جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجةو تحليل عددي

من إعداد الطالبة : كروط نجاة

الموضوع

بعض النتائج حول السّلوك المقارب للمسّائل الزّائدية في ميادين أسطوانية تصبح غير محدودة

تناقش يوم

2021/06/29 من طرف لجنة المناقشة :

محمد قويدري	الرتبة أستاذ محاضر"ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
سليمة عزوز	الرتبة أستاذ محاضر"ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا
كلثوم كليش	الرتبة أستاذ محاضر"ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا

إهداء

إلى الوطن الّذي يسكن الفؤاد......الى نبض القلب وطني الجزائر.
إلى روح أخي الطاهرة رحمة الله عليه......يحي.
إلى الوالدين الكريمين.
إلى أمّي الثانية أختي الكبرى .
إلى من يسري فينا دم واحد ونمثل جسد واحد إخوتي و أخواتي.
إلى طلبة قسم الرياضيات بجامعة قاصدي مرباح ورقلة.
إلى كل طالب علم يسعى لطلب العلم والمعرفة.
إلى الأصدقاء ولأقارب كل واحد بإسمه.
إلى كل من نسيه القلم وحفظه القلب.
نسأل الله أن يجعله نبراسا لكل طالب علم.

شكر وعرفان

مصداقا لقوله تعالى: <<وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِنْ شَكَرْتُمْ لأَزِيدَنَّكُمْ وَلَئِنْ كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ>>

سورة إبراهيم الآية07 .

أحمد الله عز وجل الذي أنار لي درب العلم والمعرفة وأعانني على انجاز هذا العمل المتواضع.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم:

<<مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاس لَمْ يَشكُرِ الله>>

رواه أحمد الترميذي.

نرفع شكرنا وتقديرنا إلى أساتذة قسم الرياضيات بجامعة قاصدي مرباح ورقلة"ك. كليش, ج-أ.شاشة, م-ه.مزابية, إ.طلاب, ع-ر.غزال, ع- ل.بن السايح, س-م.السعيد" وإلى رئيس القسم"مفلاح مبروك".
الشكر الخاص إلى الأستاذه المشرفة عزوز سليمة التي لم تبخل علينا بتوجيهاتها ونصائحها القيمة في تذليل ماوجهته من الصعوبات, التي كانت عونا في إتمام هذه المذكرة, فجزاها الله خير الجزاء.

إلى أعضاء اللّجنة المناقشة م.قويدري, ك. كليش لقبولهم مناقشة وإثراء هذه المذكرة.
إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل من قريب أو بعيد.
إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الدراسي.

الفهـــــــرس

ترميز

$\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقية.

$\mathbb{C}$: مجموعة الأعداد المركبة.

Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$: حافة Ω.

$\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$: إغلاقة المجموعة Ω.

(ح.ت): حيثما كان تقريبا.

$supp \;\; u$: حامل الدالة u.

C_c: مجموعة الدوال المستمرة ذات الحوامل المتراصة في Ω.

H': ثنوي الفضاء H.

$\langle .,. \rangle$: جداء الثنوية بين X و X'.

$(.,.)$: الجداء السلمي في` $L^p(\Omega)$.

V: فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي $(.,.)$.

$\mathcal{L}$: فضاء المؤثرات الخطية المستمرة من X إلى Y.

∇: مؤثر التباعد حيث $\nabla \overset{Def}{=\!=} (\frac{\partial}{\partial_{x_1}}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial_{x_n}})$

$\hookrightarrow$ التباين المستمر.

مقدمة

المعادلات التفاضلية الجزئية أداة أساسية لنمذجة الظواهر الفزيائية, شغلت هذه الدراسة علماء الرياضيات منذ القرن 18 بأعمال أولر, ودالومبير, ولاغرانج, ولابلاس.....إلخ [6] . من أهم الجوانب الذي يهتم بها البحث في هذا المجال الخصائص النوعية للنماذج, مثل وجود الحل وتفرده, وإنتظامه و استقراره.....
سندرس السلوك المقارب لحل المعادلات التفاضلية الجزئية على الميادين الأسطوانية عندما ينتقل الميدان إلى اللانهاية في بعض الإتجاهات ليست كلها.وقد تم النضر في حالة المسائل الخطية بالإضافة إلى بعض مسائل غير خطية الإهليجية والقطع المكافئ و دراسة تحليلها في مراجع [6] - [7]
وبالخصوص سنهتم بدراسة مسألة زائدية من درجة ثانية في ميدان أسطواني $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ واسع في الإتجاه X_1 من $\mathbb{R}^p$ $(\ell\longrightarrow\infty)$, وسوف نعتبر المسائل التقريبية التي لاتتغير بانسحابات كيفية في اتجاه p (التناظر الأسطواني), ونقارن حل مسألتنا بحل مسألة نموذجية مستقلة على إحداثيات المرتبطه باتجاه p بشكل أكثر تحديد, نظهر أنه تحت فرضيات خاصة على المعطيات, حل هذه المسألة يتقارب نحو حل مسألة زائدية أخرى معرفة على ميدان محدود من $[0,T]\times\mathbb{R}^{n-p}$, على كل ميدان جزئي محدود من $[0,T]\times\mathbb{R}^p\times\omega$ بسرعة أسية.
المسألة الزائدية من الشكل:

$$P(\ell)\left\{\begin{array}{ll} u''-\sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial x_j u)=f & \text{في}\ Q_\ell, \\ u=0 & \text{على}\ [0,T]\times\partial\Omega_\ell, \\ u(0,.)=u_{\ell,0}\quad, u'(0,.)=u_{\ell,1} & \text{على}\ \Omega_\ell, \end{array}\right.$$

المسألة الزائدية التقريبية من الشكل:

$$P(\infty)\left\{\begin{array}{ll} u''-\sum_{p+1\leq i,j\leq n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u)=f & \text{في}\ Q_\infty, \\ u=0 & \text{على}\ [0,T]\times\partial\omega, \\ u(0,.)=u_0\quad u'(0,.)=u_1 & \text{على}\ \omega, \end{array}\right.$$

من بين الأسئلة الرئيسية فيما يتعلق بهذه المسائل هو السلوك المقارب للحل u_ℓ للمسألة $p(\ell)$. هل يتقارب الحل u_ℓ نحو الحل u_∞ للمسألة $p(\infty)$. عندما يؤول ℓ إلى اللانهاية ؟ في أي فضاء يحدث هذا التقارب ؟ وماهي رتبة هذا التقارب ؟
على هذا الأساس محتوى المذكرة جاء مقسم إلى ثلاث فصول, الفصل الأول نقدم الرموز وأدوات التحليل الدالي الازمة لدراستنا, الفصل الثاني مخصص لدراسة المسألة الزائدية الخطية المطروحة في ميدان أسطواني, حيث نعطي أولا صياغة التغيرات ثم نثبث وجود ووحدانية الحل وصقالته, بعد ذلك, نثبث النظرية الأساسية للتقدير في الحالة العادية بطريقة مماثلة لمسائل إهليجية وقطع مكافئ, ننهي الفصل بإعطاء هذه النظرية, في الفصل الثالث برهنا نفس النتيجة تحت فرضيات أكثر عمومية ثم ندرس السلوك المقارب للحل في الحالة العامة باستخدام تقنية التنظيم المزدوجة, وفي الأخير نعطي الشروط الضرورية لحدوث هذا التقارب.

الفصل الأول

مفاهيم أولية

في هذا الفصل, نقوم بتذكير ببعض أدوات التحليل الدالي, مثل فضاءات صوبوليف وفضاءات L^p , تقاربات القوية وتقارب الضعيفة ..... إلخ. والتي يتم استخدامها في فصول المذكرة. يتم إعطاء بعض النتائج دون إثبات, لأنها معيارية (قياسية) ومعروفة بين القراء, كما يمكن العثور عليها في العديد من مراجع الرياضيات, ومع ذلك, نولي اهتماما خاصا للنتائج المستخدمة في الفصل التالي.أخذنا هذه المفاهيم من عدة مراجع ومصادر: [1]-[2]-[3]-[4]-[5]-[8]-[9].

1.1 فضاءات بناخ وهيلبرت

[1]

1.1.1 فراغ بناخ

ليكن $(X, \|u\|_X)$ فضاء شعاعي نظيمي.

تعريف 1.1.1 نقول أن X فراغ بناخ إذا كانت كل متتالية لكوشي منه متقاربة فيه, معناه X فضاء شعاعي نظيمي تام.

- ليكن X , Y فضاءين شعاعيين نظيميين على حقل $\mathbb{K}$ و F مؤثر من X في Y.

تعريف 2.1.1 نقول أن F خطي إذاتحقق

$$\forall x, y \in X \; \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{K} \quad, F(\alpha x + \beta Y) = \alpha F(x) + \beta F(y).$$

- في حالة $X \supseteq D(F)$ يضاف للشرط السابق الشرط

$$\forall x, y \in D(F) \;\; ,\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{K} \quad , \alpha x + \beta y \in D(F).$$

- في حالة $y = \mathbb{K}$ يسمى المؤثر الخطي بالشكل الخطي.
- نرمز لمجموعة الأشكال الخطية المستمرة على X بالرمز X' حيث

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

- X' يسمى الثنوي التبولوجي ل X.

ملاحظة 1.1.1 إذا كان $F \in X'$ و $\varphi \in X$ نرمز ل $F(\varphi)$ بـ $\langle F, \varphi \rangle$ معناه,

$$\forall\, \varphi \in X \quad , F(\varphi) = \langle F, \varphi \rangle.$$

نظرية 1.1.1 إذا كان F تطبيق خطي من X في Y فإن الإثباتات التالية متكافئة:

1. $F \in \mathcal{L}(X, Y)$.
2. F مستمر في الصفر.
3. F محدود على كرة الوحدة المغلقة $\overline{B(0,1)}$.
4. F محدود على سطح كرة الوحدة المغلقة $S(0,1)$.

5. F محدود.

6. F يحقق شرط لبشيتز.

7. F مستمر بانتظام.

2.1.1 فضاء هيلبرت

الجداء السلمي

تعريف 3.1.1 ليكن X فضاء شعاعي على حقل $\mathbb{K}$.
يعرف الجداء السلمي على فضاء شعاعي X بأنه تطبيق
$\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ حيث, من أجل كل $x, y, z \in X$ و $\lambda,\ \mu$ يحقق

1. $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$.

2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

3. $\langle x, x \rangle \geq 0$

4. $\langle x, x \rangle = 0$ إذا وفقط إذا $x = 0$.

يسمى فضاء شعاعي مزود بجداء سلمي بفضاء شبه هيلبرتي, ونستخدم الزوج $(X; \langle .,. \rangle)$ كترميز له.

- ليكن X فضاء شبه هيلبرتي وليكن $\|.\|_X$ النظيم المشارك لجدائه السلمي.

تعريف 4.1.1 يسمى الفضاء الشبه هلبرتي بفضاء هيلبرت, إذا كان تاما بالنسبة للنظيم المشارك لجدائه السلمي.

مبرهنة لاكس ميلغرام

[2] مبرهنة لاكس ميلغرام أداة سهلة وفعالة تطبق لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية الإهليجية, تعطي هذه المبرهنة الشروط الكافية لإثبات وجود ووحدانية الحل الضعيف للمسائل الحدية في فضاء هيلبرتي H مزود بجداءسلمي $(H; \langle .,. \rangle_H)$.

تعريف 5.1.1 نقول أن الشكل الثنائي الخطي $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

1. مستمر إذا وجد ثابت c بحيث

$$\forall\ (u, v) \in V \times V \quad |a(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V.$$

2. اهليجي إذا وجد ثابت α موجب بحيث

$$\forall\ (u, v) \in V \times V \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

مبرهنة 1.1.1 **(لاكس ميلغرام)**

ليكن V فضاء هيلبرتي مزود بجداء سلمي $\langle .,. \rangle_V$, وليكن $a(.,.)$ شكل ثنائي خطي مستمر واهليجي على $V \times V$, L شكل خطي مستمر على V, إذن يوجد حل وحيد u من V بحيث

$$\forall\ v \in V\ a(u,v) = \langle L, v \rangle.$$

نظرية 2.1.1 **(ريس لأشكال الخطية)**

ليكن H فضاء هيلبار من أجل أي $F \in H'$ يوجد عنصر وحيد $v \in H$ بحيث

$$\forall\ u \in H\ \ F(u) = \langle u, v \rangle,$$

بالإضافة إلى ذلك

$$\|F\|_{H'} = \|v\|_H.$$

2.1 الفضاءات L^p وخصائصها

[2] لتكن Ω مجموعة (مفتوحة ومحدبة) من $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ليست بالضرورة محدودة, ولتكن $\partial\Omega$ حافة لـ Ω منتظمة. p عدد حقيقي موجب $p \in [1, +\infty[$ مزودة بقياس لوبيغ.

تعريف 1.2.1 نقول عن خاصية حيثما كان تقريبا محققة(ح.ت)على Ω. إذا كان كل عنصر من Ω لايحقق هذه الخاصية على مجموعة قياسها معدوم, ويحقق هذه الخاصية على مجموعة قياسها غير معدوم.
نقول عن دالتين u و v أنهما قيوستان إذا كان
$f(x) = g(x)$ حيثما كان تقريبا (ح.ت) في Ω, معناه يوجد $E \subset \Omega$ حيث قياس لوبيغ لـ E معدوم $x \in \Omega \backslash E$ من أجل كل $f(x) = g(x)$.

- لتكن u معرفة على Ω. نقول على u قابلة للمكاملة على Ω إذا

$$\int_\Omega |u(x)|\, dx < +\infty.$$

نعرف

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} ,\ \text{حيث}\ \ f\ \text{قيوسة و}\ \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < \infty\}.$$

من أجل أي $u \in L^p(\Omega)$ نرمز بـ $\|.\|_{\Omega,p}$ لنظيم الفضاء $L^p(\Omega)$ حيث

$\|f\|_{\Omega,p} = (\int_\Omega |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} dx$ إذا كان $1 \leq P < +\infty$.

ونعرف

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث f قيوسة, يوجد ثابت C بحيث $|f(x)| \leq C$ ح.ت على Ω $\}$.

نرمز بـ $\|.\|_{\Omega,\infty}$ لنظيم الفضاء $L^\infty(\Omega)$ حيث

$\|f\|_{\infty,\Omega} = \inf \{$ C حيث $|f(x)| \leq C$ ح.ت على Ω $\}$.

- في حالة $p = 2$ الفضاء L^p له أهمية خاصة لأن له بنية فضاء هيلبرتي, مزود بجداء سلمي

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ u,v \in L^2(\Omega).$$

فيما يلي نذكر بعض خصائص الفضاء $L^p(\Omega)$

1. الفضاء L^p فضاء بناخ من أجل $1 \leq p \leq \infty$..
2. $L^p(\Omega)$ قابل للفصل من أجل $1 \leq p < \infty$.
3. $L^p(\Omega)$ انعكاسي من أجل $1 < p < \infty$.

تعريف 2.2.1 ليكن $p, p'[1,\infty[$ نرمز بـ p' للأس المرافق لـ p حيث

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ (\text{اصطلاحا}\ \frac{1}{\infty} = 0).$$

- في كل مايأتي p' يعرف أس مرافق لـ p.

3.1 بعض المتباينات في L^p

قضية 1.3.1 (متباينة تونيلي) لتكن $u \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ تحقق:

- $\int_{\Omega_2} |u(x_1,x_2)|\, dx_2 < \infty$ ح.ت لكل $x_1 \in \Omega_1$.
- $\int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} |u(x_1,x_2)|\, dx_2 < \infty$.

إذن $u \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

قضية 2.3.1 (متباينة فوبيني) نفرض أن $u \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ إذن, من أجل $x_1 \in \Omega_1$ ح.ت,

$$\int_{\Omega_2} u(x_1,x_2)dx_2 \in L^1(\Omega_1)\ u(x_1,x_2) \in L^1(\Omega_2)$$

بالمثل $x_2 \in \Omega_2$ ح.ت,

$$\int_{\Omega_1} u(x_1,x_2)dx_1 \in L^1(\Omega_2)\ u(x_1,x_2) \in L^1(\Omega_1)$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا:

$$\int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} u(x_1,x_2)dx_2 = \int_{\Omega_2} dx_2 \int_{\Omega_1} u(x_1,x_1)dx_1 = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} u(x_1,x_1)dx_1dx_2 .$$

قضية 3.3.1 (متباينة يونغ) ليكن $p,p' \in]1,+\infty[$ إذن

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall\ \varepsilon > 0 \quad , ab \le \frac{\varepsilon}{p}a^p + \frac{1}{p'\varepsilon^{\frac{p}{p'}}}b^{p'}.$$

إذا كان $p = p' = 2$ لدينا

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall\ \varepsilon > 0 \quad , ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

قضية 4.3.1 (متباينة هولدر) لتكن $p \in [1,+\infty[$, $u \in L^p(\Omega)$ و $v \in L^{p'}(\Omega)$ إذن

$$\left.\begin{array}{r} uv \in L^1(\Omega), \\ \|uv\|_{1,\Omega} \le \|u\|_{p,\Omega}\|v\|_{p',\Omega}. \end{array}\right\}$$

إذا كان $p = 2$ فإن $p' = 2$ متباينة هولدر تستنتج منها متباينة كوشي شفارتز

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \le (\int_\Omega |u(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |v(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}$$

1.3.1 فضاء $L^p(0,T,x)$

في هذا الجزء نقدم بإيجاز بعض النتائج حول فضاء الدوال ذات القيم في فضاء بناخ X. في كل مايأتي $T > 0$. نعرف الفضاءات التالية:

$C([0,T;X])$ = {u, $u:[0,T] \longrightarrow X$, حيث u مستمرة }.

