملية و خاصة المعادلات التكاملية الشاذة منها و التي تظهر في العديد من فروع مجالات العلم مثل علم الزلازل و علم الفلك الراديوي و انبعاث الكترون، الخ...، و ظهرت في أواخر القرن 19 م العديد من الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية الشاذة و على سبيل المثال حل حالات خاصة مثل معادلات فولتيرا التكاملية الشاذة من النمط الأول و الثاني و معادلات آبل.

حيث وضع عالم الرياضيات النرويجي نايلز آبل سنة 1823م أقدم ثلاث معادلات تكاملية له و التي طبقت عليها العديد من طرق حلول المعادلات التكاملية الشاذة. ولقد قام الكثير من الكتاب و الباحثين في البحث و الكتابة حول المعادلات التكاملية لآبل [1-8].

لذا سنحاول في هذه المذكرة إعطاء بعض المفاهيم وبعض طرق الحل المتعلقة بمعادلات آبل و معادلات فولتيرا الشاذة و سنحاول قدر الإمكان الابتعاد عن الجانب النظري البحت ونكثر من الأمثلة العملية دون أن نخل بالدقة العلمية لتكون المعلومة سهلة المأخذ عظيمة الفائدة. ولذا قسمنا مذكرتنا ،إلي ثلاث فصول:

- ففي الفصل الأول: تعرضنا لمفهوم المعادلات التكاملية و بعض أنواعها و إلي تحويل لابلاس و إلي معادلات آبل التكاملية الخطية ذات مجهول واحد وأصنافهاوبعض طرق حلها و تعرضنا أيضا إلي معادلات فولتيرا الخطية الضعيفة الشاذة و بعض الطرق لحلها.
- الفصل الثاني: فقد تعرضنا إلي معادلات آبل التكاملية الخطية لأكثر من مجهول و تصنيفاتها و بعض طرق حلها، كما تعرضنا أيضا معادلات فولتيرا الخطية الشاذة الضعيفة لأكثر من مجهول و بعض طرق حلها.
- الفصل الثالث: تعرضنا في هذا الفصل إلي معادلات آبل التكاملية الغير الخطية و أصنافها و بعض طرق حلها و تعرضنا أيضا إلي معادلات فولتيرا الغير الخطية الضعيفة الشاذة و بعض الطرق لحلها.

الفصل الأول

المعادلات التكاملية الخطية لآبل ذات مجهول واحد

1- المعادلات التكاملية
2- تحويل لابلاس
3- مدخل إلى معادلات آبل التكاملية
4- معادلة آبل التكاملية
5- المعادلة التكاملية العامة لآبل
6- معادلة آبل الرئيسية المعممة

1.1 المعادلات التكاملية

تعريف 1.1: المعادلة التكاملية هي أي معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة $u(x)$ تحت إشارة التكامل في المعادلة. و الشكل الأكثر تداولا للمعادلات التكاملية هو

$$u(x) = f(x) + \int_{\propto(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt. \qquad (1.1)$$

حيث أن $k(x,t), f(x), \beta(x), \alpha(x)$ هي دوال معلومة و $k(x,t)$ تسمى نواة المعادلة التكاملية و يطلب تعين الدالة المجهولة $u(x)$.

تظهر المعادلات التكاملية عادةً في الدراسات الفيزيائية و الكيميائية و البيولوجية و التطبيقات الهندسية التي يمكن وضع نماذج رياضية لها موصوفة بمسائل قيم ابتدائية أو حدية.

1.1.1أنواع المعادلات التكاملية

المعادلات التكاملية وهي نوعان :

المعادلات التكاملية الخطية: نقول عن معادلة تكاملية أنها خطية إذا و فقط إذا ظهرت الدالة المجهولة u تحت إشارة التكامل بشكل خطي .

تنقسم المعادلات التكاملية الخطية إلي صنفين أساسيين و هما

- **معادلات فولتيرا التكاملية**

تكتب معادلة فولتيرا التكاملية من الشكل

$$\varphi u(x) = f(x) + \int_0^x \mathrm{k}(x,t)u(t)dt. \qquad (2.1)$$

و تكون من النمط الأول إذا كان $\varphi = 0$

و من النمط الثاني إذا $\varphi = cest \neq 0$

ومن النمط الثالث لما $\varphi = \varphi(x)$

و قد نشأت معادلة فولتيرا من مسألة تفاضلية ذات شروط ابتدائية.

- **معادلة فريدهولم التكاملية**

وتكتب من الشكل

$$\varphi u(x) = f(x) + \int_a^b \mathrm{k}(x,t)u(t)dt. \qquad (3.1)$$

حيث a,b هي ثوابت.

و تكون من النمط الأول إذا كان $\varphi = 0$

و من النمط الثاني إذا $\varphi = cest \neq 0$

ومن النمط الثالث لما $\varphi = \varphi(x)$

و نقول عن معادلة فولتيرا و فريدهولم أنها متجانسة إذا كان $\varphi = 1$ و $f(x) = 0$

ونميز أيضا أربعة أصناف أخرى إضافة للصنفين الأساسيين و هم

- **المعادلات التكاملية ـ التفاضلية:** و هي المعادلات التي يظهر فيها مشتق الدالة المجهولة في طرف من المعادلة والدالة المجهولة في الطرف الآخر تحت إشارة التكامل .و يمكن لهذا النوع من المعادلات التكاملية أن تكون من نمط معادلات فريدهولم أو معادلات فولتيرا.
- **المعادلات التكاملية الشاذة:** نقول عن معادلة تكاملية أنها شاذة إذا كان أحد حدود التكامل أو كليهما لانهاية ,أو إذا كانت قيمة نواة المعادلة غير منتهية في نقطة أو أكثر من نقاط مجال التكامل .و تعتبر معادلة آبل من المعادلات التكاملية الشاذة.
- **معادلات فولتيرا ـ فريدهولم التكاملية.** و تكتب من الشكل

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x,t)u(t)dt + \int_0^b k_2(x,t)u(t)dt. \qquad (4.1)$$

- **معادلات فولتيرا ـ فريد هولم التكاملية ـ التفاضلية** الشكل القياسي لهذه المعادلات من الشكل

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x,t)u(t)dt + \int_0^b k_2(x,t)u(t)dt. \qquad (5.1)$$

المعادلات التكاملية الغير خطية: نقول عن المعادلة التكاملية أنها غير خطية إذا و فقط إذا ظهرت الدالة المجهولة u بشكل غير خطي تحت إشارة التكامل .

2.1.1 حل المعادلة التكاملية

نقول عن دالة $u(x)$ أنها حل لمعالة تكاملية إذا و فقط إذا حققت $u(x)$ هذه المعادلة التكاملية.

2.1 تحويل لابلاس

لتكن $f(t)$ دالة معرفة من أجل القيم الموجبة ل t.

تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ هو:

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt. \qquad (6.1)$$

حيث s هو وسيط حقيقي.

بشرط أن يكون الطرف الثاني للمعادلة متقاربا.

1.2.1 بعض خواص تحويل لابلاس

1. $L\big(af(t) + bg(t)\big) = aL\big(f(t)\big) + bL\big(g(t)\big)$
2. نفرض أن $f \in c^n([0,+\infty[)$
$\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n f(s) - [s^{n-1}f(0) + s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) + \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0)]$
3. $L\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{1}{s}F(s)$
4. $L\big(e^{at}f(t)\big) = F(s-a)$
5. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ g(t-a), & t \geq a \end{cases}$
فإن $G(s) = L(g(t))$, $F(s) = e^{-\propto s}G(s)$
6. $L\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
7. $L(\int_0^t g(t-p)f(p)dp) = G(s)F(s)$
حيث $F(s) = L\big(f(t)\big), G(s) = L\big(g(t)\big)$

8. $\frac{dF(s)}{\mathrm{ds}} = -L(tf(t))$

9. $\int_{s}^{+\infty} \mathrm{F(s)ds} = \mathrm{L}(\frac{f(t)}{\mathrm{t}})$

3.1 مدخل إلى معادلات آبل التكاملية [1]

درس آبل عام 1823 حركة جسيم ينزلق على المستوي الشاقولي (ξ, η) تحت تأثير الجاذبية، فإذا كانت β هي زاوية ميل المماس للمسار مع المحورξ0. فإن سرعة هذا الجسم ستكون

$$v = \sqrt{2\mathrm{g}(x - \eta)}, \tag{7.1}$$

و بالتالي

$$\frac{d\eta}{\mathrm{dt}} = -\sqrt{2\mathrm{g}(x - \eta)} \sin\beta, \tag{8.1}$$

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2\mathrm{g}(x-\eta)} \sin\beta}, \tag{9.1}$$

و بالمكاملة من الصفر إلي x و بوضع

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin\beta}, \tag{10.1}$$

نحصل على معادلة آبل

$$\int_{0}^{x} \frac{\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta}{\sqrt{x-\eta}} = -\sqrt{2\mathrm{g}} f_1(x), \tag{11.1}$$

نضع

$$-\sqrt{2\mathrm{g}} f_1(x) = f(x), \tag{12.1}$$

نجد

$$\int_{0}^{x} \frac{\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta}{\sqrt{x-\eta}} = f(x), \tag{13.1}$$

حيث$\varphi(\eta)$ هو التابع المطلوب و $f(x)$ هو التابع المعلوم.

