République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH-OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option **: Probabilités et statistique**

Par :

Mahdjoubi Ahlam

Titre :

L'équation différentielle stochastique rétrograde dans le cas ou le générateur est continu

Membres du Comité d'Juré :

Dr. Saouli Mostapha Abdelouahab	UKM, OUARGLA	Encadreur
Dr. Mansoul Brahim	UKM, OUARGLA	Président
Dr. Benbrahim Radhia	UKM, OUARGLA	Examinateur

Juin 2021

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ kASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités et Statistique**

Par :

Mahdjoubi Ahlam

Titre :

L'équation différentielle stochastique rétrograde dans le cas où le générateur est continu

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Mansoul Brahim**	UKMO	**President**
Dr.	**Saouli Mostapha abdelouahab**	UKMO	**Encadreur**
Dr.	**Benbrahim Radhia**	UKMO	**Examinateur**

Juin 2021

REMERCIEMENTS

Louange à allah, cela suffit , et les prières soit sur le bien-aimé, l'élu sa famulle et ceaux qui le suivront :

Mon voyage universitaire a pris fin aprés un longe chemin.

Et me voici termine le fruit de l'effort et du séccés grâce à dieu tout puissant dédié à mon estimé professeur

"Saouli Mostapha abd elouahab"

J'ai tous les éloges et l'appréciation pour le nombre de gouttes de pluie et les couleurs de la fleur, et l'odeur du parfum pour précieux, efforts et votre valeur.

Je m'étends également respectueusement aux professeurs qui discutent.......ils apprécieront mon travail.

De mème les parents généreux qui m'ont aidé et soutenu, et leurs bienheureuses supplications ont eu le plus grand impact sur la conduite du navire de recherche jusqu'à ce qu'il s'ancre dans cette image.

A chaque département de mathématique et à tous les lots de 2021.Université Kasdi Merbah-Ouargla.

A tous je leur dédie cette humble oeuvre, demandant à allah tout puissant de nous en faire profiter et de nous assurer son succés.

AHLAM

Dédicace

Louange à allah seigneur des terres et des cieux les plus élevés, louange à celui qui a envoyé le prophète Mouhamed.

Ici, je cueille la plus belle rose du plus beau verger, grâce au tout-puissant, grâce à Rahman. En cette belle journée avec un beau nom,j'offre mes remerciments à celui qui m'a apporté son amour dans le monde et c'était la meilleure arme, à celui qui monde une fleur sauvage, à celui qui m'a appris vivre libre et fier :

"Mon père.couronne de ma tète".

Au sourire que la brèche de mon existence a passé à celui dont allah a attibué le nom au ciel et a dit le ciel est sous ses peids :

"Ma mère, ma bien-aimée".

Si je vous remercie, alors mes remerciements ne vous combleront pas et si je vous ai donné le monde, mon don ne vous suffira pas, et je continuerai tout au lond de la vie de l'amoure que je vous donne.

Acceptez vous tètes et vos mains, en espérant que le créateur de lacréation prolongera votre vie pendant des années.

A ceux qui partagent le votre de ma mère et tendresse de mon père Votre don est le titre de votre créativité,vous avez donc toutes les significations de l'éloge pour le nombre de poèmes de poètes, et leurs différentes mers et poids.

Aux gens de fierté :Abd sadak (et sa femme), Nour eddine, Yacin, Ismail.

A tous les oiseaux de la famille je demande à allah de preprétuer la bénédiction de la perspicacité pour vous.

Achaque famille de mon oncle, mes oncles et mes tantes.

Et un mot de remerciment aux fleurs de mon chemin vous ètes les toiles de mon ciel qui brillent dans ma vie.

A tous les habitants de ma ville.

A tous ceux qui ont marqué ma vie, et à tous ceux que mon coeur a aimés et oubliés par ma plume.

Table des matières

Introduction général

Dans ce mémoire on intéresse a l'équation différentielle stochastique rétrograde notée **EDSR** où en englais **BSDEs** (Backward Stochastic Différential Équations) ont été introduites pour la première fois en 1973 par [2] J M. Bismut dans le cas linéaire lorsqu'il étudie l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal. Cinq ans plus tard, (Bismut1978) prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de **l'EDSR** de Reccti. Le premièr résultat dans le cas général a été publié en 1990 par Paradoux-Peng.

Maintenant, la question qui se pose est quelle est la signification d'une équation diférentielle stochastique rétrograde ?. Dans ce mémoire, nous allons essayer d'étudier l'existence d'une solution minimale où maximale pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades de type suivante :

$$\begin{cases} dy\left(t\right) = f\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) dt + z\left(t\right) dW\left(t\right), \\ y\left(T\right) = \xi. \end{cases}$$

pour $0 \leq t \leq T$, où le générateur f est continu est vérifier la condition de la croissance linéaire, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de mouvement brownien i.e $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, s \leq t\right)$. Et qui se compose de trois chapitres et qui pour but essentiel d'exposer la solutions **d'EDSR**.

