UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités Et Statistique

Par : KRIEM Imad

Titre

Etude des équations intégrales stochastiques de Volterra

Membres du Comité d'Examen :

Mr. MEZABIA Mohammed Elhadi	M.C.A.	Université Kasdi Merbah Ouargla	Président
Mr. LEMITA Samir	M.C.B.	Ecole normale supérieure de Ouargla	Encadreur
Mr. MANSOUL Brahim	M.A.A.	Université Kasdi Merbah Ouargla	Co Encadreur
Mrs. BEN GHERBAL Hanane	M.C.B.	Ecole normale supérieure de Ouargla	Examinateur

Université Kasdi Merbah Ouargla

Juin 2021

Table des matières

Introduction **3**

1 Calcul stochastique **10**

1.1 Rappel de probabilité 10

1.1.1 Espace de probabilité 10

1.1.2 Variable aléatoire 11

1.1.3 Espérance d'une Variable aléatoire 11

1.1.4 Convergence d'une suite des variables aléatoires 14

1.2 Filtration et processus stochastique 15

1.2.1 Filtration 15

1.2.2 Processus stochastique 16

1.3 Mouvement brownien 21

1.3.1 Vecteur gaussien 21

1.3.2 Définition du mouvement brownien 23

1.4 Intégrale stochastique 25

1.4.1 Formules d'Itô 29

1.4.2 Processus d'Itô 30

2 Etude analytique de : EISV **34**

2.1 Hypothèses 35
2.2 Existence de la solution 39
2.3 Unicité de la solution 44

3 Etude numérique de : EISV **46**

3.1 Définition de HBF et leurs propriétés 46
3.2 Approximation des fonctions en utilisant HBF 47
3.3 La matrice opérationnelle d'intégration classique 49
3.4 La matrice opérationnelle d'intégration stochastique 50
3.5 Approximation de : EISV 51
3.6 Analyse des erreurs 53
3.7 Exemples numériques 54

Dédicace

Au nom de Dieu, le tout miséricordieux, le tout miséricordieux,

Je dédie cet humble ouvrage :

Mes chers père et mère qui ont toujours voulu que j'atteigne ce stage, je dédie aussi à ma chère grand-mère, mes chers frères et sœurs et à tous mes amis proches et tous ceux qui ont contribué à faire ce long voyage.

Toute la famille du département de mathématiques.

Remerciements

*Au début de ce bref, nous remercions **Allah** qui nous a aidés et il nous a donné patience et courage pendant ces longues années d'étude.*

Je tiens à remercier sincèrement les professeurs qui ont supervisé les travaux de ce mémoire : Mr. LEMITA Samir et Mr. MANSOUL brahim. Je tiens également à remercier vivement Dr. BEN GHERBAL Hanane, Dr.MEZABIA Mohammed Elhadi pour avoir accepté de rapporter mon mémoire et de faire partie du jury.

Je tiens à remercier mon père et ma mère qui m'ont soutenu moralement et financièrement.

Enfin, je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à tous qui m'ont soutenu et encouragé durant mes études de près ou de loin.

Merci à tous.

ملخص

في مذكرتنا هذه قمنا بدراسة إحدى أنواع المعادلات العشوائية, المتمثلة في معادلة فولتيرا التكاملية العشوائية الغير الخطية من الصنف الثاني, و التي تلعب هذه الأخيرة دورا هاما في نمذجة العديد من المشاكل في العديد من المجالات.

قد تم إثبات وجود و وحدانية حل المعادلة المقترحة بالاعتماد على نظرية التقريبات المتعاقبة لبيكارد, في حين أن حل المعادلة تم إيجاده تقريبيا بالاعتماد على طريقة الإسقاط.

كلمات مفتاحية

معادلة فولتيرا التكاملية ، المعادلات التفاضلية العشوائية, المعادلة الغير الخطية، طريقة بيكارد، نظرية النقطة الصامدة، التقريب العددي, طرق الإسقاط.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'équation intégrale stochastique non linéaire de Volterra **(EISV)** de deuxième classe, qui joue un rôle important dans la modélisation de nombreux problèmes dans les différents domaines.

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation proposée ont été prouvées en appliquant la théorie des approximations successives de Picard, tandis que la solution de l'équation a été trouvée de manière approximative selon la méthode de projection.

Mots clés

Equation intégrale de Volterra ; Equation différentielle stochastique ; Equation non linéaire ; La méthode de Picard ; Théorème du point fixe ; Approximation numérique ; La méthodes de projection.

Abstract

In this thesis, we are interested about the nonlinear stochastic integral Volterra equation of the second kind, which plays an important role in the modeling of many problems in the different domains.

The existence and uniqueness of the solution of the proposed equation was proved by applying the theory of successive approximations of Picard, while the solution of the equation was approximated found according to the projection method.

Keywords

Volterra integral equation ; Stochastic differential equation ; Nonlinear equation ; Picard method ; Fixed point theorem ; Numerical approximation ; Projection methods.

Introduction

Au cours de ces derniers siècles l'être humain a connu un grand développement dans tous les domaines de la science : physique, chimie, biologique, électronique et autres ; Et tous ces développements n'a jamais été possible si ce n'est la matière la plus importante celle des mathématiques. Cela est dû de leur importance et de leur utilisation comme outil de calcul dans tous ces domaines. D'ailleurs la plupart de ces phénomènes pourraient êtres modélisés par des équations différentielles ordinaires, partielles, intégrales et autres afin de les étudier.

Dernièrement, un nouveau type d'équation connu sous le nom : Les équations différentielles stochastiques (EDS), est apparu. Par rapport aux équations différentielles ordinaires, les équations stochastiques prennent en considération le terme de bruit. Ce type d'équations joue un rôle très important en raison de ses larges applications [1, 2, 3, 4]dans la modélisation des problèmes physiques, biologies, chimies, écologies, traitement du signal, mouvements de particules dans la mécanique quantique, phénomènes de diffusion, mathématiques financières et les théories de commande... ; Pour cela, on a choisi dans ce mémoire l'étude de l'équation intégrale stochastique non linéaire de Volterra **(EISV)** suivante :

$$X_t = \varphi(t) + \int_0^t g(t, s, X(s))ds + \int_0^t f(t, s, X(s))dB_s \quad , \forall t \in [0, \mathrm{T}].$$

On va traiter cette équation de manière analytique et numérique, donc ce mémoire sera réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre sera consacré aux notions et aux propriétés nécessaires concernant le calcul stochastique afin de les utiliser dans les prochains chapitres.

Dans le deuxième chapitre, on présentera une démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation proposée en appliquant la méthode itérative de Picard.

Le dernier chapitre sera consacré à trouver une solution approchée de notre équation en utilisant les techniques numériques de projection.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions de bases concernant le calcul stochastique [5, 6] .

1.1 Rappel de probabilité

1.1.1 Espace de probabilité

Définition 1.1.1

Une tribu (ou σ-algébre) sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de Ω (appelés événements) tels que :

1) $\varnothing \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

3) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Définition 1.1.2

Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ telle que :

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *pour des* A_n *appartenant à* $\mathcal{F}$ *deux à deux disjoints.*

Définition 1.1.3

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *où :*

* Ω *est un ensemble.*

* $\mathcal{F}$ *est une tribu (ou* σ*-algébre) sur* Ω *.*

* $\mathbb{P}$ *est une mesure de probabilite sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *.*

1.1.2 Variable aléatoire

Définition 1.1.4

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. On appelle variable aléatoire sur cet espace, toute application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X \in B \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$$

Définition 1.1.5

La loi d'une variable aléatoire X *est l'application* $\mu x : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ *définie par :*

$$\mu x(B) = \mathbb{P}(X \in B), B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$$

1.1.3 Espérance d'une Variable aléatoire

Définition 1.1.6 *(Fonction de répatition)*

On appelle fonction de répatition d'une v.a X *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *la fonction* $F_X(x)$ *définie par :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$$

Définition 1.1.7

Si $F_X(x)$ est une fonction dérivable sa dérivé notée $f_X(x)$ s'appelle densité de probabilité de la variable X :

$$\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x)$$

Définition 1.1.8

On appelle espérance mathématique la quantité $\mathbb{E}(X)$, qui est donée par les formules suivantes :

Cas discret *:*

soit X prend des nombres entiers discret, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Cas continu *:*

soit X est v.a réelle, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx$$

Définition 1.1.9

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on pose :

$$\begin{aligned} Var(X,Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0 \\ cov(X,Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Espérance conditionnelle

Dans cette partie, nous donnons quelques utilisations de l'espérance conditionnelle .

Conditionnement par rapport à un évènement $B \in \mathcal{F}$:

Soit $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \mathbb{P}(B) \neq 0$$

Soit X une v.a intégrable (i.e $\mathbb{E}(\mid X \mid) < \infty$) :

$$\mathbb{E}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(X 1_B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0$$

Conditionnement par rapport à une v.a Y ($\grave{a}$ valeurs dans D dénombrable) :

$$\mathbb{E}(X/Y) = \Psi(Y)$$

Où

$$\Psi(Y) = \mathbb{E}(X/Y = y), y \in D$$

Conditionnement par rapport à une tribu $\mathcal{F}_1$:

On a la définition suivante :

Définition 1.1.10

Soit X est v.a telle que $\mathbb{E}(\mid X \mid) < \infty)$ et $\mathcal{F}_1$ est sous-tribu de $\mathcal{F}$.

On définit $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)$ l'unique P.s variable aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1) $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)$ est une $\mathcal{F}_1$-mesurable .

2) $\forall B \in \mathcal{F}_1$, $\mathbb{E}(1_B \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(1_B X)$.

Conseqence :

D'aprés la définition précedénte on a :

1) $\forall\, U$ est une v.a $\mathcal{F}_1$-mesurable et bornée .