بعد إيجاد $\varphi(\eta)$ نستطيع تشكيل معادلة منحنى

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin\beta} \tag{14.1}$$

عندئذ

$$\eta = \Phi(\beta), \tag{15.1}$$

إضافة إلي ذلك فإن

$$d\xi = \frac{d\eta}{\tan\beta} = \frac{\Phi'(\beta)\mathrm{d}\beta}{\tan\beta} \tag{16.1}$$

وبالتالي

$$\xi = \int_0^x \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\tan\beta} = \Phi_1(\beta), \tag{17.1}$$

وبالنتيجة فإن المنحنى المطلوب يتعين بالمعادلات الوسيطية

$$\begin{cases} \xi = \Phi_1(\beta) \\ \eta = \Phi(\beta) \end{cases} \tag{18.1}$$

وهكذا فإن مسألة آبل تؤول إلي المعادلة التكاملية:

$$f(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt. \tag{19.1}$$

4.1 معادلة آبل التكاملية [2]

تكتب معادلة آبل الخطية من الشكل

$$f(x) = \int_0^x k(x,t)u(t)dt. \tag{20.1}$$

حيث $f(x)$هي دالة محددة و$u(t)$ هي الحل الذي سيتم تحديده و $k(x,t)$هي نواة آبيل

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}, \tag{21.1}$$

$k(x,t) \to \infty$ لما $t \to \infty$

مثال

$$\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)d\,t. \tag{22.1}$$

ملاحظة:معادلة آبل التكاملية (20.1) هي أيضا تسمى معادلة فولتيرا من النمط الأول.

من المثير للاهتمام أن نشير إلى أنه على الرغم من أن معادلة آبل التكاملية هي معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول ، ولكن اثنين من الأساليب المستخدمة في حل المعادلات التكاملية وهي طريقة الحل عن طريق سلسلة والتحويل إلى معادلة فولتيرا من النوع الثاني ، لا تنطبق هنا.

الحل عن شكل سلسلة لا يمكن استخدامه في هذه الحالة خاصة إذا لم تكن $u(x)$ تحليلية.

علاوة على ذلك تحويل معادلة آبل التكاملية إلى معادلة فولتيرا من النوع الثاني لا يمكن الحصول عليه لأنه لا يمكننا استخدام قاعدة Leibnitz بسبب شذوذ سلوك النواة في (20.1).

و لذلك سنستخدم طريقة تحويل لابلاس لإيجاد الحل

1.4.1 طريقة تحويل لابلاس

لن نتطرق لتحويل لابلاس بأكمله، ولكن سنقدم ملخص موجز حيث سيكون الملخص مفيدًا. في نظرية الالتفاف لتحويل لابلاس، حيث أنه إذا كانت النواة $k(x,t)$ من المعادلة التكاملية

$$f(x) = \int_0^x k(x,y)u(t)dt, \tag{23.1}$$

تعتمد على الفرق $x - t$ ، ثم يطلق عليها نواة الفرق بين عمداتها.

وبالتالي يمكن التعبير عن المعادلة التكاملية كالتالي

$$f(x) = \int_0^x k(x-t)u(t)dt, \tag{24.1}$$

ضع في الاعتبار دالتين $f_1(x)$و$f_2(x)$ تمتلك الشروط المطلوبة

لوجود تحويل لابلاس لكل منهما.

$$L\left(f_1(x)\right) = F_1(s),$$

$$L\left(f_2(x)\right) = F_2(s), \tag{25.1}$$

يتم تحو يل لابلاس لهاتين الدالتين بواسطة

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-\mathrm{t}) f_2(\mathrm{t})\mathrm{dt},$$

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-\mathrm{t}) f_1(\mathrm{t})dt, \tag{26.1}$$

أذكر كذلك أن

$$\left(f_1 * f_2\right)(x) = \left(f_2 * f_1\right)(x), \tag{27.1}$$

يمكننا أن نظهر بسهولة أن تحويل لابلاس

$$L\left(\left(f_1 * f_2\right)(x)\right) = F_1(x)F_2(x) \tag{28.1}$$

استنادًا إلى هذا الملخص ، سندرس معادلة آبل التكاملية حيث النواة هي نواة الفرق.

نأخذ تحويلات لابلاس لكلا الجانبين للمعادلة

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt, \tag{29.1}$$

نجد

$$L\left(f(x)\right) = L\left(u(t)\right)L\left(x^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{30.1}$$

ومنه حسب الجدول التالي:

الدالة	$f(x)$	$u(t)$	$x^{-\frac{1}{2}}$
تحويل لابلاس	$F(s)$	$U(s)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}$

فإن المعادلة (30.1) تصبح

$$F(s) = U(s)\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} \tag{31.1}$$

ومنه فإن

$$U(s) = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} F(s), \tag{32.1}$$

$$U(s) = \frac{s}{\pi}\left(\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}F(s)\right), \quad (33.1)$$

$$L(u(x)) = \frac{s}{\pi}L(y(x)), \quad (34.1)$$

حيث

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)} f(t)dt, \quad (35.1)$$

ومنه حسب خواص تحويل لابلاس فإن

$$L(y'(x) = sL(y(x)) - y(0), \quad (36.1)$$

و باستخدام العلاقة (34.1) نجد

$$L(u(x)) = \frac{1}{\pi}L(y'(x)), \quad (37.1)$$

و بإدخال تحويل لابلاس العكسي L^{-1} على طرفي المعادلة نجد

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_0^{\mathrm{x}} \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt. \quad (38.1)$$

التي سيتم استخدامها لتحديد الحل $u(x)$.

نلاحظ أنه سيتم استخدام الصيغة (38.1) لحل معادلة آبل التكاملية ، و كذلك ليس من الضروري استخدام طريقة تحويل لابلاس لكل مشكلة. مشكلة آبل يمكن حلها بواسطة (20.1) مباشرة باستخدام الصيغة (38.1) حيث تم استبدال الدالة غير المعروفة $u(x)$ بالدالة المعينة $f(x)$ من الشكل:

1. $f(x) = x^{\mathrm{n}}$ ، n هو عدد صحيح موجب

الجدول1: للتكاملات من النموذج

$$u(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt, \quad (39.1)$$

$u(x)$	$2c\sqrt{x}$	$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}$	$\frac{32}{35}x^{\frac{7}{2}}$	…	$\frac{2^{2n+1}\Gamma(n+12)x^{n+\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2n+1)}$
$f(t)$	c	t	t^2	t^3	…	t^{n}

2. $f(x) = x^{\frac{n}{2}}$ ،n هو عدد صحيح موجب فردي

الجدول2: للتكاملات من النموذج

$$u(x) = \int_0^x \frac{t^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{x-t}}dt, \quad (40.1)$$

$u(x)$	$2c\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\pi x$	$\frac{3}{8}\pi x^2$	$\frac{5}{16}\pi x^3$	…	$\frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+3}{2})}\sqrt{\pi}x^{\frac{n+1}{2}}$
$f(t)$	c	$t^{\frac{1}{2}}$	$t^{\frac{3}{2}}$	$t^{\frac{5}{2}}$	…	$t^{\frac{n}{2}}$

وسيتم استخدام الصيغة (38.1) لتحديد حل مشكلة آبل.

مثال

حل معادلة آبل التكاملية التالية

$$x^3 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt, \quad (41.1)$$

حيث $x \in [0,2]$

الحل

نعوض الدالة $f(x) = x^3$ في (38.1) نجد

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{x-t}}dt, \quad (42.1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{32}{35}x^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$= \frac{16}{5\pi}x^{\frac{5}{2}}$$

(43.1)

ومنه الحل $u(x)$هو

$$u(x) = \frac{16}{5\pi}x^{\frac{5}{2}}. \quad (44.1)$$

5.1 المعادلة التكاملية العامة لآبل [2]

عمم آبل مشكلته الأصلية بحيث أصبحت تكتب من الشكل

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (45.1)$$

المعادلة (45.1) تُعرف باسم معادلة آبل المعممة حيث:

α هي ثوابت معروفة و $0 < \alpha < 1$

f هي دالة معروفة محددة مسبقًا ،

$u(x)$هو الحل الذي سيتم تحديده.

$\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}$ تسمى نواة معادلة آبل التكاملية

مشكلة آبل التي نوقشت أعلاه هي حالة خاصة من المعادلة المعممة حيث $\alpha = \frac{1}{2}$

1.5.1 طريقة تحويل لابلاس

لتحديد صيغة الحل $u(x)$ للمعادلة التكاملية المعممة لآبل (45.1) سنطبق طريقة لابلاس.