Dans le première chapitre on trouve quelque rappele de base concernant le calcul stochastique et l'équation différentielle stochastique.

Dans le second chapitre on a exposé en résumé les grandes lignes, concernant le résultat de paradoux-Peng pour le cas nonlinéaire et le théorème de comparaison et nous etudions aussi le cas linéaire.

Dans le troixième chapitre, nous étudions les équations différentielles stochastiques rétrogrades dans le cas ou le générateur f est continu.

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

1.1 Espérance conditionnelle

Définition 1.1 ***(Variable aléatoire) :*** *Une variable aléatoire est une application définie sur l'esemble des éventualités ,c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Ce furent les jeux de hasard qui amenérent à concevoir les variable aléatoires,en associant à une éventualité (résultat lancer d'un ou plusieurs dés, d'un tirage à pile où face, d'un roulette, etc) un gain. Cette association éventualité-gain a dooné lieu par la suite à la conception d'une fonction de portée plue générale.*

Définition 1.2 *[4] La variable aléatoire X est construite sur l'éspace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, card $(\Omega) < \infty$. Soit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, une tribu engendrée par la partition finie $p = \{A_1, ..., A_n\}$ satisfaisant $\forall i \in \{1, ..., n\}, \mathbb{P}(A_i) > 0$, l'espérance conditionnelle de X étant donnée G, notée $\mathbb{E}^P[X|\mathcal{G}]$ est*

$$\mathbb{E}^P[X|\mathcal{G}](\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1_{A_i}(\omega)}{P(A_i)} \sum_{\omega^* \in A_i} X(\omega^*) \mathbb{P}(\omega^*),$$

Ou $1_{A_i} : \Omega \to \{0, 1\}$ est la fonction indicatrice

$$1_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, \ si \ \omega \in A_i, \\ 0, \ si \ \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Remarque 1.1 *[4] L'espérance conditionnelle s'exprime à l'aide des probabilités condition-*

nelle.

Contrairement à l'espérance, l'espérance conditionnelle n'est pas un nombre réel mais une variable aléatoire. En fait, comme elle est constante sur les atomes qui engendrent $\mathcal{G}$, c'est une variable aléatoire $\mathcal{G}-$mesurable.

Proposition 1.1 *[4] Soit X et Y deux variables aléatoires de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on suppose les tribus $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ Sont engendrées respectivement par les partitions finies $p = \{A_1, ..., A_n\}$, $p_1 = \{B_1, ..., B_m\}$ et $p_2 = \{C_1, ..., C_n\}$.*

1. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
2. Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ sont des tribus alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$.
3. Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ sont des tribus alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$.
4. $\mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[X]$.
5. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
6. Si Y est $\mathcal{G}-$mesurable alors $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
7. Si X et Y sont idépondantes alors $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)] = \mathbb{E}[X]$.
8. Si $a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[(aX + bY)|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.

Proposition 1.2 ***(l'inégalité de jensen) :*** *Soit X est une variable aléatoire de $\mathbb{L}^1$ et ϕ est une fonction convexe tel que*

$$\phi(x) \in \mathbb{L}^1$$

alors

$$\mathbb{E}[\phi(x)|\mathcal{G}] \geq \phi\mathbb{E}([X|\mathcal{G}]).$$

1.2 Espace de probabilité filtré

Pour représenter un phénomène aléatoire dépondant du temps un modèle mathématique est donné par un éspace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une fonction $X : \mathbb{R}_+ \times (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

– Pour t fixé l'état du système est une variable aléatoire $X(t, \omega)$.

– Pour ω fixé la fonction $t \to X(t,\omega)$ est appellé trajectoire.

Définition 1.3 *Soit t un ensemble l'indices $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N}, ..)$ on appèlle processus stochastique définit sur T à valeurs dans $(\mathbb{E}, \sum)$ tout famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variable aléatoire X_t indexée par un ensemble T.*

1. Un processus dépond de deux paramètres t et ω tell que en générale t le temps et $\omega \in \Omega$ est l'aléatoire.
2. Si t fixé l'état du processus est une variable aléatoire $X_t(\omega)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
3. Si ω est fixé $t \longmapsto X_t(\omega)$ est appellé trajectoire du processus.