2) $\mathbb{E}(U\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(U.X)$

Proposition 1.1.1

Soient X et Y deux v.a intégrables et soit $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ on a :

a) $\mathbb{E}(aX + Y/\mathcal{F}_1) = a\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) + \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_1)$

b) Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) \leq \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_1)$

c) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X)$ (on prend $A = \Omega$ dans la définition) .

d) Si X est indépendante de $\mathcal{F}_1$ on a $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X)$, c-à-d qu'en l'absence de toute information sur X , la mielleure estimation que l'on puisse faire sur X est son espérance .

e) Si X est une $\mathcal{F}_1$-mesurable alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) = X$. Cela traduit le fait que $\mathcal{F}_1$ contient déja toute information sur X .

f) Si X est $\mathcal{F}_1$-mesurable et $\mathbb{E}(|XY| < +\infty)$, alors $\mathbb{E}(XY/\mathcal{F}_1) = X\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_1)$.

g) Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_2)/\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)$.

1.1.4 Convergence d'une suite des variables aléatoires

Soient $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de v.a et X une autre v.a toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il y a plusieurs façons de définir la convergence de la suite (X_n) vers X .

Convergence en probabilité :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X, \quad si \quad \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_n(\omega) - X(\omega) > \epsilon) = 0.$$

Convergence presque sûre :

$$X_n \xrightarrow{p.s} X, \quad si \quad \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} {}_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

Convergence dans $\mathcal{L}^p$:

Si $p = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^1) = 0$$

Si $p = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^2) = 0$$

1.2 Filtration et processus stochastique

1.2.1 Filtration

Définition 1.2.1

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{B}, \mathbb{P})$ on appelle filtration toute suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de sous-tribus de $\mathbf{B}$,c-à-d $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.

Définition 1.2.2 *[7]*

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On dit que une v.a réelle X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ si

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F},\ \forall B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$$

Définition 1.2.3

La tribu engendrée par une famille de v.a $(X_t, t \in [0,T])$ est la plus petite tribu contenant $X_t^{-1}(B)$ pour tout $t \in [0,T]$ et $B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$. On la note $\sigma(X_t, t \leq T)$.

Définition 1.2.4

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration .

On dit qu'une filtration est continue à droite si :

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}\ \forall t \geq 0$$

On dit qu'une filtration est continue à gauche si :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\bigcup_{0 \leq s < t} \mathcal{F}_s) \; \forall t \geq 0$$

Cette même filtration est dite complète par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$ négligeables , c-à-d de mesure nulle , pour $\mathbb{P}$.

Définition 1.2.5 *On appelle espace de probabilité filtré , et l'on note $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration complète $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.*

Définition 1.2.6

On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfait les conditions habituelles si elle est a la fois continue a droite et complète .

1.2.2 Processus stochastique

Dans cette partie nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux processus stochastique.

Définition 1.2.7

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et adapté a la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Définition 1.2.8

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $\mathcal{F}_t^X$ la tribu engendrée par $\{X_0, X_1, ..., X_t\}$ d'où $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\{X_0, X_1, ..., X_t\})$.

Alors $\mathcal{F}_t^X$ est une filtration appellée filtration canonique du processus aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Définition 1.2.9

Soit T un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ .Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ dans $\mathbb{R}^n$ est une famille de variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indexée par T .
pour $\omega \in \Omega$ fixé $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est appelée trajectoire .

Définition 1.2.10

Soit $X = (X)_{t\geq 0}$ un processus, on dit que X est mesurable si l'application :

$$X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

est mesurable par rapport aux tribus $B(R^+) \bigotimes \mathcal{F}$ et $B(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.2.11

Un processus $\{(X_t)\}$ tel que X_0 est à accroissement indépendants (P.A.I) si, pour toute suite finie $(0 < t_1 < t_2 < ... < t_n)$ les v.a $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendants .

Définition 1.2.12

Un processus $\{(X_t)\}$ à accroissement indépendants et stationnaires (P.A.I.S), si la loi de l'accroissement $(X_{t+h} - X_t)$ ne dépend pas de t pour tout $t \geq 0$, ou encore si pour tout t, de la loi $(X_{t+h} - X_t)$ est égale à la loi de $(X_h - X_0)$
$\forall h \geq 0$ $(X_{t+h} - X_{s+t}) \stackrel{Loi}{=} X_{t-s}$ $\forall s, t \geq 0$, *tels que* $0 \leq s \leq t$

Définition 1.2.13

Soit $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \to X_t(\omega)$ est continue (i.e les trajectoires sont continues) .

Définition 1.2.14

Le processus stochastique $X = (X_t)_{t\in \mathrm{T}}$ *est dit càd-làg si pour chaque* $\omega \in \Omega$ *la trajectoire* $X_t(\omega)$ *est continue à droite et admet une limite à gauche.*

Définition 1.2.15

Un processus progressif $(X_t)_{t\in \mathrm{T}}$ *(par rapport à* $\mathcal{F}$ *) est un processus tel que* $\forall t \in \mathrm{T}$, *l'application :*

$$(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega)$$

est mesurable de $B([0,t]) \bigotimes \mathcal{F}_t$ *dans* $B(\mathbb{R})$.

Définition 1.2.16

Soient $p \geq 1$ *et* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique, on dit que* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est bornée dans* $\mathcal{L}^p$ *si :*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$$

Définition 1.2.17

Soit $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration et* $\mathrm{T} : \Omega \to \mathbb{R}^+ \bigcup \{\infty\}$ *une application. On dit que* T *est un temps d'arrêt a* $(\mathcal{F}_t)_{t\in 0}$ *si :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \{\mathrm{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Théorème 1.2.1 *[8]*

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus adapté à trajectoires continues, et* T *est un temps d'arrêt. Alors on a :*

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathbb{E}(|X_t|)dt = \mathbb{E}(\int_0^{\mathrm{T}} |X_t|dt)$$

De plus, si cette quantité est finie, alors on a :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathbb{E}(X_t)dt = \mathbb{E}(\int_0^{\mathrm{T}} X_t dt)$$

Maringales

Définition 1.2.18 *[9]*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré .Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus adapté et intégrable , on dit que* X *est :*

1.) Une martingale si :

$$\forall\ 0 \leq s \leq t \ \ \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$$

2.) Une sur-martingale si :

$$\forall\ 0 \leq s \leq t \ \ \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$$

3.) Une sous-martingale si :

$$\forall\ 0 \leq s \leq t \ \ \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

Définition 1.2.19

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré.* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus continu .On dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt* $\{\mathrm{T}_n, n \geq 1\}$*, telle que :*

i) La suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geq 1}$ *est croissante et* $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{T}_n = +\infty$ *p.s.*

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ *le processus* $X^{\mathrm{T}_n} 1_{\{\mathrm{T}_n \geq 0\}} = (X_t^{\mathrm{T}_n} 1_{\{\mathrm{T}_n \geq 0\}})_{t\geq 0}$ *est une* $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *martingale uniformement integrable.*

Proposition 1.2.1

- *Toute martingale continue est une martingale locale.*
- *Une martingale locale positive est une sur-martingale.*
- *Une martingale locale bornée est une martingale.*

Quelques inégalitées

Inégalitée de Burkholder-Davis-Gundy

Pour tout $p \geq 0$ il existe des constantes c_p et C_p telle que pour toutes martingale locale M continue issue de 0 on a :

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]$$

où,

$$M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|.$$

Inégalitée de Gronwall

soient f et g :$[a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant :

$$\exists c \geq 0 \;:\; \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq c + \int_a^x f(t)g(t)dt,$$

alors

$$\forall x \in [a, b] \;,\; f(x) \leq c \exp\left(\int_a^x g(t)dt\right).$$

Inégalitée de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements aléatoires, on définit :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_p \bigcup_{n \geq p} A_n.$$

*) si la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

*) si de plus la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est indépendante, alors

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$

Inégalitée de Chebychev

Soit Y une variable aléatoire positive définit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

Inégalitée de Hõlder

Si $X \in \mathcal{L}^q$, $Y \in \mathcal{L}^p$, telle que $p > 1$,$q > 1$ $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ alors :

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}[|Y|^p]^{\frac{1}{p}}$$

Inégalitée de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux v.a de carré intégrable. Alors

i) X Y est intégrable

ii) $(\mathbb{E}[|XY|])^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

Inégalitée de Doob

Soit $(M_n, n \in N)$ une martingale réelle de carré intégrable. On a :

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} M_k^2] \leq 4\mathbb{E}[M_n^2]$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[\sup_{n \in N} M_n^2] \leq 4 \sup_{n \in N} \mathbb{E}[M_n^2]$$

1.3 Mouvement brownien

1.3.1 Vecteur gaussien

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

Définition 1.3.1 *On dit qu'une variable aléatoire gaussienne ou normale de parametres* (m, σ^2), $(m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*)$ *si sa fonction de densité* f_X *est donnée par :*

$$f_X = \frac{1}{\sigma\pi\sqrt{2}} e^{(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2)}$$

Dans ce cas, sa loi $\mathbb{P}_X$ *est donnée par :*

$$\forall A \in B(\mathbb{R}) \ \ \mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathcal{F}} f_X(x)dx$$

Et on note

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Si $m = 0$ *le vecteur* X *est dit centré.*

Remarque 1.3.1

Lorsque $\sigma = 0$, X *est variable constante i.e* $X = m \ \ \mathbb{P}$ *p.s.*

Proposition 1.3.1

Une v.a X *de loi* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *a pour*

- *esperance :* $\mathbb{E}[X] = m$,
- *variance :* $Var(X) = \sigma^2$,
- $Cov(X_s, X_t) = \min(s, t) \quad \forall 0 \leq s \ , t < \mathrm{T}$.

Définition 1.3.2

Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *est un vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaire de ses composantes sont gaussiennes i.e :*

$$\forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

est une v.a réelle gaussienne .

Définition 1.3.3

Soit un processus $X = (X)_{t\in \mathrm{T}}$ est un processus gaussien si toutes ses lois de dimesion finie sont gaussiennes i.e :

$$\forall n \geq 1 \ , \ \forall t_1 < t_2 < ... < t_n \in \mathrm{T} \ , \ (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$$

est un vecteur gaussien .