بطريقة موازية لطريقة تحويل لابلاس التي استخدمناها في حل معادلة آبل التكاملية من قبل. نأخذ تحويلات لابلاس لكلا جانبي للمعادلة (45.1) يؤدي إلى

$$L\big(f(x)\big) = L\big(u(x)\big)L(x^{-\alpha}), \tag{46.1}$$

و يكافئ

$$\mathrm{F(s)} = \mathrm{U(s)}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mathrm{s}^{1-\alpha}}, \tag{47.1}$$

وذلك يعطي

$$\mathrm{U(s)} = \frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{F(s)}, \tag{48.1}$$

حيث: $F(s)$ هي تحويل لابلاس ل $f(x)$

$U(s)$ هي تحويل لابلاس ل $u(x)$

Γ هي الدالة غاما حيث

$$\Gamma(x) = \int_0^x t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}. \tag{49.1}$$

و يمكن كتابة المعادلة (48.1) كالتالي

$$\mathrm{U(s)} = \frac{\mathrm{s}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{F(s)}, \tag{50.1}$$

$$\mathrm{L}(f(x)) = \frac{\mathrm{s}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{L}\big(\mathrm{y}(x)\big), \tag{51.1}$$

حيث

$$\mathrm{y}(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-\mathrm{t})^{\alpha-1}}f(\mathrm{t}), \tag{52.1}$$

ومنه حسب خواص تحويل لابلاس نجد

$$L(y'(x) = sL\big(y(x)\big) - y(0), \tag{53.1}$$

و

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{54.1}$$

بتعويض (53.1) في(54.1) نجد

$$L\big(u(x)\big) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}L\left(y'(x)\right) \tag{55.1}$$

و بتطبيق L^{-1} على جانبي المعادلة (55.1) نجد

$$u(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-\mathrm{t})^{1-\alpha}}\mathrm{dt}, \tag{56.1}$$

بعد حساب مشتق التكامل للمعادلة (56.1) نحصل على صيغة أكثر ملائمة

$$\mathrm{u}(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-\mathrm{t})^{1-\alpha}}\mathrm{dt}\right), \tag{57.1}$$

حيث $0 < \alpha < 1$

مثال

حل معادلة آبل التكاملية المعممة التالية

$$\frac{128}{231}x^{\frac{11}{4}} = \int_0^x \frac{1}{(x-\mathrm{t})^{\frac{1}{4}}}\mathrm{u(t)dt}. \qquad (58.1)$$

الحل

نلاحظ $\propto = \frac{1}{4}$ و $f(x) = \frac{128}{231}x^{\frac{11}{4}}$ و بإستخدام (1.36) يعطي

$$u(x) = \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{\frac{128}{231}t^{\frac{11}{4}}}{(x-\mathrm{t})^{\frac{3}{4}}}dt,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{\frac{128}{231}\mathrm{t}^{\frac{11}{4}}}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\frac{3}{4}}}dt,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi x^3\right) = x^2.$$

(59.1)

ومنه حل المعادلة (58.1) هو

$$\mathrm{u}(x) = x^2. \qquad (60.1)$$

6.1 معادلة آبل الرئيسية المعممة

من المفيد إدخال المزيد من التعميم على معادلة آبل من خلال النظر المعمم في النواة الشاذة المعممة بدلا من $k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}$

ستكون النواة من الشكل

$$k(x,t) = \frac{1}{[g(x)-g(t)]^{\propto}}, 0 \propto < 1, \qquad (61.1)$$

معادلة آبل الرئيسية المعممة الرئيسية معطاة بواسطة

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{[g(x)-g(t)]^{\propto}}u(t)dt, 0 < \propto < 1, \qquad (62.1)$$

حيث $g(t)$ متزايدة ورتيبة و تكون قابلة للتفاضل في المجال$t \in]0,b[$

و$g'(t) \neq 0, \forall t \in [0,b]$

و بنفس الطرق السابقة نجد الحل $u(x)$ يعطى

$$u(x) = \frac{\sin(\propto\pi)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g'(t)f(t)}{[g(x)-g(t)]^{1-\propto}}dt, \qquad (63.1)$$

لإثبات هذه الصيغة،نتبع [5-6] ونأخذ بعين الاعتبار التكامل

$$\int_0^x \frac{g'(y)f(y)}{[g(x)-g(y)]^{1-\propto}}dy \qquad (64.1)$$

نعوض $f(t)$ بما يساويها حسب (62.1) نجد

$$\int_0^x \int_0^y \frac{u(t)g'(y)}{[g(y)-g(t)]^{\propto}[g(x)-g(y)]^{1-\propto}} dtdy, \tag{65.1}$$

نغير ترتيب التكامل نجد

$$\int_0^x u(t)dt \int_0^y \frac{g'(y)}{[g(y)-g(t)]^{\propto}[g(x)-g(y)]^{1-\propto}} dy, \tag{66.1}$$

نحسب التكامل التالي

$$\int_0^y \frac{g'(y)}{[g(y)-g(t)]^{\propto}[g(x)-g(y)]^{1-\propto}} dy = \beta(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{67.1}$$

ومنه فإن

$$\int_0^x \frac{g'(y)f(y)}{[g(x)-g(y)]^{1-\propto}} dy = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \int_0^x u(t)dt, \tag{68.1}$$

ومنه

$$u(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g'(y)f(y)}{[g(x)-g(y)]^{1-\propto}} dy. \tag{69.1}$$

حيث $0 < \propto < 1$

ملاحظات:

1. الدالة $\beta(\alpha, 1-\alpha)$ هي الدالة بيتا حيث:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt. \tag{70.1}$$

2. معادلة آبل التكاملية هي حالة خاصة من معادلة آبل التكاملية الرئيسية المعممة حيث $g(x) = x$

مثال

حل معادلة آبل التكاملية المعممة التالية

$$2x^{\frac{3}{2}} = \int_0^x \frac{1}{(x^3-t^3)^{\frac{1}{2}}} u(t)dt. \tag{71.1}$$

الحل

نلاحظ أن $\propto = \frac{1}{2}$, $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$ و $g(x) = x^3$ متزايدة بشكل رتيب على $]0,2[$ و $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ على كل المجال $]0,2[$

باستخدام (68.1) نجد

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{2t^{\frac{7}{2}}}{(x^3-t^3)^{\frac{1}{2}}} dt, \tag{72.1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} (\pi x^3) = 3x^2, \tag{73.1}$$

ومنه حل المعادلة (71.1) هو

$$u(x) = 3x^2. \quad (74.1)$$

7.1 معادلات فولتيرا الشاذة الضعيفة [2]

المعادلات التكاملية الضعيفة من نوع فولتيرا من النوع الثاني تكتب من الشكل

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x-t}} u(t)dt\,, x \in [0, T], \quad (75.1)$$

أو

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u(t)dt, \quad (76.1)$$

حيث $0 < \propto < 1, x \in [0, T]$

β ثابت.

المعادلة(76.1) هي معادلة فولتيرا الشاذة الضعيفة المعممة

تنشأ هذه المعادلات في العديد من تطبيقات الرياضيات والفيزياء والكيمياء مثل علم الفراغ ، التوصيل الحراري ، البلورة ...

وعلى افتراض أن الدالة $f(x)$سلسة بما فيه الكفاية بحيث تضمن

حل فريد لـ (75.1) و(76.1) ضعيف ومعمم.

تقع المعادلات الضعيفة (75.1) و(76.1) تحت فئة معادلات شاذة بنوى شاذة

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}. \quad (77.1)$$

$$k(x,t) = \frac{1}{[g(x)-g(t)]^{\propto}}. \quad (78.1)$$

على التوالي.

1.7.1 بعض الطرق لحل معادلة فولتيرا المفردة الضعيفة

هناك العديد من الطرق لحل المعادلات التكاملية و لكن نحن سنختار ثلاث طرق فقط منها وسنتعامل مع المعادلة (76.1) لأن (75.1) هي حالة خاصة من (76.1) حيث $\propto = \frac{1}{2}$

- **الطريقة التحليلية لأدوميان**

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u(t)dt\,, 0 < \propto < 1, \quad (79.1)$$

نضع

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (80.1)$$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

نعوض $u(x)$ بقيمتها في المعادلة (79.1) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt, \quad (81.1)$$

وبالمطابقة نجد

$$u_0(x) = f(x),$$
$$u_1(x) = \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u_0(x)dt,)$$
$$u_2(x) = \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u_1(x)dt,$$
$$u_3(x) = \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u_2(x)dt,$$
$$\vdots$$

(82.1)

بعد تحديد .... $u_0(x), u_1(x), u_2(x),$ سيتم تحديد الحل $u(x)$ في شكل سلسلة متقاربة .

من الضروري جدا إلي أن نشير إلي أنه توجد طريقة معدلة لطريقة أدوميان التحليلية تفيد في تسريع أيجاد الحل

طريقة أدوميان التحليلية المعدلة

تفيد الطريقة التحليلية المعدلة في تسريع إيجاد الحل و هي تقتضي تجزئة $f(x)$ إلي جزئين $f_2(x)$ و $f_1(x)$ حيث $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ومنه فإن

$$u_0(x) = f_1(x),$$
$$u_1(x) = f_2(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u_0(x)dt,$$
$$u_2(x) = \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u_1(x)dt,$$
$$u_3(x) = \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\propto}} u_2(x)dt,$$

(83.1)

مثال

حل باستخدام الطريقة التحليلية المعدلة المعادلة التكاملية التالية

$$u(x) = x - \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t)dt. \quad (84.1)$$

الحل

لدينا: $f_1(x) = x\ , f_2(x) = -\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}$

$$u_0(x) = x,$$

$$u_1(x) = -\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} + \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt = 0,$$

(85.1)

ومنه

$$u(x) = x. \quad (86.1)$$

وفي بعض الأحيان في الحل بطريقة أدوميان التحليلية نلجأ أيضا إلي استعمال ظاهرة شروط الضوضاء لإيجاد الحل

ظاهرة شروط الضوضاء

تعرف شروط الضوضاء بظهور مصطلحات متماثلة بإشارات متعاكسة بين مكونات $u(x)$. بإلغاء هذه الضوضاء بين المكونين $u_0(x)$ و $u_1(x)$ قد تعطي الحل الدقيق و الذي يجب التحقق منه بالتعويض في المعادلة الأصلية.

