République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté En Vue De L'obtention Du

DIPLÔME DE MASTER

EN MATHÉMATIQUES

Option : Probabilité et Statistique

Par

Cherchef Djilali

Thème

Contrôle Optimal Stochastiques pour les EDSPRs linéaires

Membres du jury

Boussaad Abdelmalik	M A A	UKMO	Président
Manseul Ibrahim	M A A	UKMO	Examinateur
Ben brahim Radhia	M. A. B	UKMO	Rapporteur

Dédicace

Mon voyage universitaire a pris fin après la fatigue et les difficultés ...

Et me voici, en terminant mes recherches de fin d'études, avec toute la vigueur et la vigueur.

Je suis reconnaissant à tous ceux qui ont eu du mérite dans ma carrière et m'aident, même avec un peu, mes parents, ma famille cherchef , mes amis et mes professeurs vénérés.

Je vous dédie mes recherches supérieures ....

REMERCIEMENTS

Je suis honoré de présenter cette humble œuvre d'abord à Dieu Tout-Puissant, puis à mes chers parents, ma mère compatissante et mon cher père, puis à ma chère épouse. J'apprécie les efforts acharnés que vous avez déployés pour moi. Vous étiez digne de gratitude et d'appréciation, nous devons donc l'apprécier.

Et mes frères bien-aimés , Chers amis, puis mon professeur encadré, qui mérite notre sincère respect et notre appréciation

Pour ses efforts remarquables, nous lui adressons nos sincères remerciements, qui ne lui donnent pas un peu de ce qu'elle mérite, pour ce qu'elle a mis au service de notre entreprise d'œuvres élaborées et réussies, qui ont contribué au développement de l'œuvre, et à son avancement de manière significative, avec nos vœux pour ses plus de succès et progrès permanents.

Table des matières

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}[X]$	espérance mathématique ou moyenne du v.a. X.
$\mathbb{E}[.\backslash.]$	espérance conditionelle
exp	exponentiel
$(\Omega, P, \mathcal{F})$	espace de probabilité complet.
$L^2_{\mathcal{F}}$	L'espace des processus $\mathcal{F}_t$-mesurable et de carré intégrable.
$< .,. >$	Le croche tstochastique
W_t	processus de Wiener
J	fonction de coût
U	ensenble de contrôles admissibles
$u_.$	contrôle admissible
$H.(t,...)$	fonction de Hamiltonienne
p.p	presque partout
p.s	presque sûrement

Introduction

Dans ce mémoire nous intéressons au problème de contrôle optimal stochastique. Plus précisément, l'existence d'un contrôle optimal ainsi que d'établir les conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPR en abrégé dans la suite) linéaire de la forme suivante

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t (A_1.X_s + A_2 u_s)\, ds + \int_0^t (C_1.X_s + D_1.u_s)\, dW_s \\ Y_t = \xi + \int_t^T (A_2 X_s + B_2 Y_s + C_2 Z_s + D_2 u_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{cases}$$

L'objectif du controlleur est de minimiser le coût $J(u)$ sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles. La fonction coût est d'éfinie par

$$J(u) := E\left[l(X_T) + k(Y_0) + \int_0^T h(t, X_t, Y_t, Z_t, u_t)\, dt \right].$$

La théorie du contrôle optimal est utilisée pour modéliser beaucoup de situations en sciences de l'ingénieur, en sciences économiques et sociales et de façon plus générale dans tous les domaines utilisant les applications des mathématiques.

ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 (Rappels de calcul stochastique) :

Ce chapitre est consacré la théorie du calcul stochastique, en donnant quelques notions et des d'éfinitions (processus stochastique, Mouvement brownien, Martingales, ...)

Chapitre 2 (Existance du contrôle optimal pour les EDSPRs linéaires) :

Dans ce chapitre, nous traitons le problème d'existence de contrôle optimal strict pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades linéaires (EDSPRL), dans le cas où l'ensemble des contrôles est convexe et compact et la fonction du coût est convexe. La méthode de preuve est basée sur la convergence forte de l'EDSPRL et le théorème de Mazur.

Chapitre 3 (Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité) :

Dans ce chapitre, nous établissons des conditions d'optimalité nécessaire et suffisantes pour ce problème en utilisant le principe d'optimisation convexe.

Chapitre 1

Rappels de calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite du cours. Il ne s'agit nullement de développer la théorie générale.

1.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, Soit T un ensemble d'indices $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N})$, et la fonction

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d \\ & (\omega, t) \to X(\omega, t) \end{aligned}$$

Pour t fixé, $X(\omega, t) = (X_t)_{t \in T}$ est une variable aléatoire.

Pour ω fixé, la fonction $t \to X(\omega, t)$ appellé trajectoire

Définition 1.1.1 *On appelle processus stochastique défini sur T avec des valeurs dans un ensemble mesurable $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ toute famille du variables aleatoires $X(\omega, t)$ ‡ valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.*

Définition 1.1.2 *Soient X et Y deux processus.stochastique* *i) X est une modification de Y si : pour tout $t \geq 0$ les variable aléatoire. X_t et Y_t sont égales*

$$\mathbb{P} - p.s. : \forall t \geq 0., \mathbb{P}\left(X_t = Y_t\right) = 1.$$

ii) X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P} - p.s$; les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c-à-d

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t, \forall t \geq 0\right) = 1$$

Définition 1.1.3 *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable.*

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport á sa filtration naturelle.

Définition 1.1.4 *i) Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\beta([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\beta\left(\mathbb{R}^d\right)$*
ii) Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si X est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement. mesurable.

Rappelons également le résultat suivant :

Proposition 1.1.1 *Si nous avons$X$ est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est deplus adapté.*

Finissons ces généralités par la notion de temps d'arrêt.

Définition 1.1.5 *Soit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–temps d'arrêt si, pour tout t,$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Si τ est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évènements antérieurs à la tribu définie par $\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}$.