$L^p(0,T,X) =$ {u, $u:[0,T] \longrightarrow X$, حيث u قيوسة $\exists\ c > 0$, $\|u(t)\| < c$ ح.ت }.

مزودة بالنظيم:

$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \inf \{c > 0 , c , \|u(t)\|_X < c , \text{ح.ت}\}$.

ملاحظة 1.3.1 من أجل كل $1 \leq p \leq \infty$ ، $L^p(0,T,X)$ فضاء بناخ، $C([0,T;X])$ كثيف في $L^p(0,T,X)$.

4.1 التقاربات القوية والضعيفة

ليكن $(X, \|.\|_X)$ فضاء بناخ و $(X', \|.\|_{X'})$ فضاء الثنوية المرافق له حيث

$$\|u\|_{X'} = \sup_{\|v\|_X = 1} \langle u, v\rangle_{X,X'}$$

$\langle u, v\rangle_{X,X'}$ يمثل جداء الثنوية بين X و X'.

تعريف 1.4.1 نقول أن المتتالية $(u_{\mathbb{K}})_{K\epsilon\ \mathbb{N}^*} \subset X$ متقاربة بقوة نحو $u \in X$ عندما $K \longrightarrow +\infty$ إذا تحقق

$$\lim_{K\to+\infty} \|u_K - u\|_X = 0 ,$$

u_K تسمى نهاية قوية لـ u. و نرمز بـ $u_K \longrightarrow u$ لتقارب قوي في X.

تعريف 2.4.1 نقول أن المتتالية $(u_{\mathbb{K}})_{K\epsilon\ \mathbb{N}^*} \subset X$ متقاربة بضعف نحو $u \in X$ عندما $K \longrightarrow +\infty$ إذا تحقق

$$\forall\ v\epsilon\ X' ,\ \langle v, u_K\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle v, u\rangle_{X',X} ,$$

u_K تسمى نهاية ضعيفة لـ u. و نرمز بـ $u_K \rightharpoonup u$ لتقارب ضعيف في X.

(محدودية المتتاليات المتقاربة بضعف)

مبرهنة 1.4.1 ليكن X فضاء بناخ. X. $(u_k)_{k\epsilon\ \mathbb{N}^*} \subset$ متقاربة بضعف نحو $u \in X$. إذن:

- $(u_k)_{k\epsilon\ \mathbb{N}^*}$ محدودة في X.
- إذا كان X إنعكاسي و $\lim_{k\to+\infty} \|u_K\|_X = \|u\|_X$ إذن $u_k \longrightarrow u$ في X.

فيما يلي سنتطرق إلى أهم المبرهنات والخواص المستخدمة في أغلب الأحيان لإثبات تقاربات الضعيفة والقوية للمتتاليات.

- تقدم النظرية التالية نتيجة مهمة للغاية فيما يتعلق بفضاءات باناخ الإنعكاسية.

نظرية 1.4.1 (إبرلين سموليان)

ليكن X فضاء بناخ إنعكاسي و $(u_K)_{K\epsilon\ \mathbb{N}^*}$ متتالية محدودة من X.
معناه, يوجد ثابت $C>0$ حيث

- $\|u_K\|_X \leq C \quad \forall\ k\ \epsilon\ \mathbb{N}$.

إذن:

- توجد متتالية جزئية $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}^*} \subset (u_k)_{k\epsilon\ \mathbb{N}^*}$ و $u\epsilon\ X$ حيث

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ في } X.$$

- إذا كانت كل متتاليات جزئية مستخرجة من $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة بضعف نحو نفس النهاية u , إذن المتتالية $(u_k)_{k\epsilon\ \mathbb{N}^*}$ تتقاربة بضعف نحو u من X.

قضية 1.4.1 ليكن X فضاء بناخ, $(u_K)_{K\epsilon\ \mathbb{N}^*}$ متتالية من X. إذن

- تقارب القوي يكافئ تقارب ضعيف في فضاء بناخ X بعده منتهي.

قضية 2.4.1 ليكن X فضاء بناخ, $(u_K)_{K\epsilon\ \mathbb{N}^*}$ متتالية من X إذن:

- إذا كانت $u_k \to u$ في X فإن $u_k \rightharpoonup u$ في X.

حالة خاصة $E = L^p(\Omega)$.

ليكن $L^q(\Omega)$ ثنوي تبولوجي لـ $L^p(\Omega)$ حيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. إذن:
$u_k \rightharpoonup u$ في $L^p(\Omega)$, من أجل $1\leq p<+\infty$ إذا تحقق

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega u_k\varphi dx = \int_\Omega u\varphi dx \quad \forall\ \ \varphi\epsilon\ L^q(\Omega).$$

توطئة 1.4.1 لتكن (u_k) متتالية من $L^p(\Omega)$ و (w_k) متتالية من $L^q(\Omega)$. من أجل $1<p<+\infty$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
نفرض أن

$$\left.\begin{array}{r} u_k \rightharpoonup u \text{ في } L^p(\Omega), \\ w_k \longrightarrow w \text{ في } L^q(\Omega). \end{array}\right\}$$

إذن:

$$u_k w_k \rightharpoonup uw \text{ في } L^1(\Omega).$$

5.1 التوزيعات وفضاء صوبولاف

[2] – [9]

1.5.1 التوزيعات

نرمز فيما يأتي إلى Ω مجال مفتوح من $\mathbb{R}^n$.

فضاء دوال الإختبار $D(\Omega)$

تعريف 1.5.1 نرمز بـ $D(\Omega)$ إلى فضاء شعاعي للدوال من Ω في $\mathbb{R}$ من صنف C^∞ ذات حامل المتراص محتوى في Ω معناه $(D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega))$ فضاء دوال الإختبار.

$$supp(f) = \text{إغلاقة المجموعة } \{x \in (\Omega), \quad f(x) \neq 0\}.$$

نقول أن φ_n متقاربة نحو 0 في $D(\Omega)$ و نرمز بـ $(\varphi_n \longrightarrow 0)$ في $D(\Omega)$ إذا تحقق الشرطان:

1. يوجد متراص K من Ω بحيث $supp \ \ \varphi_n \subset K$, من أجل أي $n \in \mathbb{N}$.
2. من أجل أي دليل متعدد $\alpha \in \mathbb{N}^n$, المتتالية $D^\alpha \varphi_n$, متقاربة نحو 0 بالإنتظام على K, نقول أيضا $\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi_n(x)| \longrightarrow 0$, عندما $n \longrightarrow \infty$.

ملاحظة 1.5.1 1. إذا كان $\varphi \in D(\Omega)$, فإن $supp \ \ \varphi \subset suppD^\alpha\varphi$, لدينا أيضا $D^\alpha\varphi \in D(\Omega)$. حيث $\alpha \in N^n$.

2. نقول أن $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ في $D(\Omega)$ إذا وفقط إذا $\varphi_n - \varphi \longrightarrow 0$ في $D(\Omega)$.

الفضاء $D^{'}(\Omega)$

تعريف 2.5.1 التوزيعات هي أشكال خطية مستمرة على $D(\Omega)$ معناه

$$D^{'}(\Omega) = \mathcal{L}(D(\Omega), \mathbb{K}).$$

2.5.1 مثال على التوزيعات

الدوال القابلة للمكاملة محليا

تعريف 3.5.1 نقول أن الدالة $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للمكاملة محليا, إذا كانت قابلة للمكاملة على كل محدود k من $\mathbb{R}^n$, معناه, إذا

$$\int_k |u(x)|\, dx < +\infty \quad \text{من أجل}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

إذا كان k محدود ومغلق من $\mathbb{R}^n$ فهو متراص.
نرمز بـ

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{u \ , L^p(k) \ni u \text{ من أجل أي متراص } \Omega \supset k\ \}$$
$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{u \ , L^p(k) \ni u.1_k \text{ من أجل أي متراص } \Omega \supset k\ \}$$

حيث

$$1_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ إذا } x > 0 \ (x \in k), \\ 0 \text{ إذا } x \notin k. \end{cases}$$

للفضاء الشعاعي للدوال القابلة للمكاملة محليا على أي متراص k من $\mathbb{R}^n$.

ملاحظة 2.5.1 $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

قضية 1.5.1 كل دوال $u(x)$ قابلة للمكاملة محليا تعرف توزيعة T_u بالشكل التالي

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \ , \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

- في $\mathbb{R}^n$, كل دوال $u(x_1, ..., x_n)$ قابلة للمكاملة محليا تعرف توزيعة T_u بالعلاقة

$$< T_u, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} ..... \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, ..., x_n)\varphi(x_1, ..., x_n)dx_1.....dx_n \ , \forall \varphi \in D(\Omega).$$

مثال 1.5.1 الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \text{ إذا } x > 0 \ (\alpha \in \mathbb{C}), \\ 0 \text{ إذا } x \leq 0. \end{cases}$$

قابلة للمكاملة محليا إذا $Re\ \alpha > -1$

$$< u, v >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x)dx \ , \forall \varphi \in D(\Omega).$$

في مايلي نذكر بعض الخواص الأساسية للتوزيعات:

توطئة 1.5.1 لتكن $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ حيث

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0 \ , \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

إذن $u = 0$ ح.ت في Ω.

3.5.1 المشتق بمفهوم التوزيعات

نرمزفيما يأتي بـ Ω إلى ميدان مفتوح من $\mathbb{R}^n$, وب
$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, $i=1,2,.....,n$. إلى دليل متعدد, نضع $|\alpha|=\alpha_1+.....+\alpha_n$ و نعرف $\partial_i=\frac{\partial}{\partial_{x_i}}$,
$i=1,2,.....,n$, $D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}.....\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$, حيث D^α مشتق من الرتبة α بمعنى التوزيعات.

- لتكن u دالة من صنف C^1 نعرف تكامل بالتجزئة,

$$\forall\ \ \varphi\epsilon\ D(\Omega).\qquad \left\langle u',\varphi\right\rangle=-\int_\Omega u(x)\varphi'(x)dx=-\left\langle u,\varphi'\right\rangle,$$

لأن $\varphi\ |_{\partial\Omega}=0$ ومنه نستنتج التعريف العام التالي:

تعريف 4.5.1 نسمي مشتق T' لتوزيعة T, معرف بالعلاقة

$$\forall\ \varphi\in D(\Omega).\qquad \langle T',\varphi\rangle=-\langle T,\varphi'\rangle,$$

- في حالة مشتق لعدة متغيرات, نعرف المشتق $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ لتوزيعة T, بـ

$$\forall\ \varphi\in D(\Omega).\qquad \langle D^\alpha T,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle T,D^\alpha\varphi\rangle,$$

توطئة 2.5.1 إذا كانت $T\in D'(\Omega)$ و $\alpha\in\mathbb{N}^n$, إذن $D^\alpha T\in D'(\Omega)$.

قضية 2.5.1 ليكن $T\in D'(\Omega)$ حيث $\frac{\partial T}{\partial x_i}=0$, من أجل أي $i\in 1,.....,n$. إذن T ثابث على كل عناصر Ω.

نتيجة 1.5.1 نفرض أن Ω مفتوح مترابط من $\mathbb{R}^n$ و $m\in\mathbb{N}^*$ وليكن $T\in D'(\Omega)$ يحقق

$$\forall\ \ |\alpha|=m\qquad ,D^\alpha T=0$$

إذن $T\in\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$.

برهان 1.5.1 أنضر [5]

4.5.1 تقارب التوزيعات

تعريف 5.5.1 .1 لتكن $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $D^{'}(\Omega)$. نقول أن T_n متقاربة نحو 0 في $D^{'}(\Omega)$, نرمز بـ $T_n \longrightarrow 0$ إذا وفقط إذا

$$,\langle T_n,\varphi\rangle \longrightarrow 0 \qquad .\forall\ \varphi\in D(\Omega)$$

.2 نقول أن المتتالية $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من $D^{'}(\Omega)$ متقاربة نحو $T\in D^{'}(\Omega)$, عندما $n\longrightarrow +\infty$ ونرمز($T_n\longrightarrow T$) في $(D^{'}(\Omega)$ إذا كان

$$.\forall\ \varphi\in D(\Omega) \qquad ,\langle T_n,\varphi\rangle \longrightarrow \langle T,\varphi\rangle$$

قضية 3.5.1 لتكن u_n متتالية من $D^{'}(\Omega)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $D^{'}(\Omega)$ عندما $n\longrightarrow\infty$ إذن, من أجل كل $f\in C^\infty(\Omega)$, لدينا

$$.D^{'}(\Omega)\ \text{في} \qquad f(u_n)\longrightarrow fu$$

قضية 4.5.1 ليكن D^α, $\forall\ \alpha\in\mathbb{N}^n$ مؤثر مستمر من $D^{'}(\Omega)$ إذا كان $T_n\longrightarrow T$ في $D(\Omega)$ فإن $D^\alpha T_n\longrightarrow D^\alpha T$ في $D^{'}(\Omega)$ عندما $n\longrightarrow+\infty$.

الفضاء $D^{'}(a,b;X)$

تعريف 6.5.1 نعرف

$$.D^{'}(a,b;E)=\{u,\ \ u\epsilon\ L(D(]a,b[),E)\}$$

فضاءات صوبولاف

تشكل فضاءات صوبولاف إطارا داليا طبيعيا ومناسبا لتحليل المعادلات التفاضلية الجزئية. فيما يلي, نذكر ببعض النتائج المتعلقة به من خلال إقتصارنا على فضاءات من رتبة 1.

تعريف 7.5.1 لتكن Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$, p عدد حقيقي بحيث من أجل كل $1\le p\le+\infty$. نعرف

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\epsilon\ L^p(\Omega), \quad D^\alpha u\epsilon\ L^p(\Omega),\forall\ |\alpha|\le m\}$$

حيث D^α تمثل مشتقات ضعيفة لـ u.
مزود بالنظيم

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{إذا } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{إذا } p = +\infty. \end{cases}$$

ونصف النظيم التالي

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{إذا } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{إذا } p = +\infty. \end{cases}$$

$\|.\|_{L^p}(\Omega)$ يعرف نظيم في فضاء لوبيغ.

- نرمز ب $H^m(\Omega)$ لفضاء صوبوليف $W^{m,2}(\Omega)$.
- من أجل $m = 0$ لدينا $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
- و من أجل $m = 1$ لدينا $H^1(\Omega)$.

قضية 5.5.1 الفضاء $H^m(\Omega)$ فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx .$$

فيما يلي نذكر بعض الخصائص الأساسية لفضاء صوبولاف

1. الفضاء $(W^{m,p}(\Omega), \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ فضاء بناخ من أجل $1 \leq p \leq +\infty$.
2. إذا $1 \leq p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ فضاء قابل للفصل.
3. $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ فضاء إنعكاسي.

تعريف 8.5.1 ليكن Ω ميدان من $\mathbb{R}^n$ نعرف الفضاء

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$$

بالنسبة لنظيم $H^1(\Omega)$.

دوال الفضاء $H_0^1(\Omega)$ معدومة على حافة وعليه

$$H_0^1 = \{u\epsilon\ H^1(\Omega),\ \ v\ |_{\partial\Omega} = 0\}$$

مبرهنة 1.5.1 $H_0^1(\Omega)$ فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي لـ $H^1(\Omega)$.

الفضاء $H^{-1(\Omega)}$

$H^{-1}(\Omega)$ فضاء ثنوي لـ $H_0^1(\Omega)$, معناه فضاء الأشكال الخطية المستمرةعلى $H_0^1(\Omega)$. مزود بالنظيم:

$$.\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v\epsilon\ H_0^1(\Omega)} \frac{<u,v>_{H^{-1},H_0^1}}{\|v\|_{H^1}}$$

متباينة بوان كاري

ليكن Ω جزء مفتوح من $\mathbb{R}^N$ محدود على الأقل في جهة من المجال, يوجد ثابت $C > 0$ حيث من أجل كل دالة $v\epsilon\ H_0^1(\Omega)$ لدينا

$$,\forall\ v\ \epsilon H_0^1(\Omega) \qquad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

ملاحظة 3.5.1 متباينة بوان كاري تبقى صحيحة في فضاء $H^1(\Omega)$ إذا كانت v معدومة على أحد حواف Ω.

الفضاء $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$

$H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ فضاء جزئي من $H^1(\Omega)$. ليكن $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ مفتوح منتظم, حافة $\partial\Omega$ تنقسم إلى جزئين منفصلين منتظمين Γ_1 و Γ_2 , $|\Gamma_1| > 0$,
حيث $|.|$ ترمز إلى قياس $\partial\Omega$.
نعرف الفضاء $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ بـ

$$,H^1(\Omega)\ \text{في} \qquad H_0^1(\Omega;\Gamma_1) = \overline{C_0^1(\overline{\Omega};\Gamma_1)}$$

حيث

$$.C_0^1(\overline{\Omega};\Gamma_1) = \{v\in C^1(\overline{\Omega}); v\ |_{\Gamma_1}= 0\}$$

1. $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ فضاء شعاعي جزئي مغلق من $H^1(\Omega)$. وعليه $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي لـ $H^1(\Omega)$.
2. متباينة بوان كاري تبقى صحيحة في $H^1(\Omega;\Gamma_1)$.