مثال

حل المعادلة التكاملية التالية

$$u(x) = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2-t^2}}u(t)dt. \quad (87.1)$$

الحل

$$u_0(x) = 1 - \frac{\pi}{2},$$

$$u_1(x) = \int_0^x \frac{1-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x^2-t^2}}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4},$$

(88.1)

شروط الضوضاء بين المكونين $u_0(x)$ و $u_1(x)$ هي $\mp\frac{\pi}{2}$ و بإلغاء شرط الضوضاء من $u_0(x)$ و وتعويض المصطلح الغير ملغي من $u_0(x)$ في المعادلة (87.1) نجده يحققها

ومنه الحل $u(x) = 1$

- **طريقة التقريب المتتالي**

في هذه الطريقة سندرس معادلة فولتيرا الضعيفة من النوع الثاني

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt, \quad (89.1)$$

تقدم طريقة التقارب المتتالي بالعلاقة التراجعية

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u_n(t)dt\,, \mathrm{n} \geq 1 \qquad (90.1)$$

نبدأ دائما بتخمين أولي لقيمة $u_0(x)$ و في الغالب ما نختار... $0,1,x,$ و الحل $u(x)$ يعطى بواسطة

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x), \qquad (91.1)$$

مثال

حل المعادلة التكاملية التالية

$$u(x) = 1 + x^2 - 2\sqrt{x} - \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt. \qquad (92.1)$$

الحل

نختار $u_0(x) = 0$ ومنه حسب العلاقة التراجعية

$$u_1(x) = 1 + x^2 - 2\sqrt{x} - \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}},$$

$$u_2 = 1 + x^2 - 2\sqrt{x} - \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} + \int_0^x \frac{1 + \mathrm{t}^2 - 2\sqrt{\mathrm{t}} - \frac{16}{15}\mathrm{t}^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\mathrm{x} - \mathrm{t}}} \mathrm{dt}$$

$$u_2 = 1 + x^2 - 2\sqrt{x} - \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{x} + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \pi x - \frac{\pi}{3}x^3$$

$$u_{n+1} = (1 + x^2) - \left(2\sqrt{x} + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}\right) + \left(2\sqrt{x} + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}\right) - \left(\pi x + \frac{\pi}{3}x^3\right) + \cdots$$

(93.1)

ومنه الحل $u(x)$ يكون

$$u(x) = 1 + x^2\,. \qquad (94.1)$$

- **طريقة تحويل لابلاس**

تم دراسة تحويل لابلاس سابقا ونذكر ان تحويل لابلاس لمنتج الالتفاف $(f_1(x) * f_2(x)$ يعطى بواسطة

$$L\big(f_1(x) * f_2(x)\big) = F_1(s)F_2(s). \qquad (95.1\ )$$

وسوف نركز دراستنا على معادلة فولتيرا المفردة الضعيفة المعممة التي تكتب من الشكل

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\propto}} u(t)dt, 0 < \propto < 1. \qquad (96.1)$$

و بإدخال تحويل لابلاس على المعادلة (96.1) نجد

$$L\big(u(x)\big) = L\big(f(x)\big) + L(x^{-\propto})L\big(u(x)\big), \qquad (97.1)$$

و يكافئ

$$U(s) = F(s) + \frac{\Gamma(1-\propto)}{s^{1-\propto}} U(s), \qquad (98.1)$$

$$U(s)-\frac{\Gamma(1-\propto)}{s^{1-\propto}}U(s)=F(s), \tag{99.1}$$

$$U(s)=\frac{s^{1-\propto}}{s^{1-\propto}-\Gamma(1-\propto)}\mathrm{F(s)}, \tag{100.1}$$

حيث

$$U(s)=L\big(u(x)\big),$$
$$F(s)=L\big(f(x)\big),$$

(101.1)

بعد إيجاد $U(s)$ ندخل تحويل لبلاس العكسي لطرفي المعادلة (1.101) نجد

$$u(x)=L^{-1}\left(\frac{s^{1-\propto}F(s)}{s^{1-\propto}-\Gamma(1-\propto)}\right). \tag{102.1}$$

ليس من الضروري استخدام طريقة تحويل لابلاس لكل مشكلة يمكن استخدام العلاقة مباشرة.

مثال

خل المعادلة التكاملية التالية

$$u(x)=x-\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}+\int_0^x\frac{1}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}u(t), \tag{103.1}$$

الحل

لدينا $f(x)=x-\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}$ و $\propto=\frac{2}{3}$

$$F(s)=L\left(x-\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{s^2}-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)s^{-\frac{7}{3}}, \tag{104.1}$$

و باستخدام العلاقة (102.1) نجد

$$u(x)=L^{-1}\left(\frac{s^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{s^2}-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)s^{-\frac{7}{3}}\right)}{s^{\frac{1}{3}}-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=x. \tag{105.1}$$

ومنه الحل هو

$$u(x)=x. \tag{106.1}$$

الفصل الثاني:

المعادلات التكاملية الخطية لآبل لأكثر من مجهول

1- مقدمة

2- معادلة آبل التكاملية الخطية المعممة لمجهولين

3- معادلة آبل التكاملية الخطية المعممة لثلاث مجاهيل

4- معادلات فولتيرا التكاملية الشاذة الضعيفة

1.2 مقدمة: في الفصل الأول تمت دراسة معادلات آبل الخطية لمجهول واحد و شكلها المعمم و الشاذ الضعيف و تم التعامل معها بمجموعة من الطرق و في هذا الفصل سيتم دراسة معادلة آبل التكاملية الخطية المعممة لأكثر من مجهول بواسطة تحويل لابلاس التي استخدمناها في الفصل الأول .

2.2 معادلة آبل التكاملية الخطية المعممة لمجهولين [2]

معدلة آبل التكاملية المعممة الخطية المعممة لمتغيرين تكتب من الشكل:

$$f_1(x) = \int_0^x \left(k_{11}(x,t)u(t) + k_{12}(x,t)v(t)\right)dt,$$

$$f_2(x) = \int_0^x \left(k_{21}(x,t)u(t) + k_{22}(x,t)v(t)\right)dt.$$

(1.2)

حيث الدوال f_1وf_2 هي دوال حقيقية معطاة و $v(t)$ و $u(t)$ هما مجهولين و النواة

$k_{ij}(x,t), 1 \leq i,j \leq 2$ هي نواة شاذة معطاة بالشكل

$$k_{ij}(x,t) = \frac{1}{(x-t)^{\propto_{ij}}}, 1 \leq i,j \leq 2. \quad (2.2)$$

و $\propto_{ij}$ هو ثابت

ملاحظة: يكون لمعادلة (1.2) حل إذا كان

$$det\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\right) \neq 0. \quad (3.2)$$

1.2.2 طريقة تحويل لابلاس

نطبق تحويل لابلاس على كلا جانبي المعادلة (1.2) نحصل على

$$F_1(s) = K_{11}(s)U(s) + K_{12}(s)V(s),$$

$$F_2(s) = K_{21}(s)U(s) + K_{22}(s)V(s),$$

(4.2)

حيث:

$$U(s) = L\big(u(t)\big),$$

$$V(s) = L\big(v(t)\big),$$

$$F_i(s) = L\big(f_i(t)\big), 1 \leq i \leq 2,$$

$$K_{ij}(s)=L\left(k_{ij}(t)\right),1\le i,j\le 2. \qquad (5.2)$$

و باستخدام قاعدة كرامر نجد

$$U(s)=\frac{\begin{vmatrix}F_1(s) & K_{12}(s)\\ F_2(s) & K_{22}(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}K_{11}(s) & K_{12}(s)\\ K_{21}(s) & K_{22}(s)\end{vmatrix}},V(s)=\frac{\begin{vmatrix}K_{11}(s) & F_1(s)\\ K_{21} & F_2(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}K_{11}(s) & K_{12}(s)\\ K_{21}(s) & K_{22}(s)\end{vmatrix}}. \qquad (6.2)$$

حيث أن

$$\begin{vmatrix}K_{11}(s) & K_{12}(s)\\ K_{21}(s) & K_{22}(s)\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (7.2)$$

بعد تحديد $V(s)$ و $U(s)$ نطبق تحويل لابلاس العكسي لنجد الحل الوحيد $v(t)$و$u(t)$.

ملاحظة: لتسهيل العمل و تجنب بعض الحسابات المملة يمكن استخدام بعض برامج الحاسوب مثل Maple و Mathematica.

لتبسيط الدراسة سنركز دراستنا على حالة معينة فقط و هي في حالة $\propto_{22}=\propto_{11}$ و $\propto_{21}=\propto_{12}$ و يمكن التعامل مع باقي الحالات بنفس الطريقة و بإستخدام برامج الحاسوب المذكورة سابقا.

