République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option **: Probabilités et Statistique**

Par :

Ben sacia Amel

Titre :

Principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires

Membres du Comité de Juré :

Dr	**Saouli Mostapha abdelouahab**	UKM, OUARGLA	Président
Dr	**Mansoul Brahim**	UKM, OUARGLA	Encadreur
Dr	**Ben brahim Radhia**	UKM, OUARGLA	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

Au nom du DIEU le clément et le mésériordieu,

*J*e dédie ce modeste travail :

Ma mére , qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternellegratitude. Mon pére, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'´education et le soutient permanent venu de toi.

d'un savoir bien acquis.

À

Mes fréres : **Ysser.**

À

Mes soeurs : ***CHaima, Rababe et aridje***

Et tous le membres de la familles ***BEN SACIA****et* **BASSOU,** *petit et grand.*

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant «**Allah**» le tout

puissant de m'avoir donné le force et la volonté

pour terminer ce travail.

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur **Mansoul brahim**

D'avoir accepté de diriger ce projet et pour la confiance qu'il nous accordés,

ses encouragement, et ses précieux conseils.

Nous voudrions remercier également ???????..., *membre de jury, de nous avoire*

fait l'honneur d'accepter de jures ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous sommes préoccupés par une optimisation dynamique des systèmes aléatoires dont l'état évolue dans l'espace $\mathbb{R}^d$sous l'influence d'un mouvement brownien et d'un contrôle qui prend ses valeurs dans un sous espace de $\mathbb{R}^d$. Ces systèmes évoluent sur un intervalle fini $[0, T]$, avec une condition initiale x_0 et dont la dynamique est décrite par une solution de diffusion d'une équation différentielle stochastique du type Itô. Nous sommes intéressés en particulier dans l'optimisation des contrôles des systèmes par une variable qui comporte deux composantes, le premier absolument continu et le seconde singulier Ce système sera contrôlé par une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dB_t + G(t)d\xi_t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tel que b, σ,et G sont applications déterministes donné, x_0 condition initiale, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité filltré$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$ satisfaisant aux conditions habituelles. (v, η) contrôle admissible où : $v : [0, T] \times\Omega \longrightarrow A_1 \subset \mathbb{R}^d$et $\eta : [0, T] \times\Omega \longrightarrow A_1 \subset \mathbb{R}^d$sont $B([0, T])\otimes\mathcal{F}-mesurable$,$(\mathcal{F}_t)_t-adaptée$ et η est un processus croissant, avec des variations bornées, continue à gauche avec des limites à droite avec $\eta_0 = 0$.

L'objectif du problème de contrôle optimal est de minimiser la fonction de coûts J, sur l'ensemble U de tous les contrôles admissibles tel que :

$$J(u, \xi) = E\left[g(x(T)) + \int_0^T h(t, x(t), u(t))\, dt + \int_0^T k(t)\, d\xi_t\right]$$

Un contrôle (u,ξ) est dite optimal si :

$$J(u,\xi)=\inf_{(v,\eta)\in U} J(v,\eta).$$

Soit un contrôle optimal minimisant les coûts J sur U existe, on cherche les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par ce contrôle sous la forme de principe du maximum stochastique.,le premier résultat du principe de maximum stochastique de controle singulier est obtenu par Cadellinas-Haussmann [1],telle que U est convexe et b,σ sont linéiares en$(x;v)$ et g,h sont convexes en v.mais le cas pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires est étudiés par Seid BahlaliI- Adel Chala [11] .

Dans ce mémoire, qui se compose à deux chapitres :

Premièr chapitre :

Dans ce chapitre, on parle de notions générales du calcul stochastique aussi on représente et détaillé les rappelles de base :

l'espace échantillonnal,tribu,tribu borelienne,tribu engendre par ensemble,exemple,espace probabilisable,définition de mesure,definition de propabilité,espace de probabilte (ou probabilisé),application mesurable,definition d'un varible alétorie, esprance, esprance conditionnelle, filtration, définition d'un processus, filtration naturelle, définition d'un processus adapté, martingle proppréte de martingle, movement Brownien,movement brownien standard, l'integrale d'itô,equation différentielle stoochastique et théorém d'excitence et d'unicité.puis définit le contrôle stohastique et les types des contrôles stochastiques

Deuxième chapitre :

Dans ce chapitre on représente le problème de ce mémoire. Alors le but de ce chapitre est déterminer les conditions nécessaires que doit satisfaire un contrôle optimal et établir un principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coeffcients non linéaires. Avec des hypothèses et des conditions en moins, on ne suppose plus que les coeffcients du coût sont convexes donc un coût non convexe.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre on peut donner quelques concepts de base au notions de calcul stochastique voir [2] , [6] , [8].

1.1 Tribu

Soit Ω est un ensemble quelconque non vide.

Définition 1.1.1 *:Soit $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, on dit que $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$est tribu sur Ω , si vérifée les conditions suivantes :*

i) $\phi \in \mathcal{F}$

ii)$\forall B \in \mathcal{F} : B \in \mathcal{F} \iff B^C \in \mathcal{F}$

iii)$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \in \mathcal{F} \implies \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}.$

Le couple $(\Omega; A)$s'appelle espace mesurable .

Remarque 1.1.1 ** Le tribu engendrée par un ensemble $B \subset \Omega$ noté $\sigma(B)$ la plus petite tribu de parties de Ωcontenant B.*

** On appelle tribu des borélieners de Ω, la tribu engendrée par les ouvert de Ω telle que Ω=$\mathbb{R}$ on le note $B_{\mathbb{R}}$.*

** Si Ωest un ensemble des possibilités d'un experience aléatoire ,$(\Omega;\mathcal{F})$s'appelle espace probabilisable.*

1.2 Mesure

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ un espace mesurable, une mesure sur $(\Omega,\mathcal{F})$ est une application $\mu:\Omega\rightarrow\bar{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty]$ telle que :*

1) $\mu(\phi)=0$.

2) $\forall\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties deux à deux disjointes de Ω alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu\left(A_n\right).$$

On appelle l'espace $(E,\mathcal{F},\mu)$ espace mesure.

Proposition 1.2.1 *Si $\mu(\Omega)=1$,la mesure dit mesure de probabilité on le note P.*

Le triplet $(E,\mathcal{F},P)$ s'appelle espace de probabilité .

1.2.1 fonction mesurable

Définition 1.2.2 *: soit $(\Omega,\mathcal{F})$ et (E,ξ) deux espaces mesurables ,f une fonction de Ω dans E est dit mesurable par rapport à$(\mathcal{F},\xi)$ si l'on a pour tout $A\in\xi$,$f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$telle que*

$f^{-1}(A)=\{W\in\Omega\diagup f(W)\in A\}$.

1.3 Variable aléatoire

Toute application mesurable Xd'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans un espacce (E, ξ) definie une v.a X vérifie la propriété de mesurabilité

$$\forall B \in \xi \ X^{\ -1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Remarque 1.3.1 *La tribu engendrée par une variable aléatoire X c'est la plus petite tribu qui rende X mesurable .*

1.3.1 Espérance d'une variable aléatoire

Voir [7]

Définition 1.3.1 *:L'espérance d'une v.a X est définie par la quantité $\int_\Omega XdP$ que l'on note $E(X)$ ou $E_p(X)$ si l'on désire préciser quelle est la probabilité utilisée sur Ω. Cette quantité peut ne pas exister. Pour calculer cette intégrale, on passe dans "l'espace image" et on obtient, par définition de la loi de probabilité.*

$$\int_\Omega XdP = \int_\mathbb{R} xdP_X(x).$$

– On dit que X est intégrable si $E(|X|)$ est finie.
– Si X admet une densité f, on a $E(X) = \int_\mathbb{R} xf(x)dx$.
– Si X est une v.a discréte alors $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x)$.

1.3.2 Espérance conditionnelle

X est une v.a intégrable $(E(X) < \infty)$.

i)Par rapport à evénement :

Définition 1.3.2 *:Soient* $B \in \mathcal{F}$*et* $A \in \mathcal{F}$*, on a*

$$E(X \diagup B) = \frac{P(X \upharpoonleft_B)}{P(B)} \quad si P(B) \neq 0$$

ii) Par rapport à une tribu :

Définition 1.3.3 *: soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé,* G *une tribu de* $\mathcal{F}$*.et* X*une v.a.r.definie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est integrable ,il existe une unique variable aléatoire appelée espérance conditionelle de* X *sachant* G *,notée* $E(X \diagup G)$ *telle que :*

1. $E(X \diagup G)$ est $G-$mesurable .
2. pour tout $B \in G, \int_B E(X \diagup G) dP = \int_B X(w) dP$

iii) Par rapport à une variable aléatoire

Définition 1.3.4 *:On définie l'espérance conditionelle d'une variable aléatoire* X *(intégrable) par rapport à* Y *étant comme l'espérance conditionelle de* X *par rapport à la tribu engendré*σ (Y)*. On la note* $E(X\ /Y)$ *telle que :*

1. C'est une variable $\sigma\ (Y)$ mesurable.
2. Pour tout $B \in \sigma\ (Y)$; $\int_B E(X\ /Y\ ) dP = \int_B X dP.$

1.3.3 Propriétés de l'espérance conditionnelle

1. La linéarité $E(aX + bY \diagup Z) = aE(X \diagup Z) + bE(Y \diagup Z)$, telle que a et b réels .
2. Croissance $Y \geq X$ $(p.s)$ alors pour tout variable aléatoire Z on a $E(Y \diagup Z) \geq E(X \diagup Z)$ $(p.s)$.
3. Y est indépendante de X ,alors $E(Y \diagup X) = E(Y\ )$ $(p.s)$.
4. Pour tout fonction ϕ bornnée $E(\phi(X) Y \diagup X) = \phi(X) E(Y \diagup X)$.