Définition 1.4 ***(Filtration)*** *[4] Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)$ de sous tribus tell que pour tout $s \leq t$ on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.5 ***(La filtration naturelle) :*** *La filtration naturelle d'une proussus $\{X_t, t \in I\}$ est $\left\{\mathcal{F}_t^X, t \in I\right\}$ tell que $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq t)$.*

Définition 1.6 ***(Adaptation) :*** *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si pour tout $t.X_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Remarque 1.2 *Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est appelée un espace de probabilité filtré. Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.*

Proposition 1.3 *Si nous avons X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (où continue à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

1.2.1 Martingale et temps d'arrêt

Un processus X à valeurs réelles $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ −adapté et intégrable pour tout $t \geq 0$ est dit martingale (sous martingale sur-martingale resp)si :

Pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ (resp $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$, resp $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$).

Définition 1.7 ***(temps d'arrêt) :*** *[7] Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré. Un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une variable aléatoire τ à valeur dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*

Théorème 1.1 ***(Théorem d'arrêt optimal) :*** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}-$martingale continue à droit*

1. Pour tout τ temps d'arrêt bornée on a :X_t est $\mathcal{F}-$martingale.

2. Si τ_1, τ_2 deux temps d'arrêts bornnés tel que :$\tau_1 < \tau_2$ alors

$$\mathbb{E}\left[X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = X_{\tau_1}.$$

1.2.2 Mouvement Brownien

[3] Le mouvement Brownien a été découvert en 1827 par le botaniste Robert Brown. C'est en observant sous un microscope du pollen dispersé dans de l'eau qu'il remarqua que les grains microscopiques le constituant étaient soumis à un mouvement continuel et irrégulier.Il crut,à l'époque.qu'il avait découvert responsable de la vie. Il s'aperçut plus tard que l'on pouvait observer ce même phénomène avec toutes sortes de particules de taille suffisament petite.

Définition 1.8 *On appelle mouvement Brownien (**MB**) standard un processus stochastique $(W_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles tel que :*

1. $W_0 = 0 \ \mathbb{P} - p.s.$

2. si $t_0 < t_1 < .. < t_n$, les accroissements $\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)$ sont independant (avec $0 \leq i \leq n$).

3. Pour $s, t \geq 0$ tel que :$s < t, W_t - W_s \sim N\left(0, t-s\right)$.

4. $t \rightarrow W_t\left(\omega\right)$ est continue $\mathbb{P} - p.s.$

Remarque 1.3 *De cette définition, il suit que pour $0 \leq s < t$ on a :*

1. $\mathbb{E}\left(W_t - W_s\right) = 0$

2. $\mathbb{VAR}\left(W_t - W_s\right) = \mathbb{E}\left(W_t - W_s\right)^2 = t - s$

Lemme 1.1 *Le processus défini par* $X_0 = 0$.

et $X_t = tW_{1\backslash t}$ *est un* ***MB***. *Si* $(W_t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien alors :*

$$\left(W_t^2 - t\right) \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{martingale.}$$

Proof. 1) $W_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable car c'est une fonction continue de W_t que est $\mathcal{F}_t$ mesurable.
2) $\mathbb{E}\,||B_t^2 - t|| \leq \mathbb{E}\,||W_t^2|| + t = \mathbb{E}\left|\left|(W_t - W_0)^2\right|\right| + t = t + t = 2t < \infty$.
3) $\forall s \in [0, t]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(W_t^2 - t\right)|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s + W_s)^2 - t|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left((W_t - W_s)^2 + 2W_s\left(W_t - W_s\right) + W_s^2 - t\right)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2\,|\mathcal{F}_s\right] + 2W_s\mathbb{E}\left[W_t - W_s|\mathcal{F}_s\right] + W_s^2 - t\end{aligned}$$

on a :

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2\,|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2\right] = t - s, \text{ et } \mathbb{E}\left[W_t - W_s|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] = 0,$$

on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\left(W_t^2 - t\right)|\mathcal{F}_s\right] = t - s + W_s^2 - t = W_s^2 - s.$$

Alors $\{W_t^2 - t : t \geq 0\}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale. ■

1.3 Intégrale stochastique

Définition 1.9 ***(Intégrale d'itô)*** *: Soit* W *le mouvement Brownien standard défini sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* σ *un processus adapté à* $\mathcal{F}$*.On suppose par ailleurs que* σ *vérifie :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds\right) < \infty,$$

Alors, l'intégrale stochastique de σ par rapport à W est la variable aléatoire

$$\left(\int_0^T \sigma_s dW_s\right) = \lim_{N\to+\infty} \sigma_{t_{n-1}}\left(W_{t_{0n-1}}\right).$$

Définition 1.10 ***(intégrale de Wiener)*** *[7] On note $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}$de carée intégrable, C'est-à-dire telle que*

$$\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < \infty,$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f^2(s)\, ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Formule d'itô [3]

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de prbababilité filtré, et soit $W = (W_t, t \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)$ $-$mouvement Brownien standard.