Proposition 1.3.2

Si le vecteur (X_1, X_2) est gaussien, les v.a X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $Cov(X_1, X_2) = 0$.

Proposition 1.3.3

Tout vecteur de v.a gaussienne indépendantes est un vecteur gaussien .

1.3.2 Définition du mouvement brownien

Le mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du polle en suspension dans un liquide. Ce mouvement aléatoire , dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules du liquide, entraine la dispersion ou la diffusion du pollen dans le liquide. Il a été observé pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown.

Définition 1.3.4

On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles tel que :

1) $B_0 = 0$ p.s

2) Si $t_0 < t_1 ... < t_n$, l'accroissement $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \ , \ 0 \leq i \leq n)$ sont indépendant

3) $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

4) $t \longrightarrow B_t$ est continue p.s

Remarque 1.3.2

De cette définition, il suit que pour $0 \leq s \leq t$ on a :

$$(B_t - B_s) \sim B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

C'est à dire :

$$\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0,$$

et

$$\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s.$$

Proposition 1.3.4

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors :

a) **Symetrie**

Le processus $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement Brownien.

b) **Changement d'echelle (scaling)** *:*

Soit $\lambda > 0$. Le processus $(B^{\lambda}) = (B_t^{\lambda})_{t\geq 0}$ avec $B_t^{\lambda} = (\frac{1}{\lambda})B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement Brownien .

c) **Propriété de Markov simple** *:*

Pour $s > 0$, posons $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u \ , u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$ alors $B^{(s)} = (B_t^s)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Proposition 1.3.5

La variation quadratique sur $[0, \mathrm{T}]$ du mouvement Brownien existe dans $\mathcal{L}^2$ et vaut T.

De plus, si la subdivision Π_n *satisfait :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n < \infty.$$

On a la convergence au sens presque sùr. On a donc :

$$< B >_{\mathrm{T}} = \mathrm{T}.$$

1.4 Intégrale stochastique

On commençons par définir l'intégrale pour les processus élémentaires. Ensuite, nous étendons la définition aux processus adaptés ayant un moment d'ordre 2, en utilisant un résultat sur les espaces complets. Pour finir, nous regardons la formule d'Itô, de même que l'intégrale par rapport à un processus dItô.

Définition 1.4.1 *(Intégrale de Wiener) [10]*
Soit l'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type

$$\int_0^t X_s dB_s$$

Où : les processus X_t *sont définis pour* $t \in [0, \mathrm{T}]$ *sur* C. *Avec* C *l'ensembele des fonction suivantes* $X : [0, \mathrm{T}] \times \Omega \to \mathbb{R}$, *continue et stochastique et i), ii), iii) sont satisfaits, où*

i) X *est* $\mathbb{B}([0, t]) \times \mathcal{F}$ *mésurable.*

ii) $X(t, .) : \Omega \to \mathbb{R}$ *est* $\mathcal{F}_t$ *mésurable.*

iii) $X(t, .) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ *et* $\int_0^{\mathrm{T}} \mathbb{E}[|X(t, .)|^2]dt < \infty$ *i.e* $X \in \mathcal{L}^2([0, \mathrm{T}] \times \Omega)$.

1) **Cas de processus étagés**

Définition 1.4.2

On dit qu'un processus $\{\theta_t\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ *est un processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels* t_j,$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = \mathrm{T}$ *et une suite de v.a telles que* θ_j *, soit* $\mathcal{F}_{t_j}$ *mésurable , appartienne a* $\mathcal{L}^2(\Omega)$ *et que* $\theta_t = \theta_j$ *pour tout* $t \in]t_j, t_{j+1}]$ *soit :*

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(s)$$

On définit alors l'intégrale d'Itô :

Définition 1.4.3

Pour tout processus élémentaire θ*, on définit l'intégrale d'Itô de* θ *par rapport au mouvement brownien* W *par :*

$$\int_0^{\mathrm{T}} \theta_s(\omega) dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Proposition 1.4.1

L'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires satisfait les propriétés suivantes :

1.) Linéarité :

$$\int_0^t (\theta_s + \eta_s) dB_s = \int_0^t \theta_s dB_s + \int_0^t \eta_s dB_s$$

$$\int_0^t c\theta_s dB_s = c \int_0^t \theta_s dB_s$$

2.) Additivité : pour $0 \leq u \leq t \leq \mathrm{T}$ *:*

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \int_0^u \theta_s dB_s + \int_u^t \theta_s dB_s$$

3.) Pour tout $t \leq \mathrm{T}$:$E\Big[(\int_0^t \theta_s dB_s)(\int_0^t \eta_s dB_s)\Big] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s\eta_s) dB_s\right]$

4.) $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s*

5.) $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq \mathrm{T}}$ *est un processus $\mathcal{F}$-adapté*

6.)

$$Var\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

Proposition 1.4.2

1.) Si $\int_0^t \mathbb{E}\left(|\theta_s|\right) < \infty$ *alors :*

$$\mathbb{E}(\int_0^t \theta_s dB_s) = 0$$

2.) Si $\int_0^t \mathbb{E}(\theta_s^2)ds < \infty$ *on a l'sométrie d'Itô*

$$\mathbb{E}\left((\int_0^t \theta_s dB_s)^2\right) = \int_0^t \mathbb{E}\left(\theta_s^2\right) ds \tag{1.1}$$

preuve 1.4.1

1.) On pose que $t_n = t$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^t \theta_s dB_s) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\theta_j) \underbrace{\mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

2.) On pose que $t_n = t$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((\int_0^t \theta_s dB_s)^2\right) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \theta_j\theta_i (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\theta_j^2) \underbrace{\mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2}_{t_{j+1}-t_j} \\
&= \int_0^t \mathbb{E}(\theta_s^2) ds
\end{aligned}$$

2) **Cas général**

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener a une classe plus grande de processus. On perd le caractere gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le processus étagé.

On défininit Γ comme l'ensemble des processus X càglàd de carré intégrale appartenant à $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ tels que :

$$\|\theta\|^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_t^2\right] dt < \infty$$

Les processus étagés $\theta^{(n)}$ appratiennement à Γ que converge ver X dans l'espace complet $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ c-à-d :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} \mathbb{E}(X_s - \theta_s^{(n)})^2 ds = 0$$

L'isométrie (1.1) nous premet alors d'affirmer que la limite suivante existe dans $\mathcal{L}^2$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \theta_s^{(n)} dB_s = \int_0^t X_s dB_s$$

C'est par définition l'intégrale d'Itô de X_s .

Proposition 1.4.3

Le processus $\{\int_0^t X_s dB_s\}_{t\geq 0}$ *est une martingale .*

preuve 1.4.2

Soit $0 \leq u \leq t$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^t X_s dB_s|\mathcal{F}_u) &= \mathbb{E}(\int_0^u X_s dB_s|\mathcal{F}_u) + \mathbb{E}(\int_u^t X_s dB_s|\mathcal{F}_u) \\
&= \int_0^u X_s dB_s + 0 \\
&= \int_0^u X_s dB_s
\end{aligned}$$

Exemple 1.4.1

Nous pouvons montrer que pour tout t,

$$\int_0^u B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

En effet, nous avons par définition, que

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Ensuite, en utilisant l'dentité

$$2\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2}(B_t^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2)\\ &= \frac{1}{2}(B_t^2 - t)\end{aligned}$$

Car d'aprés Proposition 1.3.5 le terme

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

converge dans $\mathcal{L}^2$ vers la variation quadratque sur $[0,t]$ du mouvement brownien qui vaut t.

1.4.1 Formules d'Itô

Une nouvelle classe de processus sera introduite, par rapport à la quelle une intégrale stochastique sera définie : il s'agit de la famille des processus d'Itô. Cette classe permet d'établir plusieurs formules pratiques qui forment la base du calcul différentiel et intégral stochastique. Nous débutons avec la première formulation de formule d'Itô.

Théorème 1.4.1 *[11]*

Soit la fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$, telle que f'' est bornée alors satisfait presque sûrment

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_r)dB_r + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_r)dr \tag{1.2}$$

Exemple 1.4.2

Si $f(x) = x^2$ nous avons d'après (1.2) que :

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_r dB_r + \frac{1}{2}\int_0^t 2dr = 2\int_0^t B_r dB_r + t$$

Ainsi , nous déduisons que

$$\int_0^t B_r dB_r = \frac{1}{2}B_t^2 - t$$

1.4.2 Processus d'Itô

On définit le processus d'Itô.

Cas un demension

Définition 1.4.4

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration e $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien de demension , un processus $(X_t)_{0\leq t\leq \mathrm{T}}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

où les processus H_s et K_s sont adaptés continus et vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t [H_s^2 + |K_s|]ds\right) < +\infty$$

L'équation précédente est notée de manière infinitésimale par

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t \quad et \quad X_0 = Z.$$

Définition 1.4.5

Soient X_t et Y_t des processus d'Itô. Alors :

- Les variations quadratiques sur $[0,t]$ sont donnée par

$$< X >_t = \int_0^t H_{s,1}^2 ds \quad et \quad < Y >_t = \int_0^t H_{s,2}^2 ds$$

. - La convariation quadratiques entre X_t et Y_t est donnée par

$$< X, Y >_t = \int_0^t H_{s,1} H_{s,2} ds,$$

Où

$$dX_t = K_{s,1}dt + H_{s,1}dB_s \quad et \quad dY_t = K_{s,2}dt + H_{s,2}dB_s.$$

La conclusion est obtenue en notant que $< X >_t = < X, X >_t$.

Définition 1.4.6

L'intégrale stochastique d'un processus ϕ_t par rapport à un processus d'Itô

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t$$

est définie par :

$$\int_0^t \phi_s dX_s = \int_0^t \phi_s K_s ds + \int_0^t \phi_s H_s dB_s.$$

Par la suite, une formule importante d'integration stochastique par rapport aux processus d'Itô sera établie.