5. Pour tout vecteur aléatoire (X, Y) on a $E(E(Y \diagup X)) = E(Y)$.

6. Pour toute fonction ϕbornée $E(\phi(X)Y) = E(\phi(X)E(Y \diagup X))$.

7. Y est $G - mesurable$: $E(YX \diagup G) = YE(X \diagup G)$ si $X \perp Y$: on a $E(Y \diagup X) = Y$.

1.3.4 Filtration

Voir[5] , [2] , [3]

Définition 1.3.5 *:Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ c'est-à-dire $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{F}$telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

1.3.5 Processus aléatoire

Définition 1.3.6 *Un proessus stochastique (ou fonction aléatioire) est une famille de variables aléatoires$(X_t, t \in [0, \infty])$ définies sur le même espace de probailité*

Processus adapté

Définition 1.3.7 *:Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté (par rappor à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si $X_t$est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t .*

Filtration canonique

Définition 1.3.8 *:Soit un processus stochastique X ,on associe sa filtration naturelle(canonique) $\mathcal{F}_t^X$ c'est -à- dire la famille croissant de tribus $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.*

1.3.6 Martingale(sur-martingale ,sous-martingale)

Définition 1.3.9 *:$\{X_n\}_{n\geq 0}$ une suite de varible aléatoire.réelle on dit que martingale(resp sur-martingale ,sous-martingale) si et seullement si :*

1. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t - adapté$ pour tout $t \geq 0$.

2. $\{X_t\}_{t\geq 0}$est virifie $E(|X_n|) < +\infty$ (existe).
3. $\begin{cases} E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n \text{ équivatent (martingale)} \\ E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n \text{ équivatent (sur-martingale)} \\ E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq \ X_n \text{ équivatent (sous-martingale)} \end{cases}$

Propriété 1.3.1 *X_n est $\mathcal{F}_n -$ martingale alors :*

** $E(X_n) = (X_{n+1}) = E(E(X_n/\mathcal{F}_n))$.*[3]

** $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale ,pour tout $E(M_n) = E(M_0)$.*

1.4 Mouvement Brownien

Définition 1.4.1 *:Un processus stochastique (B_t)à valeurs réelles est appelée mouvement Brownien , s'il vérifier les propriéies suivantes :*

1. *$P(B_0 = 0) = 1$ (élément certain).*
2. *$\forall s \leq t$ accroissement $(B_t - B_s)$ suit la loi normale centrée de variance $(t - s)$.*
3. *si $0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n$ les accroissements $B_{t_1}, (B_{t_2} - B_{t_1}), ..., (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ sont indépendants $(cov((B_{t_2} - B_{t_1}), (B_{t_1} - B_{t_0})) = 0)$.*
4. *En déhors d'un ensemble de probabilité nul, les trajectoire $t \to B_t(w)$ sont continue.*[3]

1.5 l'integrale d'Itô

Voir [9], [5]

Définition 1.5.1 *:L'intégralle stochastique, est une intégrale proposée avec des processus stochastiques sous la forme suivantes :*

$$\int_0^t X_s dB_s;$$

où $\{X_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Propriété 1.5.1 *:L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :*

1. Linéairité $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t a(X_s + Y_s)dB_s = a\int_0^t X_s dB_s + a\int_0^t Y_s dB_s,$$

2. Additivité : Pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t X(s)dB_s = \int_s^u X(s)dB_s + \int_u^t X(s)dB_s.$$

3. Si $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] dB_s < \infty$, alors pour tout $t \leq T$.

$$E\left[\int_0^T X(s)dB_s\right] = 0.$$

4. Isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(s)dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T \left(\{X(s)\}\right)^2 ds. \tag{1.1}$$

5. Propriété du martingale$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB_s \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s)ds$.

1.5.1 Processus d'Itô :

Définition 1.5.2 *:Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace filtré, et B_t une mouvement Brownien, on appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t \leq T \qquad X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

avec :

i) X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

ii) $(\alpha_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ deux processus adaptés à $\mathcal{F}_t$.

iii) $\displaystyle\int_0^t |\alpha_s|\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}-$p.s et $\displaystyle\int_0^t |\sigma_s|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}-$p.s.

Le coefficient α_s s'appelle dérive (drift) de processus X et σ_s s'appelle le coefficient de diffusion (volatilité).

On appelle le processus $t \rightarrow x_0 + \int_0^t \alpha_s ds$ est la partie à variation finie de X, et le processus $t \rightarrow \int_0^t \sigma_s dB_s$ le partie orthogonal de X.

1.5.2 Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô, s'écrit sous la forme :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

Alors

$$dX_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Théorème 1.5.1 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors :*

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Alors

$$df(X_t) = f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} f''(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.5.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X_s \rangle,$$

telle que

$$d\langle X_s \rangle = \langle dX_s, dX_s \rangle = \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s \rangle = \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.5.3 *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô, et f une fonction dans $\mathbb{R}$ de classe*

C^2 *alors*

$$\begin{aligned} f\left(X_1(t), X_2(t)\right) &= f\left(X_1(0), X_2(0)\right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(X_1(s), X_2(s)\right) dX_1(s) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) dX_2(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_1\right\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_2\right\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_1, X_2\right\rangle_s . \end{aligned}$$

Théorème 1.5.4 ***(Intégration par partie)*** *Soit X et Y deux processus d'Itô telle que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s \quad et\ Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_s^{'} ds + \int_0^t \beta_s^{'} dB_s.$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \left\langle X, Y\right\rangle_t ,$$

avec

$$\left\langle X, Y\right\rangle_t = \int_0^t \beta_s \beta_s^{'} ds.$$

De plus la formule d'intégration par partie s'écrit $d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\left\langle X, Y\right\rangle_t$.

1.5.3 Equation différentielle stochastique

Voir [3] , [4]

Définition 1.5.3 *:Une équation différentielle stochastique (E.D.S) est une équation de la forme*

$$dx_t = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dB_t, t \geq 0, \tag{1.2}$$

$f, g : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$, f, g sont deux fonctions déterministes mesurables, avec $f$est appelée le coefficient de dérive et g est appelée le coefficient de diffusion, soit $x_0 : \Omega \to \mathbb{R}$,x_0 est une v.a carrée intégrable et x_0 indépendant du M.B .

Sois $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$ la filtration engendrée par le M.B $(B_t)_{t\geq 0}$, et par le variable x_0 une solution de (2.1) est un processus continue $\mathcal{F}_t-$adapté tel que les intégrables ($\int_0^t f(s, x_s)ds$ et

$\int_0^t g(s,x_s)dBs)$ou un sens et l'égalité

$$x_t = \varepsilon + \int_0^t f(s,x_s)ds + \int_0^t g(s,x_s)dB_s, \tag{1.3}$$

telle que $x_0 = \varepsilon$.

Remarque 1.5.1 *:Il existe deux types de solutions d' E.D.S, la solution fort et la solutions faible .*[3]

1.5.4 Théoréme d'existence et d'unicité

On suppose que :

H1) Les fonction $f$et g :[0,T]$*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues.

H2) Condition de lipschitz globale :il existe une constante Ktelle que pour tout $t \in [0,T]$et $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mid f(t,x) - f(t,y) \mid + \mid g(t,x) - g(t,y) \mid \leq k \mid x - y \mid$$

H3) condition de croissance :il existe une constante c telle que pour tout $t \in [0,T]$et $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mid f(t,x) - f(t,y) \mid \leq c(1+ \mid x \mid)$$

H4) La condition initiale $x_0$est indépendante $(w_t, t \geq 0)$et est de carré integrale.

Alors : l' EDS (1.3) admet une solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$verifie $E(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^2)<\infty$

Cette solution est unique dans le sens que si $(X_{t\in[0,T]})$ et $(Y_{t\in[0,T]})$sont deux solutions de L'EDS (1.3) alors pour tout $t \in [0,T] P(X_t = Y_t) = 1$.

1.6 Contrôle stochastique

Définition 1.6.1 *un processus est un processus stochastique qui contrôle un système dynamique aléatoire qu'on peut modéliser par un 'équation différentielle stochastique, intervient* *dans différents domaines de la vie courante comme l'économie, la biologie, les sciences humaines et sociales,...*

Un contrôle est un processus aléatoire u_t *adapté par-rapport à une filtration et prend ses valeurs dans un espace de contrôle* $U \subset \mathbb{R}^n$*.*

Le contrôle stochastique caractérisé par :

i) Etat du système

Etat du systéme dynamique se caractérise le controle stochastique à tout instant dans la mesure ou le temps peut être discrèt ou continues L'intervalle de variation du temps peut être fini ou infini .L'état du systéme metr en représntation les variables quantitatives qui constituant une description exhaustive du systéme. Au moment t ,l'état de ce systéme sera noté l'appliccation $t \longrightarrow X(t)$ décrit l'evolution du systéme,cette évolution fourni par un modéle probabiliste.

ii) Contôle :

La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôleque nous modélisons comme un processus u_t dont la valeurs peut trés décidée à tout instantt t, en fonction des informations disponibles à cet instant .

iii) Critère de coût :

L'objectif précis est de minimiser (ou maximiser) une fonctionnelle J s'appelle fonction de coût sur l'ensemble des contrôles admissibles. Pour décrire un probléme de contrôles stochastique ,il est trés important de préciser que l'information soit disponible à tout instant.

.