ملاحظة 4.5.1 نعتبر الحالة الخاصة حيث Ω أسطوانة, معناه.

$$\Omega = \omega_1\times\omega_2$$

حيث ω_1 و ω_2 ميدانين أسطوانين محدودين من $\mathbb{R}^p$ و $\mathbb{R}^{n-p}$ على التوالي, $1 < p < n$. من أجل الفضاء $H_0^1(\Omega;\omega_1\times\partial\omega_2)$ لدينا

$$,\forall\ v\ \epsilon H_0^1(\Omega;\omega_1\times\partial\omega_2) \qquad , \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\omega_2}\|\nabla_{X_2} v\|_{L^2(\Omega)}$$

حيث $C_{\omega_2} > 0$ ثابث مستقل عن ω_1, و

$$.\nabla_{X_2} = (0, ..., \partial_{x_{p+1}}, ..., \partial_{x_n})^T$$

- عموما, دوال الفضاء $H^1(\Omega)$ من أجل $n \geq 2$ ليست مستمرة, مثل دوال قابلة للقياس, لذلك لايمكننا التحدث عن قيمة الدالة $v \in H^1(\Omega)$ عند كل نقطة "حيثما كان تقريبا". بالخصوص لايمكن الحديث عن قيمة "الحافة" أو "الأثر" للدالة $v \in H^1(\Omega)$ لحافة $\partial\Omega$ بالمعنى المعتاد, $\partial\Omega$ مجموعة مهملة (ذات قياس صفري).

- بفضل المبرهنة التالية يمكننا التحدث عن قيمة دالة من $H^1(\Omega)$ على $\partial\Omega$, و مكاملة بالتجزئة.

مبرهنة 2.5.1 ليكن Ω مفتوح محدود منتظم من صنف C^1, أو $\Omega = R^n_+$
نعرف تطبيق الأثر γ_0 ب

$$H^1(\Omega) \cap C(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega)$$

$$v \longrightarrow \gamma_0(v) = v \mid_{\partial\Omega}$$

هذا التطبيق يمتد بالإستمرارية إلى تطبيق خطي مستمر من $H^1(\Omega)$ إلى $L^2(\partial\Omega)$ حيث من أجل كل دالة $v\epsilon\ H^1(\Omega)$ لدينا

$$.\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad ,\forall\ u\ \epsilon H^1_0(\Omega)$$

مبرهنة 3.5.1 (قانون غرين)

ليكن Ω مفتوح محدود ومنتظم من $\mathbb{R}^n$ (على سبيل المثال Ω من صنف C^1 و Γ محدود), إذا كانت u و v دالتين من $H^1(\Omega)$ لدينا عبارة غرين

$$.\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds$$

حيث n_i تمثل المركبة رقم i لشعاع الناظمي n لحافة $\partial\Omega$ موجه خارج Ω.

نظرية 1.5.1 (ريليش)

ليكن Ω مفتوح محدود ومنتظم من $\mathbb{R}^n$, إذن

$$,H^1(\Omega) \hookrightarrow_{[compacte]} L^2(\Omega)$$

معناه,

1. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, معناه

- $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$,
- $\forall\, u \in H^1(\Omega) \quad \exists\, C > 0, \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

2. كل مجموعة محدودة في $H^1(\Omega)$ متراصةنسبيا في $L^2(\Omega)$.

5.5.1 الفضاء $W(a,b;X,Y)$

ليكن X و Y فضائين هلبرتيين قابلان للفصل حيث التباين $X \hookrightarrow Y$ مستمر, و X كثيف في Y.

تعريف 9.5.1 نعرف الفضاء

$$W(a,b;X,Y) = \{u\epsilon \;\; L^2(a,b;X), \;\; u^{'}\epsilon\, L^2(a,b;Y)\}.$$

مزود بالنظيم

$$\|u\|_W^2 = \|u\|^2_{L^2(a,b;X)} + \|u^{'}\|^2_{L^2(a,b;Y)}.$$

- الفضاء $W(a,b;X,Y)$ فضاء هيلبرتي.

مبرهنة 4.5.1 ليكن V فضاء هيلبرتي, $u,\;\; v \in W(a,b;V,V^{'})$ من أجل أي $t \in [a,b]$, لدينا

$$\int_a^b u^{'}(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v^{'}(t)dt = \int_a^b (u(t)v(t))^{'}dt = (u(b)v(b) - u(a)v(a)).$$

نظرية 2.5.1 ليكن $u\epsilon\, W(a,b;V,V^{'})$, وليكن $v\epsilon\, V$. من أجل أي $t \in [a,b]$, لدينا

$$(u^{'}(.),v) = \frac{d}{dt}(u(.),v) \qquad \text{في } D^{'}(]a,b[).$$

ملاحظة 5.5.1
- لتعريف فضاء صوبولاف $W^{m,p}$ يمكن أيضا إستعمال نظرية التوزيعات, كل دالة $u \in L^p(\Omega)$ تملك مشتقا بمعنى التوزيعات والذي هو عنصر من الفضاء الأكبر $D^{'}(\Omega)$.
- نقول بأن $u \in W^{m,p}(\Omega)$ إذا تطابق هذا المشتق التوزيعي في الفضاء $D^{'}(\Omega)$ مع دالة من $L^p(\Omega)$.
- مفهوم المشتق الضعيف يعمم المشتقة العادية وهو حالة خاصة للمشتقة بمفهوم التوزيعات.

6.1 تنظيم الدوال

العمليات الأكثر شيوعا لتنظيم الدوال القابلة للمكاملة محليا على $\mathbb{R}^N$ نستخدم مفهوم جداء الإلتفاف بواسطة متتالية التنظيم.

1.6.1 إلتفاف الدوال

تعريف 1.6.1 لتكن $f \in L^1(\mathbb{R})$ و $g \in L^p(\mathbb{R})$ من أجل $p \in [1, +\infty]$ نقول أنهما قابلتان للإلتفاف (ح.ت) $x \in \mathbb{R}$ إذا

$y \mapsto f(t)g(x-t)$ قابلة للمكاملة على $\mathbb{R}$.

نعرف جداء الإلتفاف للدالتين f و g بـ

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \quad x \in \mathbb{R},$$

في مايلي نذكر ببعض خواص جداء الإلتفاف

- جداء الإلتفاف تبديلي
  إذا كان $g*f$ موجود, الجداء $f*g$ يكون موجود أيضا لدينا

$$f*g = g*f.$$

برهان 1.6.1 بتغيير المتغير $u = x - t$, يكون لدينا

$$f*g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)du = g*f.$$

- جداء الإلتفاف توزيعي على الجمع:
  إذا كان $f*g$ و $f*h$ موجودان, فإن $f*(\alpha g+\beta h)$ موجود أيضا, ولدينا

$$f*(\alpha g+\beta h) = \alpha(f*g)+\beta(f*h).$$

وهذا ناتج من خطية التكامل.

قضية 1.6.1 لتكن $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, إذن

1. $f*g$ موجود حيثما كان تقريبا, $f*g \in L^1(\mathbb{R})$.
2. $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$
3. $(f*g)*h = f*(g*h)$. حيث $h \in L^1(\mathbb{R})$.

برهان 2.6.1 [5]

قضية 2.6.1 لتكن $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. إذن, الدالة $f*g$ موجودة و لدينا

$$|f*g|_\infty \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

برهان 3.6.1 أنضر [5]

2.6.1 التفاف التوزيعات

لتكن f و g دالتين من $L^1(\mathbb{R})$, لدينا من أجل أي $\varphi \in D(\mathbb{R})$,

$$< f * g, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\varphi(x)dtdx .$$

نذكر بعض خواص إلتفاف التوزيعات
ليكن $S, T, R, T_1, T_2 \in D^{'}(\Omega)$ إذ كان $S * T$ و $S * T_1$, $S * T_2$ موجودة, إذن

1. $S * T = T * S$.
2. $(R * S) * T = R * (S * T)$.
3. $S * (T_1 + T_2) = S * T_1 + S * T_2$.

(حامل الإلتفاف)

قضية 3.6.1 ليكن $S, T \in D^{'}(\mathbb{R})$ نفرض أن $S * T$ موجود, إذن

$$suup(S * T) \subset \overline{supp(S) + supp(T)}.$$

(مشتق الإلتفاف)

قضية 4.6.1 ليكن $S, T \in D^{'}(\mathbb{R})$, إذا كان $S * T$ موجود, فإن

$$(S * T)^{'} = S^{'} * T = S * T^{'} ,$$

وبشكل أعم

$$D^{\alpha}(S * T) = D^{\alpha}S * T = S * D^{\alpha}T ,$$

حيث D^{α} مشتق من رتبة α.

(متباينة هوسدولف يونغ)

مبرهنة 1.6.1 لتكن $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, حيث $p, q, r \in [1, +\infty]$ و $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, (مع اصطلاح $\frac{1}{\infty} = 0$) , إذن

$$\left.\begin{array}{l} f * g \in L^r(\mathbb{R}^N) , \\ \|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} . \end{array}\right\}$$

ملاحظة 1.6.1 إذا كانت $f \, \epsilon L^p(\mathbb{R}^N)$ و $g \, \epsilon L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ حيث $\frac{1}{P} + \frac{1}{p'} = 1$ (مع اصطلاح $\frac{1}{\infty} = 0$), إذن $f * g \in {}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ حسب متباينة هوسدولف يونغ.

3.6.1 المتتاليات المنظمة

تعريف 2.6.1 نسمي متتالية منظمة أو تنظيمية كل متتالية $(\rho_n)_{n\geq 1}$ من الدوال بحيث

- $\rho_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.
- $supp \ \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$.
- $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = 1$.
- $\rho_n(x) \geq 0$ على $\mathbb{R}^N$.

قضية 5.6.1 لتكن $f \in C(\mathbb{R}^N)$, إذن $\rho_n * f \longrightarrow f$ بانتظام على كل متراص من $\mathbb{R}^N$.

برهان 4.6.1 أنظر [2]

مبرهنة 2.6.1 لتكن $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, حيث $p \in [1, +\infty[$ إذن $\rho_n * f \longrightarrow f$ في $L^p(\mathbb{R}^N)$.

برهان 5.6.1 أنظر [2]

نتيجة 1.6.1 لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة كيفية.
إذن $C_c^{\infty}(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ من أجل أي $p \in [1, +\infty[$.

متباينة جرونويل [5]

مبرهنة 3.6.1 لتكن $A, B > 0$ و $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ مستمرة حيث

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s) ds ,$$

من أجل أي $t \geq 0$.
إذن

$$\phi(t) \leq A \exp(Bt) , \qquad \text{من أجل أي } t \geq 0 .$$

برهان 6.6.1 [5]

قضية 6.6.1 [6] ليكن $v \in H_0^1(\Omega_\ell)$ إذن, لدينا

$$v(X_1, .) \in H_0^1(\omega) \quad \text{ح.ت} \quad X_1 \in (-\ell, \ell)^p .$$

فريديش [4]

في فضاء هيلبرتي H , $B_{\ell_1}(t)\ \epsilon\mathcal{L}(H,H)$, مجموعة من المؤثرات, حيث الدالة

$$t \longrightarrow (B_{\ell_1}(t)u, v) \quad \forall\, u, v \in H$$

من الصنف C^1 , تحقق

$$\left|(\frac{d}{dt}B_{\ell_1}(t)u, v)\right| \leq C\,|u|\,|v|.$$

إذن, من أجل $u \in L^2(-\infty, +\infty; H)$, لدينا

$$\frac{d}{dt}[B_{\ell_1}(t)(\rho_n * u) - \rho_n * (B_{\ell_1}(t)u)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{في}\ L^2(-\infty, +\infty; H^1(\Omega_\ell)).$$

الفصل الثاني

التقدير في الحالة العادية

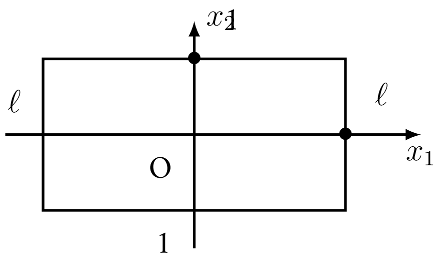
في هذا الفصل نهتم بإثبات النظرية الأساسية للتقدير في الحالة العادية لمسألة زائدية من الشكل التالي

$$u^{''} - Au = f$$

حيث

$$, Au = \sum_{1\leq i,j\leq n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u) + c(t,x)u \quad x \in \Omega$$

بطريقة مماثلة لحالة مسائل الإهليجي والقطع المكافئ.أولا نبحث على الصياغة الضعيفة للمسألتين $p(\ell)$ و $p(\infty)$ في فضاء H_0^1. ثم, نثبت وجود ووحدانية الحل للمسألتين باستخدام مبرهنة لاكس ميلغرام.بعد ذلك, نعطي نتيجتي صقالة.



شكل 1.2:

1.2 طرح المسألة

ليكن Ω_ℓ ميدان أسطواني من $\mathbb{R}^n$ المعرف ب

$$\Omega_\ell = (-\ell, \ell)^p \times \omega,$$

حيث ω ميدان محدود لبشتزي من $\mathbb{R}^{n-p}$, ℓ عدد موجب, p عدد صحيح $(1 \le p \le n)$. من أجل $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^p$ ، نضع,

$$X_1 = (x_1, ..., x_p), \qquad X_2 = (x_{p+1}, ..., x_n).$$

من أجل العدد الموجب t, نرمز ب

$$Q_\ell = [0, T] \times \Omega_\ell, \qquad Q_\infty = [0, T] \times \omega.$$

نعتبر مسألة القيم الحدية المعرفة ب

$$P(\ell)\begin{cases} u'' - \sum_{1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial x_j u) = f & \text{في } Q_\ell, \qquad * \\ u = 0 & \text{على } [0,T]\times\partial\Omega_\ell, \\ u(0,.) = u_{\ell,0}, \quad u'(0,.) = u_{\ell,1} & \text{على } \Omega_\ell, \end{cases} \tag{1.1}$$

و

$$P(\infty)\begin{cases} u'' - \sum_{p+1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u) = f & \text{في } Q_\infty, \qquad (**) \\ u = 0 & \text{على } [0,T]\times\partial\omega, \\ u(0,.) = u_0 \quad u'(0,.) = u_1 & \text{على } \omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

حيث f دالة مستقلة عن X_1,

$$f(t,x) = f(t, X_2), \tag{1.3}$$

والمعاملات a_{ij} أيضا, نضع

$$a_{ij}(t,x) = a_{ij}(t, X_2) \quad \text{أجل من} \quad p+1 \le j \le n. \tag{1.4}$$

تحقق الشرط التالي

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \ge \lambda\,|\xi|^2 \quad \text{ح.ت} \quad (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^p\times\omega \quad \text{أجل أي من} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

سندرس وجود حل للمسألة الزائدية, نستخدم مبرهنتين مختلفتين تعتبر الأولى (انضر [8]) نتيجة الصقالة والثانية (انضر [3]) نتيجة عامة. بحيث تكون الأولى مقدمة للحالة العامة.

2.2 صياغة التغيرات

نبحث عن مسألة صياغة التغيرات للمسألتين (1.1) و (1.2)
بضرب المعادلة (*) بدالة إختبار $v \in D(\Omega_\ell)$, ومكاملة الطرفين على Ω_ℓ , نجد

$$\int_{\Omega_\ell} u'' v dx - \int_{\Omega_\ell} (\sum_{1 \le i,j \le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u) v dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x) u v dx = \int_{\Omega_\ell} f v dx$$

بتطبيق عبارة المكاملة بالتجزئة, نحصل على:

$$\int_{\Omega_\ell} u'' v dx + \int_{\Omega_\ell} \sum_{1 \le i,j \le n} (a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u) \partial x_i v dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x) u v dx = \int_{\Omega_\ell} f v dx$$

نأخذ الفضاء

$$H_0^1(\Omega_\ell) = \{ v \in L^2(\Omega_\ell) \ , v \mid_{\partial\Omega_\ell} = 0 \}$$

من كثافة $D(\Omega_\ell)$ في $H_0^1(\Omega_\ell)$, صياغة الضعيفة للمسألة (1.1) تكتب من الشكل التالي

$$\left. \begin{array}{r} \text{أوجد } u \, \epsilon H^1(\Omega_\ell) \text{ بحيث} \\ .\forall \ v \in H_0^1(\Omega_\ell) \qquad a(u,v) = < f, v > \end{array} \right\} (FV1)$$

حيث

$$a(t,u,v) = \int_{\Omega_\ell} u'' v dx + \int_{\Omega_\ell} \sum_{1 \le i,j \le n} (a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u) \partial_{x_i} v dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x) u v dx$$

و

$$l(t,v) = < f, v >$$

بضرب المعادلة (**)بدالة إختبار $v \in D(\omega)$, ومكاملة الطرفين على ω , نجد

$$\int_\omega u'' v dx - \int_\omega (\sum_{p+1 \le i,j \le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u) v dx + \int_\omega c(t,x) u v dx = \int_\omega f v dx$$

بتطبيق عبارة مكاملة بالتجزئة, نحصل على:

$$\int_\omega u'' v dx + \int_\omega (\sum_{p+1 \le i,j \le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u \partial_{x_i} v) dx + \int_\omega c(t,x) u v dx = \int_\omega f v dx$$

نأخذ الفضاء

$$H_0^1(\omega) = \{ v \in L^2(\omega) \ , v \mid_{\partial\omega} = 0 \}$$

من كثافة $D(\omega)$ في $H_0^1(\omega)$, صياغة الضعيفة للمسألة (1.2) تكتب من الشكل التالي

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{أوجد } u\in H_0^1(\omega) \text{ بحيث} \\ \forall\, u\in H_0^1(\omega) & a(u,v)=<f,v> \end{array}\right\}(FV2)$$

حيث

$$a(t,u,v)=\int_\omega u^{''}vdx+\int_\omega\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u)\partial_{x_i}vdx+\int_\omega c(t,x)uvdx$$