Proposition 1.1.2 *Soit τ un temps d'arrêt. Si X est progressivement mesurable le processus arrêt.X^τ -défini par $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$– est progressivement mesurable.*

1.2 Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$

Définition 1.2.1 *L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid G]$ de X sachant G est l'unique variable aléatoire :*
i) $\mathbb{E}[X \mid G]$ est mesurable
ii)

$$\int_A \mathbb{E}[X \mid G] \, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \qquad \forall A \in G.$$

Propriétés

Soient X ; Y deux variables aléatoires (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on a :

· Linéairité : Soit a et b deux constantes alors

$$\mathbb{E}[aX + bY \mid G] = a\mathbb{E}[X \mid G] + b\mathbb{E}[X \mid G]$$

·Son espérance vaut :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}[X \mid G]) = \mathbb{E}[X]$$

· Si H est un sous tribu de G

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G] \mid H] = \mathbb{E}[X \mid H]$$

·Monotonie : Si $X \leq Y$, alors

$$\mathbb{E}[X \mid G] \leq \mathbb{E}[Y \mid G]$$

·Convergence monotone : Si $X_n \geq 0$ est une suite croissante de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers X, alors

$$\mathbb{E}[X_n \mid G] \longrightarrow_{n\to\infty} \mathbb{E}[X \mid G]$$

·Indépendance : si X est indépendant de G , alors

$$\mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}[X]$$

·Si Z est-mesurable , alors

$$\mathbb{E}[ZX \mid G] = Z\mathbb{E}[X \mid G]$$

·Si X est $G-$mesurable, alors

$$\mathbb{E}[X \mid G] = X$$

Proposition 1.2.1 ***(Inégalité de Jensen)*** *Soit X est une v.a de L^1 et ϕ est une fonction convexe tel que $\phi(X) \in L^1$, alors*

$$\mathbb{E}[\phi(X) \mid G] \geq \phi(\mathbb{E}[X \mid G]).$$

Théorème 1.2.1 ***(Lemme de Fatou conditionnel)*** *Si $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a. positives, alors :*

$$\mathbb{E}[\underset{n\to\infty}{lim} X_n|B] \leq \underset{n\to\infty}{lim}\mathbb{E}[X_n|B].$$

convergence monotone conditionnel

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a réel intégrables, qui converge vers X, alors

$$\mathbb{E}[\liminf \mathbb{E}[X_n|B]] \to \mathbb{E}[X|B].$$

convergence dominée conditionnel

Soient $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a.réel , qui convergeant $p.s$ vers $X \in L^1$ et Y une v.a. dans L^1 telles que$|X_n| < Y$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|B] \to \mathbb{E}[X|B].$$

1.3 Martingale

Définition 1.3.1 *Un processus X à valeurs réelles $\mathcal{F}_t$–mesurable et ntégrable pour tout $t \geq 0$ est dit martingale (respectivement sous-martingale, resp. surmartingale) si :*
pour $0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ *(resp.*$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$*, resp* $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$*).*

Théorème 1.3.1 *.(**Inégalités maximales de Doob**)*
Soit X une martingale (ou une sousmartingale positive) continue à droite. Alors,

$$\forall p \geq 1, \forall a > 0, a^p \mathbb{P}(supt|X_t| \geq a) \leq sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

et

$$\forall p > 1, \mathbb{E}[sup_t|X_t|^p] \leq q^p sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p] \text{ où } q = p\,(p-1)^{-1}$$

Théorème 1.3.2 *(**Théorème d'arrêt de Doob.**)*
Si X est une martingale et si et sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\tau' \leq \tau$, alors,

$$\mathbb{E}(X_\tau|F_{\tau'}) = X_{\tau'} \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Rappelons aussi que le processus adaptatif et intégral$X$ est une martingale si et seulement si pour un temps d'arrêt borné ,$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Définition 1.3.2 ***(Martingale local).*** *Soit X un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que*

$$\mathbb{P}(\tau_n \to +\infty) = 1$$

et pour tout n, $X^{\tau_n} 1_{\tau_n>0}$ est une martingale.

Théorème 1.3.3 ***(Les inégalités Burkholder-Davis-Gundy)****Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et $C_p$telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro. Alors on a :*

$$c_p \mathbb{E}[\,\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\,\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}].$$

En particulier, si $T > 0$

$$c_p \mathbb{E}[\,\langle X, X\rangle_T^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\,\langle X, X\rangle_T^{p/2}].$$

1.4 Mouvement brownien

Définition 1.4.1 *Le processus aléatoire $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard (processus de Wenier) si :*

1. $\mathbb{P} - p.s.$ $t \longmapsto W_t\,(\omega)$ est continue .

2. pour $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

3.$W_0 = 0$ $\mathbb{P} - p.s.$

pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $(2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-x^2 \diagup (2t)\}$.

On dit qu'un mouvement brownien (MB dans la suite) part d'un point x si $W_0 = x$.

Remarque 1.4.1 *On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–MB si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \forall 0 \leq s \leq t,\ \mathbb{E}\left(e^{tu(Wt-W_s)}\backslash \mathcal{F}_t\right) = \exp\left\{-u^2 (t-s) \diagup 2\right\}$$

Proposition 1.4.1 *Soit W un MB standard.*

1. pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W_u, u \leq s\}$.

2. $-W$ est aussi un MB.

3. pour tout $c > 0$, $\{cW_{t\diagdown c^2}\}_{t\geq 0}$ est un MB.

4. le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1\diagdown t}$ est un MB.

Rappelons qu'une fonction f à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}_+$ est localement hölderienne. d'ordre si pour tout $a > 0$ il existe une constante C telle que :

$$\forall (x, y) \in [0, a]^2, \qquad |\ f(x) - f(y)\ | \leq C\ |\ x - y\ |^\alpha .$$

Proposition 1.4.2 *Soit W un MB. La filtration $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$ vérifie les conditions habituelles et W est un $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}$ –MB..*

Théorème 1.4.1 ***(Paul Levy)*** *Soit $X_t(\omega)$ un processus continue, alors $X_t(\omega)$ est un mouvement brownien si et seulement si :*

i) X_t est une martingale

ii) $(X_t^2 - t)$ est une martingale

1.5 Integrale stochastique

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 1.5.1 *L'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme*

$$\int_0^t X_s dW_s.$$

où X un processus stochastique continu.