1.7 Types de contrôle stochastique

1.7.1 ContrôIe admissible

Définition 1.7.1 *: Le contrôle admissible est tout processus $v_t(t \in [0,T]\ )$ mesurable$(\mathcal{F}_t)$ adapté à valeur dans un borélien B de $\mathbb{R}^d$.*

L'ensemble de tous les contrôIe admissible notons par U_{ad} :$U_{ad} = \{v : [0,T] \times \Omega \to B$,tel que v est mesurable et $\mathcal{F}_t - adapté\}$.

1.7.2 Contrôle optimal

Définition 1.7.2 *:Le contrôle optimal minimiser (ou maximiser) la fonction de coût J sur I'ensemble des contrôIes admissibles U_{ad}., C'est à dire un contrôle admissible est apelle optimal si*

$$J(v) = inf_{u \in U} J(u)$$

1.7.3 Contrôle presque optimal

Définition 1.7.3 *Soit $0 < \epsilon$; le contrôle presque optimal ou ϵ-optirnal est note par v^ϵtel que :*

$$J(v^\epsilon) \leq J(v) + \epsilon, \forall U_{ad.}$$

1.7.4 Contrôle feed-back

Définition 1.7.4 *: Soit $v$un contrôle $\mathcal{F}_t$-adapté, et soit $\{\mathcal{F}_t^X\}$la filtration naturelle . On apelle feed-back contrôIe si :v_t est aussi adapté par rapport la filtration $\{\mathcal{F}_t^X\}$. On dit aussi qu'un contrôIe $v$est feed-back si et seulement si dépend de X.*

1.7.5 Contrôle relaxé

Soit disant que V est l'ensemble des mesures de Radon sur $[0,T] \times A$ dont la projection sur $[0,T]$ qui coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la tribu borélienne la plus petite triu telle que l'application $q \to \int f\ (s,a)q(ds,da)$soit mesurable pour toutes fonctions f mesurable, bornée et continues en a.

Définition 1.7.5 *: Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire* $q(w,dt,da)$ *à valeur dans* V *telle que pour chaque* $t, \rceil_{[0,t]}\ q$ *est* $\mathcal{F}_t$*- mesurable.*($\mathcal{F}_t = \sigma(B(s)0 \leq s \leq t)$)*. Tout contrôle relaxé peut être intégré en*

$$q(w,dt,da) = dtq(w,t,da)$$

Où $q(t,da)$ *est un processus progressivement mesurable à valeurs dans I'espace des mesures de probabilités.*

1.7.6 ContrôIe singulier

soit A_1 un sous-ensemble fermé convexes de $\mathbb{R}$ et $A_2 = [0,+\infty[$. soient U_{ad1} et U_{ad2} deux classes des processus mesurables définie comme suit :

$$U_{ad1} = \{u(.) : [s,T] \times \Omega \to A_1; \mathcal{F}_t - adaptés\},$$
$$U_{ad2} = \{\eta(.) : [s,T] \times \Omega \to A_2; \mathcal{F}_t - adaptés\}$$

Un contrôle admissible est paire (u,η) de$A_1 \times A\ _2$à valeur mesurable,$\mathcal{F}_t$ _adaptés, telque :

1. η est à variation bornée non décroissante continue à gauche, limite à droite et$\eta_0 = 0$.
2. $E[sup_{t\in[0,T]} \mid u_t \mid^2 + \mid \eta_T \mid^2] < \infty$é

On note $U_{ad1} \times U_{ad2}$ l'ensemble de tous les contrôle admissibles. Notons que depuis $d\eta_t$ peut être singulier par rapport à la mesure de lebesgue dt ,nous appellons η.ta partie singulier de la contrôle et le processus u sa partie absolument continue.

Chapitre 2

Principe du maximum de contrôle optimal

Dans ce chapitre nous allons établir un principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires.voir $[11]$, $[12]$

2.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ un éspace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t)_{t\in\ [0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimentionnel et on suppose que : $\mathcal{F}_{t\in[0,T]} = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$; sa filtration naturelle.

soit $T > 0, A_1$un fermé convexe de $\mathbb{R}^n$ et A_2= $([0,\infty))^m \subset \mathbb{R}^m$:

Soient u et ξ deux processus $(\mathcal{F}_t)$ adaptés, $(B([0,T]); \mathcal{F}) - mesurable$ et ξ est un processus croissant, continue à gauche avec limite à droite (caglad) avec $\xi_0 = 0$

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)\, dt + \sigma(t, x_t, u_t)\, dB + G(t)\, d\xi_t, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendante de W telle que :$E\left[|x_0|^m\right] < \infty;$ pour tout $m > 1$.

Avec $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n; \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_1 \rightarrow M_{n\times d}(\mathbb{R})$et $G : [0,T] \rightarrow M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.1 *:On note par U l'ensemble des processus mesurables adeptés $(u,\xi) \in U_1 \times U_2$ telle que :*

$$E\int_0^T |v_t|^2\, dt + E\,|\eta_T|^2 < \infty$$

Le couple (u,ξ) est appelé contrôle admissible et la solution $x^{(u,\xi)}$ est appellée la trajectoire du système (3.1) contrôlée par (u,ξ).

On note par U_1 et U_2 les ensembles suivants : $U_1 = \{u : [0,T] \times \Omega \mapsto A_1\}$et $U_2 = \{\xi : [0,t] \times \Omega \mapsto A_2\}$

On considère maintenant la fonction coût suivante :

$$J(u,\xi) = E\left[g(x_T) + \int_0^t h(t,x_t,u_t)\, dt + \int_0^t k(t)\, d\xi_t\right]$$

avec : h :$[0,T] \times \mathbb{R}^d \times U_1 \mapsto \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}; k : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonction mesurables.

soient les hypothéses suivantes :

1. b, σ, g et h sont dérivables en leurs variables et à dérivées continues et bornées.
2. G et K sont continues.
3. $E\left|\int_0^t G(s)\, d\eta\right|^2 < \infty$.

Le problème du contrôle optiimal consiste a minimiser la fonctionnelle J sur l'ensemble U du contrôle admissible c'est a dire trouver un contrôle (u,ξ)tel

que $J\ (u,\xi) \leq J(v,\eta)$pour tout (v,η) : C'est à dire :

$$J(u,\xi) = \inf_{(v,\eta)\in U} J(v,\eta).$$

Remarque 2.1.1 *D'aprés les hypothéses précédentes on a :*

***)** L'équation (3.1) admet une solution forte unique donnée par :

$$x_t = x_{0+} \int_0^t b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \int_0^t \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t + \int_0^t G\left(t\right) d\xi_t$$

De plus cette solution est continue et vérfie pour tout $m > 0$: $E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t|^m\right] < \infty$.

****)** La fonctionnelle$J$ est bien défini pour chaque contrôle admissible.

2.2 Résultats préliminaires

Soit $x^{(u;\xi)}$la trajectoire optimal, c'est à dire la solution de l'équation d'état associée à $(u;\xi)$:

On considére la perturbation suivante :

$$(u_\theta; \xi_\theta) = (u;\xi) + \theta(v;\eta) = (u + \theta v; \xi + \theta\eta); \forall\, (v, \eta) \in u. \tag{3.2}$$

Soit x_0 la trajectoire associée au contrôle $(u_0;\xi_0) \in U$ est donnée par :

$$x_0(t) = x_0 + \int_0^t b\left(s, x_\theta(s), u_\theta(s)\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_\theta(s), u_\theta(s)\right) dB_s + \int_0^t G\left(s\right) d\xi_s^0.$$

2.2.1 Estimatin des solutions

Proposition 2.2.1 *: Soient x et x_θ les solutions de* (3.1) *correspondant aux contrôles* $(u;\xi)$ *et* $(u_\theta;\xi_\theta)$*,et quand $\theta \longrightarrow 0$ alors on a l'estimation suivante :*

$$E\left(|x_\theta(t) - x(t)|^2\right) \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

Preuve. : on a

$$\xi_\theta(s) = \xi(s) + \theta\eta \Rightarrow \xi_\theta(s) - \xi(s) = \theta\eta$$

alors :

$$d(\xi_\theta(s) - \xi(s)) = \theta d\eta.$$

Et

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_0^t b(s,x(s),u(s))ds + \int_0^t \sigma(s,x(s),u(s))dB_s + \int_0^t G(s)d\xi(s) \\
x_\theta(t) &= x_0 + \int_0^t b(s,x_\theta(s),u_\theta(s))ds + \int_0^t \sigma(s,x_\theta(s),u_\theta(s))dB_s + \int_0^t G(s)d\xi_\theta(s)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
x_\theta(t) - x(t) = &\left[\int_0^t b(s,x_\theta(s),u_\theta(s))ds + \int_0^t \sigma(s,x_\theta(s),u_\theta(s))dB_s + \int_0^t G(s)d\xi_\theta(s)\right] \\
&- \left[\int_0^t b(s,x(s),u(s))ds + \int_0^t \sigma(s,x(s),u(s))dB_s + \int_0^t G(s)d\xi_\theta(s)\right]
\end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\int_0^t b(s,x_\theta(s),u(s))ds + \int_0^t \sigma(s,x_\theta(s),u(s))dB_s$, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_\theta(t) - x(t) = &\int_0^t \left[b(s,x_\theta(s),u_\theta(s)) - b(s,x_\theta(s),u(s))\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[b(s,x_\theta(s),u(s)) - b(s,x(s),u(s))\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(s,x_\theta(s),u_\theta(s)) - \sigma(s,x_\theta(s),u(s))\right] dB_s \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(s,x_\theta(s),u(s)) - \sigma(s,x(s),u(s))\right] dB_s + \theta \int_0^t G(s)d\eta(s)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité $(a+b+c+d+e)^2 \leq 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 5d^2 + 5e^2$, et en passantt aux espérance on trouve

$$\begin{aligned}
E\left|x_\theta(t) - x(t)\right|^2 \leq\; &5E\left|\int_0^t \left[b(s,x_\theta(s),u_\theta(s)) - b(s,x_\theta(s),u(s))\right] ds\right|^2 \\
&+ 5E\left|\int_0^t \left[b(s,x_\theta(s),u(s)) - b(s,x(s),u(s))\right] ds\right|^2 \\
&+ 5E\left|\int_0^t \left[\sigma(s,x_\theta(s),u_\theta(s)) - \sigma(s,x_\theta(s),u(s))\right] dB_s\right|^2 \\
&+ 5E\left|\int_0^t \left[\sigma(s,x_\theta(s),u(s)) - \sigma(s,x(s),u(s))\right] dB_s\right|^2 + 5\theta^2 E\left|\int_0^t G(s)d\eta\right|^2
\end{aligned}$$