مثال

حل المعادلة التكاملية التالية

$$\begin{cases}\frac{4}{3}\sqrt{x}(x+9)+\frac{5}{36}x^{\frac{4}{5}}(5x-54)=\int_0^x\left(\frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)+\frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}v(t)\right)dt,\\ \frac{4}{3}\sqrt{x}(x-9)+\frac{5}{36}x^{\frac{4}{5}}(5x+54)=\int_0^x\left(\frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}u(t)+\frac{1}{\sqrt{x-t}}v(t)\right)dt.\end{cases}$$

(8.2)

الحل

ندخل تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (8.2) نحصل على

$$\sqrt{\pi}s^{-\frac{5}{2}}(1+6s)+\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{14}{5}}(1-216s)=\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}U(s)+\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}V(s),$$

$$\sqrt{\pi}s^{-\frac{5}{2}}(1-6s)+\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{14}{5}}(1+216s)=\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}U(s)+\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}V(s).$$

(9.2)

ومنه

$$U(x)=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{\pi}s^{-\frac{5}{2}}(1+6s)+\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{14}{5}}(1-216s) & \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\\ \sqrt{\pi}s^{-\frac{5}{2}}(1-6s)+\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{14}{5}}(1+216s) & \sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}} & \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\\ \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}} & \sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix}}=\frac{1+6s}{s^2}, \tag{10.2}$$

$$V(x)=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}} & \sqrt{\pi}s^{-\frac{5}{2}}(1+6s)+\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{14}{5}}(1-216s)\\ \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}} & \sqrt{\pi}s^{-\frac{5}{2}}(1-6s)+\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{14}{5}}(1+216s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}} & \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\\ \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}} & \sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix}}=\frac{1-6s}{s^2}, \tag{11.2}$$

ومنه

$$\big(u(x),v(x)\big)=(x+6,x-6). \tag{12.2}$$

3.2 معادلة آبل التكاملية الخطية المعممة لثلاث مجاهيل [2]

تكتب معادلة آبل التكاملية الخطية المعممة لثلاث مجاهيل من الشكل

$$f_1(x)=\int_0^x k_{11}(x,t)u(t)+k_{12}(x,t)v(t)+k_{13}(x,t)w(t)dt,$$

$$f_2(x)=\int_0^x k_{21}(x,t)u(t)+k_{22}(x,t)v(t)+k_{23}(x,t)w(t)dt,$$

$$f_3(x)=\int_0^x k_{31}(x,t)u(t)+k_{32}(x,t)v(t)+k_{33}(x,t)w(t)dt. \tag{14.2}$$

حيث الدوال $f_1(x)$ و$f_2(x)$ و$f_3(x)$ هي دوال حقيقية معطاة و $v(t)$و $u(t)$ و $w(t)$ هم مجاهيل و النواة $k_{ij}(x,t), 1\le i,j\le 3$ هي نواة مفردة معطاة بالشكل

$$k_{ij}(x,t)=\frac{1}{(x-t)^{\alpha_{ij}}}, 1\le i,j\le 3. \tag{15.2}$$

يعطي نظام معادلات آبل التكاملية من ثلاث مجاهيل حلا فقط إذا كان:

$$det\left(\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}\right)\neq 0. \tag{16.2}$$

1.3.2 طريقة تحويل لابلاس

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة (14.2) نجد

$$F_1(s) = K_{11}(s)U(s) + K_{12}(s)V(s) + K_{13}(s)W(s),$$
$$F_2(s) = K_{21}(s)U(s) + K_{22}(s)V(s) + K_{23}(s)W(s),$$
$$F_3(s) = K_{31}(s)U(s) + K_{32}(s)V(s) + K_{33}(s)W(s).$$

(17.2)

حيث

$$U(s) = L\big(u(x)\big), V(s) = L\big(v(x)\big), W(s) = L\big(w(x)\big),$$
$$F_i(s) = L\big(f_i(x)\big), 1 \le i \le 3$$
$$K_{ij}(s) = k_{ij}(x,t), 1 \le i,j \le 3.$$

(18.2)

و بتطبيق قاعدة كرامر نجد

$$U(s) = \frac{\begin{vmatrix} F_1(s) & K_{12}(s) & K_{13}(s) \\ F_2(s) & K_{22}(s) & K_{23}(s) \\ F_3(s) & K_{32}(s) & K_{33}(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & K_{13}(s) \\ K_{12}(s) & K_{22}(s) & K_{23}(s) \\ K_{13}(s) & K_{32}(s) & K_{33}(s) \end{vmatrix}}, \tag{19.2}$$

$$V(s) = \frac{\begin{vmatrix} K_{11}(s) & F_1(s) & K_{13}(s) \\ K_{21}(s) & F_2(s) & K_{23}(s) \\ K_{31}(s) & F_3(s) & K_{33}(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & K_{13}(s) \\ K_{12}(s) & K_{22}(s) & K_{23}(s) \\ K_{13}(s) & K_{32}(s) & K_{33}(s) \end{vmatrix}}, \tag{20.2}$$

$$U(s) = \frac{\begin{vmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & F_1(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) & F_2(s) \\ K_{31}(s) & K_{32}(s) & F_3(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & K_{13}(s) \\ K_{12}(s) & K_{22}(s) & K_{23}(s) \\ K_{13}(s) & K_{32}(s) & K_{33}(s) \end{vmatrix}}. \tag{21.2}$$

يعطي النظام الخطي (14.2) حلا فريدا $u(x), v(x)$ و $w(x)$ إذا و فقط إذا

$$\begin{vmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & K_{13}(s) \\ K_{12}(s) & K_{22}(s) & K_{23}(s) \\ K_{13}(s) & K_{32}(s) & K_{33}(s) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{22.2}$$

و لأسباب تتعلق بالبساطة سنركز دراستنا فقط على حالة واحدة فقط و هي:

$$\alpha_{11}=\alpha_{22} \quad \text{و} \quad \alpha_{12}=\alpha_{21}. \tag{23.2}$$

بعد تحديد $U(s), V(s)$ و $W(s)$ بإستخدام تحويل لبلاس العكسي يمكن تحديد الحل الفريد $u(x), v(x)$ و $w(x)$.

ملاحظة: من الضروري جدا استعمال البرامج الحاسوبية المذكورة سالفا في بعض الحسابات .

و لأسباب تتعلق بالبساطة أيضا سنركز دراستنا على حالة واحدة فقط و هي متمثلة في أن نأخذ في :

- المعادلة الأولى في (14.2):$v(x)=0$, $\propto_{11}=\propto_{13}$.
- المعادلة الثانية في (14.2):$u(x)=0$, $\propto_{22}=\propto_{23}$.
- المعادلة الثالثة في (14.2): $w(x)=0$, $\propto_{31}=\propto_{32}$

مثال

حل نظام المعادلات التكاملية التالية

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt{x}(8x+9)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\big(u(t)+w(x)\big)dt, \\ \frac{3}{10}x^{\frac{2}{3}}(27x+35)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}\big(v(t)+w(x)\big)dt, \\ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}(4x+5)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{4}}}\big(u(t)+v(x)\big)dt, \end{cases} \quad (24.2)$$

الحل

ندخل تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (24.2) نتحصل على

$$s^{-2}(8+6s)=\big(U(s)+W(s)\big),$$

$$s^{-2}(9+7s)=\big(V(s)+W(s)\big),$$

$$s^{-2}(7+5s)=\big(U(s)+V(s)\big),$$

(25.2)

ومنه

$$U(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^{-2}(8+6s) & 0 & 1 \\ s^{-2}(9+7s) & 1 & 1 \\ s^{-2}(7+5s) & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{3+2s}{s^2}, \quad (26.2)$$

$$V(s)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & s^{-2}(8+6s) & 1 \\ 1 & s^{-2}(9+7s) & 1 \\ 0 & s^{-2}(7+5s) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=0, \quad (27.2)$$

$$W(s)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & s^{-2}(8+6s) \\ 1 & 1 & s^{-2}(9+7s) \\ 0 & 1 & s^{-2}(7+5s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=-\frac{3+2s}{s^2} \quad (28.2)$$

بعد إيجاد كل من $U(s),V(s),W(s)$ ندخل تحويل لابلاس العكسي على كل منهما نجد

$$(u(x),v(x),w(x))=\big(3x+2,0,-(3x+2)\big). \quad (29.2)$$

4.2 معادلات فولتيرا التكاملية الشاذة الضعيفة [2]

في هذا القسم سنتطرق فقط لمعادلة فولتيرا التكاملية الشاذة الضعيفة ذات مجهولين و يمكن بنفس الطريقة التعميم لعدة مجاهيل و في إيجاد الحل سنستخدم فقط طريقة تحويل لابلاس .