Proposition 1.5.1 ***(Propriété de intégrale d'Itô)***

Soient $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des processus X adapté càglàd (continus à gauche limite à droite) vérifiant $\mathbb{E}[\int_0^t X_t^2 dt] \leq \infty, \forall t \geq 0$ et X, Y deux.processus de $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$. L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. Linéarité :

$$\int_0^t (aX_s + bY_s) dW_s = a \int_0^t X_s dW_s + b \int_0^t Y_s dW_s, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s dW_s\right] = 0.$$

3.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)\left(\int_0^t Y_s dW_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s Y_s ds\right].$$

En partuclier

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right].$$

4. Le processus $\left(\int_0^t X_s dW_s\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Définition 1.5.2 ***(Processus d'Itô)***

Un processus d'Itô est processus X tell que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

avec X_0 est mesurable, b et σ deux processus progressivement messurable tel que $\int_0^t |b_s| \, ds < \infty$ et $\sigma \in L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$.

Le coefficient b est un drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème 1.5.1 ***(Formule d'Itô)***

Soit $(t, x) \to f(t, x)$ une fonction réelle, de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x dérivées bornées.Alors

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s) dX_s + \int_0^t f_s^{'}(s, X_s) ds + \int_0^t f_{xx}^{"}(s, X_s) \sigma_s^2 ds.$$

1.6 Equation différentielle stochastique progressive rétrograde

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilsé complet, est un MB

On note :

- $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus θ_t progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que
$$\|\theta_t\|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\theta_t|^2\right] < \infty.$$
- $M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$ espace de processus Z_t progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k \times d}$ telle que
$$\|Z_t\|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty.$$

Définition 1.6.1 *Une équation différentielle stochastique progressive rétrograde est une* *équation de la forme*

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \\ Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{cases} \tag{1.1}$$

où les processus $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0} \in S^2(\mathbb{R}^k)$ *et* $(Z_t)_{t\geq 0} \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *et les fonctions* b, σ, g, f *soient mesurables et bornées :*

Définition 1.6.2 *Un solution de équation différentielle stochastique progressivement rétrograde (EDSPR), est un triple* (X, Y, Z) *de processus progressivement mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ *et de carré intégrable vérifiant le système (1.1)*

Théorème 1.6.1 *Soient* b, σ, f *et* g *fonctions boréliennes.vérifient (1.1). On suppose qu'il existe une constante* $K > 0$ *; telle que :*
Pour tout $t \in [0, T]$*, pour tout* $x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}^k$

1. $|b(t, x) - b(t, x')| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, x')\| \leq K\,|x - x'|, \qquad |g(x) - g(x')| \leq K\,|x - x'|$

   $|f(t, x, y, z) - f(t, x', y', z')|\, K\,(|x - x'| + |y - y'| + \|z - z'\|)$

2. $|b(t, x)| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + |x|)\,; \qquad |g(x))| \leq K(1 + |x|)$

   $|f(t, x, y, z)|\, K\,(1 + |x| + |y| + \|z\|)$

3. $\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T f(s, 0, 0, 0)\right|^2 ds\right] < +\infty.$

   Alors il existe une solution unique (X, Y, Z) *de l'EDSPR (1.1)*

1.7 Définition et théorèmes de base

1.7.1 convergence uniforme

Soit f une fonction bornée definie sur A et f_n une suite de fonctions bornées défnies sur ce même ensemble. Rappelons que la distence entre la fonction f et une fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de la norme de la convergence uniforme est définie par

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|.$$

Définition 1.7.1 *On dit que la suite* $(f_n)_{n\in N}$ *converge uniformément vers* f *sur un ensemble* A *si*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \in N \quad \left[n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \forall x \in A, ||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\right].$$

1.7.2 convergence forte et convergence faible

Définition 1.7.2 *Une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments d' un espace normé* E *converge fortement vers* $x \in E$ *si elle converge en norme (i.e :* $||x_n - x|| \to 0$*).*

Définition 1.7.3 *Une suite* (x_n) *d'éléments d' un espace de Hilbert* H *converge faiblement vers* x *dans* H *si*

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle, \forall y \in H.$$

Remarque 1.7.1 *Une forte convergence implique une faible convergence*

1.7.3 suite minimisante

Suppose que H est un espace vectoriel avec une base complète (espace de Banach) de sorte que toute suite de Cauchy est convergente en H .

Soit $K \subset H$ un sous-ensemble non-vide. Soit un fonctionel $J : H \to \mathbb{R}$

Définition 1.7.4 *Une suite minimisante du critère* J *sur l'ensemble* K *est une suite* $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$u^n \in K \quad \forall n \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} J(u^n) = \inf_{u\in K} J(u).$$

1.7.4 L'encemble convexe

Définition 1.7.5 *On dit que l' ensemble A est dit convexe si pour tous x et y de A, le segment $[x, y]$ est inclu dans A, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in A \quad \forall t \in [0;1] \ ; \ tx + (1-t)\, y \in A.$$

1.7.5 Fonction convexe

Supposons que A un ensemble convexe non vide et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction

Définition 1.7.6 *On dit que f est convexe sur A si*

$$\forall x, y \in C \quad \forall t \in [0;1]\, ; f\,(tx + (1-t)\, y) \leq tf\,(x) + (1-t)\, f\,(y)$$

Définition 1.7.7 ***(Strictement convexe)*** *On dit que f est strictement convexe sur A si l'inégalité précédent est stricte lorsque $x \neq y$ et $t \in \left]0;1\right[$.*

1.7.6 L'ensemble compact

Un ensemble A est dit compact, si et seullement si tout suite d'éléments de A accepte une suite extraite convergente dont la limite est un élément de A .