D'après l'esométrie, on a :

$$\begin{aligned}
E\left|x_\theta(t)-x(t)\right|^2 \leq\; & 5\int_0^t E\left|b(s,x_\theta(s),u_\theta(s))-b(s,x_\theta(s),u(s))\right|^2 ds \\
& +5\int_0^t E\left|b(s,x_\theta(s),u(s))-b(s,x(s),u(s))\right|^2 ds \\
& +5\int_0^t E\left|\sigma(s,x_\theta(s),u_\theta(s))-\sigma(s,x_\theta(s),u(s))\right|^2 ds \\
& +5\int_0^t E\left|\sigma(s,x_\theta(s),u(s))-\sigma(s,x(s),u(s))\right|^2 ds+5\theta^2 E\left|\int_0^t G(s)d\eta\right|^2
\end{aligned}$$

En applique la condition de lipschitzienne pour b et σ on obtient

$$\begin{aligned}
E\left|x_\theta(t)-x(t)\right|^2 &\leq 10k\int_0^t E\left|x_\theta(s)-x_\theta(s)\right|^2 ds+10k\int_0^t E\left|u_\theta(s)-u(s)\right|^2 ds+5\theta^2 E\left|\int_0^t G(s)d\eta\right|^2 \\
&\leq 10k\int_0^t E\left|x_\theta(s)-x_\theta(s)\right|^2 ds+10k\theta^2\int_0^t E\left|v\right|^2 ds+5\theta^2 E\left|\int_0^t G(s)d\eta\right|^2
\end{aligned}$$

On pose

$$K_\theta^t=10k\theta^2\int_0^t E\left|v\right|^2 ds+5\theta^2 E\left|\int_0^t G(s)d\eta\right|^2$$

puisque $E\left|v\right|^2<\infty$et $E\left|\int_0^t G\left(s\right)d\eta\right|^2<\infty$,on a $K_\theta^t\leq k\theta^2$ ce qui implique

$$E\left|x_\theta(t)-x(t)\right|^2 \leq 10k\int_0^t E\left|x_\theta(s)-x_\theta(s)\right|^2 ds+k\theta^2$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on conclut.

$$\begin{aligned}
E\left|x_\theta(t)-x(t)\right|^2 &\leq k\theta^2\int_0^t e^{10ks}ds \\
&\leq k\theta^2\frac{1}{10k}\left(e^{10kT}-1\right)\underset{\theta\to 0}{\to}0
\end{aligned}$$

■

2.2.2 Linéarisation de l'équation d'état :

On considére x et x_θ les trajéctoires associées réspectivement aux contrôles (u,ξ)et(u_θ,ξ_θ) on pose :

$$Z_t = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(x_\theta(s) - x(s)). \tag{3.4}$$

Proposition 2.2.2 *: Z vérifie l'équation linéaire suivante :*

$$\begin{cases} dZ(t) = [b_x(t,x(t),u(t))Z(t) - b_u(t,x(t),u(t))v_t]\,dt + \\ [\sigma_x(t,x(t),u(t))Z(t) - \sigma_u(t,x(t),u(t))v_t]dB_s + G(t)d\eta_{t,} \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Preuve. *:En utilise le dévellopement de Taylor avec réste intégrale au point (x,u) et à l'ordre 1 des fonctions $b(s,x_\theta(s),u_\theta(s))$ et $\sigma(s,x_\theta(s),u_\theta(s))$,on a :*

$$\begin{aligned} b\left(s,x_\theta\left(s\right),u_\theta\left(s\right)\right) - b\left(s,x\left(s\right),u\left(s\right)\right) = & \int_0^1 b_x\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u\left(s\right)+\lambda(u_\theta\left(s\right)-u\left(s\right))\right] \\ & \left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right)d\lambda \\ & + \int_0^1 b_v\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_0\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u\left(s\right)+\lambda\left(u_\theta\left(s\right)-u\left(s\right)\right)\right] \\ & \left(u_\theta\left(s\right)-u\left(s\right)\right)d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\left(s,x_\theta\left(s\right),u_\theta\left(s\right)\right) - \sigma\left(s,x\left(s\right),u\left(s\right)\right) = & \int_0^1 \sigma_x\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u\left(s\right)+\lambda(u_\theta\left(s\right)-u\left(s\right))\right] \\ & \left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right)d\lambda \\ & + \int_0^1 d\lambda\sigma_v\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_0\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u\left(s\right)+\lambda\left(u_\theta\left(s\right)-u\left(s\right)\right)\right] \\ & \left(u_\theta\left(s\right)-u\left(s\right)\right)d\lambda \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
x^{\theta}-x=&\int_0^t\int_0^1 b_x\left[s,x(s)+\lambda\left(x_\theta(s)-x(s),u+\lambda\left(u^\theta(s)-u(s)\right)\right)\right](x_\theta(s)-x(s))\,d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_v\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u(s)+\lambda(u_\theta(s)-u(s))\right](x_\theta(s)-x(s))\,d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_x\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u(s)+\lambda(u_\theta(s)-u(s))\right](x_\theta(s)-x(s))\,d\lambda dB_s\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_v\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u(s)+\lambda(u_\theta(s)-u(s))\right](u_\theta(s)-u(s))\,d\lambda dB_s+\theta\int_0^t G
\end{aligned}$$

puisque : $u_\theta(t)-u(t)=\theta v$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\left(x^{\theta}-x\right)=&\int_0^t\int_0^1 b_x\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u+\lambda(\theta v)\right](x_\theta(s)-x(s))\,d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_v\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u(s)+\lambda(\theta v)\right]\theta v d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_x\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u(s)+\lambda(\theta v)+u(s))\right](x_\theta(s)-x(s))\,d\lambda dB_s\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_v\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u(s)+\lambda(\theta v)\right]\theta v d\lambda dB_s+\theta\int_0^t G(s)\,d\eta
\end{aligned}$$

En divisant par θ, *on otient :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}(x_\theta(s)-x(s))=&\int_0^t\int_0^1 b_x\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u+\lambda(\theta v)\right]\frac{1}{\theta}(x_\theta(s)-x(s))\,d\lambda ds\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_v\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u(s)+\lambda(\theta v)\right]v d\lambda ds+\int_0^t G(s)\,d\eta\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_x\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u+\lambda(\theta v)\right]\frac{1}{\theta}(x_\theta(s)-x(s))\,d\lambda dB_s\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_v\left[s,x(s)+\lambda(x_\theta(s)-x(s)),u+\lambda(\theta v)\right]v d\lambda dB_s
\end{aligned}$$

En passant à la limite :

$$\begin{aligned}
Z_t &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right)\\
&= \lim_{\theta\to 0}\left[\int_0^t\int_0^1 b_x\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\frac{1}{\theta}\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right)d\lambda ds\right.\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_v\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u\left(s\right)+\lambda\left(\theta v\right)\right]vd\lambda ds+\int_0^t G\left(s\right)d\eta\\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_x\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]\frac{1}{\theta}\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right)d\lambda dB_s\\
&\left.+\int_0^t\int_0^1 \sigma_v\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u\left(s\right)+\lambda\left(\theta v\right)\right]vd\lambda dB_s\right]
\end{aligned}$$

On a $\int_0^1 d\lambda=1$ *, les fonctions* $b_x,b_v,\sigma_x,\sigma_v$*sont continues et*

$$\lim_{\theta\to 0}\left[s,x\left(s\right)+\lambda\left(x_\theta\left(s\right)-x\left(s\right)\right),u+\lambda\left(\theta v\right)\right]=\left[s,x\left(s\right),u\right]$$

alors

$$\begin{aligned}
Z_t =& \int_0^t b_x\left[s,x\left(s\right),u\right]Z_s ds+\int_0^t b_v\left[s,x\left(s\right),u\right]vds+\int_0^t G\left(s\right)d\eta\\
&+\int_0^t \sigma_x\left[s,x\left(s\right),u\right]Z_s dB_s+\int_0^t \sigma_v\left[s,x\left(s\right),u\right]vdB_s
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
dZ(t) =& \left[b_x(t,x(t),u(t))Z(t)-b_v(t,x(t),u(t))v_t\right]dt+\left[\sigma_x(t,x(t),u(t))Z(t)-\sigma_v(t,x(t),u(t))v_t\right]dB_s\\
&+G(t)d\eta_{t,}
\end{aligned}$$

■

2.3 Principe du maximun

Comme (u, ξ) est optimal, alors on a :

$$J\left(u_{\theta}, \xi_{\theta}\right)-J(u, \xi) \geq 0$$

donc :

$$0 \leq E\left[g\left(x_{\theta}(T)\right)-g(x(T))\right]+E \int_{0}^{T}\left[h\left(t, x_{\theta}(t), u_{\theta}(t)\right)-h(t, x(t), u(t))\right] d t+E \int_{0}^{t} k(t)\, d\left(\xi_{\theta}(t)-\xi(t)\right) \tag{3.6}$$