Théorème 1.4.2

Si $f \in C^2$, alors :

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d < X >_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.4

soient X_t et Y_t des processus d'Itô. Nous avons :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + d < X, Y >_t$$

preuve 1.4.3

Comme on a

$dX_t^2 = 2X_t dX_t + d < X >_t$

$dY_t^2 = 2Y_t dY_t + d < Y >_t$

$d(X+Y)^2 = 2(X_t + Y_t)d(X_t + Y_t) + d < X + Y >_t$

donc :

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2}(d(X+Y)_t^2 - d < X >_t^2 + dY^2) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2}(d < X + Y >_t - d < X >_t + dY_t) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d < X, Y >_t \end{aligned}$$

Cas multivarié

Définition 1.4.7

Soit $B_t = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d)$ un mouvement Brownien s-dimensiennel dont les composantes sont d mouvement Brownien indépendants à trajectoires continues. Nous appellerons processus d'Itô r-dimensiennel un processus X_t à valeurs $\mathbb{R}^r$ dont chaque composante est de la forme :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{m=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,m} dB_s^m,$$

où les processus $H_s^{i,m}$ et K_s^i sont adaptés continus et vérifient

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t [(H_s^{i,m})^2 + |K_s^i|] ds\right) < +\infty \quad \forall m = 1, ..., d_i \quad i = 1, ..., r.$$

On pose :

$$< X^i, X^i >_t = \sum_{m=1}^{d} \int_0^t (H_s^{i,m})^2 ds,$$

et

$$< X^i, X^j >_t = \sum_{m=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds.$$

Proposition 1.4.5

Soit X un processus d'Itô à valeur $\mathbb{R}^r$ et f une application de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées alors on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d < X, Y >_s,$$

où

$$dX_s = H_s^{i,1} dB_s^1 + ... + H_s^{i,d} dB_s^d + K_s^i ds.$$

Chapitre 2

Etude analytique de : EISV

Dans ce chapitre, on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation proposée en suivant la même manière présentée dans [12, 13].

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien de dimension 1, notont* $\mathcal{F} = \sigma(B_s, s \leq t)$ *la filtration naturelle du* B*. L'équation intégrale stochastique de Volterra est donnée sous la forme suivante :*

$$X_t = \varphi(t) + \int_0^t g(t,s,X(s))ds + \int_0^t f(t,s,X(s))dB_s \quad ,\forall t \in [0,\mathrm{T}] \tag{2.1}$$

tel que :

1) $\varphi(t)$ *est processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté à trajetoire continue .*
2) $f(t,s,x)$ *et* $g(t,s,x)$ *sont des fonction aléatoires définies pour* $0 \leq s \leq t \leq \mathrm{T}$ *et* $x \in \mathbb{R}$
3) *le processus stochastique* $X(t)$ *est une solution de l'équation (2.1) s'il est* $\mathcal{F}_t$*-adapté et à trajetoire continue pour tout* $t \in [0,\mathrm{T}]$.

A partir de maintenant, on prend des hypothèses importantes dans tout au long de ce chapitre, données par :

2.1 Hypothèses

H1) $f(t,s,x)$ *est continue en* (t,s,x) *pour tout* ω.

H2) $f(t,s,x)$ *est* $\mathcal{F}_s$*-mesurable pour tout* (t,s,x).

H3) $\exists K \in R : |f(t,s,x)| \leq K(1+|x|) \quad p.s.$

H4) $\exists K \in R : |f(t,s,x_1) - f(t,s,x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad p.s.$

H5) $\exists K \in R : |f(t_1,s,x) - f(t_2,s,x)| \leq K|t_1 - t_2| \quad p.s.$

Premièrement, il suffit d'étudier le cas ou l'intégrale

$$I(t) = \int_0^t f(t,s,X(s))dB_s \quad ,\forall t \in [0,\mathrm{T}] \tag{2.2}$$

est bien définie. Soit $X(t)$ *un processus* $\mathcal{F}_t$*-adaptée avec* $\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$, *alors d'aprés les hypothèses présédentes on a :*

$$\mathbb{E}[\int_0^t |f(t,s,X(s))|^2 ds] < \infty,$$

ainsi la transformation intégrale $I(t)$ *est bien défini et, d'aprés la définition* (2.2), *il est mesurable.*

Lemme 2.1.1

Si $\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \mathbb{E}[X^4(t)] < \infty$ *alors l'intégrale*

$$I(t) = \int_0^t f(t,s,X(s))dB_s \ ,\forall t \in [0,\mathrm{T}]$$

a version continue.

preuve 2.1.1

Soit $0 \leq u \leq t \leq \mathrm{T}$, *puis en utilisant une estimation des intégrales stochastiques et* *les hypothèses (H3) et (H5), on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|I(t)-I(u)|^4] &= \mathbb{E}\left[|\int_0^t f(t,s,X(s))dB_s - \int_0^u f(u,s,X(s))dB_s|^4\right],\\ &= \mathbb{E}\left[|\int_0^u f(t,s,X(s))dB_s - \int_0^u f(u,s,X(s))dB_s + \int_u^t f(t,s,X(s))dB_s|^4\right],\\ &= \mathbb{E}\left[|\int_0^u (f(t,s,X(s)) - f(u,s,X(s)))dB_s + \int_u^t f(t,s,X(s))dB_s|^4\right]. \quad (2.3)\end{aligned}$$

On utilise la majoration $(a+b)^4 \leq 8a^4+8b^4$ *puis passant à l'esperance, on obtient :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|I(t)-I(u)|^4] &\leq 8\mathbb{E}\left[|\int_0^u (f(t,s,X(s)) - f(u,s,X(s)))dB_s|^4 + |\int_u^t f(t,s,X(s))dB_s|^4\right]\\ &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[|\int_0^u |f(t,s,X(s)) - f(u,s,X(s))|^2 ds|^2 + |\int_u^t |f(t,s,X(s))|^2 ds|^2\right]\end{aligned}$$

aussi l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne :

$$\mathbb{E}[|I(t)-I(u)|^4] \leq 8\times 36\mathbb{E}\left[u\int_0^u |f(t,s,X(s)) - f(u,s,X(s))|^4 ds + (t-u)\int_u^t |f(t,s,X(s))|^4 ds\right].$$

On utilise les hypothèses (H3) et (H5) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|I(t)-I(u)|^4] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[u\int_0^u K^4|t-u|^4 ds + (t-u)\int_u^t K^4(1+|X(s)|)^4 ds\right]\\ &\leq 8\times 36K^4\mathbb{E}\left[u\int_0^u |t-u|^4 ds + 8.(t-u)\int_u^t (1+|X(s)|^4) ds\right]\\ &\leq 8\times 36.K^4(\mathrm{T}^4 + 8(1+\sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}}\mathbb{E}[(X^4(s)]))(t-u)^2\\ &\leq C\mathbb{E}[(X^4(s)]))(t-u)^2\end{aligned}$$

ce qui implique que $I(t)$ *a une version continue.*

Désormais, la transformation intégrale $I(t)$ *est toujours considérée comme une version continue, donc si* $X_i(t), (i=1,2)$ *satisfaire* $(\sup_{0\leq t\leq \mathrm{T}}\mathbb{E}[(X^4(t)] < \infty)$*, alors on prend :*

$$J(t) = \int_0^t [f(t,s,X_1(s)) - f(t,s,X_2(s))]dB_s \ ,\forall t\in[0,\mathrm{T}]$$

afin de l'utiliser dans le lemme suivant :

Lemme 2.1.2 *Si* $X_i(t)$, $\forall i=1,2$ *vérifies* $\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}[(X^4(t)] < \infty)$ *alors :*

$$\mathbb{P}[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^{\mathrm{T}}(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))dB_s|\geq\lambda]\leq\frac{K_0\mathrm{T}^2C_1}{\lambda^4}$$

où $K_0\in\mathbb{R}$ *et*

$$C_1=288.K^4(16)\mathrm{T}^2\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}[|X_1(t)-X_2(t)|^2]+\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}[|X_1(t)-X_2(t)|^4].$$

preuve 2.1.2

Ce lemme peut être dérivé par un argument similaire au (lemme 2.1.1) . Il faut remarquer l'estimation suivante. Si $0\leq u\leq t\leq\mathrm{T}$, *alors*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|J(t) \quad - &\quad J(u)|^4] \\
= &\quad \mathbb{E}[|\int_0^t(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))dB_s \\
- &\quad \int_0^u(f(u,s,X_1(s))-f(u,s,X_2(s)))dB_s|^4] \\
= &\quad \mathbb{E}[|\int_0^u[(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))-(f(u,s,X_1(s)) \\
- &\quad f(u,s,X_2(s)))]dB_s+\int_u^t(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))dB_s|^4] \\
\leq &\quad 8\times 36\mathbb{E}[u\int_0^u[(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))-(f(u,s,X_1(s)) \\
- &\quad f(u,s,X_2(s)))]^4ds+(t-u)\int_u^t(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))^4ds] \\
= &\quad 8\times 36[\underbrace{\mathbb{E}[u\int_0^u[(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))-(f(u,s,X_1(s))-f(u,s,X_2(s)))]^4ds]}_{l_1} \\
+ &\quad \underbrace{\mathbb{E}[(t-u)\int_u^t(f(t,s,X_1(s))-f(t,s,X_2(s)))^4ds]]}_{l_2} \\
= &\quad 8\times 36(l_1+l_2). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

On utilise la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ *puis passant à l'esperance, on obtient :*

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \mathbb{E}\left[u\int_0^u [(f(t,s,X_1(s)) - f(t,s,X_2(s))) - (f(u,s,X_1(s)) - f(u,s,X_2(s)))\right]^2 \\
&\times \ \left[(f(t,s,X_1(s)) - f(u,s,X_1(s))) - (f(t,s,X_2(s)) - f(u,s,X_2(s)))\right]^2 ds \\
&\leq \mathbb{E}\left[u\int_0^u [2(f(t,s,X_1(s)) - f(t,s,X_2(s)))^2 - 2(f(u,s,X_1(s)) - f(u,s,X_2(s)))^2\right] \\
&\times \ \left[2(f(t,s,X_1(s)) - f(u,s,X_1(s)))^2 - 2(f(t,s,X_2(s)) - f(u,s,X_2(s)))^2\right] ds
\end{aligned}
$$