1.7.7 une suite relativement compact

Définition 1.7.8 *On dit que une suite de mesure $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ est relativement compact, si pour toute sous suite $(n') \subset \mathbb{N}$ il existe $(n'') \subset (n')$ converge faiblement vers une mesure de probabilité.*

1.7.8 Théoreme de Mazur

Théorème 1.7.1 *Si x_n converge faiblement vers x ; alors il existe une suite de combinaisons convexes a_n*

$$a_n = \sum_{i \geq 0} \alpha_i x_i \quad , \quad ou\ \alpha_i \geq 0 \quad \sum_{i \geq 0} \alpha_i = 1$$

qui converge fortement vers x :

$$||a_n - x|| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

1.7.9 lemme de Gronwall

Soit f :$[0, T] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue , et vérifie pour tout $t \in [0, T]$:

$$0 \leq f\,(t) \leq a(t) + b \int_0^t g\,(s)\,ds.$$

Alors, pour tout t

$$f\,(t) \leq a \exp(bt).$$

Chapitre 2

Existance du contrôle optimal pour les EDSPRs linéaires

On considère le problème du contrôle optimal où le système est gouverné par l'équation différentielle stochastique progréssive rétrograde linéaire suivante :

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t (A_1.X_s + A_2 u_s)\, ds + \int_0^t (C_1.X_s + D_1.u_s)\, dW_s \\ Y_t = \xi + \int_t^T (A_2 X_s + B_2 Y_s + C_2 Z_s + D_2 u_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{cases} \tag{2.1}$$

avec (W_t) est un processus de Wiener defini dans un espace de probabilité complet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$,.u_t est un control strict , $(A_i)_{1\leq i\leq 2}$, $(B_i)_{1\leq i\leq 2}$, $(C_i)_{1\leq i\leq 2}$ et $(D_i)_{1\leq i\leq 2}$ sont des matrices .

Notre objective est de minimiser sur l'ensemble des contrôles admissibles U , la fonction de coût suivante :

$$J(u) := E\left[l(X_T) + k(Y_0) + \int_0^T h(t, X_t, Y_t, Z_t, u_t)\, dt\right] \tag{2.2}$$

où

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times A \longrightarrow \mathbb{R}, l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Définition 2.0.9 *Un contrôle admissible est un processus* u_t *,* $t \in [0, T]$ *mesurable et*

$\mathcal{F}_t-$adapté à valeurs dans un Borélien A de $\mathbb{R}^n$ et de carré intégrable Notons par U l'ensemble de tous les contrôle admissible .

On cherche un contrôle $\bar{u} \in U$ qui minimise (2.2) sur U,c-à-d

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in u} J(u)$$

Un contrôle admissible $\bar{u}$ est dite optimal .

Pour résoudre le problème de contrôle stochastique ci-dessus ,on considére les hypothèses suivantes :

(H1) l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe et compact

(H2) les fonction h, l et k sont continues et convexes

2.1 Existance d'un contrôle strict optimal

Théorème 2.1.1 *On suppose que (H1) et (H2) satisfaites . Alors il existe un processus $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \bar{u}_t)$ $\mathcal{F}_t-$adapté tel que*

(i) $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \bar{u}_t)$ est la solution unique de l'EDSPR linéaire (2.1)

(ii) $\bar{u}_t$ minimise J.

Proof. Supposant d'abord que (H1) et (H2) sont vérifiées ,soit $(X_t^n, Y_t^n, Z_t^n, u_t^n)$ est une suite minimisante satisfait

$$\lim_{n \longmapsto \infty} J(u^n) = \inf_{u \in u} J(u)$$

Puisque l'ensemble des valeurs du contrôle A est un ensemble compact , alors la suite (u^n) est relativement compact c'est à dire

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid u_t^n \mid^2 dt]\right] < k, \qquad n \geq 0$$

pour certaine constante k positive

donc , il existe une sous -suite (qu'on la notée par (u^n)) telle que

$$u^n \longrightarrow \bar{u} \text{ faibelement dans } L^2_{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^n)$$

Appliquant le théorème de Mazur , il existe une suite de combinaisons convexes définie par

$$\hat{u}^n = \sum_{i\geq 0} a_{in} u^{i+n}, \text{avec } a_{in} \geq 0 et \sum_{i\geq 0} a_{in} = 1$$

telle que

$$\bar{u}^n \longrightarrow \bar{u} \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^n)$$

Puisque l'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe et compact , alors le processus $\bar{u} \in U$.
Soient $\left(\hat{X}^n_t, \hat{Y}^n_t, \hat{Z}^n_t\right)$ et $\left(\hat{X}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t\right)$ sont des solutions de l'EDSPRs lineaires associes à $\hat{u}^n_t$ et $\hat{u}_t$ respectivement, Alors on preuve que

$$\hat{X}^n_t \to \hat{X}_t \qquad \text{frotement dans } C_{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^n), \tag{2.3}$$

$$\hat{Y}^n_t \to \hat{Y}_t \text{ fotement dans } C_{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

et

$$\int_0^T \hat{Z}^n_t \to \int_0^T \hat{Z}_t \text{ frotement dans } L^2_{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^n) \tag{2.5}$$

On a

$$\mid \hat{X}^n_t - \hat{X}_t \mid^2 = \mid \int_0^t \left[A_1\left(\hat{X}^n_t - \hat{X}_t\right) + B_1(\hat{u}^n_s - \hat{u}_s)\right] ds + \int_0^t \left[C_1\left(\hat{X}^n_t - \hat{X}_t\right) + D_1(\hat{u}^n_s - \hat{u}_s)\right] dW_s \mid^2,$$

comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$,alors

$$\begin{aligned}
\mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2 &\leq 2 \mid \textstyle\int_0^t \left[A_1 \left(\hat{X}_t^n - \hat{X}_t \right) + B_1 \left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s \right) \right] ds \mid^2 \\
&\quad + 2 \mid \textstyle\int_0^t \left[C_1 \left(\hat{X}_t^n - \hat{X}_t \right) + D_1 \left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s \right) \right] dW_s \mid^2 \\
&\leq 4 \left[\mid \textstyle\int_0^t A_t \left(\hat{X}_t^n - \hat{X}_t \right) ds \mid^2 + \mid \textstyle\int_0^t B_t \left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s \right) ds \mid^2 \right] \\
&\quad + 4 \left[\mid \textstyle\int_0^t C_1 \left(\hat{X}_t^n - \hat{X}_t \right) dW_s \mid^2 + \mid \textstyle\int_0^t D_1 \left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s \right) dW_s \mid^2 \right].
\end{aligned}$$