Proposition 2.3.1 *:Si on pose*

$$\widetilde{x}_{\theta}(t)=\frac{1}{\theta}\left(x_{\theta}(t)-x(t)\right)-Z(t), \tag{3.7}$$

on obtient

$$E \mid \widetilde{x}_{\theta}(t) \mid^{2} \rightarrow_{\theta \rightarrow 0} 0 \tag{3.8}$$

Preuve. :En passant aux différentielles dans (3.7), on otient :

$$d \widetilde{x}_{\theta}=\frac{1}{\theta}\left(d x_{\theta}(t)-d x(t)\right)-d Z(t).$$

En remplaçant dx_{θ}, dx,et dZ,par leurs valeurs , on a :

$$\begin{aligned}
d \widetilde{x}_{\theta}= & \frac{1}{\theta}\left[x_{0}+b\left(t, x_{\theta}(t), u_{\theta}(t)\right) d t+\sigma\left(t, x_{\theta}(t), u_{\theta}(t)\right) d B_{t}+G(t)\, d \xi_{\theta}(t)\right] \\
& -\frac{1}{\theta}\left[x_{0}+b(t, x(t), u(t)) d t+\sigma(t, x(t), u(t)) d B_{t}+G(t)\, d \xi\right] \\
& -\left[b_{x}(t, x(t), u(t)) Z_{t}+b_{u}(t, x(t), u(t)) v_{t}\right] d t \\
& -\left[\sigma_{x}(t, x(t), u(t)) Z_{t}+\sigma_{u}(t, x(t), u(t)) v\right] d B_{t}-G(t)\, d \eta_{t.}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$d\widetilde{x}_\theta = \frac{1}{\theta}\left[b\left(t, x_\theta(t), u_\theta(t)\right) - b\left(t, x(t), u(t)\right)\right]dt + \frac{1}{\theta}\left[\sigma\left(t, x_\theta(t), u_\theta(t)\right) - \sigma\left(t, x(t), u(t)\right)\right]dBt. \tag{3.9}$$

$$-\left[b_x\left(t, x(t), u(t)\right)Z(t) + b_u\left(t, x(t), u(t)\right)v_t\right]dt - \left[\sigma_x\left(t, x(t), u(t)\right)Z(t) + \sigma_u\left(t, x(t), u(t)\right)v_t\right]dB_t$$

Par le développement de Taylor avec réste intégral aux points (x, u) et l'ordre 0 des fonctions $b\left(t, x_\theta, u_\theta\right)$et $\sigma\left(t, x_\theta, u_\theta\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
b\left(t, x_\theta(t), u_\theta(t)\right) - b\left(t, x(t), u(t)\right) = & \int_0^1 b_x\left[t, x(t) + \lambda\left(x_\theta(t) - x(t)\right), u(t) + \lambda\left(u_\theta(t) - u(t)\right)\right] \\
& \left(x_\theta(t) - x(t)\right)d\lambda \\
& + \int_0^1 b_v\left[t, x(t) + \lambda\left(x_\theta(t) - x(t)\right), u(t) + \lambda\left(u_\theta(t) - u(t)\right)\right] \\
& \left(u_\theta(t) - u(t)\right)d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma\left(t, x_\theta(t), u_\theta(t)\right) - \sigma\left(t, x(t), u(t)\right) = & \int_0^1 d\lambda\sigma_x\left[t, x(t) + \lambda\left(x_\theta(t) - x(t)\right), u(t) + \lambda\left(u_\theta(t) - u(t)\right)\right] \\
& \left(x_\theta(t) - x(t)\right) \\
& + \int_0^1 d\lambda\sigma_v\left[t, x(t) + \lambda\left(x_\theta(t) - x(t)\right), u(t) + \lambda\left(u_\theta(t) - u(t)\right)\right] \\
& \left(u_\theta(t) - u(t)\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant ces deux quantités dans (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
d\widetilde{x}_\theta = & \frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 b_x\left[t, x(t) + \lambda\left(x_\theta(t) - x(t)\right), u(t) + \lambda\left(u_\theta(t) - u(t)\right)\right]\left(x_\theta(t) - x(t)\right)d\lambda\right]dt \\
& + \frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 b_u\left[t, x(t) + \lambda\left(x_\theta(t) - x(t)\right), u(t) + \lambda\left(u_\theta(t) - u(t)\right)\right]\theta v d\lambda\right]dt
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 \sigma_x\left[t, x(t)+\lambda\left(x_\theta(t)-x(t)\right), u(t)+\lambda\left(u_\theta(t)-u(t)\right)\right]\left(x_\theta(t)-x(t)\right) d\lambda\right] dB_t$$
$$+\frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 \sigma_u\left[t, x(t)+\lambda\left(x_\theta(t)-x(t)\right), u(t)+\lambda\left(u_\theta(t)-u(t)\right)\right] \theta v d\lambda\right] dB_t$$
$$-\left[b_x\left(t, x(t), u(t)\right) Z(t)+b_u\left(t, x(t), u(t)\right) v_t\right] dt-\left[\sigma_x\left(t, x(t), u(t)\right) Z_t+\sigma_u\left(t, x(t), u(t)\right) v_t\right] dB_{t.}$$

En remplaçant $(x_\theta - x) = \theta\left(\widetilde{x}_\theta + Z\right)$et $(u_\theta - u) = \theta v$, on a

$$\begin{aligned}
d\widetilde{x}_\theta = & \left[\int_0^1 b_x\left[t, x(t)+\lambda\left(x_\theta(t)-x(t)\right), u(t)+\lambda\theta v\right]\left(\widetilde{x}_\theta(t)+Z_t\right) d\lambda\right] dt \\
& +\left[\int_0^1 b_u\left[t, x(t)+\lambda\left(x_\theta(t)-x(t)\right), u(t)+\lambda\theta v\right] v d\lambda\right] dt \\
& +\left[\int_0^1 \sigma_x\left[t, x(t)+\lambda\left(x_\theta(t)-x(t)\right), u(t)+\lambda\theta v\right]\left(\widetilde{x}_\theta(t)+Z_t\right) d\lambda\right] dB_t \\
& +\left[\int_0^1 \sigma_u\left[t, x(t)+\lambda\left(x_\theta(t)-x(t)\right), u(t)+\lambda\theta v\right] v d\lambda\right] dB_t \\
& -\left[b_x\left(t, x(t), u(t)\right) Z(t)+b_u\left(t, x(t), u(t)\right) v_t\right] dt-\left[\sigma_x\left(t, x(t), u(t)\right) Z_t+\sigma_u\left(t, x(t), u(t)\right) v_t\right] dB_{t.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_\theta(t) = & \int_0^t \int_0^1 b_x\left[s, x(s)+\lambda\left(x_\theta(s)-x(s)\right), u(s)+\lambda\theta v\right]\left(\widetilde{x}_\theta(s)+Z_s\right) d\lambda ds \\
& +\int_0^t \int_0^1 b_u\left[s, x(s)+\lambda\left(x_\theta(s)-x(s)\right), u(s)+\lambda\theta v\right] v_s d\lambda ds \\
& +\int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left[s, x(s)+\lambda\left(x_\theta(s)-x(s)\right), u(s)+\lambda\theta v\right]\left(\widetilde{x}_\theta(s)+Z_s\right) d\lambda dB_s \\
& +\int_0^t \int_0^1 \sigma_u\left[s, x(s)+\lambda\left(x_\theta(s)-x(s)\right), u(s)+\lambda\theta v\right] v_s d\lambda dB_s \\
& -\int_0^t\left[b_x\left(s, x(s), u(s)\right) Z(s)+b_u\left(s, x(s), u(s)\right) v_s\right] ds \\
& -\int_0^t\left[\sigma_x\left(s, x(s), u(s)\right) Z_s+\sigma_u\left(s, x(s), u(s)\right) v_s\right] dB_{s.}
\end{aligned}$$

Par simplification on a

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_\theta(t) = & \int_0^t \int_0^1 b_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] \widetilde{x}_\theta(s)\, d\lambda ds \\ & + \int_0^t \int_0^1 b_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] Z_s d\lambda ds \\ & + \int_0^t \int_0^1 b_u\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] v_s d\lambda ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& + \int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] \widetilde{x}_\theta(s)\, d\lambda dB_s \\ & + \int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] Z_s d\lambda dB_s \\ & + \int_0^t \int_0^1 \sigma_u\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] v_s d\lambda dB_s \\ & - \int_0^t \left[b_x\left(s, x(s), u(s)\right) Z(s) + b_u\left(s, x(s), u(s)\right) v_s\right] ds \\ & - \int_0^t \left[\sigma_x\left(s, x(s), u(s)\right) Z_s + \sigma_u\left(s, x(s), u(s)\right) v_s\right] dB_{s.}\end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}\Lambda^\theta = & \int_0^t \int_0^1 b_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v - b_x\left(s, x(s), u(s)\right)\right] Z_s d\lambda ds \\ & + \int_0^t \int_0^1 b_u\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v - b_u\left(s, x(s), u(s)\right)\right] v_s d\lambda ds \\ & + \int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v - \sigma_x\left(s, x(s), u(s)\right)\right] Z_s d\lambda dB_s \\ & + \int_0^t \int_0^1 \sigma_u\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v - \sigma_u\left(s, x(s), u(s)\right)\right] v_s d\lambda dB_s\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_\theta(t) = & \int_0^t \int_0^1 b_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] \widetilde{x}_\theta(s)\, d\lambda ds \\ & + \int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left[s, x(s) + \lambda\left(x_\theta(s) - x(s)\right), u(s) + \lambda\theta v\right] \widetilde{x}_\theta(s)\, d\lambda dB_s + \Lambda^\theta\end{aligned}$$