à l'aide des hypothèses (H4) et (H5) :

$$
\begin{aligned}
l_1 &\leq \mathbb{E}\left[u\int_0^u (2(K|X_1(s)-X_2(s)|)^2 + 2(K|X_1(s)-X_2(s)|)^2) \times (2(K|t-u|)^2 + 2(K|t-u|)^2) ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[u\int_0^u (4K^2|X_1(s)-X_2(s)|^2) \times (4K^2|t-u|^2) ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathrm{T}\int_0^{\mathrm{T}} (4K^2|X_1(s)-X_2(s)|^2) \times (4K^2|t-u|^2) ds\right] \\
&\leq 16K^4\mathrm{T}^2 \sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}} \{\mathbb{E}\left[(|X_1(s)-X_2(s)|^2)\}(t-u)^2\right]
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Maintenant l' hypothèse (H4) nous donne :

$$
\begin{aligned}
l_2 &= \mathbb{E}\left[(t-u)\int_u^t (f(t,s,X_1(s)) - f(t,s,X_2(s)))^4 ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[(t-u)\int_u^t (K|X_1(s)-X_2(s)|)^4 ds\right] \\
&= K^4\mathbb{E}\left[(t-u)\int_u^t |X_1(s)-X_2(s)|^4 ds\right] \\
&\leq K^4 \sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}} \{\mathbb{E}\left(|X_1(s)-X_2(s)|^4\right)\}(t-u)^2
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Par conséquent, à partir de (2.4), (2.5) *et* (2.6)*, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|J(t)-J(u)|^4\right] &\leq 8.36(16K^4\mathrm{T}^2 \sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}} \{\mathbb{E}\left[(|X_1(s)-X_2(s)|^2)\}(t-u)^2\right] \\
&+ K^4 \sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}} \{\mathbb{E}\left(|X_1(s)-X_2(s)|^4\right)\}(t-u)^2 \\
&\leq 8\times 36K^4(16\mathrm{T}^2 \sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}} \{\mathbb{E}\left(|X_1(s)-X_2(s)|^2\right)\} \\
&+ \sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}} \{\mathbb{E}\left(|X_1(s)-X_2(s)|^4\right)\}(t-u)^2)
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Pour compléter la preuve, on applique l'estimation ci-dessus (2.7) à la place de l'estimation (9) dans [12] et procéder de manière tout à fait analogue à la preuve du lemme 2.1.1 dans [13] .

Lemme 2.1.3

Si $X(t)$ vérifies $\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}[X^4(t)]<\infty$, alors :

$$\mathbb{P}[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^{\mathrm{T}} f(t,s,X(s))dB_s|\geq\lambda]\leq\frac{K_0\mathrm{T}^2C_2}{\lambda^4},$$

où :

$$C_2=288K^4(\mathrm{T}^4+8+8\sup_{s\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}[X^4(s)]).$$

preuve 2.1.3 *Voir [14]*

2.2 Existence de la solution

Théorème 2.2.1

Supposons que $f(t,s,x)$ satisfait les hypothèses H1)- H5) et $g(t,s,x)$ satisfait les hypothèses H1)- H4). Si $\varphi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et continue avec $\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}\left[\varphi^4(t)<\infty\right]$, alors l'EISV (2.1) admet une unique solution $X(t)$ satisfait $\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}\left[X^2(t)<\infty\right]$.

preuve 2.2.1

L'idée de la démontration est l'application de la méthode d'approximation successive, on définit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$\begin{cases} X_n(t)=\varphi(t)+\int_0^t g(t,s,X_{n-1}(s))ds+\int_0^t f(t,s,X_{n-1}(s))dB_s. \\ X_0(t)=\varphi(t), \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t)-X_n(t) &= \int_0^t \left[g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))\right] dB_s, \end{aligned} \tag{2.8}$$

d'aprés la majoraion $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ *puis passant à l'esperance, on optient :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^2\right] \end{aligned}$$

d'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothése H4) nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2\right] &\leq 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2 ds\right] + 2K^2 t\mathbb{E}[\int_0^t |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2 ds] \\ &\leq M\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2\right] ds. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Comme $t \in [0,\mathrm{T}]$ *on peut prendre* $M = 2K^2(T+1)$ *et avec l'hypothése H3) on obtien :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_1(t)-X_0(t)|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[|\int_0^t f(t,s,\varphi(s))dB_s - \int_0^t g(t,s,\varphi(s))ds|^2\right] \\ &\leq 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(t,s,\varphi(s))|^2 ds\right] + 2K^2 t\mathbb{E}\left[\int_0^t |g(t,s,\varphi(s))|^2 ds\right] \\ &\leq 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t 2(1+|\varphi(s)|^2)ds\right] + 2K^2 t\mathbb{E}\left[\int_0^t 2(1+|\varphi(s)|^2)ds\right] \\ &\leq 2M\int_0^t \mathbb{E}\left[1+\varphi^2(s)\right] ds \\ &\leq 2M\mu_2 \int_0^t ds \\ &\leq 2M\mu_2 t, \end{aligned}$$

tel que : μ_2 *est donnée par :*

$$\mu_2 = \sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \mathbb{E}\left[1+\varphi^2(t)\right] < \infty.$$

En utilisant le résultat de (2.9), on trouve :

$$\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2] \leq \frac{2\mu_2(Mt)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.10}$$

Maintenant, on suit la même procédure precédente pour majorer $\mathbb{E}[|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^4]$, *on commence par* $(a+b)^4 \leq 8a^4+8b^4$, *on trouve :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] &\leq 8\mathbb{E}\left[|\int_0^t [f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^4\right]\\
&+ 8\mathbb{E}\left[|\int_0^t [g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^4\right]\\
&\leq 8\times 36\mathbb{E}[|\int_0^t |f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))|^2 ds|^2]\\
&+ 8\mathbb{E}[|\int_0^t [g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^4]
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[t\int_0^t |f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))|^4 ds\right]\\
&+ 8\mathbb{E}\left[|t\int_0^t |g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))|^2 ds|^2\right]\\
&\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[t\int_0^t |f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))|^4 ds\right]\\
&+ 8\mathbb{E}\left[t^3\int_0^t |g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))|^4 ds\right]
\end{aligned}$$

à l'aide de l'hypothèse H4), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] &\leq 8\times 36\mathbb{E}\left[t\int_0^t (K|X_n(s)-X_{n-1}(s)|)^4 ds\right]\\
&+ 8\mathbb{E}\left[t^3\int_0^t (K|X_n(s)-X_{n-1}(s)|)^4 ds\right]\\
&\leq 8K^4T(36+T^2)\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^4 ds\right]\\
&\leq N\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^4 ds\right].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

où $N = 8K^4T(36+T^2)$. *D'autre part, on utilise l'hypothése H3) pour obtenir :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_1(t)-X_0(t)|^4] &\leq \mathbb{E}\left[|\int_0^t f(t,s,\varphi(s))dB_s - \int_0^t g(t,s,\varphi(s))ds|^4\right] \\
&\leq 8K^4\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(t,s,\varphi(s)|^4)ds\right] + 8K^4t\mathbb{E}\left[\int_0^t |g(t,s,\varphi(s)|^4)ds\right] \\
&\leq 8K^4\mathbb{E}\left[\int_0^t 8(1+|\varphi(s)|^4)ds\right] + 8K^4t\mathbb{E}\left[\int_0^t 8(1+|\varphi(s)|^4)ds\right] \\
&\leq 8N\int_0^t \mathbb{E}[1+\varphi^4(s)]ds \\
&\leq 8N\mu_4\int_0^t ds \\
&\leq 8N\mu_4 t,
\end{aligned}$$

où μ_4 *est donnée par :*

$$\mu_4 = \sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \mathbb{E}[1+\varphi^4(t)] < \infty.$$

Finalement on déduit :

$$\mathbb{E}[|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^4] \leq \frac{8\mu_4(Nt)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.12}$$

Ainsi tous les $X_n(t)$ *sont bien définis et de plus, ils sont* $\mathcal{F}_t$ *des processus continus adaptés grâce à la continuité de* $\varphi(t)$.

En prenant maintenant le sup carrés de (2.8), donc la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, *l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothése H4) de la fonction* g, *nous* *permet d'écrire :*

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2 &\leq 2\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^t[f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2\\
&+ 2\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^t[g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))]ds|^2\\
&\leq 2\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^t[f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2\\
&+ 2\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}t\int_0^t|g(t,s,X_n(s))-g(t,s,X_{n-1}(s))|^2ds\\
&\leq 2\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^t[f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2\\
&+ 2TK^2\int_0^{\mathrm{T}}|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2ds.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2>\lambda\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^t[f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2>\frac{\lambda}{4}\right]\\
&+ \mathbb{P}\left[\int_0^{\mathrm{T}}|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2ds>\frac{\lambda}{4TK^2}\right] \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

on applique le lemme 2.1.2 au terme $\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^t[f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2>\frac{\lambda}{4}\right]$ *de l'inégalité* (2.13) *et utilisant les inégalités* (2.12) *et* (2.10)*, pour trouver :*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\quad\left[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}|\int_0^t[f(t,s,X_n(s))-f(t,s,X_{n-1}(s))]dB_s|^2>\frac{\lambda}{4}\right]\\
&\leq \frac{16K_0\mathrm{T}^2 288K^4}{\lambda^4}\left(16\mathrm{T}^2\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}[|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^2]+\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mathbb{E}[|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^4]\right),\\
&\leq \frac{16K_0\mathrm{T}^2 288K^4}{\lambda^4}\left(\frac{16\mathrm{T}^2 2\mu_2(MT)^n}{n!}+\frac{8\mu_4(NT)^n}{n!}\right). \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