Utilisant les proprietés de l'intégrale stochastique et passant à l'espérance , on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2 \right] &\leq 4\mathbb{E} \left[\mid \textstyle\int_0^T A_1 \left(\hat{X}_s^n - \hat{X}_s \right) ds \mid^2 + \mid \textstyle\int_0^T B_1 \left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s \right) ds \mid^2 \right] \\
&\quad + 16\mathbb{E} \left[\textstyle\int_0^T \mid C_1 \left(\hat{X}_t^n - \hat{X}_t \right) \mid^2 ds + \textstyle\int_0^T \mid D_1 \left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s \right) \mid^2 ds \right].
\end{aligned}$$

L'intégrale de Cauchy -Shewartz donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2 \right] &\leq 4\mathbb{E} \left[\left(\textstyle\int_0^T \mid A_1 \mid^2 ds \right) \left(\textstyle\int_0^T \left| \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \right|^2 ds \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\textstyle\int_0^T \mid B_1 \mid^2 ds \right) \left(\textstyle\int_0^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds \right) \right] \\
&\quad + 16\mathbb{E} \left[\textstyle\int_0^T \mid C_1 \mid^2 \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2 ds \right] + 16\mathbb{E} \left[\textstyle\int_0^T \mid D_1 \mid^2 \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds \right]
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2 \right] &\leq \left(4k + 16k' \right) \textstyle\int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2 \right] dt \\
&\quad + (4c + 16c') \, \mathbb{E} \left[\textstyle\int_0^T \mid \hat{u}_t^n - \hat{u}_t \mid^2 dt \right]
\end{aligned}$$

Si on pose $g(t) = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2 \right]$, alors

$$g(t) \leq \left(4k + 16k' \right) g(t) + (4c + 16c') \, \mathbb{E} \left[\int_0^T \mid \hat{u}_t^n - \hat{u}_t \mid^2 dt \right]$$

En appliquant le lemme de Granwall, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq i\leq T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2\right] \leq (4c + 16c')\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{u}_t^n - \hat{u}_t \mid^2 dt\right] \exp\left((4k + 16k')\,t\right)$$

comme $\hat{u}^n$ converge fortement vers $\hat{u}$, dans $L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq i\leq T} \mid \hat{X}_t^n - \hat{X}_t \mid^2\right] = 0$$

Donc

$$\hat{X}_t^n \longrightarrow \hat{X}_t \text{ frotement dans } C_{\mathcal{F}}\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$$

D'autre part, on a

$$\hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t = \int_0^T \left[A_2(\hat{X}_s^n - \hat{X}_s) + B_2\left(\hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t\right) + C_2\left(\hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s\right) + D_2\left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s\right)\right] ds - \int_t^T \left(\hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s\right) dW_s$$

En appliquant la formule d'Itô à $\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2$, on obtient

$$\begin{aligned} d \mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid &= 2 \mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid d \mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid + d\langle \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \rangle \\ &= 2 \mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid \left[-A_2(\hat{X}_t^n - \hat{X}_t)dt - B_2\left(\hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t\right) dt - C_2\left(\hat{Z}_t^n - \hat{Z}_t\right) dt \right.\\ &\quad \left. - D_2\left(\hat{u}_t^n - \hat{u}_t\right) dt\right] + 2 \mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid\mid \hat{Z}_t^n - \hat{Z}_t \mid dW_t + \parallel \hat{Z}_t^n - \hat{Z}_t \parallel^2 dt. \end{aligned}$$

passant à L'intégrale entre t et T , on a

$$\begin{aligned} \mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2 &= 2 \textstyle\int_t^T \langle \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t, A_2(\hat{X}_s^n - \hat{X}_s) + B_2\left(\hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s\right) + C_2\left(\hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s\right) + D_2\left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s\right)\rangle ds \\ &\quad -2 \textstyle\int_t^T \langle \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s, \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s\rangle dW_s - \int_t^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2 + \textstyle\int_t^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds &= 2 \textstyle\int_t^T \langle \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t, A_2(\hat{X}_s^n - \hat{X}_s) + B_2\left(\hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t\right) \\ &\quad + C_2\left(\hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s\right) + D_2\left(\hat{u}_s^n - \hat{u}_s\right)\rangle ds - 2 \textstyle\int_t^T \langle \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s, \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s\rangle dW_s \end{aligned}$$

comme $\hat{Y}_t^n$, $\hat{Y}_t$ sont dans S^2 et $\hat{Z}_t^n$, $\hat{Z}_t$ sont dans M^2 , alors l'intégrale suivante $\int_t^T \langle \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t, \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \rangle dW_s$ est une martingale de carré intégrable nulle en 0. En passant l'esperence et on prenant $t = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \leq & +2\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid A_2 \mid\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid . \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid ds\right] \\
& +2\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid B_2 \mid\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2 ds\right] \\
& +2\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid C_2 \mid\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid . \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel ds\right] \\
& +2\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid D_2 \mid\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid\mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid ds\right]
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young , on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \leq & H\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds + \int_0^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid^2 ds\right] \\
& +2M\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right] \\
& +k\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\frac{1}{a^2} \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 + a^2 \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2\right) ds\right] \\
& +\gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds + \int_0^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds\right]
\end{aligned}$$

On choisit $a = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, on aura

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \leq & H\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right] + H\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid^2 ds\right] \\
& +2M\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right] \\
& +2k^2\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \\
& +\gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \leq & H\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds\right] \\
& + (H + 2H + 2k^2 + \gamma)\,\mathbb{E}\left[\int_t^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

D'aprés (2.6), on dérive deux inégalités

$$\mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right] \leq H\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds\right] \\ + \left(H + 2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right], \tag{2.7}$$

et

$$\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \leq H\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds\right] \\ + (H + 2M + 2k^2 + \gamma)\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right]. \tag{2.8}$$

Si on pose $g(t) = \mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right]$ et $b = (H + 2M + 2k^2 + \gamma)$, alors on applique le lemme de Gronwall sur (2.7), on trouve

$$\mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right] \leq \left(H\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds\right]\right)\exp(bT),$$

comme

$$\hat{u}_s^n \longrightarrow \hat{u}_s \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ dans } L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T], \mathbb{R}^n\right),$$

et

$$\hat{X}_T^n \longrightarrow \hat{X}_T \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ dans } C_{\mathcal{F}}\left([0,T], \mathbb{R}^n\right).$$

On obtient

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\mid \hat{Y}_t^n - \hat{Y}_t \mid^2\right] = 0$$