En passant aux espérance carées on trouve

$$\begin{aligned}E\left|\widetilde{x}_\theta(t)\right|^2 \leq\ & 3\int_0^t E\left|\int_0^1 d\lambda b_x\left[s, x(s)+\lambda\left(x_\theta(s)-x(s)\right), u(s)+\lambda\theta v\right]\widetilde{x}_\theta(s)\right|^2 ds \\ & +3\int_0^t E\left|\int_0^1 d\lambda\sigma_x\left[s, x(s)+\lambda\left(x_\theta(s)-x(s)\right), u(s)+\lambda\theta v\right]\widetilde{x}_\theta(s)\right|^2 ds \\ & +3E\left|\Lambda^\theta\right|^2\end{aligned}$$

Telle que $\lim_{\theta\to 0} E\left|\Lambda^\theta\right|^2 = 0$ (parce que $b_x$et σ_x sont continues et en passant à la limite quand θ tends vers 0)

Puisque $b_x$et $\sigma_x$sont bornées,alors (3.9) devient :

$$E\left|\widetilde{x}_\theta(t)\right|^2 \leq 6M\int_0^t E\left|\widetilde{x}_\theta(t)\right|^2 dt+3E\left|\Lambda^\theta\right|^2$$

En appliquant l'inégalité de Gronawall :

$$E\left|x_\theta(t)\right|^2 \leq 3E\left|\Lambda^\theta\right|^2\int_0^t e^{6Ms}ds \leq 3E\left|\Lambda^\theta\right|^2\left(\frac{1}{6M}e^{6MT}-1\right)\to 0.$$

■

Pour obtenir le principe du maximum, il suffit de calculer les quantités

$$E\left[g\left(x_\theta(T)\right)-g\left(x(T)\right)\right]$$

$$E\int_0^T\left[h\left(t, x_\theta(t)\, u_\theta(t)\right)-h\left(t, x_\theta(t)\, u_\theta(t)\right)\right]dt.$$

D'ou la proposition suivante :

Proposition 2.3.2 *on a :*

$$\frac{1}{\theta}E\left[g\left(x_\theta(T)\right)-g\left(x(T)\right)\right]\underset{\theta\longrightarrow 0}{\rightarrow} E\left[g_x\left(x(T)\right).Z_T\right], \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\theta}E\int_0^T \left[h(t,x_\theta(t),u_\theta(t))-h(t,x(t),u(t))\right]dt \underset{\theta\longrightarrow 0}{\rightarrow} E\int_0^T \left[h_x(t,x(t),u(t))Z+h_u(t,x(t),u(t))v\right]dt. \tag{3.11}$$

Preuve. (3.10).

En faisant le dévellopement de Taylor avec reste intégrale au point x et à l'ordre 1 de la fonction $g(x_\theta(T))$, on a :

$$g(x_\theta(T))-g(x(T))=\int_0^1 g_x\left[x(T)+\lambda(x_\theta(T))-(x(T))\right](x_\theta(T))-(x(T))\,d\lambda.$$

Comme

$$\widetilde{x}_\theta(t)=\frac{1}{\theta}(x_\theta(t)-(x(t)))-Z(t),$$

alors

$$(x_\theta(t))-(x(t))=\theta\widetilde{x}_\theta(t)+\theta Z(t)$$

Ce qui nous donne :

$$g(x_\theta(T))-g(x(T))=\int_0^1 g_x\left[x(T)+\lambda\theta(\widetilde{x}_\theta(T))+Z(T)\right]\theta(\widetilde{x}_\theta(T)+Z(T))\,d\lambda$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}E\left[g(x_\theta(T))-g(x(T))\right]&=E\left(\int_0^1 g_x\left[x(T)+\lambda\theta(\widetilde{x}_\theta(T))+Z(T)\right]\widetilde{x}_\theta(T)\,d\lambda\right)\\&\quad+E\left(\int_0^1 g_x\left[x(T)+\lambda\theta(\widetilde{x}_\theta(T))+Z(T)\right](Z(T))\,d\lambda\right).\end{aligned}$$

puisque $g_x$on a pour θ tendre vers 0,on obtient

$$\frac{1}{\theta}E\left[g(x_\theta(T))-g(x(T))\right]\longrightarrow_{\theta\longrightarrow 0}E\left[g_x(x(T)).Z_T\right],$$

2) On va Montrons (3.11)

en appliquant le dévellopement de Taylor avec reste intégrale au point (x,u) àl'ordre 1de la fonction $h\left(t,x_\theta\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)$ on a

$$\begin{aligned} h\left(t,x_\theta\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right) &= \int_0^1 h_x\left[t,x+\lambda(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)),u+\lambda\left(u_\theta\left(t\right)-u\left(t\right)\right)\right] \\ &\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right)d\lambda \\ &+\int_0^1 h_x\left[t,x+\lambda(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)),u+\lambda\left(u_\theta\left(t\right)-u\left(t\right)\right)\right] \\ &\left(u_\theta\left(t\right)-u\left(t\right)\right)d\lambda \\ &= \int_0^1 h_x\left[t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right),u+\lambda\theta v\right]\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right)d\lambda \\ &+\int_0^1 h_x\left[t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right),u+\lambda\theta v\right]\theta v d\lambda \end{aligned}$$

En passant à l'intégrale puis aux ésperances on obtient :

$$\begin{aligned} E\int_0^T \left[h\left(t,x_\theta\left(t\right),u\left(t\right)\right)-h\left(t,x_\theta\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right]dt] &= E\int_0^T [\int_0^1 h_x[t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)\right)-x\left(t\right)),u+\lambda\theta v] \\ &\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right)d\lambda \\ &+\int_0^1 h_x\left[t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right),u+\lambda\theta v\right]\theta v d\lambda]]dt \end{aligned}$$

On divise sur θ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}E\int_0^T \left[h\left(t,x_\theta\left(t\right),u_\theta\left(t\right)\right)-h\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right] &= \frac{1}{\theta}E\int_0^T [\int_0^1 h_x[t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)\right)-x\left(t\right)),u+\lambda\theta v] \\ &\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right)d\lambda+ \\ &\int_0^1 h_x[t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right),u+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right)]\theta v d\lambda]dt \\ &= E\int_0^T [\int_0^1 h_x[t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)\right)-x\left(t\right)),u+\lambda\theta v] \\ &\frac{\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right)}{\theta}d\lambda+ \\ &\int_0^1 h_x[(t,x+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right),u+\lambda\left(x_\theta\left(t\right)-x\left(t\right)\right)]v d\lambda]dt \end{aligned}$$

En passant à la limite quand θ tends vers 0 on a :

$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}E\int_0^T\left[h\left(t,x_\theta\left(t\right),u\left(t\right)\right)-h\left(t,x_\theta\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right]dt\\&=E\int_0^T\left[h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)Z(t)-h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)v\right]dt\end{aligned}$$

■

En utilisant la proposition précedente dans (3.6),on obtient :

$$E\left[g_x\left(x_T\right).Z_T\right]+E\int_0^T\left[h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)Z(t)-h_u\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)v\right]dt+E\int_0^T k\left(t\right)d\eta\geq 0. \tag{2.1}$$

pour obtenir le principe du maximum,il suffit de calculer $E\left[g_x\left(x_T\right).Z_T\right]$ et

$$E\int_0^T\left[h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)Z+h_u\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)v\right]dt$$

On considére l'équation linéaire associée à(3.5) :

$$\begin{cases}d\Phi\left(t\right)=b_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\Phi\left(t\right)dt+\sigma_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\Phi\left(t\right)dB_t\\ \Phi\left(0\right)=I_d.\end{cases} \tag{3.12}$$

Cette équation étant linéaire à coefficients bornés alors elle admet une solution forte unique. De plus la solution Φ est inversible et son invers Ψ vérifie l'équation suivante

$$\begin{cases}d\Psi\left(t\right)=\left[-b_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\Psi\left(t\right)+\Psi\left(t\right)\sigma_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\sigma_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right]dt\\ -\sigma_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\Psi\left(t\right)dB_t\\ \Psi\left(0\right)=I_d.\end{cases} \tag{3.13}$$

Preuve. Cette équation étant linéaire à coefficient bornés alors elle admet une solution forte unique. De plue, la solution Φ est inversible, on pose $\Phi^{-1}=\Psi$. Alors

$$\Phi\Psi=Id\Longrightarrow d\left(\Phi\Psi\right)=0$$

On suppose que :

$$d\Psi(t) = a(t)dt + b(t)dB_t$$

Maintenant, on recherche $a(t)$ et $b(t)$ par l'intégrale par partie d'Itô on a :

$$d(\Phi\Psi) = \Phi(t)d\Psi(t) + \Psi(t)d\Phi(t) + d\Phi(t)d\Psi(t) \tag{3.14}$$

Alors :

$$\begin{aligned} d(\Phi\Psi) &= \Phi(t)\left[a(t)dt + b(t)dB_t\right] + \Psi(t)\left[b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dB_t\right] \\ &+ \left[a(t)dt + b(t)dB_t\right]\left[b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dB_t\right] \\ &= \left[\Phi(t)a(t) + \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t) + b(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\right]dt \\ &+ \left[\Phi(t)b(t) + \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\right]dB_t. \end{aligned}$$

Comme $d(\Phi\Psi) = 0$, alors on a :

$$\Phi(t)a(t) + \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t) + b(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t) = 0 \tag{3.15}$$

$$\Phi(t)b(t) + \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t) = 0. \tag{3.16}$$