L'application de l'inégalité de Chebychev au terme $\mathbb{P}\left[\int_0^{\mathrm{T}}|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2ds>\frac{\lambda}{4TK^2}\right]$

avec (2.13) *et* (2.10), *on obtient :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\int_0^{\mathrm{T}} |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds > \frac{\lambda}{4TK^2}\right] &\leq \frac{4TK^2}{\lambda}\mathbb{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds\right] \\ &\leq \frac{4TK^2}{\lambda} \times \frac{2\mu_2(MT)^n}{n!} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Prenant $\lambda = 4^{-n}$ *et utilisant les résultats de* (2.15), (2.14) *et* (2.13) *on trouve :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > 2^{-n}\right] &\leq const \times \frac{(16MT)^n}{n!} \\ &+ const \times \frac{(16NT)^n}{n!} \\ &+ const \times \frac{(4MT)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Puisque le côté droit de l'inégalité (2.16) *est un terme général d'une série convergente, on applique le lemme de Borel-Cantelli, on trouve :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq 2^{-n}, n \mapsto \infty\right] = 1$$

Alors les sommes partielles suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(X_{k+1}(t) - X_k(t)) + \varphi(t) = X_n(t)$$

sont uniformement convergentes sur $[0, \mathrm{T}]$ *avec probabilité égale 1. Puisque tous les* $X_n(t)$ *sont* $\mathcal{F}_t$*-adaptés et continues donc on peut indiquer que* $X(t)$ *est la limite uniforme de* $X_n(t)$. *On remarque que* $X(t)$ *vérife l'équation* (2.1), *alors on a prouvé l'existence de la solution de l'équation* (2.1).

2.3 Unicité de la solution

On suppose qu'il existe deux solutions pour l'équation (2.1), $X(t)$ *et* $Y(t)$ *alors :*

$$X(t) - Y(t) = \int_0^t [f(t, s, X(s)) - f(t, s, Y(s))]dB_s + \int_0^t [g(t, s, X(s)) - g(t, s, Y(s))]ds$$

on utilise la majoraion $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ *et l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothése H4) puis passant à l'esperance, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [f(t,s,X(s))-f(t,s,Y(s))]dB_s|^2\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[|\int_0^t [g(t,s,X(s))-g(t,s,Y(s))]ds|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(t,s,X(s))-f(t,s,Y(s))|^2 ds\right] \\
&+ 2\mathrm{T}\mathbb{E}\left[\int_0^t |g(t,s,X(s))-g(t,s,Y(s))|^2 ds\right] \\
&\leq 2K^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right] ds + 2\mathrm{T}K^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right] ds \\
&= 2K^2(\mathrm{T}+1)\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right] ds
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Granowall, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right] \equiv 0$$

alors :

$$\mathbb{P}\left[|X(t)=Y(t)|\right] = 1; \forall t\in[0,\mathrm{T}]$$

Puisque $X(t)$ *et* $Y(t)$ *sont deux processus continus, on déduit que :*

$$\mathbb{P}\left[|X(t)=Y(t)|; \forall t\in[0,\mathrm{T}]\right] = 1$$

Chapitre 3

Etude numérique de : EISV

En générale, on peut pas trouver la solution exacte de l'équation proposée, alors il faut utiliser les méthodes numériques pour approcher ses solutions [15, 16, 17]. Dans ce chapitre, on va appliquer une méthode connue par : les fonctions de base de Hat ***HBF*** *présentée dans [18], alors on commence par expliquer la méthode et mentionner ses caractéristiques afin de l'utiliser pour obtenir une solution approchée de notre équation intégrale stochastiques non linéaires de Volterra.*

3.1 Définition de HBF et leurs propriétés

Divisons l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ *en* $\frac{n}{3}$ *sous-intervalles* $[ih, (i+3)h]$ *où* $i = 0, 3, ..., n-3$ *de longueurs égales* $3h$, *donc* $\frac{\mathrm{T}}{n}, n \geq 3$ *est un entier multiple de trois. Alors, l'ensemble d'ajustement de HBF [18] est défini sur* $[0, \mathrm{T}]$ *par :*

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \frac{-1}{6h^3}(t-h)(t-2h)(t-3h), & 0 \leq t \leq 3h \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Si, $i = 3k - 2$ *et* $1 \leq k \leq \frac{n}{3}$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h^3}(t-(i-1)h)(t-(i+1)h)(t-(i+2)h), & (i-1) \leq t \leq (i+2)h \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Si, $i = 3k - 4$ *et* $2 \leq k \leq \frac{n}{3} + 1$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2h^3}(t-(i-2)h)(t-(i+1)h)(t-(i+1)h), & (i-2) \leq t \leq (i+1)h \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Si, $i = 3k$ *et* $1 \leq k \leq \frac{n}{3} - 1$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3}(t-(i-3)h)(t-(i-2)h)(t-(i-1)h), & (i-3) \leq t \leq ih \\ \frac{-1}{6h^3}(t-(i+1)h)(t-(i+2)h)(t-(i+3)h), & ih \leq t \leq (i+3) \\ 0, & sinon \end{cases}$$

et

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2h^3}(t-(\mathrm{T}-h))(t-(\mathrm{T}-2h))(t-(\mathrm{T}-3h)), & (\mathrm{T}-3h) \leq t \leq \mathrm{T} \\ 0, & sinon \end{cases}$$

En utilisant les définitions précédente, nous avons :

$$\phi_i(kh) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Et

$$\sum_{i=0}^{n} \phi_i(t) = 1.$$

3.2 Approximation des fonctions en utilisant HBF

Une fonction réelle arbitraire $f(t)$ *sur* $[0, \mathrm{T}]$ *peut être développée en série de HBF comme suit :*

$$f(t) \simeq \sum_{i=0}^{n} f_i \phi_i(t) = \Phi^{\mathrm{T}}(t) F \tag{3.2}$$

où

$$F = [f_0, f_1, ..., f_n]^{\mathrm{T}}$$

et

$$\Phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), ..., \phi_n(t)]^{\mathrm{T}} \tag{3.3}$$

avec

$$f_i = f(ih), \quad i = 0, 1, ..., n \tag{3.4}$$

La fonction $k(t, s)$ *sur* $[0, \mathrm{T}_1] \times [0, \mathrm{T}_2]$ *peut être étendue de la même manière en ajustant les HBF comme :*

$$k(t, s) \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}} K \Phi(s) = \Phi(s)^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} \Phi(t) \tag{3.5}$$

où

$$K = (k_{i,j})_{(n+1)\times(n+1)}$$

et

$$k_{i,j} = k(ih, jh)\ ,\ i, j = 0, 1, ..., n$$

De plus, en utilisant la relation (3.1) *et en développant les entrées de la matrice* $\Phi(t)\Phi(t)^{\mathrm{T}}$ *par l'ajustement des HBF, on obtient :*

$$\Phi(t)\Phi(t)^{\mathrm{T}} \simeq \begin{pmatrix} \phi_0(t) & \dots & 0 & \\ 0 & \phi_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & \dots & \phi_n(t) & \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

Lemme 3.2.1 *Supposons que* $Y^{\mathrm{T}} = [y_0, y_1, ..., y_n]$ *un vecteur constant et* $\Phi(t)$ *le vecteur défini dans la relation* (3.3)*. Alors, on a :*

$$\Phi(t)\Phi(t)^{\mathrm{T}} Y \simeq \tilde{Y}\Phi(t) \tag{3.6}$$

où $\tilde{Y} = diag(y_0, y_1, ..., y_n)$*, et* $\tilde{Y}$ *est* $(n+1)\times(n+1)$ *produit de la matrice opérationnelle pour l'ajustement HBF.*

3.3 La matrice opérationnelle d'intégration classique

A partir des propriétées de HBF, l'intégration classique $\int_0^t \Phi(s)ds$ *va être simplifiée par :*

$$\int_0^t \Phi(s)ds \simeq \sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\Phi_j(t), \quad i = 0, 1, ..., n \tag{3.7}$$

où, avec (3.2) et la relation (3.4), nous pouvons calculer les coefficients a_{ij} *comme suit :*

$$a_{i,j} = \int_0^{jh} \Phi_i(t)dt, \quad j = 0, 1, ..., n \tag{3.8}$$

Maintenant, soit P *la matrice de coefficients* $(n+1) \times (n+1)$ *avec les entrées* a_{ij} *données par :*

$$P = \frac{h}{24}\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 9 & 9 & \dots & 9 \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_3 & \dots & p_3 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & \dots & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & \dots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

avec,

$$p_1 \begin{pmatrix} 19 & 32 & 27 \\ -5 & 8 & 27 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}_{(3)\times(3)}, p_2 \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 18 & 17 & 18 \end{pmatrix}_{(3)\times(3)}, p_3 \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}_{(3)\times(3)}$$

Alors, on peut écrire la relation (3.7), comme :

$$\int_0^t \Phi(s)ds \simeq P\Phi(t) \tag{3.9}$$

3.4 La matrice opérationnelle d'intégration stochastique

Théorème 3.4.1

Supposons que $\Phi(t)$ *soit le vecteur défini par* (3.3)*. Par conséquent, l'intégrale Itô de* $\Phi(t)$ *peut être représentée par :*

$$\int_0^t \Phi(s)dB_s \simeq Q\Phi(t) \tag{3.10}$$

Où Q *est* $(n+1)\times(n+1)$ *matrice opérationnelle stochastique basée sur l'ajustement de HBF donnée par :*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{0,1}(h) & \alpha_{0,2}(h) & \alpha_{0,3}(h) & \alpha_{0,3}(h) & \dots & \alpha_{0,3}(h) \\ 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_3 & \dots & q_3 \\ 0 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_1 & q_2 & \dots & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_1 & \dots & q_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

où

$$q_1 = \begin{pmatrix} B(ih)+\alpha_{i,i} & \alpha_{i,i+1} & \alpha_{i,i+2} \\ \beta_{i,i-1} & B(ih)+\beta_{i,i} & \beta_{i,i+1} \\ \gamma_{i,i-2} & \gamma_{i,i-1} & B(ih)+\gamma_{i,i} \end{pmatrix}_{(3)\times(3)} \quad q_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} \\ \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} \\ \gamma_{i,i+1} & \gamma_{i,i+2} & \gamma_{i,i+3} \end{pmatrix}_{(3)\times(3)}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} \\ \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} \\ \gamma_{i,i+3} & \gamma_{i,i+3} & \gamma_{i,i+3} \end{pmatrix}_{(3)\times(3)}$$

et

$$\alpha_{0,i}(h) = \frac{1}{6h^3}\int_0^{ih}(3s^2 - 12sh + 11h^2)B(s)ds \ , \ i = 1, 2, 3$$