Alors

$$\hat{Y}_t^n \longrightarrow \hat{Y}_t \text{ frotement dans } C_{\mathcal{F}}\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$$

D'aprés (2.8) On a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \leq 2H\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{X}_s^n - \hat{X}_s \mid^2 ds\right] + 2\gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{u}_s^n - \hat{u}_s \mid^2 ds\right] \\ +2\left(H + 2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid \hat{Y}_s^n - \hat{Y}_s \mid^2 ds\right].$$

les suite $\left(\hat{X}^n\right)$ et $(\hat{u}^n)$ et $\left(\hat{Y}^n\right)$ sont convergente alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \parallel \hat{Z}_s^n - \hat{Z}_s \parallel^2 ds\right] \longrightarrow 0 \text{ si } n \longrightarrow \infty,$$

ce qui implique que

$$\int_0^T \hat{Z}_s^n dW_s \longrightarrow \int_0^T \hat{Z}_s dW_s \text{ frotement dans } L_{\mathcal{F}}^2\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$$

2) Il reste a prouver que $\hat{u}$ minimise la fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles U.

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, \hat{X}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{u}_t\right) dt + l\left(\hat{X}_T\right) + k\left(\hat{Y}_0\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, \lim_{n\longrightarrow\infty} \hat{X}_t^n, \lim_{n\longrightarrow\infty} \hat{Y}_t^n, \lim_{n\longrightarrow\infty} \hat{Z}_t^n, \lim_{n\longrightarrow\infty} \hat{u}_t^n\right) dt \right. \\ &\qquad \left. + l\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} \hat{X}_T^n\right) + k\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} \hat{Y}_0^n\right)\right] \end{aligned}$$

D'aprés la continuité des fonctions h, l et k, on a

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} J(\hat{u}^n) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, \hat{X}_t^n, \hat{Y}_t^n, \hat{Z}_t^n, \hat{u}_t^n\right) dt + l\left(\hat{X}_T^n\right) + k\left(\hat{Y}_0^n\right)\right] \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, \sum_{i\geq 0} a_{in} X_t^{i+n}, \sum_{i\geq 0} a_{in} Y_t^{i+n}, \sum_{i\geq 0} a_{in} Z_t^{i+n}, \sum_{i\geq 0} a_{in} u_t^{i+n}\right) dt \right. \\ &\qquad \left. + l\left(\sum_{i\geq 0} a_{in} X_T^{i+n}\right) + k\left(\sum_{i\geq 0} a_{in} Y_0^{i+n}\right)\right] \end{aligned}$$

Comme h, l et k sont convexes , nous avons

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i\geq 0} a_{in} \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, X_t^{i+n}, Y_t^{i+n}, Z_t^{i+n}, u_t^{i+n}\right) dt + l\left(X_T^{i+n}\right) + k\left(Y_0^{i+n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i\geq 0} a_{in} J\left(u^{i+n}\right) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
J(\hat{u}) &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i\geq 0} a_{in} \max_{1\leq i\leq n} J\left(u^{i+n}\right) \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\max_{1\leq i\leq n} J\left(u^{i+n}\right)\sum_{i\geq 0} a_{in} \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} J\left(u^{i+n}\right) \\
&= \inf_{u\in U[0,T]} J(u)
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

On considére un problème de contrôle stochastique linéaire suivant :

$$\begin{cases} dX_t^u = \left(A_1.X_t^u + A_2 u_t\right) dt + \left(C_1.X_t^u + D_1.u_t\right) dB_t \\ dY_t^u = \left(A_2 X_t^u + B_2 Y_t^u + C_2 Z_t^u + D_2 u_t\right) dt - Z_t^u dB_t \\ X_0^u = x, \qquad Y_T^u = \xi \end{cases} \tag{3.1}$$

où$(A_i)_{1\leq i\leq 2}$, $(B_i)_{1\leq i\leq 2}$, $(C_i)_{1\leq i\leq 2}$ et $(D_i)_{1\leq i\leq 2}$ sont des matrices de tailles appropriées. La solution (X^u, Y^u, Z^u) prend des valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m+d}$ et la variable de contrôle u est dans $U := \{u_. \in M^2([0,T];\mathbb{R}^k) \; | u_t \in U, a.e.t \in [0,T], P - a.s.\}$, avec $U \subseteq \mathbb{R}^k$

Rappelons que l'ensemble U est convexe, alors la manière classique de dériver les conditions nécessaires d'optimalité satisfaites par le contrôle optimal strict c'est d'utiliser la méthode de perturbation convexe.

Soit $\tilde{u}_.$ un contrôle strict optimal et notons $(X_t^u$,Y_t^u,$Z_t^u)$ la solution de (3.1) associée à $\tilde{u}_.$. Alors on définissons le contrôle strict perturbé (perturbation convexe) comme suit :

$$u_t^\varepsilon = \tilde{u}_t + \varepsilon \left(v_t - \tilde{u}_t\right),$$

où, $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et $v\cdot$ est un élément arbitraire de U tel que

$$\mathbb{E}\left[\mid v_{\cdot}^{2} \mid\right] < \infty.$$

Notant par $(X_t^{\varepsilon}, Y_t^{\varepsilon}, Z_t^{\varepsilon})$ la solution de l'EDSPR linéaire (3.1) associée au le contrôle u^{ε}. Par l'optimalité de $\tilde{u}\cdot$le principe de maximum peut être obtenu d'aprés

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(J\left(u_{\cdot}^{\epsilon}\right) - J\left(\tilde{u}_{\cdot}\right)\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(J\left(\tilde{u}_{\cdot} + \varepsilon(v_{\cdot} - \tilde{u})\right) - J(\tilde{u}_{\cdot})\right) \\ &= \langle J'\left(\tilde{u}\right), v_{\cdot} - \tilde{u}_{\cdot}\rangle. \end{aligned}$$

On considére les hypothèses suivantes :

(H3) : l, k et h sont continuement différentiables par rapport à x, y, et (x, y, z)respectivement ;

(H4) : les dérivées de l,k et h par rapport à x, y, et (x, y, z) respectivement, sont bornés.

Pour établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, on utilisons le principe l'optimisation convexe (voir Ekeland-Temam ([12], prop 2.1, page 35).