D'après l'équation (3.16) on trouve :

$$\Phi(t)b(t) = -\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t).$$

On multipliée par Φ^{-1} :

$$\Phi(t)b(t)\Phi^{-1}(t) = -\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\Phi^{-1}(t).$$

D'où :

$$b(t) = -\Psi(t)\sigma_x(t,x(t)). \tag{3.17}$$

On remplace l'équation (3.17) dans l'équation (3.15) on trouve :

$$\Phi(t)a(t)+\Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)+\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\left[-\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\right]=0.$$

$$\Phi(t)a(t)=-\Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)+\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\left[\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\right].$$

On a $\Phi(t)\Psi(t)=Id$, alors :

$$\Phi(t)a(t)=-\Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)+\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t)).$$

On multipliée par $\Phi(t)^{-1}$ et on a $\Phi(t)^{-1}=\Psi(t)$

$$\begin{gathered}\Phi(t)a(t)\Phi(t)^{-1}=-\Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)\Phi(t)^{-1}+\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)^{-1}\\ a(t)=\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))\Psi(t)-\Psi(t)b_x(t,x(t),u(t)).\end{gathered}$$

Donc :

$$\begin{cases} d\Psi(t)=\left[\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))-\Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\right]dt-\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))dB_t\\ \Psi(0)=Id.\end{cases}$$

■

En suivant la méthode de la résolvante des équation différentielles ordinaires linéaires on pose $\alpha(t)=\psi(t)Z(t)$ et par la formule de Itô on a :

$$d\alpha(t)=[\psi(t)b_u(t)v-\sigma_x(t)\psi(t)\sigma_v(t)v]dt+\psi(t)\sigma_u(t)vdB_t+\psi(t)G(t)d\eta_t.$$

on pose :

$$\begin{aligned} Y&=\phi(T)g_x(x(T))+\int_0^T\phi(s)h_x(s,x(s),u(s))ds,\\ \beta_t&=E[Y/\mathcal{F}_t]-\int_0^T\Phi(s)h_x(s,x(s),u(s))ds,\end{aligned}$$

On remarque que $E[g_x(x(T)Z(T))] = E[\phi(T)g_x(x(T)\alpha(T))] = E[\alpha(T)\beta(T)]$

Preuve. Donc pour caluler $E[g_x(x(T)Z(T))]$,il suffit de caluler $E[\alpha(T)\beta(T)]$. ■

Puisque Y est de carré integrabble, et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$, et $E[Y/\mathcal{F}_t]$ est une martingale de carré intégable, alors par la décomposition de Itô on peut réecrire $E[Y/\mathcal{F}_t]$ sous la forme.

$$E[Y/\mathcal{F}_t] = E[Y] + \int_0^T Q(s)dB_s,$$

ou $Q(s)$ est un processus tel que $E\int_0^t \mid Q(s) \mid^2 ds < \infty$.

Ceci nous permet d'écrie β_t,sous la forme

$$\beta_t = E[Y] + \int_0^T Q(s)dB_s - \int_0^T \Phi(s)h_x(s, x(s), u(s))ds$$

ce qui nous donne :

$$d\beta_t = -\Phi(s)h_x(t, x(t), u(t))dt + Q(s)dB_t$$

En appliquant la formule d'Itô à $\alpha_t\beta_t$on obtient :

$$\begin{aligned}
d(\alpha_t\beta_t) &= \alpha_t d\beta_t + \beta_t d\alpha_t + d < \alpha, \beta >_t \\
&= [\Psi(t)Z(t)][-\Phi(s)h_x(t, x(t), u(t))dt + Q(t)dB_t] \\
&+ \beta_t [[\Psi(t)b_v(t)v - \sigma_x(t)\Psi(t)\sigma_v(t)v]dt + \Psi(t)\sigma_v(t)vdB_t + \Psi(t)G(t)d\eta_t] \\
&+ Q(t)\Psi(t)\sigma_v(t)vdt
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\alpha_T\beta_T &= -\int_0^T \Psi(t)\Phi(s)h_x(t, x(t), u(t))Z(t)dt + \int_0^T \Psi(t)Q(t)Z(t)dB_t \\
&= \int_0^T [\Psi^*(t)\beta_t (b_v(t)v - \sigma_x(t)\sigma_v(t)v)] dt + \int_0^T \Psi^*(t)\beta_t\sigma_v(t)vdB_t \\
&+ \int_0^T \Psi^*(t)\beta_t G(t)d\eta_t + \int_0^T Q(t)\Psi(t)\sigma_v(t)vdt
\end{aligned}$$

On pose :

$$p_t = \Psi^*(t)\beta_t \tag{3.18}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_T\beta_T = &-\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))Z(t)dt + \int_0^T \Psi(t)Q(t)Z(t)dB_t \\ &+\int_0^T \left[p_t\left(b_v(t)v - \sigma_x(t)\sigma_v(t)v\right)\right]dt + \int_0^T p_t\sigma_v(t)vdB_t \\ &+\int_0^T p_tG(t)d\eta_t + \int_0^T Q(t)\Psi(t)\sigma_v(t)vdt\end{aligned}$$

En passant aux espérance

$$\begin{aligned}E\left[\alpha_T\beta_T\right] = &-E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))Z(t)dt\right] + E\left[\int_0^T \left[p_t\left(b_v(t)v - \sigma_x(t)\sigma_v(t)v\right)\right]dt\right] \\ &+E\left[\int_0^T p_tG(t)d\eta_t\right] + E\left[\int_0^T Q(t)\Psi(t)\sigma_v(t)vdt\right]\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité (2.1), on a :

$$0 \leq E[g_x(x(T)Z(T))] + E\int_0^T \left[h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)Z_t - h_u\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)v\right]dt + E\int_0^T k\left(t\right)d\eta$$

Puisque $E[\alpha_T\beta_T] = E[g_x(x(T)Z(T))]$, on obtient :

$$\begin{aligned}0 \leq\ & E\int_0^T [p_tb_v(t)v - p_t\sigma_x(t)\sigma_v(t)v + Q(t)\Psi(t)\sigma_v(t)v]dt - E\int_0^T h_x(t)Z_tdt + E\int_0^T p_tG(t)d\eta_t \\ &+E\int_0^T h_x\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)Z_tdt - h_u\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)vdt + E\int_0^T k\left(t\right)d\eta\end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq E\int_0^T [p_t b_v(t)v - p_t\sigma_x(t)\sigma_v(t)v + Q(t)\Psi(t)\sigma_v(t)v]dt + E\int_0^T p_t G(t)d\eta_t \tag{3.19}$$
$$- E\int_0^T h_u\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right)\right) vdt + E\int_0^T k\left(t\right) d\eta$$

On pose : $K_t = Q(t)\Psi(t) - p_x\sigma_x(t)$ on a

$$0 \leq E\int_0^T [p_t b_u(t)v - K\sigma_u(t)v - h_u\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right)\right) v]dt + E\int_0^T (p_t G(t) + k\left(t\right))d\eta_t \tag{3.20}$$

2.3.1 Equation adjointe et processus adjoint :

En remplaçant $\Psi^*(t)$ et β_t par leurs valeurs dans (3.18), on obtient la formule du processus adjoint p et qui est donnée par

$$p(t) = E[\Psi^*(t)\Phi^*(T)g_x(x(T))/\mathcal{F}_t] + \Psi^*(t)\int_t^T \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds \tag{3.21}$$

I on applique la formule d'Ito pour le processus adjoint $p(t) = \Psi^*(t)\beta_t$ on obtient l'équation adjoint ce qui nous donne :

$$\begin{cases} -dp(t) = \left[b_x^*(t, x(t), u(t))p(t) + \sigma_x^*(t, x(t))K(t) + h_x(t, x(t), u(t))\right] dt - K(t)dB_t \\ p(T) = g_x(x(T)). \end{cases} \tag{3.22}$$

où K est donnée par :

$$K(t) = \Psi^*(t)Q(t) - \sigma_x^*(t, x(t))p(t), \tag{3.23}$$

Et G vérifie l'équation suivante :

$$\int_0^t Q(s)dB_s = E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds/\mathcal{F}_t\right] \tag{3.24}$$
$$- E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds\right]$$

Preuve. :En appliquant la formule d'Itô pour trouver l'équation adjointe vérifiée par $p(t)$: on a $p(t) = \Psi^*(t)\beta(t)$, d'après d'Itô, on a :

$$\begin{aligned} dp(t) &= d(\Psi^*(t)\beta(t)) \\ &= \Psi^*(t)d\beta(t) + \beta(t)d\Psi^*(t) + d\beta(t)d\Psi^*(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Donc

$$\begin{aligned} dp(t) = \beta(t) &\left[\left[\sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t) - b_x^*(t,x(t),u(t))\Psi^*(t)\right]dt - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)dB_t\right] \\ &+ \Psi^*(t)\left[-\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt + Q(t)dB_t\right] \\ &+ \left[\left[\sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t) - b_x^*(t,x(t),u(t))\Psi^*(t)\right]dt - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)dB_t\right] \\ &\left[-\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt + Q(t)dB_t\right]. \end{aligned}$$

En trouve :

$$\begin{aligned} dp(t) &= \sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)\beta(t)dt - b_x^*(t,x(t),u(t))\Psi^*(t)\beta(t)dt - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)\beta(t)dB_t \\ &- \Psi^*(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt + \Psi^*(t)Q(t)dB_t - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)Q(t)dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} dp(t) = &\left(-b_x^*(t,x(t)u(t))\Psi^*(t)\beta(t) + \sigma_x^*(t,x(t))\left[\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)\beta(t) - \Psi^*(t)Q(t)\right]\right. \\ &\left.-h_x(t,x(t),u(t))\right)dt - \left[\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)\beta(t) - \Psi^*(t)Q(t)\right]dB_t \end{aligned}$$