نظام معادلات فولتيرا التكاملية الشاذة الضعيفة لمجهولين تكتب من الشكل

$$u(x) = f_1(x) + \int_0^x (k_{11}(x,t)u(t) + k_{12}(x,t)v(t))dt,$$

$$v(x) = f_2(x) + \int_0^x (k_{21}(x,t)u(t) + k_{22}(x,t)v(t))dt.$$

(30.2)

حيث الدوال f_1وf_2 هي دوال حقيقية معطاة و$v(t)$و$u(t)$ هما متغيرين مجهولين و النواة $k_{ij}(x,t), 1 \leq i,j \leq 2$ هي نواة شاذة معطاة بالشكل

$$k_{ij}(x,t) = \frac{1}{(x-t)^{\propto_{ij}}}, 1 \leq i,j \leq 2. \tag{31.2}$$

1.4.2 طريقة تحويل لابلاس

نطبق تحويل لابلاس على المعادلة (30.2) نجد

$$U(s) = F_1(s) + K_{11}(s)U(s) + K_{12}(s)V(s),$$

$$V(s) = F_2(s) + K_{21}(s)U(s) + K_{22}(s)V(s).$$

(32.2)

ويكافئ

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{s}) = (1 - \mathrm{K}_{11}(s))U(s) - K_{12}(s)V(s),$$

$$F_2(s) = -K_{21}(s)U(s) + \big(1 - K_{22}(s)\big)V(s).$$

(33.2)

حيث:

$$U(s) = L\big(u(t)\big),$$

$$V(s) = L\big(v(t)\big),$$

$$F_i(s) = L\big(f_i(t)\big), 1 \leq i \leq 2,$$

$$K_{ij}(s) = L\left(k_{ij}(t)\right), 1 \leq i,j \leq 2.$$

(34.2)

و بإستخدام قاعدة كرامر للمعادلة (33.2) نجد

$$U(s)=\frac{\begin{vmatrix}F_1(s) & -K_{12}(s)\\ F_2(s) & 1-K_{22}(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-K_{11}(s) & -K_{12}(s)\\ -K_{21}(s) & 1-K_{22}(s)\end{vmatrix}}, \tag{35.2}$$

و

$$V(s)=\frac{\begin{vmatrix}1-K_{11}(s) & F_1(s)\\ -K_{21}(s) & F_2(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-K_{11}(s) & -K_{12}(s)\\ -K_{21}(s) & 1-K_{22}(s)\end{vmatrix}}. \tag{36.2}$$

حيث

$$\begin{vmatrix}1-K_{11}(s) & -K_{12}(s)\\ -K_{21}(s) & 1-K_{22}(s)\end{vmatrix}\neq 0. \tag{37.2}$$

بعد أن حددنا $U(s)$ و $V(s)$ يمكن تحديد الحل الوحيد $u(x)$ و $v(x)$ بإستخدام تحويل لبلاس العكسي L^{-1}.

مثال

$$\begin{cases} u(x)=1+x^2-\frac{5}{2}x^{\frac{4}{5}}+\int_0^x\left(\frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}u(t)+\frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}v(t)\right)dt,\\ v(x)=1-x^2-\frac{5}{2}x^{\frac{4}{5}}+\int_0^x\left(\frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}u(t)+\frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}v(t)\right)dt, \end{cases} \tag{38.2}$$

الحل

ندخل تحويل لابلاس على الجملة (38.2) نجد

$$\left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right)U(s)-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}V(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^3}+2\Gamma(\frac{4}{5})s^{-\frac{9}{5}}$$
$$-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}U(s)+\left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right)V(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^3}+2\Gamma(\frac{4}{5})s^{-\frac{9}{5}}$$

(39.2)

ومنه

$$U(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{s}+\frac{2}{s^3}+2\Gamma(\frac{4}{5})s^{-\frac{9}{5}} & -\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\\ \frac{1}{s}-\frac{2}{s^3}+2\Gamma(\frac{4}{5})s^{-\frac{9}{5}} & \left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right) & -\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\\ -\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}} & \left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right)\end{vmatrix}}=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^3}, \tag{40.2}$$

و

$$V(s)=\frac{\begin{vmatrix}\left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right) & \frac{1}{s}+\frac{2}{s^3}+2\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{9}{5}}\\ -\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}} & \frac{1}{s}-\frac{2}{s^3}+2\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{9}{5}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right) & -\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\\ -\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}} & \left(1-\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)s^{-\frac{4}{5}}\right)\end{vmatrix}}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^3}, \qquad (41.2)$$

ومنه الحل

$$\big(u(x),v(x)\big)=(1+x^2,1-x^2). \qquad (43.2)$$

الفصل الثالث

معادلات آبل التكاملية غير الخطية

1- مقدمة

2- معادلات آبل التكاملية غير الخطية

3- معادلة آبل التكاملية غير الخطية المعممة

4- معادلات آبل التكاملية غير الخطية الرئيسية المعممة

5- معادلات فولتيرا غير الخطية الضعيفة الشاذة لمجهول واحد

6- معادلات فولتيرا غير الخطية الشاذة الضعيفة ذات مجهولين

1.3 مقدمة

في الفصل الأول تم تناول معادلات آبل التكاملية الخطية و في هذا الفصل سنتطرق لمعادلات آبل التكاملية غير الخطية.

2.3 معادلات آبل التكاملية غير الخطية [2]

الشكل العام لمعادلة آبل التكاملية غير الخطية هو

$$f(x) = \int_0^x k(x,t)F\big(u(t)\big)dt. \tag{1.3}$$

حيث $f(x)$ هي دالة حقيقية معروفة و $F(u(t))$ هي دالة غير الخطية لـ $u(t)$ والنواة الشاذة $k(x,t)$ تعطى بالشكل

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}. \tag{2.3}$$

ونذكر أن الدالة الغير معروفة $u(t)$ تحدث فقط داخل علامة التكامل في معادلة آبل التكاملية (1.3).

و لتحديد حل لمعادلة آبل التكاملية غير الخطية (1.3) يجب أن نحولها إلي معادلة آبيل الخطية من الشكل

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}v(t)dt, \tag{3.3}$$

و باستخدام التحويل

$$,v(x) = F\big(u(t)\big) \tag{4.3}$$

حيث $F(u(t)$ يكون قابل للقلب أي $\mathrm{F}^{-1}(u(t))$ موجود. ومنه

$$u(t) = F^{-1}\big(v(t)\big). \tag{5.3}$$

1.2.3 طريقة تحويل لابلاس

نطبق تحويل لابلاس على جانبي المعادلة (3.3) حيث

$$L\big(f(x)\big) = L\big(v(x)\big)L\big(\sqrt{x}\big), \tag{6.3}$$

$$.F(s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}V(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}V(s). \tag{7.3}$$

$$V(s) = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}F(s). \tag{8.3}$$

$$.\ V(s) = \frac{s}{\pi}\left(\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}F(s)\right). \tag{9.3}$$

$$L\big(v(x)\big) = \frac{s}{\pi}L\big(y(x)\big), \tag{10.3}$$

حيث

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}f(t)dt \tag{11.3}$$

و منه حسب خواص تحويل لابلاس فإن

$$L\left(y'(x)\right) = sL\big(y(x)\big) - y(0), \tag{12.3}$$

و بالتعويض في المعادلة (10.3) نجد

$$L\big(v(x)\big) = \frac{1}{\pi} L\big(y'(x)\big), \tag{13.3}$$

و بإستخدام تحويل لابلاس العكسي L^{-1} نجد

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-\mathrm{t}}} \mathrm{dt}, \tag{14.3}$$

بعد إيجاد $v(x)$ يتم إيجاد الحل $u(x)$ بإستخدام العلاقة

$$u(x) = F^{-1}\big(v(x)\big). \tag{15.3}$$

ملاحظة: ليس من الضروري استخدام تحويل لابلاس لإيجاد الحل في معادلات آبل غير الخطية. يمكن استخدام الصيغتين (14.3) و (15.3) مباشرة.

مثال

حل المعادلة التكاملية غير الخطية التالية:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x}(3+2x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \ln(u(t))dt. \tag{16.3}$$

الحل

نضع $v(x) = \ln\big(u(x)\big)$ و بإستخدام العلاقة (16.3)نجد $u(x) = e^{v(x)}$

لدينا

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}(3+2x) \tag{17.3}$$

و باستخدام الصيغة (14.3) نجد

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{t}}(3+2t)}{\sqrt{x-\mathrm{t}}} \mathrm{dt}, \tag{18.3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} (\frac{9\pi}{8}(x^2+2x) = \frac{9}{4}(x+1), \tag{19.3}$$

ومنه الحل

$$u(x) = e^{v(x)} = \mathrm{e}^{\frac{9}{4}(x+1)}. \tag{20.3}$$

3.3 معادلة آبل التكاملية غير الخطية المعممة

تكتب معادلة آبل غير الخطية المعممة من الشكل

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\propto}} F\big(u(t)\big)dt, 0 < \propto < 1. \tag{21.3}$$

حيث $\propto$ ثابت معروف و $f(x)$ دالة معروفة و $F(u(x))$ هي دالة غير الخطية ل $u(x)$ و $\frac{1}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\propto}}$ تسمى نواة معادلة آبيل التكاملية .

ملاحظة: في حالة $\propto = \frac{1}{2}$ تصبح المعادلة التكاملية غير الخطية المعممة لآبل هي نفسها معادلة آبل التكاملية غير الخطية.