و

$$l(t,v)=<f,v>$$

3.2 الوجود والوحدانية

في هذا الجزء نثبت وجود ووحدانية الحل للمسألتين ,(1.1) (1.2) من أجل ذلك , نطبق مبرهنة لاكس ميلغرام
نثبت استمرارية الشكل الخطي $L(.)$.لدينا

$$|l(t,v)|=\left|\int_{\Omega_\ell}fvdx\right|$$

باستخدام متباينة كوشي شفارتز, نجد

$$|l(t,v)|\le(\int_{\Omega_\ell}|f|^2dx)^{\frac12}(\int_{\Omega_\ell}|v|^2dx)^{\frac12}$$
$$|l(t,v)|\le\|f\|_{L^2(\Omega_\ell)}\|v\|_{L^2(\Omega_\ell)}$$
$$|l(t,v)|\le\|f\|_{H_0^1(\Omega_\ell)}\|v\|_{H_0^1(\Omega_\ell)}$$

الآن نثبت استمرارية وإهليجية الشكل الثنائي الخطي $a(t,u,v)$

$$|a(t,u,v)=\left|\int_{\Omega_\ell}u^{''}vdx+\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u)\partial_{x_i}vdx+\int_{\Omega_\ell}c(t,x)uvdx\right|$$

باستخدام(2.1), نجد

$$|a(t,u,v)|\le\int_{\Omega_\ell}\left|u^{''}v\right|dx+\alpha\int_{\Omega_\ell}\left|\partial_{x_j}u\right|\left|\partial_{x_i}v\right|dx+\alpha\int_{\Omega_\ell}|u|\,|v|\,dx$$

باستخدام متباينة كوشي شفارتز, نجد

$$|a(t,u,v)|\le(\int_{\Omega_\ell}\left|u^{''}\right|^2dx)^{\frac12}(\int_{\Omega_\ell}|v|^2dx)^{\frac12}+\alpha(\int_{\Omega_\ell}\left|\partial_{x_j}u\right|^2dx)^{\frac12}(\int_{\Omega_\ell}\left|\partial_{x_i}v\right|^2dx)^{\frac12}$$
$$+\alpha(\int_{\Omega_\ell}|u|^2dx)^{\frac12}(\int_{\Omega_\ell}|v|^2dx)^{\frac12}dx$$

ومنه

$$|a(t,u,v)|\le c(\|u^{''}\|_{L^2(\Omega_\ell)}\|v\|_{L^2(\Omega_\ell)}+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\ell)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\ell)}+\|u\|_{L^2(\Omega_\ell)}\|v\|_{L^2(\Omega_\ell)})$$

ومنه

$$|a(t,u,v)| \leq c(\|u\|_{H_0^1(\Omega_\ell)}\|v\|_{H_0^1(\Omega_\ell)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\ell)}\|v\|_{H_0^1(\Omega_\ell)}\|\|| + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\ell)}\|v\|_{H_0^1(\Omega_\ell)})$$

ومنه

$$|a(t,u,v)| \leq C(\|u\|_{H_0^1(\Omega_\ell)}\|v\|_{H_0^1}(\Omega_\ell))$$

لدينا

$$a(t,v,v) = \int_{\Omega_\ell} v'vdx + \int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\nabla v\nabla v)dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x)vvdx$$

باستخدام (1.5), نجد

$$a(t,v,v) \geq \alpha\|v\|^2_{H_0^1(\Omega_\ell))}$$

بنفس الطريقة نبرهن شروط مبرهنة لاكس ميليغرام للمسألة(1.2).

- حسب شروط مبرهنة لاكس ميلغرام, المسألتين (1.1), (1.2) تقبلان حل وحيد في الفضاء $H_0^1(\Omega_\ell)$ و $H_0^1(\omega)$ على التوالي.

1.3.2 صقالة الحلول

نتيجة صقالة

نعطي نتيجتي صقالة, النتيجة الأولى (أنضر [3]) نحافظ على الشروط السابقة.

مبرهنة 1.3.2 نفرض أن (1.5),(2.2) و $f \in L^2(\Omega_\ell)$ و $f \in L^2(\omega)$ محققة.بعد التعديل المحتمل على مجموعة ذات قياس معدوم, المسألتين (1.1) (1.2) , تقبلان حل وحيد u_ℓ و u_∞ على التوالي, يحققان

$$.u_\ell \in C^0(0,T;H_0^1(\Omega_\ell)) \qquad ,u'_\ell \in C^0(0,T;L^2(\Omega_\ell)).$$

$$.u_\infty \in C^0(0,T;H_0^1(\omega)) \qquad ,u'_\infty \in C^0(0,T;L^2(\omega)).$$

تعطي النتيجة الثانية (أنضر [8]) صقالة أفضل من النتيجة السابقة, ولكن في ظل فرضيات أقوى.
نعتبر الفرضيات التالية:
المعاملات a_{ij} قابلة لإشتقاق مرتين بالنسبة ل t , يوجد ثابت $\alpha > 0$, حيث

$$,Q_\infty \text{ على } \quad |\partial_{tt}a_{ij}(t,x)| \leq \alpha$$

$$,Q_{\Omega_\ell} \text{ على } \quad |\partial_{tt}a_{ij}(t,x)| \leq \alpha$$

f يقبل مشتق بالنسبة للزمن, حيث

$$,f,f_t \in L^2(0,T;L^2(\omega))$$

$$, f, f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell))$$

للشروط الإبتدائية نأخذ

$$.u_0 \in H^2(\omega)\cap H_0^1(\omega) \quad , u_1 \in H_0^1(\omega)$$

$$.u_{\ell,0} \in H^2(\Omega_\ell)\cap H_0^1(\Omega_\ell) \quad , u_{\ell,1} \in H_0^1(\Omega_\ell)$$

مبرهنة 2.3.2 تحت الفرضيات السابقة, كذلك الفرضيتين (1.5), (2.2), يوجد حل ضعيف وحيد, u_ℓ و u_∞ على التوالي, للمسألتين (1.1), (1.2) يحققان

$$.u_\ell \epsilon L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\ell)) \quad , u_\ell' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\ell)), \quad , u_\ell'' \epsilon L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell))$$

$$.u_\infty \in L^2(0,T;H_0^1(\omega)), \quad , u_\infty' \in L^2(0,T;H_0^1(\omega)), \quad , u_\infty'' \epsilon L^2(0,T;L^2(\omega))$$

2.3.2 التقدير في الحالة العادية

نعتبرالفرضيات التالية

$$, a_{ij}, c \,\epsilon\, C^1([0,T]\times\mathbb{R}^p\times\overline{\omega})$$

$$, [0,t]\times\mathbb{R}^p\times\omega \text{ على } \quad |c(t,x)|, |a_{ij}(t,x)|, |\partial_t a_{ij}(t,x)|, |\partial_{tt}a_{ij}(t,x)| \le \alpha \tag{2.1}$$

$$, a_{ij} = a_{ji} \tag{2.2}$$

$$, f, f_t \in L^2(\omega) \tag{2.3}$$

$$, u_0 \in H^2(\omega)\cap H_0^1(\omega), \quad , u_1 \in H_0^1(\omega) \tag{2.4}$$

$$, u_{\ell,0} \in H^2(\Omega_\ell)\cap H_0^1(\Omega_\ell) \quad , u_{\ell,1} \in H_0^1(\Omega_\ell) \tag{2.5}$$

من المبرهنة2.2.2 , المسألتين (1.1) و (1.2) تقبل حلول u_ℓ و u_∞ على التوالي, يحققان

$$, u_\ell \epsilon L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\ell)) \quad , u_\ell' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\ell)) \quad , u_\ell'' \epsilon L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell))$$

$$.u_\infty \in L^2(0,T;H_0^1(\omega)) \quad , u_\infty' \in L^2(0,T;H_0^1(\omega)) \quad , u_\infty'' \epsilon L^2(0,T;L^2(\omega))$$

بما أن $H_0^1(\omega) \hookrightarrow H^1(\Omega_\ell)$ مستمر, نستنتج

$$, u_\infty \in D'(0,T;H^1(\Omega_\ell)) \quad , u_\infty' \in D'(0,T;H^1(\Omega_\ell))$$

$$.u_\infty \in L^2(0,T;H^1(\omega_\ell)) \quad , u_\infty' \in L^2(0,T;H^1(\omega_\ell))$$

بما أن u_ℓ و u_∞ حلين ضعيفين للمسألتين $(1,1)$ و $(1,2)$, لدينا

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell} u_\ell v dx + \int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial x_i v)dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x)u_\ell v dx = \int_{\Omega_\ell} f v dx$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega_\ell) \text{ و ح.ت } t\,\epsilon\,[0,T],\quad u_\ell(0,.)=u_{\ell,0},\quad u'_\ell(0,.)=u_{\ell,1}, \tag{2.6}$$

و

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\omega u_\infty v dx+\int_\omega\Big(\sum_{p+1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\infty\partial_{x_i}v\Big)dx+\int_\omega c(t,x)u_\infty v dx=\int_\omega f v dx$$
$$\forall v\in H_0^1(\omega) \text{ و ح.ت } t\,\epsilon\,[0,T],\quad u'_\infty(0,.)=u_1, u_\infty(0,.)=u_0. \tag{2.7}$$

بأخد $v(X_1,.)$ كدالة إختبار في (2.7) , لأنه إذا كانت $v\in H_0^1(\Omega_\ell)$, فهذا يعني أن X_1 من $(-\ell,\ell)^p$, $u(X_1,.)\in$, $H_0^1(\omega)$, أنضر [قضية 1.6.6]. وبالتكامل على $(-\ell,\ell)^p$, واستخدام (2.6) , نجد

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell}u_\ell v dx+\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell)\partial_{x_i}v dx+\int_{\Omega_\ell}c(t,x)u_\ell v dx$$
$$=\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell}u_\infty v dx+\int_\Omega\Big(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\infty\partial_{x_i}v\Big)dx+\int_{\Omega_\ell}c(t,x)u_\infty v dx.$$

ومنه

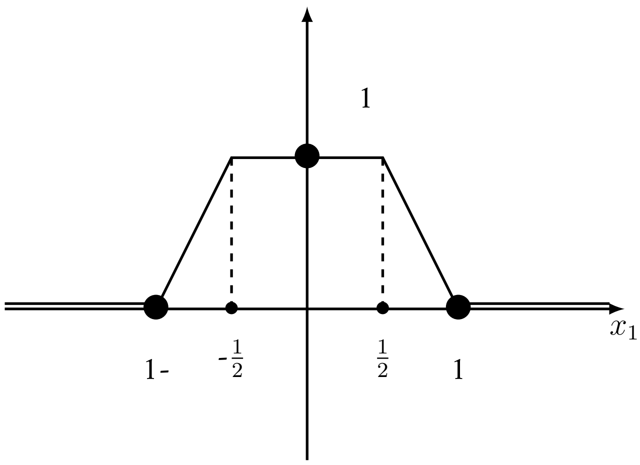
$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell}(u_\ell-u_\infty)v dx+\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell)\partial_{x_i}v dx-\int_{\Omega_\ell}\sum_{p+1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\infty)\partial_{x_i}v dx$$
$$+\int_{\Omega_\ell}c(t,x)(u_\ell-u_\infty)v dx=0.$$

بما أن u_∞ و $a_{ij}(x)$ من أجل $p+1\le j\le n$ متعلقان فقط ب X_2 , نستنتج

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell}(u_\ell-u_\infty)v dx+\int_{\Omega_\ell}\Big(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\Big)\partial_{x_i}v+c(t,x)(u_\ell-u_\infty)v dx=0. \tag{2.8}$$

لتكن Q دالة منتظمة من $\mathbb{R}^p$ بحيث

$$0\le Q\le 1,\quad Q=1 \text{ على } (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p,\quad Q=0 \text{ على } \mathbb{R}^p\backslash(-1,1)^p,$$
$$|\partial_{x_i}|\le C\quad 1\le i\le p\ \ (C \text{ حقيقي موجب عدد}). \tag{2.9}$$



شكل 2.2:

من أجل $\ell_1 \leq \ell$, لدينا

$$,(u_\ell - u_\infty)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\ell))$$
$$.(u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\ell))$$

نأخذ في (2.8)

$$.v = (u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\ell))$$

نحصل على

$$((u_\ell - u_\infty)'', (u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{x_1}{\ell_1})) + \int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}((u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{x_1}{\ell_1}))$$
$$+c(t,x)(u_\ell - u_\infty)(u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{x_1}{\ell_1}))dx = 0.$$

القوس $(.,.)$ يمثل الجداء السلمي في الثنوية بين $H_0^1(\Omega_\ell)$ و $H^{-1}(\Omega_\ell)$ أو الجداء السلمي في $L^2(\Omega_\ell)$. بما أن Q متعلقة فقط ب X_1 , وعليه

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}((u_\ell - u_\infty)'Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2dx + \int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$+\frac{2}{\ell_1}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}Q(\frac{x_1}{\ell_1})Q(\frac{x_1}{\ell_1})(u_\ell - u_\infty)')dx$$
$$+\int_{\Omega_\ell} c(t,x)(u_\ell - u_\infty)(u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dx = 0.$$

بأخذ (2.1) و (2.2) في الإعتبار, نجد

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}((u_\ell - u_\infty)'\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a'_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell - u_\infty)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a'_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell - u_\infty)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dx$$
$$+\frac{2}{\ell_1}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq i\leq p}} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell - u_\infty)\partial_{x_i}Q(\frac{x_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})((u_\ell - u_\infty)')dx$$
$$+\int_{\Omega_\ell} c(t,x)(u_\ell - u_\infty)(u_\ell - u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dx = 0$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}((u_\ell-u_\infty)'Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a'_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a'_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ji}(t,x)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dx$$
$$+\frac{2}{\ell_1}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ 1\leq i\leq p}}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)')dx$$
$$+\int_{\Omega_\ell}c(t,x)(u_\ell-u_\infty)(u_\ell-u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dx$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}((u_\ell-u_\infty)'Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$=-\frac{2}{\ell_1}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ 1\leq i\leq p}}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)')dx$$
$$-\int_{\Omega_{\ell_1}}c(t,x)(u_\ell-u_\infty)(u_\ell-u_\infty)'Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a'_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx \tag{2.10}$$

بالتكامل (0) الى (t)، نحصل على

$$\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2dxd\sigma$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{x_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$
$$=-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ 1\leq i\leq p}}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)dxd\sigma$$
$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}c(\sigma,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a'_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$

باستخدام مبرهنة فوبيني, نجد

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\int_0^t \frac{d}{dt}((u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2 d\sigma dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\int_0^t \frac{d}{dt}(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))d\sigma dx$$

$$=-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ 1\le i\le p}} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)dxd\sigma$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}} c(\sigma,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}[((u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2]_0^t dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}[(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{x_1}{\ell_1}))]_0^t dx$$

$$=-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ 1\le i\le p}} a_{ij}(\sigma,x)\partial x_j(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{x_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})((u_\ell-u_\infty)')(\sigma)dxd\sigma$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}} c(\sigma,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell-u_\infty)'(t)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2 dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell-u_\infty)'(0)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(t)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(t)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}(0,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(0)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(0)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$

$$=-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ 1\le i\le p}} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})((u_\ell-u_\infty)')(\sigma)dxd\sigma$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}} c(t,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell-u_\infty)^{'}(t)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell^{'}(0)-u_\infty^{'}(0))Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(t)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(t)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}(u_\ell(0)-u_\infty(0))\partial_{x_i}(u_\ell(0)-u_\infty(0))Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$=-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq i\leq p}}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})((u_\ell-u_\infty)^{'})(\sigma)dxd\sigma$$
$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}c(t,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)^{'}(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}^{'}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$

بما أن $u(0,.)=u_{\ell,0}$, $u^{'}(0,.)=u_{\ell,1}$ في Ω_ℓ و $u(0,.)=u_0$, $u^{'}(0,.)=u_1$ في ω وعليه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(u_\ell-u_\infty)^{'}(t)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(t)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(t)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell,1}}|Q(u_{\ell,1}-u_1)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell,1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}(u_{\ell,0}-u_0)\partial_{x_i}(u_{\ell,0}-u_0)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq i\leq p}}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)^{'}(\sigma))dxd\sigma$$
$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}c(\sigma,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)^{'}(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}^{'}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma \tag{2.11}$$

ومنه

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(Q(u_\ell-u_\infty)^{'}(t))^2dx\right|+\left|-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx\right.$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}|Q(u_{\ell,1}-u_1)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(0,x)\nabla(u_{\ell,0}-u_0)\nabla(u_{\ell,0}-u_0)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dx$$
$$-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}}a_{ij}(\sigma,x)\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\nabla Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)^{'}(\sigma))dxd\sigma$$
$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}c(t,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)^{'}(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n}a'_{ij}(\sigma,x)\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$

باستخدام (2.1) , (1.5) نجد

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|^2Q^2dx\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_{\ell,1}-u_1)\right|^2dx$$

$$+c\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_{\ell,0}-u_0)\right|^2Q^2dx-\frac{c}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|\left|Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|dxd\sigma$$

$$-\alpha\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}Q^2\left|(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|\left|(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|dxd\sigma+c\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2Q^2dxd\sigma,$$

حيث ثابت (c) مستقل عن ℓ و ℓ_2 باستخدام متباينة كوشي شفارتز ويونغ, نحصل على

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|^2Q^2dx\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_{\ell,1}-u_1)\right|^2dx$$

$$+C\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_{\ell,0}-u_0)\right|^2Q^2dx+C\frac{C}{\ell_1}(\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|1\right|^2)^{\frac{1}{2}}dxd\sigma$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(c_1\left|Q(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2+c_2\left|Q(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2Q^2dxd\sigma,$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|^2Q^2dx\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_{\ell,1}-u_1)\right|^2dx$$

$$+C\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_{\ell,0}-u_0)\right|^2Q^2dx+\frac{C}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma$$

$$+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma$$

$$+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2Q^2dxd\sigma,$$

بماأن $(u_\ell-u_\infty)(X_1,.)$ معدوم على حافة ω , بتطبيق متباينة بوان كاري في ω نجد

$$\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma\leq C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla_{X_1}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2Q^2dxd\sigma,$$