En remplace $p(t) = \Psi^*(t)\beta(t)$ et on pose

$$K(t) = \Psi^*(t)Q(t) - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)\beta(t)$$

on résulte :

$$-dp(t) = \left(b_x^*(t,x(t)u(t))p(t) + \sigma_x^*(t,x(t))K[t] + h_x(t,x(t),u(t))\right)dt - K(t)\,dB_t$$

On vérifier que $p(T) = g_x(x(T))$, on a $p(T) = \Psi^*(T)\beta(T)$ et on a ;

$$\beta(T) = E(Y) - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds + \int_0^t Q(s)dB_s$$

alors :

$$p(T) = \Psi^*(T)\left[E(Y) - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds + \int_0^t Q(s)dB_s\right]$$

On a $\int_0^t Q(s)dB_s = E(Y/\mathcal{F}_t) - E(Y)$, alors :

$$p(T) = \Psi^*(T)\left[E(Y/\mathcal{F}_t) - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds\right]$$

Et on a

$$Y = \Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds$$

$$\begin{aligned}
p(T) &= \Psi^*(T)\left[E\left(\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds - \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s, x(s), u(s))ds/\mathcal{F}_t\right)\right] \\
&= \Psi^*(T)\left[E\left(\Phi^*(T)g_x(x(T))/\mathcal{F}_t\right)\right] \\
&= E\left[\Psi^*(T)\Phi^*(T)g_x(x(T))/\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[g_x(x(T))/\mathcal{F}_t\right] \\
&= g_x(x(T))
\end{aligned}$$

Alors le résultat suivant :

$$\begin{cases} -dp(t) = \left[\sigma_x^*(t, x(t))K(t) + b_x^*(t, x(t), u(t))p(t) + h_x(t, x(t), u(t))\right]dt + K(t)dB_t \\ p(T) = g_x(x(T)). \end{cases}$$

■

2.3.2 Principe du maximum :

On définit le hamiltonien par :

$$H(t, p_t, K, x, u) = -h(t, x, u) + p.b(t, x, u) + K.\sigma(t, x, u).$$

L'inégalité(3.16) nous permet d'énnoncer le théorème du principe du maximum sous sa forme intégrale et qui est donnée par.

Théorème 2.3.1 *: Soit* (u, ξ) *est un contrôle optimal minimisant le coût* J *sur l'ensemble des contrôles admissibles, alors il existe un processus adapté* P *; donné par* (2.15) *tel que pour tout* $(w, \xi) \in U$ *,on a :*

$$E[[H_u(t, p_tK_t, x_t, u_t).(u_t - w_t)]dt + \int_0^{T\prime} \{k(t) + G^*(t).p_t\}.d(\eta - \xi)_t] \geq 0 \tag{3.26}$$

Preuve. :On pose $v = u - w$ et $\pi = \xi - \eta$, ceci nous donne :

$$0 \leq E\int_0^{T\prime} [p_tb_u(t) + K_t\sigma_u(t)] - h_u(t, x, u)(u - w)dt + E\int_0^{T\prime} (p_tG + k(t))d(\eta - \xi).$$

En remplaçant le hamiltonien par sa valeur, on obtient le résultat. ■

Le résultat principal de ce chapitre est le principe du maximum pour des diffusions singulières est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.3.2 *Supposons que* $V = \mathbb{R}^n$*.soit* (u, ξ) *est un contrôle optimal minimisant le coût* J *sur l'ensemble des contrôles admissibles. Alors on a :*

$$H(t, p(t), K(t), x(t), w(t)) \leq H(t, p(t), K(t), x(t), u(t)) pouttout\ w \in U; dt - pp; IP - ps \tag{3.27}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, Nous étudions un problème de contrôle stochastique d'un système non linéaire dans lequel le contrôle variable a deux composantes, le premier étant absolument continue et le second singulier. Nous supposons une ensemble des controles admissibles convexe, un fonction de coût convexe et nous permettons à la composante absolument continue du contrôle d'entrer à la fois les coefficients de dérive et de diffusion. Le principe du maximum est établi en utilisant principalement une perturbation convexe sur un contrôle optimal donné.

Bibliographie

[1] **A. Cadenillas, U.G. Haussmann**, The stochastic maximum principle for a singular control problem. Stochastics and Stoch. Reports., Vol. 49 (1994), pp. 211-237

[2] **Claude Dellacherie ,Paul-André Meyer et Bernard Maisonneuve".**probabiliés et potentiel ",1992,Hermann,éditeurs des sciences et des arts ,293 rue lecourbe,75015 paris

[3] **Damien Lamberton et Bernard Lapeyre** " Introdution au calcul stochastique appliqué à la finane " .Ellipses édition Marketing S.A.,2012 ,32 rue Bargue 75740 Paris ede15

[4] **Jean-Christophe Breton.** "Calcul stochastique ", M2 Math ematiques. Universit e deRenne1,Septembre-Decembre
2014

[5] **M.Benaimet et G.Allaire "**optimisation et control stochastique appliqués à la finance Mathematics " Subject Classification (2000) : 93E20, 91B28, 49L20, 49L25, 60H30.211-237

[6] **M.Métivier et R.Fortet ;M.M** professeur à l'Université de Rennes"**,**Notions fondamentales de la théorie des probabilités "

[7] **Monique Jeablanc.** "Cours de calcul stochastique " Septembre 2006

[8] **Marc Troyanov**-EPLF-Octobre 2005," Mesures et Intégration " ,30 avril 2008

[9] **Monique Jeanblanc,Thomas Sinom**." ELEMENT DE CALCUL STOCHASTIQUE.IRBID ", Septembre 2005

[10] **S.Bahlali, A. Chala**," A general optimality conditions for stochastic control problems of jump diffusions " Appl. Math Optim. Vol. 65, N 1 (2012), pp. 15-29.

(2005)

[11] **S.Bahlali, A. Chala**, " The stochastic maximum principle in optimal control of singular diffusions with non linear coefficients " ,Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 13, No. 1, pp. 1–10 (2005) Received for ROSE September 12, 2004

[12] **Chala,Adel** . (2013). " Contribution à L'étude Des Controles optimales stochastique".université de biskra.–+

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Lemme 2.3.1 ***Lemme de Gronwall :***

ϕune fonction positive bornée sur $[0;T]$.Soient $T>0$, on suppose qu'il existe des constantes $a>0, b>0$ telles que pour tout $t\in[0;T]$, on a :

$$\phi(t)\leq a+b\int_0^t\phi(s)ds$$

Alors

$$\forall t\in[0;T]\,,\quad \phi(t)\leq a\int_0^t\exp\left(bs\right)ds$$

Théorème 2.3.3 ***(Dévelopment de Taylor-Young)*** *Soient $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction $n-1$-fois dérivable, $(n\in\mathbb{N})$ et $a,x\in I$. Alors*

$$f(x)=f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right)+\frac{f"\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^2+...+\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n+o\left(\left|x-a\right|^n\right).$$

Théorème 2.3.4 ***(Dévelopment de Taylor avec reste intégral)*** *Soient $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $(n\in\mathbb{N})$ et $a,x\in I$. Alors*

$$f(x)=f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right)+\frac{f"\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^2+...+\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n+\int_a^x\frac{f^{(n+1)}\left(a\right)}{(n+1)!}\left(x-t\right)^{n+1}dt.$$

Théorème 2.3.5 *Si $f(x;y)$ est continue en tout point d'un rectangle $R=\{|x-x_0|<a\ \ et\ \ |y-y_0|<b\}$,*

bornée sur $\mathbb{R}$ *alors l'ED* $y' = f(x, y)$ *a une solution sur* $\mathbb{R}$ *avec condition initiale* $y(x_0) = y_0$. *Cette solution est définie pour tout* $|x - x_0| < \alpha$ *telleque* $\alpha = \min(a, b/k)$ *avec* $|f(x; y)| < k$ *.Si de plus* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues et bornées sur* $\mathbb{R}$, *alors la solution est unique.*

Théorème 2.3.6 *La régle de multiplication* X *et* Y *deux procesuuse d'to :*

$$Z = X.Y$$

$$dZ_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d < X, Y >_t$$

$\left(\Omega, \mathcal{F}, , \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \mathbb{P}\right)$	un espace de probabilité filtré
$p.s$	presque surement
σ^*	Transposée de la matrice σ.
$\mathbb{P} - p.s$	presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$dt \times d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0; T]$ avec la mesure $d\mathbb{P}$
tq	Telle que
$i.e$	C'est à dire

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudiés le principe du maximale en contrôle stochastique pour des diffusion singulières à coefficients non linéaires, nous sommes intéressés aux conditions d'optimalité. Ce type trouve directement des applications en économie, gestion et mathématique financière.

الملخص

في هذا العمل ، درسنا الحد الأقصى لمبدأ التحكم العشوائي للانتشار الفردي ذي المعاملات غير الخطية ، فنحن نهتم بالشروط المثلى. يجد هذا النوع تطبيقات مباشرة في علم الاقتصاد والتسيير والرياضيات المالية.

الكلمات المفتاحية : صيغة إيتو – العملية العشوائية – معادلة تفاضلية عشوائية – المبدأ الأقصى – التحكم الأمثل.

Abstract

In this work, we have studied the maximum principle of stochastic control for single diffusion to non-linear coefficients, we are interested in optimal conditions. This type directly finds applications in economics, management and financial mathematics.

Key-word : *Itô 's formula, stochastic process*, *stochastic* differential equation, maximum principle, optimal control