1.3.3 طريقة تحويل لابلاس

لحل معادلة آبل التكاملية غير الخطية المعممة (21.3) يجب تحويلها إلي معادلة آبيل التكاملية الخطية المعممة من الشكل

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\propto}}v(t)dt,\ 0<\propto<1, \tag{22.3}$$

حيث

$$v(t)=F\big(u(t)\big), \tag{23.3}$$

حيث $F\big(u(t)\big)$ قابل للقلب و $F^{-1}(\mathrm{u(t)})$ موجود و منه فإن

$$u(x)=F^{-1}\big(v(x)\big), \tag{24.3}$$

وبإدخال تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (22.3) نجد

$$L\big(f(x)\big)=L\big(v(x)\big)L(x^{-\propto}), \tag{25.3}$$

$$F(s)=V(s)\frac{\Gamma(1-\propto)}{s^{1-\propto}}, \tag{26.3}$$

ومنه

$$V(s)=\frac{s^{1-\propto}}{\Gamma(1-\propto)}F(s), \tag{27.3}$$

$$V(s)=\frac{s}{\Gamma(\propto)\Gamma(1-\propto)}(\Gamma(\propto)s^{-\propto}(F(s)), \tag{28.3}$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (28.3) على الشكل التالي

$$L\big(v(x)\big)=\frac{s}{\Gamma(\propto)\Gamma(1-\propto)}L\big(y(x)\big), \tag{29.3}$$

حيث

$$y(x)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\propto-1}}f(t)dt, \tag{30.3}$$

ولدينا حسب خواص تحويل لابلاس نجد

$$L\left(y'(x)\right)=sL\big(y(s)\big)-y(0), \tag{31.3}$$

ولدينا

$$\Gamma(\propto)\Gamma(1-\propto)=\frac{\pi}{\sin(\propto\pi)}, \tag{32.3}$$

وبتعويض كل من المعادلتين (31.3) و (32.3) في المعادلة (29.3) نجد

$$L\big(v(x)\big)=\frac{\sin(\propto\pi)}{\pi}L\left(y'(x)\right), \tag{33.3}$$

و بإدخال تحويل لابلاس العكسي L^{-1} على طرفي المعادلة (33.3) نجد

$$v(x)=\frac{\sin(\propto\pi)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\propto}}f(t)dt, \tag{34.3}$$

و بحساب اشتقاق التكامل الأيمن من المعادلة (34.3) نحصل على

$$v(x) = \frac{\sin(\propto\pi)}{\pi}\left(\frac{f(0)}{x^{1-\propto}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\propto}}dt\right), \tag{35.3}$$

حيث $0 <\propto< 1$

بعد الحصول على $v(x)$ يمكن تحديد الحل $u(x)$ بواسطة العلاقة التالية

$$u(x) = F^{-1}\big(v(x)\big). \tag{36.3}$$

مثال

حل معادلة آبل التكاملية غير الخطية التالية

$$\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{u}^2(\mathrm{t})\mathrm{dt}. \tag{37.3}$$

الحل

لحل المعادلة (37.3) نضع

$$v(t) = F\big(u(t)\big) = \mathrm{u}^2(\mathrm{t}), \tag{38.3}$$

ومنه

$$u(x) = F^{-1}\big(v(x)\big) = \sqrt{v(x)}, \tag{39.3}$$

ومنه حسب العلاقة (34.3) نجد

$$v(x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{\frac{9}{10}t^{\frac{5}{3}}}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}dt = x, \tag{40.3}$$

ومنه حسب العلاقة(39.3) فإن

$$u(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{x} \tag{41.3}$$

4.3 معادلات آبل التكاملية غير الخطية الرئيسية المعممة [2]

تكتب معادلة آبل التكاملية الغير خطية الرئيسية المعممة من الشكل

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\big(g(x)-g(t)\big)^{\propto}}F\big(u(t)\big), 0 <\propto< 1. \tag{42.3}$$

حيث $g(t)$ هي دالة متزايدة و رتيبة و قابلة للتفاضل في بعض النقاط t حيث $t \in]0, b[$ و $g'(t) \neq 0$ عند كل النقط t و$F\big(u(t)\big)$ هي دالة غير خطية مجهولة ل $u(t)$.

و لحل المعادلة الغير خطية الرئيسية المعممة لآبل (42.3) هناك عدة طرق من بينها طريقة تحويل لابلاس و التي سنستخدمها في إيجاد الحل.

1.4.3 طريقة تحويل لابلاس

لحل معادلة آبل التكاملية غير الخطية الرئيسة المعممة (42.3) يجب تحويلها إلي معادلة آبيل التكاملية الخطية الرئيسية المعممة من الشكل

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(g(x)-g(t))^{\propto}}v(t)dt, 0<\propto<1, \tag{43.3}$$

حيث

$$v(x)=F\big(u(x)\big), \tag{44.3}$$

حيث $F\big(u(t)\big)$ قابل للقلب و $F^{-1}(\mathrm{u(t)})$ موجود و منه فإن

$$u(x)=F^{-1}\big(v(x)\big), \tag{45.3}$$

ومن خلال إيجاد الحل بطريق تحويل لابلاس لمعادلة آبل التكاملية الخطية الرئيسية المعممة في الفصل الأول نجد

$$v(x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\mathrm{x}}\frac{g^{'}(t)f(t)}{[g(x)-g(t)]^{1-\propto}}dt, \tag{46.3}$$

بعد تحديد $v(x)$ يمكن تحديد الحل الوحيد $u(x)$ للمعادلة (43.3) باستخدام العلاقة (45.3).

مثال

حل المعادلة التكاملية التالية

$$x=\int_0^x \frac{1}{(x^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{u(t)}dt. \tag{47.3}$$

الحل

لدينا $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$ و هي دالة رتيبة ومتزايدة و قابلة للتفاضل في المجال $]0,\infty[$ $x\in$ و $g^{'}(x)=2x\neq 0$ في المجال$]0,\infty[$ $x\in$ و$F(u(t)=\sqrt{u(t)}$

نضع

$$v(x)=F\big(u(t)\big)=\sqrt{u(t)},) \tag{48.3}$$

و باستخدام العلاقة (45.3) نجد

$$u(x)=v^2(x), \tag{49.3}$$

ومنه المعادلة (47.3) تصبح كما يلي

$$x=\int_0^x \frac{1}{(x^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}v(t)dt, \tag{50.3}$$

ومنه حسب العلاقة (46.3) نجد

$$v(x)=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\mathrm{x}}\frac{2t^2}{(x^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}dt, \tag{51.3}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}x^3\right)=x, \tag{52.3}$$

ومنه حسب العلاقة (49.3) فإن

$$u(x) = x^2. \quad (53.3)$$

5.3 معادلات فولتيرا غير الخطية الضعيفة الشاذة لمجهول واحد [2]

تكتب معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية الضعيفة الشاذة من النوع الثاني ذات مجهول واحد من الشكل

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x-t}} F\big(u(t)\big)dt, x \in [0, T] \quad (54.3)$$

و

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{(g(x)-g(t))^{\propto}} F\big(u(t)\big)dt, \quad (55.3)$$

حيث

$$x \in [0, T], 0 < \propto < 1,$$

و β ثابت معروف و $f(x)$ دالة معروفة و $F(u(x))$ هي دالة غير الخطية ل $u(x)$

ملاحظة

- المعادلة (55.3) تسمى معادلة فولتيرا الغير خطية الضعيفة الشاذة المعممة.
- المعادلة (54.3) هي حالة خاصة من المعادلة (55.3) حيث $g(x) = x$ و $\propto = \frac{1}{2}$.

هناك العديد من الطرق لحل معادلة فولتيرا الغير خطية الشاذة الضعيفة و لكن نحن سنكتفي بطريقة واحدة فقط و هي الطريقة التحليلية لأدوميان و يمكن أن نستخدم الطريقة التحليلية المعدلة لأدوميان و ظاهرة شروط الضوضاء أينما رأينا ذلك مناسبا.

1.5.3 الطريقة التحليلية لأدوميان

سنطبق الطريقة التحليلية لأدوميان فقط على معادلة فولتيرا غير الخطية الضعيفة الشاذة المعممة (55.3) لان المعادلة (54.3) هي جالة خاصة من المعادلة (55.3) كما هو موضح في الملاحظة السابقة.

لإيجاد الحل $u(x)$ نضع

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (56.3)$$

و

$$F\big(u(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \quad (57.3)$$

حيث

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0,1,2,\ldots \quad (58.3)$$

A_nهي أدوميان كثيرات الحدود

بتعويض المعادلتين (57.3) و (58.3) في المعادلة (55.3) نتحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{(g(x)-g(t))^{\propto}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\right)dt \quad (59.3)$$

حيث $0 < \propto < 1$.

الحدود $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ يتم تحديدها بإستخدام العلاقة التكرارية التالية

$$\mathrm{u}_0(x) = f(x),$$

$$\mathrm{u}_1(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\left(g(x) - g(t)\right)^{\propto}} A_0(t)dt,$$

$$\mathrm{u}_2(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\left(g(x) - g(t)\right)^{\propto}} A_1(t)dt,$$

$$\mathrm{u}_3(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\left(g(x) - g(t)\right)^{\propto}} A_2(t)dt,$$

(60.3)

بعد تحديد $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ سيتم تحديد الجل $u(x)$ على شكل سلسلة متقاربة .