Si, $i = 3k - 2$ *et* $1 \leq k \leq \frac{n}{3}$

$$\alpha_{i,j}(h) = -\frac{1}{2h^3}\int_{(i-1)h}^{jh}(3s^2 - (6i+4)sh + (3i^2 + 4i - 1)h^2)B(s)ds \ , \ j = i, i+1, i+2$$

Si, $i = 3k - 4$ *et* $2 \leq k \leq \frac{n}{3} + 1$

$$\beta_{i,j}(h) = \frac{1}{2h^3}\int_{(i-2)h}^{jh}(3s^2 - (6i-4)sh + (3i^2 - 4i - 1)h^2)B(s)ds \ , \ j = i-1, i, i+1$$

Si, $i = 3k$ *et* $1 \leq k \leq \frac{n}{3} - 1$

$$\gamma_{i,j}(h) = -\frac{1}{6h^3}\int_{(i-3)h}^{jh}(3s^2 - (6i-12)sh + (3i^2 - 12i + 11)h^2)B(s)ds \ , \ j = i-2, i-1, i$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_{i,j}(h) = & - \frac{1}{6h^3}\Big(\int_{(i-3)h}^{ih}(3s^2 - (6i-12)sh + (3i^2 - 12i + 11)h^2)B(s)ds \\ & - \int_{ih}^{jh}(3s^2 - (6i+12)sh + (3i^2 + 12i + 11)h^2)B(s)ds\Big) \ \ j = i+1, i+2, i+3\end{aligned}$$

preuve 3.4.1 *Voir [18].*

3.5 Approximation de : EISV

Tout d'abord, on suppose que l'équation (2.1) s'écrite sous la forme suivante :

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k_1(t,s)\mu(s, x(s))ds + \int_0^t k_2(t,s)\varphi(s, x(s))dB_s \ , 0 \leq t \leq \mathrm{T} \quad (3.11)$$

où $f(t)$*,* $k1(t,s)$ *et* $k2(t,s)$*, pour* $t, s \in [0, \mathrm{T}]$*, sont des fonctions connues sur l'espace des probabilités,* $x(t)$ *est l'inconnue fonction aléatoire,* $B(t)$ *est un mouvement brownien standard et* $\int_0^t k_2(t,s)\varphi(s,x(s))dB_s$ *est l'intégrale d'Itô. Supposons également* *que $\mu(t,x(t))$ et $\varphi(t,x(t))$ sont des fonctions analytiques.*

Afin d'obtenir une approximation de l'équation (3.11), nous approchons $x(t)$, $f(t)$, $k1(t,s)$ et $k2(t,s)$ par les relations (3.2) et (3.5) comme suit :

* $x(t) \simeq X^{\mathrm{T}}\Phi(t) = \Phi(t)^{\mathrm{T}}X$
* $f(t) \simeq F^{\mathrm{T}}\Phi(t) = \Phi(t)^{\mathrm{T}}F$
* $k_1(t,s) \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\Phi(s) = \Phi(s)^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}}\Phi(t)$
* $k_2(t,s) \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\Phi(s) = \Phi(s)^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}}\Phi(t)$

et nous considérons les notations :

$$\begin{cases} r(t) = \mu(t,x(t)) \\ h(t) = \varphi(t,x(t)) \end{cases} \tag{3.12}$$

avec les approximations :

$$\begin{cases} r(t) \simeq R^{\mathrm{T}}\Phi(t) = \Phi(t)^{\mathrm{T}}R \\ h(t) \simeq H^{\mathrm{T}}\Phi(t) = \Phi(t)^{\mathrm{T}}H \end{cases} \tag{3.13}$$

Où X, F, R et H sont l'ajustement de coefficients des fonctions hat des vecteurs de $x(t)$, $f(t)$, $r(t)$ et $h(t)$, respectivement et K_1 et K_2 sont des matrices de coefficients de $k1(t,s)$ et $k2(t,s)$, respectivement. En remplaçant les approximations ci-dessus dans (3.11), on trouve :

$$\Phi(t)^{\mathrm{T}}X \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}F + \int_0^t \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\Phi(s)\Phi(s)^{\mathrm{T}}Rds + \int_0^t \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\Phi(s)\Phi(s)^{\mathrm{T}}HdB_s$$

Par conséquent :

$$\Phi(t)^{\mathrm{T}}X \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\int_0^t \Phi(s)\Phi(s)^{\mathrm{T}}Rds + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\int_0^t \Phi(s)\Phi(s)^{\mathrm{T}}HdB_s$$

De plus, à partir du lemme 3.2.1, *on peut écrire :*

$$\Phi(t)^{\mathrm{T}}X \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\int_0^t \tilde{R}\Phi(s)ds + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\int_0^t \tilde{H}\Phi(s)dB_s. \tag{3.14}$$

À partir de (3.9) et (3.10), alors (3.14) écrite :

$$\Phi(t)^{\mathrm{T}}X \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\tilde{R}P\Phi(t) + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\tilde{H}Q\Phi(t) \tag{3.15}$$

Maintenant, en remplaçant (3.12),(3.13) dans (3.15) on trouve :

$$\begin{cases} \Phi(t)^{\mathrm{T}}R \simeq \mu(t, x(t)) \simeq \mu(t, \Phi(t)^{\mathrm{T}}X) \simeq \mu\left(t, \Phi(t)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\tilde{R}P\Phi(t) + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\tilde{H}Q\Phi(t)\right) \\ \Phi(t)^{\mathrm{T}}H \simeq \varphi(t, x(t)) \simeq \varphi(t, \Phi(t)^{\mathrm{T}}X) \simeq \varphi\left(t, \Phi(t)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\tilde{R}P\Phi(t) + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\tilde{H}Q\Phi(t)\right) \end{cases}$$

La substitution du t par les nœuds de Newton Cotes suivante :

$$t_i = \frac{2i-1}{2(n+1)} \quad i = 1, 2, ..., n+1,$$

nous donne finalement le système suivant :

$$\begin{cases} \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}R \simeq \mu(t_i, \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}X) \simeq \mu(t_i, \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}K_1\tilde{R}P\Phi(t_i) + \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}K_2\tilde{H}Q\Phi(t_i)) \\ \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}H \simeq \varphi(t_i, \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}X) \simeq \varphi(t_i, \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}K_1\tilde{R}P\Phi(t_i) + \Phi(t_i)^{\mathrm{T}}K_2\tilde{H}Q\Phi(t_i)) \end{cases} \tag{3.16}$$

Le système (3.16) est un système algébriques non linéaire du dimension $2(n+1)$ *avec* $2(n+1)$ *inconnues. Alors, on applique la méthode itérative de de Newton au système (3.16) pour obtenir des vecteurs inconnus* R *et* H*. Ensuite, on trouve la solution approchée* $x(t)$ *de l'équation (3.11) à partir de la formule d'interpolation suivante :*

$$x(t) \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}X \simeq \Phi(t)^{\mathrm{T}}F + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_1\tilde{R}P\Phi(t) + \Phi(t)^{\mathrm{T}}K_2\tilde{H}Q\Phi(t).$$

3.6 Analyse des erreurs

Dans cette section, on donne le taux de convergence de la méthode numérique utilisée, ce qui nous verrons dans le prochain théorème.

Théorème 3.6.1

Supposons que $x(t) \in C^4([0,\mathrm{T}])$ et $x_n(t)$ la solution approchée en utilisant les HBF :

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n} x(ih)\phi_i(t).$$

On définit l'erreur $e_n(t)$ par :

$$e_n(t) = x(t) - x_n(t), t \in D = [0,\mathrm{T}].$$

Alors, selon la norme usuelle $\|e_n(t)\| = \sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} |e_n(t)|$, nous avons :

$$\|e_n(t)\| = O(h^4).$$

Ce qui nous confirme que l'ordre de convergence est $O(h^4)$.

preuve 3.6.1 *Voir les détails dans [18].*

3.7 Exemples numériques

Dans cette section, on va traiter deux exemples en appliquant la méthode numérique proposée, afin de prouver sa efficacitée. Nous mentionnons que les résultats numériques présentés dans les tableaux et les figures ont été effectués en utilisant le logiciel Matlab.