باستخدام مبرهنة جرونويل, نستنتج

$$\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|^2Q^2dx\leq\frac{C}{\ell_1^2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma$$

$$+C\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_{\ell,1}-u_1)\right|^2dx+C\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_{\ell,0}-u_0)\right|^2Q^2dx.$$

بما أن Q تحقق (2.9) , إذن

$$\int_{\Omega_{\frac{\ell_1}{2}}} \left|Q(u_\ell - u_\infty)'(t)\right|^2 dx + \int_{\Omega_{\frac{\ell_1}{2}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx \leq \frac{C}{\ell_1^2}\int_0^t \int_{\Omega_{\ell_1}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(\sigma)|^2 dx d\sigma$$

$$+ C\Big(\int_{\Omega_{\ell_1}} |(u_{\ell,1} - u_1)|^2 dx + \int_{\Omega_{\ell_1}} |\nabla(u_{\ell,0} - u_0)|^2 dx\Big). \tag{2.12}$$

بأخذ $k = 1, \ldots, \tau$, $\ell_1 = \frac{\ell}{2^k}$ ($\tau \in \mathbb{N}$ عدد التكرارات) ونضع

$$\gamma_{\ell_1} = \int_{\Omega_{\ell_1}} |(u_{\ell,1} - u_1)|^2 dx + \int_{\Omega_{\ell_1}} |\nabla(u_{\ell,0} - u_0)|^2 dx.$$

نجد

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^{k+1}}}} \left|(u_\ell - u_\infty)'(t)\right|^2 dx + \sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^{k+1}}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx$$
$$\leq \frac{C2^{2\kappa}}{\ell^2}\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^k}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx + C\gamma_{\frac{\ell}{2^k}}.$$

بتغيير k من 1 الى τ , نجد

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^{\tau+1}}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx$$
$$\leq \frac{C2^{2\tau}}{\ell^2}\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^\tau}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx + C\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}}$$
$$\leq \frac{C^2 2^{2\tau+2(\tau-1)}}{\ell^{2\times 2}}\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx + C\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}} + \frac{C^2 2^{2\tau}}{\ell^2}\gamma_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}$$
$$\leq \ldots..$$
$$\leq \frac{C^\tau 2^{2\tau+2(\tau-1)+\ldots..+2}}{\ell^{2\tau}}\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx + C\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}} + \frac{C^2 2^{2\tau}}{\ell^2}\gamma_{\frac{\ell}{2^{(\tau-1)}}} + \ldots..$$
$$+ \frac{C^\tau 2^{2\tau+2(\tau-1)+\ldots..+2\times 2}}{\ell^{2\tau-1}}\gamma_{\frac{\ell}{2}}. \tag{2.13}$$

وبالتالي, التقدير $u_\ell - u_\infty$ متعلق ب تقريب الشروط الإبتدائية وتقدير الكمية

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)(t)|^2 dx.$$

هذا الأخير يمثل هدف التوطئة التالية. نبقي على نفس الفرضيات السابقة, لدينا

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_\ell} \left|u_\ell'(t)\right|^2 dx + \sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_\ell} |\nabla u_\ell(t)|^2 dx \leq C\Big(\ell^p + \int_{\Omega_\ell} |u_{\ell,1}|^2 dx + \int_{\Omega_\ell} |\nabla u_{\ell,0}|^2 dx\Big), \tag{2.14}$$

حيث C ثابت مستقل عن ℓ.

برهان 1.3.2 بوضع $v=u_\ell'$ في (2.6) , نجد

$$\int_{\Omega_\ell} u_\ell'' u_\ell' dx + \int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell' + c(t,x)u_\ell u_\ell')dx = \int_{\Omega_\ell} f u_\ell' dx.$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell} 2u_\ell'' u_\ell' dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell)dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell)dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell')dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell')dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x)u_\ell u_\ell' dx$$
$$= \int_{\Omega_\ell} f u_\ell' dx.$$

بأخذ الفرضيات ,(1.2) (2.2) في الإعتبار, نجد

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell} \frac{d}{dt}\left|u_\ell'\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell)dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell)dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ji}(t,x)\partial_{x_i}u_\ell \partial_{x_j}u_\ell')dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell')dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x)u_\ell u_\ell' dx$$
$$= \int_{\Omega_\ell} f u_\ell' dx.$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'\right|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i}u_\ell)dx - c(t,x)u_\ell u_\ell' dx + \int_{\Omega_\ell} f u_\ell' dx.$$

بالتكامل من 0 إلى t , نحصل على

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(\sigma)dxd\sigma\right|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))dxd\sigma$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))dxd\sigma - \int_0^t\int_{\Omega_\ell} c(\sigma,x)u_\ell(\sigma)u_\ell'(\sigma)dxd\sigma$$
$$+\int_0^t\int_{\Omega_\ell} f(\sigma)u_\ell'(\sigma)dxd\sigma.$$

باستخدام مبرهنة فوبيني, نجد

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}\int_0^t \frac{d}{dt}\left|u_\ell'(\sigma)\right|^2 d\sigma dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}\int_0^t \frac{d}{dt}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(\sigma,x)u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))d\sigma dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))dxd\sigma - \int_0^t\int_{\Omega_\ell} c(\sigma,x)u_\ell(\sigma)u_\ell'(\sigma)dxd\sigma$$

$$+\int_0^t\int_{\Omega_\ell} fu_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma.$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}[\left|u_\ell^{'}(\sigma)\right|^2]_0^t dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}[(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))]_0^t dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^{'}(\sigma,x)\partial_{x_j}u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))dxd\sigma-\int_0^t\int_{\Omega_\ell} c(\sigma,x)u_\ell(\sigma)u_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma$$

$$+\int_0^t\int_{\Omega_\ell} fu_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma.$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\left|u_\ell^{'}(t)\right|^2 dx-\left|u_\ell^{'}(0)\right|^2)dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell(t)\partial_{x_i}u_\ell(t)$$

$$-\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}u_\ell(0)\partial_{x_i}u_\ell(0))dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^{'}(\sigma,x)\partial_{x_j}u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))dxd\sigma-\int_0^t\int_{\Omega_\ell} c(\sigma,x)u_\ell(\sigma)u_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma$$

$$+\int_0^t\int_{\Omega_\ell} fu_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma.$$

بما أن $u(0,.)=u_{\ell,0}$, $u^{'}(0,.)=u_{\ell,1}$ في Ω_ℓ و $u(0,.)=u_0$ $u^{'}(0,.)=u_1$ في ω وعليه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell^{'}(t)\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell(t)\partial_{x_i}u_\ell(t))dx=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}\left|u_{\ell,1}\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}u_{\ell,0}\partial_{x_i}u_{\ell,0})dx+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^{'}(\sigma,x)\partial_{x_j}u_\ell(\sigma)\partial_{x_i}u_\ell(\sigma))dxd\sigma$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega_\ell} c(\sigma,x)u_\ell(\sigma)u_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma+\int_0^t\int_{\Omega_\ell} f(\sigma)u_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma.$$

ومنه

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell^{'}(t)\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\nabla u_\ell(t)\nabla u_\ell(t))dx\right|=\left|\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}\left|u_{\ell,1}\right|^2 dx\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(0,x)\nabla u_{\ell,0}\nabla u_{\ell,0})dx+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^{'}(\sigma,x)\nabla u_\ell(\sigma)\nabla u_\ell(\sigma))dxd\sigma$$

$$\left.-\int_0^t\int_{\Omega_\ell} c(\sigma,x)u_\ell(\sigma)u_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma+\int_0^t\int_{\Omega_\ell} fu_\ell^{'}(\sigma)dxd\sigma\right| \tag{2.15}$$

باستخدام ,(1.5) (2.1) و (2.3) , نجد

$$\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell^{'}(t)\right|^2 dx+\int_{\Omega_\ell}\left|\nabla u_\ell(t)\right|^2 dx\leq c\int_{\Omega_\ell}\left|u_{\ell,1}\right|^2 dx+c\int_{\Omega_\ell}\left|\nabla u_{\ell,0}\right|^2 dx+c\int_0^t\int_{\Omega_\ell}\left|\nabla u_\ell(\sigma)\right|^2 dxd\sigma$$

$$+\alpha\int_0^t\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell(\sigma)\right|\left|u_\ell^{'}(\sigma)\right| dxd\sigma+c\int_0^t\int_{\Omega_\ell}\left|f(\sigma)\right|\left|u_\ell^{'}(\sigma)\right| dxd\sigma,$$

حيث C ثابت مستقل عن ℓ . بتطبيق متباينة كوشي شفارتز ويونغ, نجد

$$\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(t)|^2dx\le c\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+c\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx+c\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(\sigma)|^2dxd\sigma$$
$$+\alpha\int_0^t\int_{\Omega_\ell}(c_1|u_\ell(\sigma)|^2+c_2|u_\ell'(\sigma)|^2)dxd\sigma+C(\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|f(\sigma)|^2dxd\sigma)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|1|^2dxd\sigma)^{\frac{1}{2}},$$

ومنه

$$int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(t)|^2dx\le C\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+C\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx+C\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(\sigma)|^2dxd\sigma$$
$$+C\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|u_\ell(\sigma)|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(\sigma)\right|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|f(\sigma)|^2dxd\sigma.$$

بتطبيق متباينة بوان كاري على الحد

$$\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|u_\ell(\sigma)|^2dxd\sigma$$

واستخدام متباينة جرونويل, نستنتج

$$\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(t)|^2dx\le C\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+C\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx+C\int_0^t\int_{\Omega_\ell}|f(\sigma)|^2dxd\sigma.$$

بما أن f تحقق (2.3) , $t\in[0,T]$ و $\Omega_\ell=(-\ell,\ell)^p\times\omega$ وعليه

$$\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(t)|^2dx\le C\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+C\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx$$
$$+C\int_0^T\int_{(-\ell,\ell)^p}\int_\omega|f(\sigma)|^2dx_1dx_2......dx_pdxd\sigma.$$

باستخدام مبرهنة فوبيني, نجد

$$\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell|^2dx\le C\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+C\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx$$
$$+C\int_0^T\int_\omega\int_{(-\ell,\ell)^p}|f(\sigma)|^2dx_1dx_2......dx_pdxd\sigma.$$

ومنه

$$\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell|^2dx\le C\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+C\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx$$
$$+C\int_0^T\int_\omega|f(\sigma)|^2\int_{(-\ell,\ell)}\int_{(-\ell,\ell)}\int_{(-\ell,\ell)}.....\int_{(-\ell,\ell)}dx_1dx_2......dx_pdxd\sigma.$$

ومنه

$$\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(t)|^2dx\le C(\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx)+C\ell^p\int_0^T\int_\omega|f(\sigma)|dxd\sigma,$$

وعليه

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\Omega_\ell}\left|u_\ell'(t)\right|^2dx+\sup_{0\le t\le T}\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_\ell(t)|^2dx\le C\ell^p+C(\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2dx).$$

وهكذا, أثبتناث التوطئة.
بتطبيق التوطئة ,(2.13) نحصل على

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^{\tau+1}}}}|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)|^2\,dx$$

$$\leq\frac{C(\tau)}{\ell^{2\tau}}(2\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_\ell}|\nabla(u_\ell(t)|^2\,dx+2\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_\ell}|\nabla(u_\infty(t)|^2\,dx)+C(\tau)(\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}}+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}}{\ell^2}+.....+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2}}}{\ell^{2(\tau-1)}})$$

$$\leq\frac{C(\tau)}{\ell^{2\tau}}(\ell^p+\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2\,dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2\,dx+\ell^p\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\omega}|\nabla u_\infty(t)|^2\,dx)+C(\tau)(\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}}+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}}{\ell^2}+.....+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2}}}{\ell^{2(\tau-1)}})$$

ومنه

$$\leq\frac{C(\tau)}{\ell^{2\tau}}(\ell^p+\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2\,dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2\,dx+\ell^pC+C(\tau)(\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}}+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}}{\ell^2}+.....+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2}}}{\ell^{2(\tau-1)}})$$

ومنه

$$\leq C(\tau)(\frac{1}{\ell^{2\tau-p}}+\frac{1}{\ell^{2\tau}}\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2\,dx+\frac{1}{\ell^{2\tau}}\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2\,dx+\frac{C}{\ell^{(2\tau-1)}}+C(\tau)(\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}}+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}}{\ell^2}+.....+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2}}}{\ell^{2(\tau-1)}})$$

ومنه

$$\leq C(\tau)(\frac{1}{\ell^{2\tau-p}}+\frac{1}{\ell^{2\tau}}\int_{\Omega_\ell}|u_{\ell,1}|^2\,dx+\frac{1}{\ell^{2\tau}}\int_{\Omega_\ell}|\nabla u_{\ell,0}|^2\,dx+\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}}+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}}{\ell^2}+.....+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2}}}{\ell^{2(\tau-1)}})$$

إذن

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2^{\tau+1}}}}|\nabla(u_\ell-u_\infty(t)|^2\,dx\leq C(\tau)(\frac{1}{\ell^{2\tau-p}}+\Psi_{\ell,\tau}),$$

حيث C ثابث مستقل عن ℓ, $\Psi_{\ell,\tau}$ معطى ب

$$\Psi_{\ell,\tau}=\frac{1}{\ell^{2\tau}}(\int_{\Omega_\ell}(u_{\ell,1}(t)^2dx+\int_{\Omega_\ell}|\nabla(u_{\ell,0}(t)|^2\,dx)+\gamma_{\frac{\ell}{2^\tau}}+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2^{\tau-1}}}}{\ell^2}+.....+\frac{\gamma_{\frac{\ell}{2}}}{\ell^{2(\tau-1)}}\tag{2.16}$$

من أجل $r>0$ و $\ell_0>0$ و بما أن $\tau>\frac{p}{2}+r$ وعليه يكفي أخذ $(\tau=[\frac{p}{2}+r]+1)$ وباستخدام (2.12) من أجل ℓ كبير بقدر كافي, نجد

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\ell_0}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\ell_0}}|\nabla(u_\ell-u_\infty(t)|^2\,dx\leq C(r)(\frac{1}{\ell^{2r}}+\Psi_{\ell,r}).$$

وهكذا, أثبتنا النظرية الأساسية للتقدير الحالة العادية.

نظرية 1.3.2 تحت الشروط (1.5)-(1.3) و (2.5)-(2.1) , ومن أجل كل $\ell_0>0$ و $r>0$, يوجد ثابث $C>0$ غير متعلق ب ℓ حيث

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\ell_0}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\ell_0}}|\nabla(u_\ell-u_\infty(t)|^2\,dx\leq C(r)(\frac{1}{\ell^r}+\Psi_{\ell,r}),\tag{2.17}$$

حيث u_ℓ و u_∞ حلول ل (1.1) و (1.2) , على التوالي, و $\Psi_{\ell,r}=\Psi_{\ell,\tau}$ معطى في (2.16).

الفصل الثالث

السلوك المقارب في الحالة العامة

في هذا الفصل, نبرهن نفس النتيجة تحت فرضيات أكثر عمومية ثم ندرس السلوك المقارب في الحالة العامة, أخيرا نعطي الشروط الضرورية للتقارب.