مثال

حل المعادلة التكاملية غير الخطية التالية

$$x^{\frac{1}{4}} - x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2-t^2}} u^4(t)dt. \qquad (61.3)$$

الحل

لإيجاد حل المعادلة (61.3) نستخدم الطريقة التحليلية لأدوميان المعدلة حيث

$$f_1(x) = x^{\frac{1}{4}}, f_2(x) = -x, \qquad (62.3)$$

ومنه

$$\mathrm{u}_0(x) = x^{\frac{1}{4}},$$

$$u_1(x) = -x + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - t^2}} u_0^4(t)dt,$$

$$u_1(x) = -x + \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = -x + x = 0,$$

(63.3)

ومنه الحل هو

$$u(x) = x^{\frac{1}{4}}. \qquad (64.3)$$

6.3 معادلات فولتيرا غير الخطية الشاذة الضعيفة ذات مجهولين [2]

تكتب معادلات فولتيرا غير الخطية الشاذة الضعيفة ذات متغيرين من الشكل

$$u(x) = f_1(x) + \int_0^x \Big(k_{11}(x,t)F_{11}\big(u(t)\big) + k_{12}(x,t)F_{12}\big(v(t)\big)\Big)\,dt,$$

$$v(x) = f_2(x) + \int_0^x \Big(k_{21}(x,t)F_{21}\big(u(t)\big) + k_{22}(x,t)F_{22}\big(v(t)\big)\Big)\,dt.$$

(65.3)

حيث $f_{\mathrm{i}}(x), i = 1,2$ هي دوال ذات قيم حقيقية و الدوال $\mathrm{F_{ij}}(x,t), 1 \le i,j \le 2$ هي دوال غير الخطية و النواة $\mathrm{k_{ij}}(x,t), 1 \le i,j \le 2$ هي نواة شاذة ضعيفة لمعادلة فولتيرا التكاملية المعممة من الشكل

$$k_{\mathrm{ij}}(x) = \frac{1}{(g(x)-g(t))^{\propto}}, 1 \le i,j \le 2. \quad (66.3)$$

توجد هناك العديد من الطرق لإيجاد الجل $u(x), v(x)$ للمعادلة التكاملية غير الخطية الشاذة الضعيفة لمجهولين (65.3) و سنتطرق فقط في هذا الفصل إلي طريقة تحليل أدوميان المعدلة

1.6.3 الطريقة التحليلية المعدلة لأدوميان

نطبق طريقة أدوميان التحليلية المعدلة على المعادلة (65.3)

نقوم عادة بتقسيم الدالة $f_{\mathrm{i}}(x), i = 1,2$ إلي جزئين $f_{i1}(x)$و$f_{i2}(x)$ حيث يتم تخصيص الجزء الأول $f_{\mathrm{i1}}(x), i = 1,2$ للمكونين $\mathrm{u}_0(x)$و$v_0(x)$ ومع ذلك الجزء الثاني $f_{\mathrm{i2}}(x), i = 1,2$ يتم بها تعين المكونين $\mathrm{u}_1(x)$و$v_1(x)$ و بناءا على ذلك نستخدم علاقة التكرار المعدلة كما يلي:

$$u_0(x) = f_{11}(x), \qquad v_0(x) = f_{21}(x),$$

$$u_1(x) = f_{12}(x) + \int_0^x \big(k_{11}(x,t)A_{11}(t) + k_{12}(x,t)B_{12}(t)\big)dt,$$

$$v_1(x) = f_{22}(x) + \int_0^x \big(k_{21}(x,t)A_{21}(t) + k_{22}(x,t)B_{22}(t)\big).$$

(67.3)

حيث A_{i1} و B_{i2} هي كثيرات الحدود لأدوميان للدوال غير الخطية F_{i1} و F_{i2} على التوالي.

مثال

حل المعادلة التكاملية غير الخطية التالية

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{\cos x} + 2(\cos x - 1)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\sin x} + \\ \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x - \sin t}} u^2(t) + \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos t}} v^2(t)\right) dt, \\ v(x) = \sqrt{\sin x} + \frac{3}{2}(\cos x - 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + \\ \int_0^x \left(\frac{1}{(\sin x - \sin t)^{\frac{1}{3}}} u^2(t) + \frac{1}{(\cos x - \cos t)^{\frac{1}{3}}} v^2(t)\right) dt. \end{cases} \quad (68.3)$$

الحل

نطبق الطريقة التحليلية المعدلة لأدوميان لحل المعادلة (68.3) حيث

$$u_0(x) = \sqrt{\cos x}, \quad v_0(x) = \sqrt{\sin x},$$

$$\begin{gathered} u_1(x) = 2(\cos x - 1)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\sin x} + \\ \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x - \sin t}} {u_0}^2(t) + \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos t}} {v_0}^2(t)\right) dt, \\ v_1(x) = \frac{3}{2}(\cos x - 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + \\ \int_0^x \left(\frac{1}{(\sin x - \sin t)^{\frac{1}{3}}} {u_0}^2(t) + \frac{1}{(\cos x - \cos t)^{\frac{1}{3}}} {v_0}^2(t)\right) dt. \end{gathered} \quad (69.3)$$

$$\begin{gathered} u_1(x) = 2(\cos x - 1)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\sin x} + \\ \int_0^x \left(\frac{\cos t}{\sqrt{\sin x - \sin t}} + \frac{\sin t}{\sqrt{\cos x - \cos t}} {v_0}^2(t)\right) dt = 0, \\ v_1(x) = \frac{3}{2}(\cos x - 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + \\ \int_0^x \left(\frac{\sin t}{(\sin x - \sin t)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\cos t}{(\cos x - \cos t)^{\frac{1}{3}}} {v_0}^2(t)\right) dt = 0. \end{gathered} \quad (70.3)$$

و حسب(70.3) يستلزم أن

$$u_{k+1}(x) = 0, k \geq 1 \, , v_{k+1}(x) = 0, k \geq 1. \quad (71.3)$$

ومنه

$$\big(u(x), v(x)\big) = \big(\sqrt{\cos x}\, , \sqrt{\sin x}\big). \quad (72.3)$$

الخاتمة

لقد حاولنا في هذا العمل و هذه المذكرة إعطاء لمحة قصيرة عن المعادلات التكاملية و أصنافها و عن تحويل لابلاس و بعض خصائصه، و قمنا بدراسة مبسطة لمعادلات آبل التكاملية الخطية و غير الخطية و لمجهول و لأكثر من مجهول و أصناف كل منهم وبعض طرق حلها مثل طريقة تحويل لابلاس و طريقة أدوميان، قمنا أيضا بدراسة جد مبسطة لمعادلات فولتيرا الشاذة الضعيفة و التي تعتبر معادلات آبل جزء منها و قدمنا بعض الطرق لحلها، فهذا ما اقتصرت عليه مذكرتنا هذه فقط مع التدعيم ببعض الأمثلة لتسهيل الفهم و تعميم الفائدة. و ما قدمناه نحن في مذكرتنا هذه ما هو إلا جزء من البحوث المقدمة في مجال معادلات آبل التكاملية.

المصادر العربية:

1- د. معروف بسوت لليش، المعادلات التكاملية وحساب التحويلات، منشورات جامعة حلب، كلية العلوم، سوريا، 2007

المصادر الأجنبية:

2- Abdul-majid wazwaz: Linear and nonlinear intergarl Equations methode and applications, Sait xavier university chicago.USA.2011
3- B.N Mandal, A.Chakrabarti: Applied singlar integral equations, Scince publishers, USA.2011
4- V. Singh, R. Pandey and O. Singh, New stable numerical solutions of singularintegral equations of Abel type by using normalized Bernstein polynomials, Appl.Math. Sciences, 3 (2009) 241–255.
5- 6- R. P. Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, (1997).
6- I.N. Sneddon, Mixed boundary value problems in potential theory, Wiley, NewYork, (1966).
7- E. Erdogan, Approximate solutions of singular integral equations, SIAM J. Appl.Math., 17 (1969) 1041–1059
8- 3. R. Estrada and R. Kanwal, Singular Integral Equations, Birkhauser, Berlin,(2000).

الملخص:

تكمن أهمية هذا العمل في دراسة معادلات آبل التكاملية الخطية و الغير خطية و أصنافها وكذلك دراسة معادلات فولتيرا الضعيفة الشاذة; مستعملين في كل ذلك بعض الطرق لحلها: طريقة تحويل لابلاس، الطريقة التحليلية لأدوميان، والطريقة التحليلية المعدلة لأدوميان.

الكلمات المفتاحية:

معادلات آبل الخطية، معادلات آبل غير الخطية، معادلات فولتيرا الشاذة الضعيفة، تحويل لابلاس الطريقة التحليلية لأدوميان، الطريقة التحليلية المعدلة لأدوميان.

Résumé:

L'importance de ce travail réside dans l'étude des équations intégrales linéaires et non linéaires d'Abel et de leurs types, et ainsi que l'étude des équations de Volterra singulier faibles; en utilisant, dans tout cela, quelques méthodes pour les résoudre: la méthode de transformation de Laplace, la méthode analytique d'Adomian et la méthode analytique modifiée d'Adomian.

Summary:

The importance of This Works lies in the study of liner and nonlinear Apple's integral equations and their varieties, as well as the study of the anomalous weak Volterra equations; In all this they use some methods to solve them: the Laplace transform method, the Edomian analytic method, .and the modified Edomian analytical method

mots clés

Les équations linéaires d'Abel, les équations non linéaires d'Abel, les équations de Volterra anormales faibles, la transformée de Laplace, la méthode analytique d'Edomian, la méthode .analytique modifiée d'Edomian