Exemple 1 : *On considère l'équation [18] :*

$$x(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{900}\int_0^t x(s)(1-x^2(s))ds + \frac{1}{30}\int_0^t (1-x^2(s))dB(s),\ 0 \le t \le 0.55.$$

La solution exacte de cette équation est $x(t) = tanh(\frac{1}{30}B(t) + arctanh(\frac{1}{10}))$, où $x(t)$ est un processus stochastique inconnu et $B(t)$ est un processus de mouvement brownien. On applique la méthode numérique décrite ci-dessus pour obtenir une solution approximative. Ensuite, on calcule l'erreur $e_n(t)$ en prenant $n = 15$, aussi on dessine *la figure qui représente la solution exacte et approchée.*

Exemple 2 : *On considère la deuxième équation [18] :*

$$x(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{800}\int_0^t tanh(x(s))sech^2(x(s))ds + \frac{1}{20}\int_0^t sech(x(s))dB(s),\ 0 \leq t \leq 0.55.$$

La solution exacte est $x(t) = arcsinh(\frac{1}{20}B(t) + sinh(\frac{1}{10}))$, *où* $x(t)$ *est un processus stochastique inconnu et* $B(t)$ *est un processus de mouvement brownien. On traite cette équation de la même manière que pour étudier l'exemple 1.*

Interpretation :

Les tableaux d'erreurs et les graphiques de l'exemple 1 et 2, montrent que la solution approchée converge vers la solution exacte. Ceci confirme l'efficacité de la méthode numérique basée sur HBF pour approcher ce type des équations intégrales stochastiques de Volterra.

t	$e_n(t)$
0.05	1.1995e-06
0.15	7.8413e-05
0.25	2.5113e-04
0.35	1.9629e-04
0.45	1.6691e-04
0.55	2.2927e-04

TABLE 3.1 – Les résultats numériques de l'exemple 1, avec $n = 15$.

t	$e_n(t)$
0.05	2.1217e-05
0.15	5.9221e-05
0.25	1.7371e-03
0.35	2.5274e-02
0.45	4.8804e-02
0.55	4.2837e-02

TABLE 3.2 – Les résultats numériques de l'exemple 2, avec $n = 15$.

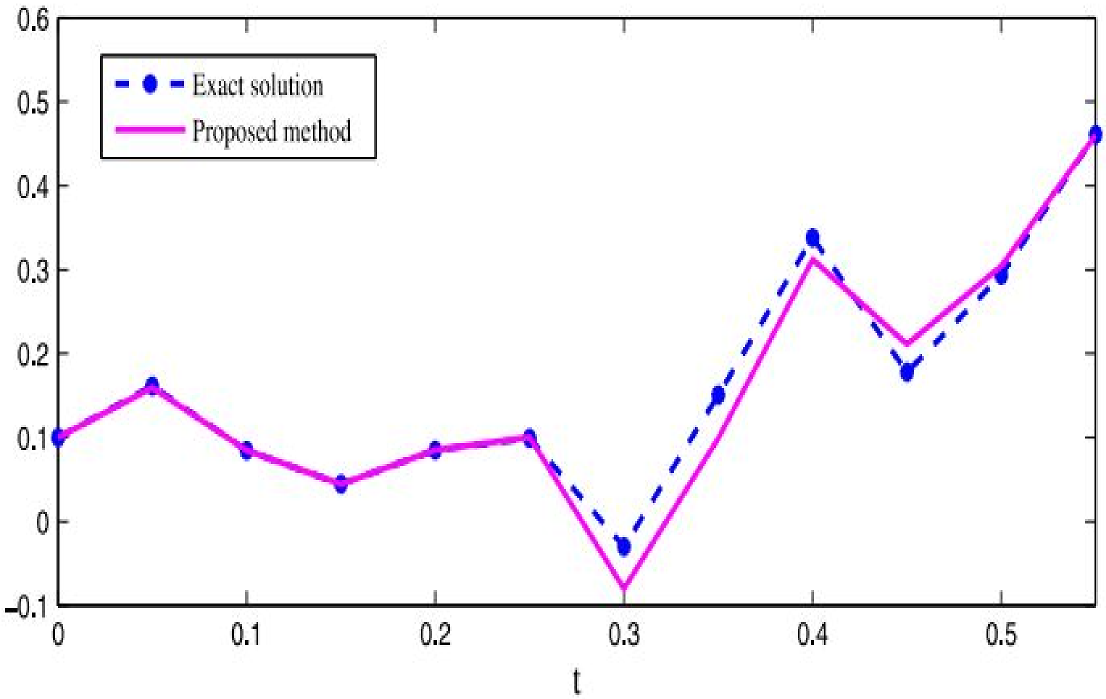

Figure 3.1 – *La solution exacte Vs la solution approchée de l'exemple 1.*

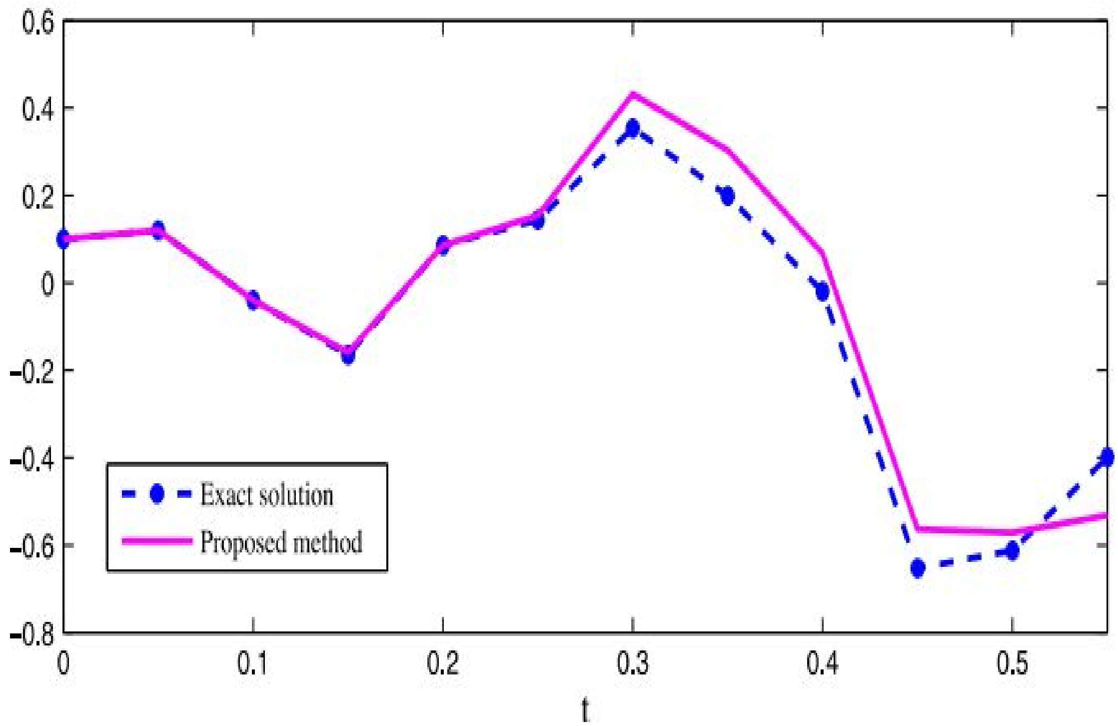

Figure 3.2 – *La solution exacte Vs la solution approchée de l'exemple 2.*

Conclusion

Ce mémoire était dédié á l'étude de l'équation intégrale stochastiques non linéaire de Volterra(EISV).

Pour cela, nous avons commencé notre étude par la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de cette équation en appliquant la technique d'approximation successive de Picard.

Comme, nous avons construit une méthode numérique basée sur HBF afin d'obtenir une solution approximative adaptée á notre équation.

En plus, les résultats numérique de cette méthodes d'approximation developées dans ce mémoire sont trés satisfaisant et montrent sa efficacitée.

Bibliographie

[1] G. Adomian : Nonlinear stochastic systems theory and applications to physics, (Vol. 46). Springer Science, Business Media, 1988.

[2] P. C. Schmidt and C. W. Gardiner : Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983. 442 Seiten, Preis : DM 115, 1985.

[3] T. Mikosch : Elementary stochastic calculus with finance in view, World scientific, 1998.

[4] F. C. Klebaner : Introduction to stochastic calculus with applications, World Scientific Publishing Company, 2012.

[5] Jeanblanc, Monique. "Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY." Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www.maths.univ-evry.fr/pagesperso/jeanblanc (2006).

[6] A. DJILLALI : Sur l'existence et la stabilité de solution d'équations différentielles stochastiques d'ordre fractionnaire, mémoire de master, université d'Adrar. https ://dspace.univ-adrar.edu.dz/jspui/handle/123456789/758.

[7] J. C. Breton : Calcul stochastique. Notes de cours, M2 Mathéma. (2014).

[8] A. Halim : Mouvement Brownien Exité, Mémoire Magistere, Université 20 Aout 55 de skikda, 2009-2010.

[9] G. N. Milstein and M. B. Nevelson : Stochastic stability of differential equations, Second Edition, Moscow, 2011.

[10] ZITOUNI Mahieddine : Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades. 2009. PhD Thesis. Boumerdès, Université M'hamed bougara. Faculté des Sciences.

[11] C. Ndongo : proceessus aléatoires et applications en finance, Mémoire de master, Université du Québec à Trois-Rivières, 2012.

[12] I. Ito : On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of the Volterra type, Kodai Mathematical Journal, 2(2), p. 158-170, 1979.

[13] H. GHANEM : Existence et unicité des solutions d'une équation intégrale stochastique de Volterra, mémoire de master, université MOHAMED KHIDER, BISKRA, http ://archives.univ-biskra.dz/bitstream/123456789/13643/1/hafsa-ghanem.pdf.

[14] I. Iôo : On Linear Stochastic Integral Equations of the Volterra Type, Research Reports on Information Sciences, Series A-47, Tokyo Institute of Technology, 1977.

[15] K. Maleknejad, M. Khodabin and M. Rostami : Numerical solution of stochastic Volterra integral equations by a stochastic operational matrix based on block pulse functions, Mathematical and Computer Modelling, 55(3-4), 791-800, 2012.

[16] M. H. Heydari, M. R. Hooshmandasl, F. M. Ghaini and C. Cattani : A computational method for solving stochastic ItôVolterra integral equations based on stochastic operational matrix for generalized hat basis functions, Journal of Computational Physics, 270, 402-415, 2014.

[17] M. Khodabin, K. Maleknejad, M. Rostami and M. Nouri : Numerical approach for solving stochastic VolterraFredholm integral equations by stochastic operatio-

nal matrix, Computers and Mathematics with Applications, 64(6), 1903-1913, 2012.

[18] F. Mirzaee and H. Afsun : A computational method for solving nonlinear stochastic Volterra integral equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 306, 166-178, 2016.