1.3 التقدير في الحالة العامة

وبالمثل كما في الحالة العامة نثبت نفس النتيجة تحت الفرضيات العامة لنظرية الوجود والوحدانية(أنظر ([3] .
نفرض أن

$$a_{ij}, c \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^p\times\overline{\omega}), |c(t,x)|, |a_{ij}(t,x)|, |\partial_t a_{ij}(t,x)| |\leq \alpha \quad \text{على} \quad [0,t]\times\mathbb{R}^p\times\omega, \tag{3.1}$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{3.2}$$

و

$$f \in L^2(Q_\infty), \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 \in H_0^1(\omega), & u_1 \in L^2(\omega), \\ u_{\ell,0} \in H_0^1(\Omega_\ell), & u_{\ell,1} \in L^2(\Omega_\ell) \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

إذن, من مبرهنة1.2.2, المسألتين (1.1) و (1.2) تقبلان حلين u_ℓ و u_∞ , على التوالي, يحققان

$$u_\ell \in C^0(0,T;H_0^1(\Omega_\ell)), \quad u_\ell' \in C^0(0,T;L^2(\Omega_\ell)), \tag{3.5}$$

$$u_\infty \in C^0(0,T;H_0^1(\omega)), \quad u_\infty' \in C^0(0,T;L^2(\omega)) \tag{3.6}$$

بما أن $H^1(\Omega_\ell) \hookrightarrow H_0^1(\omega)$ مستمر, نستنتج

$$u_\infty \in D'(0,T;H^1(\Omega_\ell)), \quad u_\infty' \in D'(0,T;L^2(\Omega_\ell)),$$

$$u_\infty \in C^0(0,T;H^1(\Omega_\ell)), \quad u_\infty' \in C^0(0,T;L^2(\Omega_\ell)).$$

بما أن u_ℓ و u_∞ حلين ضعيفين للمسألتين $(1,1)$ و $(1,2)$, لدينا

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell} u_\ell v dx + \int_{\Omega_\ell} (\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell\partial_{x_i}v)dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x)u_\ell v dx = \int_{\Omega_\ell} f v dx$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega_\ell), \text{ و (ح.ت) } \quad t \in [0,T], \quad u_\ell(0,.) = u_{\ell,0}, \quad u_\ell'(0,.) = u_{\ell,1}, \tag{3.7}$$

و

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\omega} u_\infty v dx + \int_{\omega} \sum_{p+1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(t,x)\partial_{x_j}u_\infty\partial_{x_i}v)dx + \int_{\omega} c(t,x)u_\infty v dx = \int_{\omega} f v dx$$

$$\forall v \in H_0^1(\omega_\ell), \text{ و (ح.ت) } \quad t \in [0,T], \quad u_\infty(0,.) = u_0, \quad u_\infty'(0,.) = u_1. \tag{3.8}$$

وبالمثل كما في المقطع السابق, بأخذ في (3.8) $v(X_1,.) \in H_0^1(\Omega_\ell)$, وبالتكامل على $(-\ell,\ell)^p$, واستخدام (3.7), نجد

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell} u_\ell v dx + \int_{\Omega_\ell} \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell\partial_{x_i}v dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x)u_\ell v dx$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\int_\omega u_\infty v dx + \int_\omega \sum_{p+1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\infty \partial_{x_i} v dx + \int_\omega c(t,x) u_\infty v dx.$$

ومنه

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell}(u_\ell - u_\infty) v dx + \int_{\Omega_\ell} \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i} v dx - \int_{\Omega_\ell} \sum_{p+1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\infty \partial_{x_i} v dx$$

$$+ \int_{\Omega_\ell} c(t,x)(u_\ell - u_\infty) v dx = 0$$

$$,\forall \ \in H_0^1(\Omega_\ell) \quad \int_{\Omega_\ell} c(t,x)(u_\ell - u_\infty) v dx = 0. \tag{3.8}$$

بما أن u_∞ متعلقة فقط ب X_2, وكذلك $a_{ij}(x)$ من أجل $p+1 \le j \le n$, نجد

$$,\forall \ \in H_0^1(\Omega_\ell) \quad \frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell} w_\ell v dx + a_\ell(t, w_\ell, v) = 0, \tag{3.9}$$

حيث

$$w_\ell \stackrel{Def}{=\!=} u_\ell - u_\infty,$$

$$a_\ell(t,u,v) \stackrel{Def}{=\!=} \int_{\Omega_\ell} (\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u \partial_{x_i} v + c(t,x) u v) dx \quad \forall\, u, v \epsilon\, H^1(\Omega_\ell).$$

بما أن u حل لـ $(FV1)$ و بما أن $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, ومن أجل $v \in D(\Omega)$, لدينا

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell} u_\ell v dx + \int_{\Omega_\ell} (\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell \partial_{x_i} v) dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x) u_\ell v dx = \int_{\Omega_\ell} f v dx$$

بمكاملة بالتجزئة, نجد

$$.\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega_\ell} u_\ell v dx - \int_{\Omega_\ell} (\sum_{1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell) v dx + \int_{\Omega_\ell} c(t,x) u_\ell v dx = \int_{\Omega_\ell} f v dx \quad \forall\, v \in D(\Omega_\ell)$$

ومنه

$$.\int_{\Omega_\ell} (\frac{d^2}{dt^2} u_\ell - \sum_{1\le i,j\le n} \partial x_i(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell) + c(t,x) u_\ell) v dx = \int_{\Omega_\ell} f v dx \quad \forall\, v \in D(\Omega_\ell)$$

ومنه

$$.\int_{\Omega_\ell} (\frac{d^2}{dt^2} u_\ell - \sum_{1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell) + c(t,x) u_\ell - f) v dx = 0 \quad \forall\, v \in D(\Omega_\ell)$$

من التوطئة 1.5.1, نجد

$$\frac{d^2}{dt^2} u_\ell - \sum_{1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell) + c(t,x) u_\ell - f = 0 \quad \forall\, v \in D(\Omega_\ell).$$

ومنه

$$.t \in [0.T] \ \ (\text{ح.ت}) \quad u_\ell^{''} = \sum_{1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell) - c(t,x) u_\ell + f \in H^{-1}(\Omega_\ell)$$

من جهة اخرى لدينا

$$\int_{\Omega_\ell}(\frac{d^2}{dt^2}u_\ell - \sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_{x_j}(a_{ij}(t,x)u_\ell) + c(t,x)u_\ell - f)vdx = 0 \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega_\ell).$$

وبما أن u_ℓ حل في $H_0^1(\Omega_\ell)$ ومنه $u = 0$ على $\partial\Omega_\ell$.
وبالمثل نجد

$$u''_\infty = \sum_{p+1\leq i,j\leq n}\partial x_i(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u_\ell) - c(t,x)u_\infty + f \in H^{-1}(\omega) \quad \text{(ح.ت)} \quad t \in [0.T].$$

و $u_\infty = 0$ على $\partial\omega$. وعليه ينتج $w''_\ell \in H^{-1}(\Omega_\ell)$ (ح.ت) $t \in [0.T]$ (أنظر [6]).
باستبدال التكامل بجداء الثنوية, نجد

$$(w''_\ell + A(t)w_\ell, v) \overset{Def}{=\!=\!=} (w''_\ell + \sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}w_\ell - c(t,x)w_\ell, v) = 0 \quad \forall\ v\ \epsilon H_0^1(\Omega_\ell)$$

وعليه

$$w''_\ell + A(t)w_\ell = 0 \quad \text{التوزيعات بمفهوم .} \tag{3.10}$$

حيث

$$A(t)w_\ell = \sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}w_\ell + c(t,x)w_\ell$$

في هذه الحالة, لدينا فقط $u'\epsilon\ C^0(0,T;L^2(\Omega_\ell))$, وليس $C^0(0,T;H^1(\Omega_\ell))$, لذا فإن الطريقة الواردة في القسم السابق غير مطبقة هنا, تعتمد طريقتنا في هذه الحالة على فكرة الإقتراب من $(u_\ell - u_\infty)$ بواسطة الدوال ذات القيم في $H_0^1(\Omega_\ell)$, التي تتم عن طريق التنظيم الثلاثي .نبدأ بادخال دالة Q_{ℓ_1} المعرفة على $\mathbb{R}^p$ ب $Q_{\ell_1}(X_1) = Q(\frac{X_1}{\ell_1})$ حيث $\ell_1 \leq \ell$, واثبات المبرهنة التالية.

مبرهنة 1.1.3 ليكن u_ℓ و u_∞ حلين للمسألتين (1.1) و (1.2) , على التوالي , إذن من أجل أي $t \in [0,T]$, لدينا

$$\int_{\Omega_{\ell_1}}(w'_\ell Q_{\ell_1})^2dx + b_{\ell_1}(t,w_\ell,w_\ell) = -\frac{4}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}w_\ell(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}w'_\ell(\sigma))dxd\sigma$$

$$+\int_{\Omega_{\ell_1}}|Q_{\ell_1}(u_{\ell,1}-u_1)|^2dx + b_{\ell_1}(0,u_{\ell,0}-u_0,u_{\ell,0}-u_0) + \int_0^t b'_{\ell_1}(\sigma,w_\ell,w_\ell)d\sigma$$

$$+2\int_0^t\int_{\Omega_\ell}Q_{\ell_1}^2c(\sigma,x)w_\ell w'_\ell dxd\sigma, \tag{3.11}$$

حيث

$$b_{\ell_1}(t,u,v) \overset{Def}{=\!=\!=} \int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n}Q_{\ell_1}^2a_{ij}(t,x)\partial x_ju\partial x_iv)dx \quad \forall\ u,v\ \epsilon\ H^1(\Omega_\ell),$$

$$b'_{\ell_1}(t,u,v) \overset{Def}{=\!=\!=} \int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n}Q_{\ell_1}^2a'_{ij}(t,x)\partial x_ju\partial x_iv)dx \quad \forall\ u,v\ \epsilon\ H^1(\Omega_\ell).$$

برهان 1.1.3 نضع $t = t_0$. من أجل $\delta \geq 0$, نأخذ الدوال ϑ_δ المعرفة على $\mathbb{R}$ من أجل $\delta > 0$ ب

$$\vartheta_\delta = \begin{cases} 1 & \text{على } [\delta, t_0 - \delta] \, , \\ 0 & \text{خارج } [0, t_0] \, , \\ \frac{t}{\delta} & \text{على } [0, \delta] \, , \\ \frac{t_0 - t}{\delta} & \text{على } [t_0 - \delta, t_0] . \end{cases}$$

و

$$\vartheta_\delta = \begin{cases} 1 & \text{على } [0, t_0] \, , \\ 0 & \text{خارج } [0, t_0] \, , \end{cases}$$

حيث ϑ_δ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$. من أجل $\delta > 0$ لتكن ϑ_δ' مشتق ϑ_δ , من أجل $\delta > 0$ المعرفة ب

$$\vartheta_\delta' = \begin{cases} 0 & \text{على }]\delta, t_0 - \delta[\text{ و خارج} [0, t_0] \, , \\ \frac{1}{\delta} & \text{على }]0, \delta[\, , \\ \frac{-1}{\delta} & \text{على }]t_0 - \delta, t_0[. \end{cases}$$

نستعمل أيضا متتالية دوال زوجية منتظمة ρ_n المعرفة على $\mathbb{R}$, والتي تحقق

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$$

نفترض أن الدوال a_{ij} ,c معرفة من أجل أي $t \in \mathbb{R}$ مع نفس خصائص الإنتظام على $\mathbb{R}$ كما في $[0, t_0]$ (التمديد بالإستمرارية)، و w_ℓ معرفة من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ مع نفس خصائص الإنتظام على $\mathbb{R}$ كما في $[0, t_0]$ (على سبيل المثال, التمديد بالإنعكاس).

أولا نثبت التوطئة التالية

تحت الفرضيات المذكورة أعلاه, من أجل كل t_0 من $[0, T]$, نجد

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} b_{\ell_1}'(t, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell), \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell)) dt + 2 \int_{\Omega_\ell} Q_{\ell_1}^2 \rho_n * \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell')(0)(u_{\ell,1} - u_1) dx \\
&+2 \int_{\Omega_\ell} \rho_n * \rho_n * (\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(0, x) \partial_{x_j} (\vartheta_0 w_\ell))(0) Q_{\ell_1}^2 \partial_{x_i} (u_{\ell,0} - u_0) dx \\
&-2 \int_{\Omega_\ell} Q_{\ell_1}^2 \rho_n * \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell')(t_0)(\vartheta_0 w_\ell')(t_0) w_\ell w_\ell' dx \\
&-2 \int_{\Omega_\ell} \rho_n * \rho_n * (\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(t, x) \partial_{x_j} (\vartheta_0 w_\ell))(t_0) Q_{\ell_1}^2 \partial_{x_i} w_\ell(t_0) dx \\
&+2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\ell} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij}(t, x) \partial_{x_j} \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell) - \rho_n * (a_{ij}(t, x) \partial_{x_j} (\vartheta_0 w_\ell))) Q_{\ell_1}^2 \partial_{x_i} \rho_n' * (\vartheta_0 w_\ell) dx dt \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\ell} \rho_n * (c(t, x) \vartheta_0 w_\ell) Q_{\ell_1}^2 (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell')) dx dt \\
&+ \frac{4}{\ell_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\ell} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} (\rho_n * (a_{ij}(t, x) \partial_{x_j} (\vartheta_0 w_\ell))) \partial_{x_i} Q(\frac{x_1}{\ell_1}) Q_{\ell_1} (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell')) dx dt. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

برهان 2.1.3 من تعريف ϑ_δ و ρ_n , لدينا

$$\vartheta_\delta w_\ell \,\epsilon\, L^2(-\infty,+\infty;H^1(\Omega_\ell)) \text{ و } \rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell)\,\epsilon\, D(-\infty,+\infty;H^1(\Omega_\ell)). \tag{3.13}$$

بأخذ الفرضيات (3.1) في الإعتبار , الدالة

$$t\rightarrow b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))$$

من الصنف C^1 ذات الحامل المتراص, مما يبرر المساواة

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt=[b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))]_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

بما أن b_{ℓ_1} شكل ثنائي خطي, وعليه نجد

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}b'_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))')dt\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\frac{d}{dt}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell)))dt\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt\end{aligned}$$

ومنه, نحصل على

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b'_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))')dt=0 \tag{3.14}$$

إذا لاحضنا

$$,\rho_n*(\vartheta_\delta w'_\ell)=\rho'_n*(\vartheta_\delta w_\ell)-\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell)\,\epsilon\, L^2(-\infty,+\infty;H^1(\Omega_\ell)) \tag{3.15}$$

إذن

$$.Q^2_{\ell_1}\rho_n*(\vartheta_\delta w'_\ell)\,\epsilon\, L^2(-\infty,+\infty;H^1(\Omega_\ell)).$$

من كثافة $D(\Omega_\ell)$ في $H^1_0(\Omega_\ell)$, واستخدام مشتق الجداء, نجد

$$\begin{aligned}&-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\partial_{x_i}(\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell)))Q^2_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w'_\ell))dxdt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell)))Q^2_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w'_\ell))dxdt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial x_i(\rho_n*(\vartheta_\delta w'_\ell))dxdt\\
&+\frac{2}{\ell_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le p}}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell)))\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w'_\ell))dxdt.\end{aligned}$$

ومنه

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell)))Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$
$$-2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$
$$=\frac{4}{\ell_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt. \tag{3.16}$$

بجمع (3.14) و (3.16) طرف بطرف نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}^{'}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))^{'})dt$$
$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell)))Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$
$$-2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$
$$=\frac{4}{\ell_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))\partial x_iQ(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt.$$

باستخدام خاصية جداء الإلتفاف, نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}^{'}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n^{'}*(\vartheta_\delta w_\ell))dt$$
$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}\partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell)))Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$
$$-2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$
$$=\frac{4}{\ell_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt.$$

باستخدام (3.15), نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}^{'}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n}Q_{\ell_1}^2a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell)\partial_{x_i}\rho_n^{'}*(\vartheta_\delta w_\ell)dxdt$$
$$+2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(A(t)(\vartheta_\delta w_\ell)-c(t,x)(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$
$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta_\delta^{'}w_\ell)-\rho_n^{'}*(\vartheta_\delta w_\ell))dxdt$$

$$= \frac{4}{\ell_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n * (\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq p}}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt.$$

ومنه

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}^{'}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n}Q_{\ell_1}^2a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell)\partial_{x_i}\rho_n^{'}*(\vartheta_\delta w_\ell)dxdt$$

$$+2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(A(t)(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(c(t,x)(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$

$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta_\delta^{'}w_\ell)))$$

$$-2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n^{'}*(\vartheta_\delta w_\ell))dxdt$$

$$= \frac{4}{\ell_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n * (\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq p}}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt.$$

باستبدال التكامل بجداء الثنوية, نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b_{\ell_1}^{'}(t,\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell),\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell))dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n*(A(t)(\vartheta_\delta w_\ell)),Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'})))dt$$

$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta_\delta^{'}w_\ell))$$

$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell)-\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell)))Q_{\ell_1}^2\partial_{x_i}(\rho_n^{'}*(\vartheta_\delta w_\ell))dxdt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(c(t,x)(\vartheta_\delta w_\ell))Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt$$

$$+\frac{4}{\ell_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq p}}(\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial x_j(\vartheta_\delta w_\ell)))\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell^{'}))dxdt. \quad (3.17)$$

عندما $0 \longrightarrow \delta$, نجد

$$\vartheta_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} \vartheta_0 \quad \text{في } L^2(\mathbb{R}) \qquad (3.18)$$

و

$$\vartheta_\delta w_\ell \xrightarrow[\delta\to 0]{} w_\ell\vartheta_0 \quad \text{في } L^2(-\infty,+\infty;H^1(\Omega_\ell)). \qquad (3.19)$$

بتطبيق مبرهنة الملفوف ليونغ, التي تسمح بالتناوب مع الحد وجداء الملفوف , نجد

$$\int_{\mathbb{R}} |\rho_n * (\vartheta_\delta w_\ell) - |\rho_n * \vartheta_0 w_\ell)|^2 \, dt \leq \int_{\mathbb{R}} (\rho_n * |\vartheta_\delta - \vartheta_0| \, |w_\ell|)^2 dt$$
$$\leq C \int_{\mathbb{R}} (\rho_n * |\vartheta_\delta - \vartheta_0|)^2 dt \quad (w_\ell \in C^0(0,T;H^1(\Omega_\ell)))$$
$$\leq C(\int_{\mathbb{R}} \rho_n dt)^2 \int_{\mathbb{R}} |\vartheta_\delta - \vartheta_0|)^2 dt, \tag{3.20}$$

وعليه

$$\rho_n * (\vartheta_\delta w_\ell) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell) \quad \text{في} \quad L^2(-\infty,+\infty;H^1(\Omega_\ell)). \tag{3.21}$$

من أجل الحد الأول ل (3.17) ,يكفي استبدال ϑ_δ ب ϑ_0, معناه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b'_{\ell_1}(t,\rho_n * (\vartheta_\delta w_\ell), \rho_n * (\vartheta_\delta w_\ell)) dt \to \int_{-\infty}^{+\infty} b'_{\ell_1}(t,\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell), \rho_n * (\vartheta_0 \omega_\ell)) dt.$$

من أجل الحد الثاني ل (3.17) , نستنتج من (3.19)

$$A(t)\vartheta_\delta w_\ell \xrightarrow[\delta\to 0]{} A(t)\vartheta_0 w_\ell \quad \text{في} \quad L^2(-\infty,+\infty;H^{-1}(\Omega_\ell)),$$