Théorème 3.0.2 *Soit E un espace de Banach reflèxif, G est un sous-ensemble convexe, fermé non vide de E et f est une fonction définie de G dans $\mathbb{R}$, convexe, semi-continue inférieurement (SCI) et Gateaux-différentiable de différentielle f' continue. Alors, on a*

$$\left(u \textit{ minimise } f \quad \textit{c-à-d } f(u) = \inf_{v \in E} f(v)\right) \Leftrightarrow \langle f'(u), v - u\rangle \geq 0 \quad \textit{pour tout } v \in E$$

Comme l'ensemble U est convexe et la fonction de cout J est convexe en $\tilde{u}\cdot$ continu et Gâteaux-différenciable avec la dérivée continue J', on peut appliquer le principe d'optimisation convexe, pour obtenir

$$(\tilde{u}\cdot \text{ minimiser } J) \Leftrightarrow \langle J'\left(\tilde{u}\right), v_{\cdot} \_ \tilde{u}\rangle \geq 0; \forall v_{\cdot} \in U \tag{3.2}$$

En calculant la dérivée de Gâteaux du J en un point $\tilde{u}\cdot$ et de direction $(v_{\cdot}-\tilde{u}_{\cdot})$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle J'(\tilde{u}), v_{\cdot}-\tilde{u}_{\cdot}\rangle &= \mathbb{E}\left[\langle l_x\left(\bar{X}_T\right), X_T^u-\bar{X}_T\rangle\right]+\mathbb{E}\left[\langle k_y\left(\tilde{Y}_0\right), Y_0^u-\tilde{Y}_0\rangle\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T\langle h_x(t,\bar{u}_t), X_t^u-\tilde{X}_t\rangle dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\langle h_y(t,\bar{u}_t), Y_t^u-\tilde{Y}_t\rangle dt\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T\langle h_z(t,\bar{u}_t), Z_t^u-\tilde{Z}_t\rangle dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\langle h_u(t;\bar{u}_t), v_t-\tilde{u}_t\rangle dt\right].\end{aligned} \tag{3.3}$$

Avec la notation $h_\delta(t,\tilde{u}_t) := h_\delta\left(t,\tilde{X}_t,\tilde{Y}_t,\tilde{Z}_t,\tilde{u}_t\right)$ avec $\delta = x,y,z,u.$

Le résultat principal de cette chapitre est le suivant

Théorème 3.0.3 (*Conditions nécessaires et suffisantes pour l'optimalité*). *Soit $\bar{u}$ un contrôle admissible avec les trajectoires correspondantes $\left(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\right)$. Alors $\tilde{u}$ est optimal si et seulement si, il existe un triple unique des processus $\mathcal{F}_t$-adapté (P^u,ψ^u,Q^u), solution des équations stochastiques suivantes* (*appelées équations adjointes*),

$$\begin{cases} -dP_t^u = h_x\left(t,\tilde{X}_t,\tilde{Y}_t,\tilde{Z}_t,\tilde{u}_t\right)dt-\psi_t^u dW_t, \\ \quad dQ_t^u = h_y\left(t,\tilde{X}_t,\tilde{Y}_t,\tilde{Z}_t,\tilde{u}_t\right)dt+h_z\left(t,\tilde{X}_t,\tilde{Y}_t,\tilde{Z}_t,\tilde{u}_t\right)dW_t, \\ P_T^u = l_x(X_T^u), \qquad Q_0^u = k_y(Y_0^u) \end{cases} \tag{3.4}$$

tel que

$$\langle H_v(t,\bar{u}_t), v_t-\bar{u}_t\rangle \geq 0, \forall v_t\in U, \text{ pp, ps.} \tag{3.5}$$

où $H_\delta(t,\tilde{u}_t) := H_\delta(t,\tilde{X}_t,Y_t,\tilde{Z}_t,\tilde{u}_t,\tilde{P}_t,\tilde{\psi}_t,\tilde{Q}_t)$, est la fonction hamiltonienne défini par

$$\begin{aligned}H(t,x,y,z,v,P,\psi,Q) &:= \langle P, A_1x+B_1v\rangle+\langle\psi, C_1x+D_1v\rangle \\ &\quad + h(t,x,y,z,v)+\langle Q, A_2x+B_2y+C_2z+D_2v\rangle\end{aligned}$$

Proof. Les équations adjoints (3.4) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} -dP_t^u = (P_t^u A_1 + \psi_t^u C_1 + Q_t^u A_2 + h_x\left(t, u_t\right))dt - \psi_t^u dW_t, \\ dQ_t^u = (Q_t^u B_2 + h_y\left(t, u_t\right))dt + \left(Q_t^u C_2 + h_z\left(t, u_t\right)\right) dW_t, \\ P_T^u = l_x\left(X_T^u\right), \qquad Q_0^u = k_y\left(Y_0^u\right). \end{cases}$$

Donc après avoir rappelé aussi (3.4), l'égalité (3.3) devient

$$\begin{aligned} \langle J'(\bar{u}), v_{\cdot} - \bar{u}_t \rangle = \mathbb{E}\left[\langle \tilde{P}_T, X_T^v - \tilde{X}_T \rangle\right] + \mathbb{E}\left[\langle \tilde{Q}_0, Y_0^v - \tilde{Y}_0 \rangle\right] \\ + \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_x\left(t, \tilde{u}_t\right), X_t^v - \tilde{X}_t \rangle dt\right] + \left[\int_0^T \langle h_y\left(t, \tilde{u}_t\right), Y_t^v - \tilde{Y}_t \rangle dt\right] \\ + \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_z\left(t, \tilde{u}_t\right), Z_t^v - \tilde{Z}_t \rangle dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_v\left(t, \tilde{u}_t\right), v_t - \tilde{u}_t \rangle dt\right] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Appliquant l'intégration par partie à $\langle \tilde{P}_t \ , X_t^v - \tilde{X}_t \rangle$ et $\langle \tilde{Q}_t, Y_t^v - \tilde{Y}_t \rangle$, et en passant à l'intégrale sur $[0, T]$ et prenons l'espérance on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\langle \tilde{P}_T, X_T^v - \tilde{X}_T \rangle\right] = -\mathbb{E}\left[\int_O^T \langle \tilde{Q}_t A_2 + h_x\left(t, \tilde{u}_t\right) + X_t^v - \tilde{X}_t \rangle\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle \tilde{P}_t, B_1\left(v_t - \tilde{u}_t\right) \rangle dt\right] \\ + \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle \tilde{\psi}_t, D_1\left(v_t - \tilde{u}_t\right) \rangle dt\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\langle \tilde{Q}_0, Y_0^v - \bar{Y}_0 \rangle\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_y\left(t, \bar{u}_t\right), Y_t^v - \tilde{Y}_t \rangle dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle \tilde{Q}_t, A_2\left(X_t^v - \bar{X}_t\right) + D_2\left(v_t - \bar{u}_t\right) \rangle dt\right] \\ + \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_z\left(t, \bar{u}_t\right), Z_t^v - \tilde{Z}_t \rangle dW_t\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