وعليه

$$\rho_n * A(t)\vartheta_\delta w_\ell \xrightarrow[\delta\to 0]{} \rho_n * A(t)\vartheta_0 w_\ell \quad \text{في} \quad L^2(-\infty,+\infty;H^{-1}(\Omega_\ell)).$$

من جهة أخرى, لدينا

$$\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell) = \rho'_n * (\vartheta_\delta w_\ell) - \rho_n * (\vartheta'_\delta w_\ell),$$

ومنه يمكننا التحقق أن $\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell)$ محدودة في $L^2(-\infty,+\infty;H^1_0(\Omega_\ell))$. بالمثل كما في (3.20), من أجل $\delta > 0$, باستبدال ρ_n ب ρ'_n , نستنتج أن $\rho'_n * (\vartheta_\delta w_\ell)$ محدودة في $L^2(-\infty,+\infty;H^1_0(\Omega_\ell))$. من جهة أخرى, لدينا $\int_R |\vartheta'_\delta| \, dt = 2$, إذن, $\rho_n * (\vartheta'_\delta w_\ell)$. محدودة في $L^2(-\infty,+\infty;H^1_0(\Omega_\ell))$. بتطبيق مبر هنة الملفوف ليونغ, نجد

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\rho_n * (\vartheta'_\delta w_\ell)\right|^2 dt \leq C \int_{\mathbb{R}} \left|\rho_n * \vartheta'_\delta\right|^2 dt \leq C \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2 dt (\int_{\mathbb{R}} \left|\vartheta'_\delta\right| dt)^2 \leq C. \tag{3.22}$$

وعليه, يمكننا استخراج متتالية جزئية من $(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell))_{\delta>0}$ متقاربة بضعف في $L^2(-\infty,+\infty;H^1_0(\Omega_\ell))$. ولكن, من جهة أخرى, بنفس الطريقة المتبعة في (3.20), باستبدال w_ℓ ب w'_ℓ , نجد

$$\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \rho_n * (\vartheta_0 w'_\ell) \quad \text{في} \quad L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)), \tag{3.23}$$

إذن, من وحدانية النهاية نستنتج أن كل متتاليات متقاربة, معناه

$$Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell)) \xrightarrow[\delta\to 0]{} Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta_0 w'_\ell)) \quad \text{بضعف في} \quad L^2(-\infty,+\infty;H^1_0(\Omega_\ell)).$$

ومنه, نستنتج

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * A(t)(\vartheta_\delta w_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_\delta w'_\ell)))dt \xrightarrow[\delta\to 0]{} \int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * A(t)(\vartheta_0 w_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)))dt.$$

من أجل الحد الثالث ل (3.17), لدينا

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_j}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell))dxdt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}((\vartheta_\delta-\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell))dxdt\\
&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell))dxdt.\end{aligned}$$

من (3.22) نستنتج أن $Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell))$ محدودة في $L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell))$, وبما أن $\partial_{x_j}w_\ell\in L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell))$, نجد من (3.18)

$$\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}((\vartheta_\delta-\vartheta_0)w_\ell)) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0 \quad \text{في } L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)),$$

وعليه, نستنتج

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}((\vartheta_\delta-\vartheta_0)w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell))dxdt \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

من جهة أخرى, باستخدام خواص جداء الإلتفاف, نجد

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)(\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell))dxdt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)(\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(t)Q^2_{\ell_1}(\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n(t-s)\partial_{x_i}(\vartheta'_\delta w_\ell)(s))ds)dxdt\end{aligned}$$

بما أن ρ_n زوجية, و بتطبيق مبرهنة فوبيني, نجد

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)(\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell))dxdt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}(\int_{-\infty}^{\infty}(\rho_n(s-t)\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(t))dt)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\vartheta'_\delta w_\ell)(s)dxds\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\vartheta'_\delta\partial_{x_i}w_\ell dxdt.\end{aligned}$$

من (3.1),(3.5) و (3.6), من أجل $\delta>0$, التطبيق

$$t\longrightarrow(\rho_n*\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)), Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell)$$

مستمر من $[0,t_0]$ إلى $\mathbb{R}$, ومن نظرية القيم المتوسطة وإستمرارية w_ℓ , نجد

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta'_\delta w_\ell)dxdt$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell dxdt$$
$$-\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell dxdt$$
$$=\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(0)dx$$
$$-\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(t_0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dx.$$

من أجل الحدالرابع ل (3.17) باستبدال ϑ_s بـ ϑ_0 , يمكننا إثبات ذلك بسهولة

$$\lim_{\delta\to 0}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell)=a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell)\quad \text{في}\quad L^2(\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)),$$
$$\lim_{\delta\to 0}\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_\delta w_\ell))=\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))\quad \text{في}\quad L^2(\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)),$$
$$\lim_{\delta\to 0}Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho'_n*(\vartheta_\delta w_\ell)=Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho'_n*(\vartheta_0 w_\ell)\quad \text{في}\quad L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)),$$
$$\lim_{\delta\to 0}\rho'_n*(\vartheta_\delta w_\ell)=\rho'_n*(\vartheta_0 w_\ell)\quad \text{في}\quad L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)).$$

من أجل الحدين في الطرف الأيمن ل(3.17) , باستخدام (3.5),(3.6) و (3.19), نستبدال ϑ_δ ب ϑ_0. هكذا, أثبتنا

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b'_{\ell_1}(t,\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell)\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell))dt$$
$$+2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n*A(t)(\vartheta_0 w_\ell),Q^2_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)))dt$$
$$+2\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\vartheta_0 w_\ell))(0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(u_{\ell,0}-u_0)dx$$
$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)t(0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dx$$
$$+2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell)-\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho'_n*(\vartheta_0 w_\ell)dxdt$$
$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*(c(t,x)\vartheta_0 w_\ell)Q^2_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell))dxdt$$
$$+\frac{4}{\ell_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le p}}(\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)))\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q_{\ell_1}(\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell))dxdt. \tag{3.24}$$

وهكذا أثبتنا الجزء الأول من البرهان .مرة أخرى وبنفس الطريقة, من تعريف ϑ_δ و ρ_n , لدينا

$$\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell) \in D(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)), \quad \vartheta_\delta w'_\ell \in L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)).$$

وعليه, الدالة

$$t \longrightarrow (\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), Q^2_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell))_{L^2(\Omega_\ell)}$$

من الصنف C^1 ذات الحامل المتراص, مما يبرر المساواة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), Q^2_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell)dt = [(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), Q^2_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell)]^{+\infty}_{-\infty} = 0,$$

وعليه,

$$\begin{aligned} 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell))'))dt &= 2Q^2_{\ell_1}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), (\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell))')dt \\ &= 2Q^2_{\ell_1}\frac{1}{2}[(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell)^2]^{+\infty}_{-\infty} = 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

إذا لاحضنا

$$\rho_n * (\vartheta_\delta w''_\ell) = \rho'_n * (\vartheta_\delta w'_\ell) - \rho_n * (\vartheta'_\delta w'_\ell), \tag{3.26}$$

إذن $Q^2_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_\delta w''_\ell) \in L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell))$.
باستخدام (3.26), العبارة (3.25) تصبح

$$\begin{aligned} 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell, Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell))')dt &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho'_n * (\vartheta_\delta w'_\ell)))dt \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta_\delta w''_\ell + \rho_n * (\vartheta'_\delta w'_\ell)))dt \\ -2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_0 w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta'_\delta w'_\ell))dt &+ 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_0 w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta'_\delta w'_\ell))dt = 0 \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta_\delta w''_\ell)))dt + 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * ((\vartheta_\delta - \vartheta_0) w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta'_\delta w'_\ell)))dt \\ + 2\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * (\vartheta_0 w'_\ell), Q^2_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta'_\delta w'_\ell))dt = 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

عندما $\delta \longrightarrow 0$ في العبارة أعلاه فإن $(\rho_n * (\vartheta_\delta w'_\ell))_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} \rho_n * (\vartheta_0 w'_\ell)$ في $L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell))$. باستخدام مبرهنة الملفوف ليونغ ومساواة (3.18), نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\rho_n * ((\vartheta_\delta - \vartheta_0) w'_\ell)\right|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|\rho_n * (\vartheta_\delta - \vartheta_0)|^2 dt. \tag{3.28}$$

$$\leq C(\int_{-\infty}^{+\infty}|\rho_n|\,dt)^2\int_{-\infty}^{+\infty}|(\vartheta_\delta-\vartheta_0)|^2\,dt$$

المتتالية $(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell''))_\delta$ محدودة في $L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell))$. باستخدام مبرهنة الملفوف ليونغ و (3.18) , نجد

$$(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\rho_n'*(\vartheta_\delta w_\ell')\right|^2dt)^{\frac{1}{2}}\leq\sup_{t\in[0,t_0]}\left|w_\ell'\right|_{L^2(\Omega_\ell)}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\rho_n'\right|dt(\int_{-\infty}^{+\infty}|\vartheta_\delta|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}\leq C,$$

$$(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell')\right|^2dt)^{\frac{1}{2}}\leq\sup_{t\in[0,t_0]}\left|w_\ell'\right|_{L^2(\Omega_\ell)}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\vartheta_\delta'\right|dt(\int_{-\infty}^{+\infty}|\rho_n|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}\leq C. \tag{3.29}$$

وعليه, يمكننا إيجاداستخراج متتالية جزئية من $(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell''))_{\delta>0}$ متقاربة بضعف في $L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell))$. ولكن من جهة أخرى, من (3.10) لدينا, $w_\ell''=-A(t)w_\ell\in H^{-1}(\Omega_\ell)$ (ح.ت). وبنفس الطريقة من أجل (3.28) , إذا غيرنا w_ℓ' ب w_ℓ'' , نجد

$$\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell'')\xrightarrow[\delta\to0]{}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell'')\quad \text{في}\ L^2(-\infty,+\infty;H^{-1}(\Omega_\ell)),$$

من وحدانية النهاية نستنتج أن كل متتاليات متقاربة, معناه

$$Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell''))\xrightarrow[\delta\to0]{}Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell''))\quad \text{بضعف في}\ L^2(-\infty,+\infty;L^2(\Omega_\ell)).$$

ومنه, نستنتج

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell'),Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta w_\ell'')))dt\xrightarrow[\delta\to0]{}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell'),Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell'')))dt.$$

باستخدام (3.28) و (3.29), نستنتج أن الحد الثاني ل (3.27) يؤول نحو 0.

من أجل الحد الثالث ل (3.27) باستخدام مبرهنة فوبيني, زوجية ρ_n , نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell'),Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta' w_\ell')))dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell')(\rho_n*(\vartheta_\delta' w_\ell'))dxdt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}Q_{\ell_1}^2\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell')(t)\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n(t-s)(\vartheta_\delta' w_\ell')(s))dsdxdt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}Q_{\ell_1}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(s-t)\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell')(t)dt(\vartheta_\delta' w_\ell')(s)dxds=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}Q_{\ell_1}^2\rho_n*\rho_n*\vartheta_0 w_\ell'(\vartheta_\delta' w_\ell')dxdt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell'),Q_{\ell_1}^2(\vartheta_\delta' w_\ell'))dt.$$

من (3.5) و (3.6), التطبيق

$$t\longrightarrow(\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell'),Q_{\ell_1}^2 w_\ell').$$

مستمر من $[0,t_0]$ في $\mathbb{R}$, باستخدام مبرهنة القيم المتوسطة واستمرارية w_ℓ' , نجد

$$\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell'),Q_{\ell_1}^2(\rho_n*(\vartheta_\delta' w_\ell')))dt$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\int_{\Omega_\ell} Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(\vartheta'_\delta w'_\ell)dxdt - \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0}\int_{\Omega_\ell} Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(\vartheta'_\delta w'_\ell)dxdt$$

$$= \int_{\Omega_\ell} Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(0)w'_\ell(0)dx - \int_{\Omega_\ell} Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(t_0)w'_\ell(t_0)dx.$$

وهكذا, أثبتنا

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}((\rho_n*(\vartheta_0 w''_\ell)), Q^2_{\ell_1}\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell))dt + 2\int_{\Omega_\ell} Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(0)w'_\ell(0)dx.$$

$$-2\int_{\Omega_\ell} Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(t_0)w'_\ell(t_0)dx = 0 \tag{3.30}$$

أخيرا, بإضافة (3.24) إلى (3.30) , وأخذ في الإعتبار (3.10) , نجد (3.12) وبالتالي أثبتناالتوطئة.
بأخذ n يؤول إلى $+\infty$ نضع

$$.H_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell) - \rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho'_n*(\vartheta_0 w_\ell)dxdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell)Q^2_{\ell_1}(\partial_{x_i}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell))'dxdt$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho_n*(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell))'dxdt$$

ومنه

$$H_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho'_n*(\vartheta_0 w_\ell)dxdt$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}(\rho_n*(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho'_n*(\vartheta_0 w_\ell)dxdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell))'dxdt$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}\rho_n*(\rho_n*(\vartheta_0 w_\ell))'dxdt \tag{3.31}$$

الشكل الثنائي الخطي $b_{\ell_1}(t,.,.)$ مستمر على $H^1(\Omega_\ell)$, ومنه توجد مجموعة من المؤثرات $B_{\ell_1}(t) \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_\ell, H^1(\Omega_\ell))$,
حيث

$$,b_{\ell_1}(t,u,v) = (B_{\ell_1}(t)u,v) \quad \forall\, u,v \in H^1(\Omega_\ell)$$

التطبيق

$$t \longrightarrow (B_{\ell_1}(t)u,v) \quad \forall\, u,v \in H^1(\Omega_\ell)$$

مستمر وقابل للمفاضلة; حسب (1.3) , الترميز $(.,.)$ يمثل الجداء السلمي في $H^1(\Omega_\ell)$. باستبدال التكامل في (3.31) بجداء السلمي, نجد

$$H_n = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell), \rho_n^{'} * (\vartheta_0 w_\ell))dt - \int_{-\infty}^{+\infty} b(t, (\vartheta_0 w_\ell), \rho_n * (\rho_n^{'} * (\vartheta_0 w_\ell)))dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} b(t, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell), (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'})dt - \int_{-\infty}^{+\infty} b(t, (\vartheta_0 w_\ell), \rho_n * (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'})dt$$

بما أن $b_{\ell_1}(t,u,v) = (B_{\ell_1}(t)u, v)$ وعليه

$$H_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell), (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'})dt - \int_{-\infty}^{+\infty} (B_{\ell_1}(\vartheta_0 w_\ell), \rho_n * (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'})dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell), (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'})dt - \int_{-\infty}^{+\infty} (B_{\ell_1}(t)(\vartheta_0 w_\ell), \rho_n * (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'})dt$$

باستخدام مكاملة بالتجزئة, نجد

$$H_n = -\int_{-\infty}^{+\infty} ((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} (B_{\ell_1}(\vartheta_0 w_\ell), \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(s-t)(\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}(s)ds)dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} ((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} (B_{\ell_1}(t)(\vartheta_0 w_\ell)(t), \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t-s)(\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}(s)ds)dt$$

باستخدام مبرهنة فوبيني, وزوجية ρ_n نجد

$$H_n = -\int_{-\infty}^{+\infty} ((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_n(s-t)B_{\ell_1}(t)(\vartheta_0 w_\ell)(t)ds, (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}(s))dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} ((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(s-t)B_{\ell_1}(t)(\vartheta_0 w_\ell)(t)ds, (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}(s))dt$$

ومنه

$$H_n = -\int_{-\infty}^{+\infty} ((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt - \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_n * B_{\ell_1}(t)(\vartheta_0 w_\ell), (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}(s))dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} ((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt - \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_n * B_{\ell_1}(t)(\vartheta_0 w_\ell), (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))^{'}(s))dt$$

يتطبيق مكاملة بالتجزئة على الحد $\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n * B_{\ell_1}(t)(\vartheta_0 w_\ell), (\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))'(s))dt$, نجد

$$H_n = -\int_{-\infty}^{+\infty}((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))', \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt + \int_{-\infty}^{+\infty}((B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))', \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt$$

ومنه

$$H_n = -\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{d}{dt}[B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell) - \rho_n * B_{\ell_1}(\vartheta_0 w_\ell)]\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt.$$

من (3.1) , المؤثر B_{ℓ_1} يحقق شروط توطئة فريديش, ومنه نجد

$$\frac{d}{dt}[B_{\ell_1}\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell) - \rho_n * B_{\ell_1}(\vartheta_0 w_\ell)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{في} \; L^2(-\infty), +\infty; H^1(\Omega_\ell)).$$

من جهة أخرى, باستخدام مبرهنة الملفوف ليونغ, نجد

$$\int_{\mathbb{R}} |\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell)|^2\, dt \leq C(\int_{\mathbb{R}} \rho_n dt)^2 \int_{\mathbb{R}} |\vartheta_0|^2\, dt \quad (\int_{\mathbb{R}} \rho_n dt = 1) \leq C\int_{\mathbb{R}} |\vartheta_0|^2\, dt.$$

وعليه, المتتالية $(\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))_n$ محدودة في $L^2(-\infty, +\infty; H^1(\Omega_\ell))$ و

$$H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{3.32}$$

المتتالية ρ_n متتالية منتظمة, وعليه

$$\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\vartheta_0 w_\ell), \quad \text{في} \; L^2(-\infty, +\infty; H^1(\Omega_\ell)),$$

$$\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell') \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\vartheta_0 w_\ell'), \quad \text{في} \; L^2(-\infty, +\infty; H^1(\Omega_\ell)).$$

من (3.1), نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_{\ell_1}'(t, \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell), \rho_n * (\vartheta_0 w_\ell))dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{t_0} b_{\ell_1}'(t, w_\ell, w_\ell)dt \tag{3.33}$$

وبالمثل, من أجل الحدين في الطرف الأيمن لـ (3.12)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell} \rho_n * (c(t,x)\vartheta_0 w_\ell) Q_{\ell_1}^2(\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell'))dxdt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{t_0}\int_{\Omega_\ell} Q_{\ell_1}^2 c(t,x) w_\ell w_\ell' dxdt \tag{3.34}$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_\ell} \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ 1\leq i\leq p}} (\rho_n * (a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell)))\partial_{x_i} Q(\frac{X_1}{\ell_1}) Q_{\ell_1}(\rho_n * (\vartheta_0 w_\ell'))dxdt.$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{t_0}\int_{\Omega_\ell} \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq p}} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} w_\ell \partial_{x_i} Q(\frac{X_1}{\ell_1}) Q_{\ell_1} w_\ell' dxdt \tag{3.35}$$

وبالتالي, لإكمال البرهان يكفي حساب نهايات الحدود

$$\int_{\Omega_\ell} \rho_n * \rho_n * (\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(t_0) Q_{\ell_1}^2 \partial_{x_i} w_\ell(t_0)dx,$$

$$\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}(u_{\ell,0}-u_0)dx,$$

$$\int_{\Omega_\ell}Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(t_0)w'_\ell(t_0)dx,\qquad \int_{\Omega_\ell}Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(0)(u_{\ell,1}-u_1)dx.$$

بوضع

$$\sigma_n=\rho_n*\rho_n,$$

بما أن ρ_n زوجية, وكذلك σ_n زوجية ولدينا من أجل n كبير بقدر كافي

$$\int_{-t_0}^{t_0}\sigma_n(t)dt=\int_{-t_0}^{t_0}\int_{-t_0}^{t_0}\rho_n(s-t)\rho_n(s)dsdt=\int_{-t_0}^{t_0}\rho_n(s)dsdt=\int_{-t_0}^{t_0}\rho_n(s)\int_{-t_0}^{t_0}\rho_n(s-t)dtds=1,$$

وعليه

$$\int_{-t_0}^{0}\sigma_n(t)dt=\int_0^{t_0}\sigma_n(t)dt=\frac{1}{2}.$$

وهكذا, على سبيل المثال, نحصل على الحد الأول,

$$\begin{aligned}\Lambda_n &\overset{Def}{=\!=}\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(.,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(t_0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dx\\ &-\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t_0,x)\partial_{x_j}w_\ell(t_0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dx\\ &=2\int_0^{t_0}\sigma_n(t)\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(.,x)\partial_{x_j}w_\ell)(t_0-t)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dxdt\\ &-2\int_0^{t_0}\sigma_n(t)\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t_0,x)\partial_{x_j}w_\ell(t_0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dxdt\end{aligned}$$

$$=2\int_{suup\ \sigma_n\cap[0,t_0]}\sigma_n(t)\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij(t_0-t,x)}\partial_{x_j}w_\ell(t_0-t)-a_{ij}(t_0,x)\partial_{x_j}w_\ell(t_0))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dxdt.$$

لأنه بشكل عام, يمكننا أن نأخذ $supp\sigma_n$ محتوى في الكرة $B(0,\frac{1}{n})$ و $n\longrightarrow+\infty$, ومنه, إذا, $t\longrightarrow 0$, في العبارة أعلاه, ومن إستمرارية a_{ij} و w_ℓ, نستنتج أن $\Lambda_n\longrightarrow 0$, معناه

$$\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(.,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(t_0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dx$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(t_0,x)\partial_{x_j}w_\ell(t_0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dx. \tag{3.36}$$

بنفس الطريقة من أجل الحد الثاني

$$\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(.,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(t_0)dx-\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}w_\ell(0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(0)dx$$

$$= 2\int_{suup\ \sigma_n\cap[0,t_0]}\sigma_n(-t)\int_{\Omega_\ell}(\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}w_\ell(t)-\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}w_\ell(0))Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(0)dx,$$

وعليه

$$\int_{\Omega_\ell}\rho_n*\rho_n*(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(.,x)\partial_{x_j}(\vartheta_0 w_\ell))(0)Q^2_{\ell_1}\partial_{x_i}w_\ell(0)dx$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{\Omega_\ell}\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}(u_{\ell,0}-u_0)(0)dx. \tag{3.37}$$

بنفس الطريقة من أجل الحدين الآخرين, نجد

$$2\int_{\Omega_\ell}Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(t_0)w'_\ell(t_0)dx\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{\Omega_\ell}Q^2_{\ell_1}w'_\ell(t_0)w'_\ell(t_0)dx, \tag{3.38}$$

$$2\int_{\Omega_\ell}Q^2_{\ell_1}\rho_n*\rho_n*(\vartheta_0 w'_\ell)(0)w'_\ell(0)dx\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{\Omega_\ell}Q^2_{\ell_1}(u_{\ell,1}-u_1)(u_{\ell,1}-u_1)dx. \tag{3.39}$$

أخيرا, من $(3.32)-(3.39)$ بأخذ $n\longrightarrow+\infty$ في (3.12) , نجد (3.11) ,

وهكذا أثبتنا المبرهنة.
مع هذه المبرهنة, أثبتنا النتائج (2.11) لشروط أكثر عمومية من تلك الواردة في القسم السابق.الخطوات بعد (2.11) تبقى صحيحة (صالحة) في حالتنا, باستثناء الحصول)على (2.14) نستخدم (2.15). لتبرير هذه المساواة(2.15) , نتبع نفس المبدأ الذي إستخدمناه في (3.11) (أنضر أيضا [3]) أخيرا, يمكننا تحديد نتيجة مشابهة لنظرية 3.2.2 في الحالة العامة.

نظرية 1.1.3 تحت الفرضيات $(1.3)-(1.5)$ و $(3.1)-(3.4)$ ومن أجل كل $\ell_0>0$ و $r>0$, يوجد ثابت $C>0$ غير متعلق ب ℓ حيث

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\ell_0}}|(u_\ell-u_\infty)'(t)|^2dx+\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\Omega_{\ell_0}}|\nabla(u_\ell-u_\infty(t)|^2dx\leq C(r)(\frac{1}{\ell^2}+\Psi_{\ell,r}) \tag{3.40}$$

حيث u_ℓ و u_∞ حلول ل (1.1) و (1.2) , على التوالي, و $\Psi_{\ell,r}=\Psi_{\ell,\tau}$ معطى في (2.16).

2.3 السلوك المقارب في الحالة العامة

يتضح من (3.40) أن تقريب الشروط الإبتدائية شرط كافي لتقدير w_ℓ.
ومنه بوضع $\tau=[\frac{p}{2}+r]+1$, لدينا

$$,k=0,...,\tau \quad ,\gamma_{\frac{\ell}{2^k}}=O(\frac{1}{\ell^{2k}}) \tag{4.1}$$

يمكنناذكر النتيجة المرجوة.

مبرهنة 1.2.3 إذا كانت (4.1) محققة, إذن من شروط النظرية السابقة, ومن أجل $\ell_0 > 0$ و $r > 0$, يوجدثابت $C > 0$ مستقل عن ℓ بحيث

$$\sup_{0\le t\le T}\left|(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|_{L^2(\Omega_{\ell_0})}+\sup_{0\le t\le T}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|_{H^1(\Omega_{\ell_0})}\le\frac{C}{\ell^r}. \tag{2.4}$$

برهان 1.2.3 نتسائل الآن عما إذا كان الشرط من نوع (4.1), ضروري لدراسة التقارب؟
نعتبر فضاء الدوال

$$W^p(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0}),L^2(\Omega_{\ell_0}))=\{u\ \epsilon\ L^p(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0})),u'\ \epsilon\ L^p(0,T;L^2(\Omega_{\ell_0}))\},\quad p=2 \text{ أو } \infty,$$

مزود بالنظيم

$$|u|^2_{W^p}+|u|_{L^p(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0}))}+\left|u'\right|_{L^p(0,T;L^2(\Omega_{\ell_0}))}.$$

من أجل الفضاء $W^\infty(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0}),L^2(\Omega_{\ell_0}))$, لدينا

$$\sup_{0\le t\le T}\left|(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|_{L^2(\Omega_{\ell_0})}+\sup_{0\le t\le T}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|_{H^1(\Omega_{\ell_0})}\ge\gamma_{\ell_0},$$

مما يبرر الحاجة إلى هذه الشروط, من الفضاء $W^2(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0}),L^2(\Omega_{\ell_0}))$, , نكامل (2.10) من 0 إلى t , ونستخدم (1.5), (2.1) نجد

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}((u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2dxd\sigma\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\le j\le n}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma\\
&=-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le p}}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)'(\sigma))dxd\sigma\\
&-\int_{\Omega_{\ell_1}}c(\sigma,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})d\sigma dx\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\le i,j\le n}a'_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma.
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}[((u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))^2]_0^tdx\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}[(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))]_0^tdx\\
&=-\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le p}}a_{i,j}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)'(\sigma))dxd\sigma
\end{aligned}$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}} c(t,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})dxd\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial x_i(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))dxd\sigma$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell-u_\infty)'(t)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2 dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell-u_\infty)'(0)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(t)\partial x_i(u_\ell-u_\infty)(t)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(0,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(0)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(0)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|dx$$

$$\leq\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)')(\sigma)\right|dxd\sigma$$

$$+\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|c(\sigma,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})\right|dxd\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|dxd\sigma$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell-u_\infty)'(0)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(0,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(0)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(0)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|dx$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|((u_\ell-u_\infty)'(t)Q(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(t)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(t)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|dx$$

$$+\frac{2}{\ell_1}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}} a_{ij}(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}Q(\frac{X_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)'\right|(\sigma))dxd\sigma$$

$$+\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|c(t,x)(u_\ell-u_\infty)(\sigma)(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})\right|dxd\sigma$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}'(\sigma,x)\partial_{x_j}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\partial_{x_i}(u_\ell-u_\infty)(\sigma)Q^2(\frac{X_1}{\ell_1}))\right|dxd\sigma$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q((u_\ell-u_\infty)'(0)\right|^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(0)\right|^2Q^2)dx\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|Q(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx$$
$$+C\int_{\Omega_{\ell_1}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|^2Q^2)dx+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|\left|Q(\frac{x_1}{\ell_1})Q(\frac{X_1}{\ell_1})(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|dxd\sigma$$
$$+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})\left|(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|\left|(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|dxd\sigma-C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}Q^2(\frac{X_1}{\ell_1})\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|dxd\sigma$$

حيث (c) ثابث مستقل عن ℓ و ℓ_2 باستخدام متباينة كوشي شفارتز ويونغ, وبما أن Q تحقق (2.9) , ومنه نجد

$$\int_{\frac{\ell_1}{2}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(0)\right|^2dx+\int_{\frac{\ell_1}{2}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(0)\right|^2)dx$$
$$\leq C\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+C\int_{\Omega_{\ell_1}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|^2)dx$$
$$+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|^2dxd\sigma$$
$$+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma,$$

بتطبيق متباينة بوا ن كاري على الحد $\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma$, نجد

$$\int_{\frac{\ell_1}{2}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(0)\right|^2dx+\int_{\frac{\ell_1}{2}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(0)\right|^2)dx$$
$$\leq C\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(t)\right|^2dx+C\int_{\Omega_{\ell_1}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(t)\right|^2)dx+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma$$
$$+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\nabla\left|(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma+C\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2dxd\sigma,$$

ومنه

$$\int_{\frac{\ell_1}{2}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(0)\right|^2dx+\int_{\frac{\ell_1}{2}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(0)\right|^2)dx\leq C(M'(t)+M(t)),\qquad(4.3)$$

حيث

$$M(t)=\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|^2dxd\sigma+\int_0^t\int_{\Omega_{\ell_1}}(\nabla\left|(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2)dxd\sigma.$$
$$M'(t)=\int_{\Omega_{\ell_1}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(\sigma)\right|^2dx+\int_{\Omega_{\ell_1}}(\nabla\left|(u_\ell-u_\infty)(\sigma)\right|^2)dx.$$

من (4.3) , نجد

$$\exp(t)\int_{\frac{\ell_1}{2}}\left|(u_\ell-u_\infty)'(s)\right|^2dx+\exp(t)\int_{\frac{\ell_1}{2}}(\left|\nabla(u_\ell-u_\infty)(s)\right|^2)dx\leq C(\exp(t)M(t))',$$

بالتكامل من 0 إلى T, وأخذ $\ell_1 = \ell_0$, نجد

$$\gamma_{\frac{\ell_0}{2}} \leq C \int_0^T \left|(u_\ell - u_\infty)'(t)\right|^2_{L^2(\Omega_{\ell_0})} d\sigma + \int_0^T |(u_\ell - u_\infty)(\sigma)|_{H^1(\Omega_{\ell_0})} d\sigma.$$

وعليه لدينا النظرية التالية.

3.3 الشروط الظرورية للتقارب

نظرية 1.3.3 شرط ضروري لتقارب $u_\ell \longrightarrow u_\infty$

- في $W^\infty(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0}),L^2(\Omega_{\ell_0}))$
  $u_{\ell,0} \to u_0$ في $H^1(\Omega_{\ell_0})$,
  $u_{\ell,1} \longrightarrow u_1$ في $L^2(\Omega_{\ell_0})$,

- في $W^2(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0}),L^2(\Omega_{\ell_0}))$
  $u_{\ell,0} \to u_0$ في $H^1(\Omega_{\frac{\ell_0}{2}})$,
  $u_{\ell,1} \longrightarrow u_1$ في $L^2(\Omega_{\frac{\ell_0}{2}})$.

ملاحظة 1.3.3 يمكننا إثبات أن شرط ضروري لتحقيق التقارب في $W^2(0,T;H^1(\Omega_{\ell_0},L^2(\Omega_{\ell_0}))$
$u_{\ell,0} \to u_0$ في $H^1(\Omega_{\ell'})$,
$u_{\ell,1} \to u_1$ في $L^2(\Omega_{\ell'})$,
من أجل $\ell_1 \leq \ell_0$.

خاتمة

في هذه المذكرة, قدمنا دراسة تحليلية للسلوك المقارب لحل مسألة زائدية من الدرجة الثانية مطروحة على ميدان أسطواني Ω_ℓ , المتحصل عليها بعد وضع فرضيات عادية من أجل هذه الدراسة و سلسلة من البراهين, حيث أثبتنا أولا وجود ووحدانية الحل ونتائج الصقالة, ثم برهنا نفس النتيجة المتوصل إليها تحت فرضيات أكثر عمومية باستخدام تقنية التنظيم المزدوجة, ختاما قدمنا أيضا الشروط الضرورية لحدوث هذا التقارب في فضاءات صوبوليف التي تناسبت مع هذه الدراسة.

المراجع العلمية

[1] مصطفى عسيلة, دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي, ديوان المطبوعات الجامعية 50-2009.

[2] H.Brezis,*Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, Dunod, paris, 1999*.

[3] J.L.Lions,*E.Magenes,probléme aux limites non homogénes,Dunod,1968*.

[4] J.L.Lions,*Equation différentielles opérationelles et problémes aux limites,Grundlehren/Springer,Berlin,1961*.

[5] K.VO Khak,*Distributions,analyse de fourier,opérateurs aux dérivées partielles,Vuibert,1972*.

[6] M.Chipot, *ℓGoes to plus Infinity,Birkhauser,2002*.

[7] M.Chipot,Y.Xie,*on the asymptotic behaviour of the p-Laplace equation in cylinders becoming unbounded,in:N.Kenmochi,M.otani,S.Zheng(Eds.),proccedings of international Conference:Nonlinear PDE's and Their Applications,Gakkotosho,2004,pp.16-27*.

[8] O.A.Ladyzhenskaya,*The Boundary Value problems of Mathematical physics,Springer-Verlag,1984*.

[9] R.A.Adams,*Sobolev Space.Academic Press 1976*.

العنوان: بعض النتائج حول السلوك المقارب في الميادين الأسطوانية تصبح غير محدودة

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة السلوك المقارب لحل مسألة زائدية مطروحة على ميدان أسطواني باستخدام طريقتين مختلفتين, طريقة عادية مماثلة لحالة مسائل إهليجية وقطع مكافئ, وتقنية التنظيم المزدوجة. بعد تطبيق الطريقتين ودراسة السلوك المقارب, نقدم الشروط الضرورية لحدوث هذا التقارب, وذلك من خلال دراسة تفصيلية لورقة عمل حول هذا الموضوع.

الكلمات المفتاحية: مسألة زائدية, ميدان أسطواني, صقالة الحلول, السلوك المقارب, تقنية التنظيم.

Abstract

The aim of this work is to study the asymptotic behavior to solve a turbulent hyperbolic problem posed on a cylindrical field using two different methods, an ordinary method similar to the case of elliptic and parabola problems, and the double regulation technique.After applying the two methods and studying asymptotic behavior, we present the necessary conditions for the occurrence of this convergence, trough a detailed study of a working paper on this topic.

Key words: Hyperbolic problem, cylindrical domain, regularité of solutions, asymptotic behavior, regularisation technique.

Résume

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique de la résolution d'un probléme turbulent hperbolique sur un domain cylindrique en utilisant deux méthodes differéntes, une méthode ordinaire analogue au cas des problémes elliptiques et parabolique, et la technique de double régularisation. Aprés avoir appliqué les deux méthodes et étudié le comportement convergent, nous présentons les conditions nécessaires à l'occurrence de cette convergence, à travers une étude détaillée d'un document de travail sur ce sujet.

Mots-clés probléme hyerbolique, domain cylindrique, régularité de solutions, comportement asymptotique,technique régularisation.