En remplaçant (3.7) et (3.8) dans (3.6), on obtient

$$\langle J'\left(\bar{u}\right), v_{\cdot} - \tilde{u}_{\cdot} \rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle \tilde{P}_t B_1 + \tilde{\psi}_t D_1 + \tilde{Q}_t D_2 + h_v\left(t, \tilde{u}_t\right), v_t - \tilde{u}_t \rangle dt\right]$$

Par contre, calculons la dérivée de Gâteaux de H en un point $\tilde{u}_.$ dans la direction $(v-\tilde{u})$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T H_v\left(t,\tilde{u}_t\right),v_t-\tilde{u}_t\rangle dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle \tilde{P}_t C+\tilde{\psi}_t F+\tilde{Q}_t\bar{G}+h_v\left(t,\tilde{u}_t\right),v_t-\tilde{u}_t\rangle dt\right] \quad (3.9)\\ &= \langle J'\left(\tilde{u}\right),v_.-\tilde{u}_.\rangle \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Combine (3.9) et (3.2), on obtient

$$(\tilde{u}_. \text{ minimiser } J) \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^T H_v\left(t,\tilde{u}_t\right),v_t-\tilde{u}_t\rangle dt\right]\geq 0, \forall v_.\in U.$$

Ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[H_v\langle\left(t,\tilde{u}_t\right),v_t-\tilde{u}_t\rangle\right]\geq 0, dt-p.p.$$

Maintenant, soit Θ un élément arbitraire d'un $\sigma-$algèbre $\mathcal{F}_t$, et on posons

$$\mu_t = v_t 1_\Theta + \tilde{u}_t 1_{\Omega-\Theta}.$$

Il est clair que $\mu_.$ est un élément de U. Application de l'inégalité ci-dessus avec $v\cdot$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[1_\Theta\langle H_v\left(t,\tilde{u}_t\right),v_t-\tilde{u}_t\rangle\right]\geq 0, \forall\Theta\in\mathcal{F}_t.$$

Ce qui implique que

$$\mathbb{E}\left[1_\Theta\langle H_v\left(t,\tilde{u}_t\right),v_t-\tilde{u}_t\rangle\diagup\mathcal{F}_t\right]\geq 0.$$

Puisque la quantité à l'intérieur de l'espérance conditionnelle est $\mathcal{F}_t-$ mesurable , le résultat est prouvé. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a démontrer l'existence du controle optimal strict pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades linéaires où l'ensemble des contrôles admissibles est convexe et compact, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes satisfaites par le contrôle optimal strict pour ce problème. La démonstration de premier résultat

est basée sur l'utilisation de la compacité de l'ensemble des contrôles U, ainsi que la convergence forte des suites $\{X^n, Y^n, \int_t^T Z^n dW\}$ et le théorème de Mazur prouve l'existence du contrôle optimal strict pour notre EDSPRL. La preuve de deuxième résultat est basée sur le principe d'optimisation convexe.

Il est intéressant de voir comment s'étendent nos résultats sur le cas où les fonctions l, k et h sont des fonctions quadratiques convexes. Le problème du contrôle est alors réduit à un problème de contrôle optimal quadratique linéaire stochastique.

Bibliographie

[1] I.Karatzas et S.E shreve, mouvement brownien et calcul stochastique 2^{nd} ed grad Textes in math, vol 113 springer Verlag New York 1991

[2] D.Lamberton and B.Lapeyre , introduction au calcul stochastique appliqué a la finance second Ellipses édition marketing paris 1997

[3] D.Revus et M. YOR martingales continues et mouvement brownien, Grundlehren Math Wiss, vol .293 Springer-Verleg, Berlin Heidelberg New York 1991

[4] Jean-Christophe Breton. Processus stochastique, M 2 Mathématiques. Université de Rennes 1, Septembre-Décembre 2013.

[5] Monique Jeanblanc. Cours de Calcul stochastique Master 2 IF EVRY, Septembre 2006.

[6] J. Yong, X.Y Zhou (1999), Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations, Springer Verlag.

[7] I. Ekeland and R. Temam (1974), Analyse convexe et problème variationnel, Dunod.

[8] B.Gherbal Thèse de Doctorat (2011) Univ.Biskra

Résumé :

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence d'une solution optimale du problème de contrôle optimal pour des EDSPRs linéaires avec coût non linéaire, où le domaine de contrôle et les fonctions de coût sont supposés convexes. Un deuxième résultat essentiel dans cette étude, est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité satisfaites par le contrôle optimal strict pour ce genre de problème de contrôles stochastiques, la preuve de ce résultat est basée sur le principe d'optimisation convexe.

Mots clé : processus Wiener, processus stochastique, équation différentielle stochastique progressive rétrograde, contrôle stochastique, contrôle strict, existence, conditions nécessaires et suffisantes, processus adjoint,.....

Abstract :

this memory, we study the existence of optimal solution of optimal control problem driven by a linear backward stochastic differential equations of mean field type (MF-FBSDE) with non linear cost, where the control domain and the cost functions are assumed convex. The second main result established in this study is a necessary as well as sufficient conditions of optimality satisfied by an optimal control for this kind of stochastic control problem, the proof of this result is based on the convex optimization principle.

Key words : Wiener process, stochastic process, Forward-Backward stochastic differential equation, Stochastic control, strict control, existence, necessary and sufficient conditions, Adjoint process ...