Définition 1.11 *On appelle processus d'itô tout processus $(X_t, t \geq 0)$tel que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t V_s ds, t \geq 0,$$

Ou X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, H un processus adapté tel que

$$\forall t, \int_0^t H_s^2 ds < \infty,\ \mathbb{P}-p.s,$$

et V un processus adapté tel que

$$\forall t, \int_0^t |V_s|\, ds < \infty,\ \mathbb{P}-p.s,$$

Etant donné un processus d'itô X, on peut définir un processus continu adapté croissant

$$\langle X\rangle_t := \int_0^t H_s^2 ds, t \geq 0,$$

On peut montrer que si :

$$\int_0^t H_s dW_s = \int_0^t V_s ds,$$

pour un processus H adapté tel que pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t H_s dW_s < \infty$ $p.s$ et pour un processus adapté V tel que $\forall t$,

$$\int_0^t V_s ds < \infty, \mathbb{P}-p.s,$$

alors

$$H = V = 0,$$

donc l'écritire

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t V_s ds,$$

pour un processus d'itô est unique, que l'on appelle décomposition canonique.

$$X_t = X_0 + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s + \int_0^t f'(X_s) V_s ds.$$

Théorème 1.2 ***(formule d'itô)*** *[3] Soit $X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t V_s ds$ un processus d'itô, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X\rangle_s,$$

où

$$\int_0^t f'(X_s)\, dX_s := \int_0^t f'(X_s)\, H_s dW_s + \int_0^t f'(X_s)\, V_s ds.$$

Soient $(t;x) \mapsto f(t;x)$ *une fonction réelle deux fois diérentiable en* x *et une fois diérentiable en* t *et* X *un processus d'Itô :*

$$f(t;X_t) = f(0;X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s\,,$$

Théorème 1.3 ***(La troisiéme formule d'itô)*** *: [3] Soient* $X^{(1)}, ..., X^{(n)}$ *des processus d'itô :*

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t H_s^{(i,k)} dW_s^{(k)} + \int_0^t V_s^{(i)} ds, t \geq 0,$$

Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^{1,2}$. *Alors*

$$\begin{aligned} F(t, X_t^{(1)}, ..., X_t^{(n)}) &= F\left(0, X_0^{(1)}, ..., X_0^{(n)}\right) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(s, X_s^{(1)}, ..., X_s^{(n)}\right) ds \\ &+ \sum_{i=n}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(s, X_s^{(1)}, ..., X_s^{(n)}\right) dX_s^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{n}\sum_{j=n}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(s, X_s^{(1)}, ..., X_s^{(n)}\right) d\left\langle X^{(i)}, ..., X^{(n)}\right\rangle_s\,, \end{aligned}$$

où

$$\int_0^t K_s dX_s^{(i)} := \sum_{k=1}^{d} \int_0^t K_s H_s dW_s^{(k)} + \int_0^t K_s V_s^{(i)} ds.$$

1.4 Equation diffirentielle stochastique

Une équation différentielle stochastique **(EDS)** est la donnée d'un équation du type suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t)\, dt + \sigma(X, t)\, dW_t, \\ X_0 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ou X_t est un processus stochastique inconnu et X_0 la condition initial.

1.4.1 Existence et unicité de solution

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré, et soit W un $(\mathcal{F}_t)$ −mouvement Brownien. Soient $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonction mesurables. On considère l'équation différentielle stochastique **(EDS)** (1.1).

Définition 1.12 *Une solution pour* ***l'EDS*** *(1.1) est un processus* $(X_t, t \geq 0)$ *continu adapté tel que*

$$\forall t, \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 \, ds < \infty, \int_0^t |b(s, X_s)| \, ds < \infty, \ \mathbb{P} - p.s.$$

et que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) \, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \, dW_s. \tag{1.2}$$

Théorème 1.4 ***(Existence et unicité) :*** *Soient* b *et* σ *deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante* λ *telle que, pour tout* $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n$,

a Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq \lambda |x - y|,$$

b Croissance linéaire :

$$|b(t, x)| + \|\sigma(t, x)\| \leq \lambda (1 + \|x\|),$$

et de plus, la condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$, et est de carré intégrable $\mathbb{E}[|x^2|] < \infty$.

Alors, il existe une unique solution de l'**EDS** (1.2) à trajectoire continues pour tout t.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades le cas lipschitzinne(EDSR)

Dans ce chapitre, nous présenterons le concept de l'équation différentielle stochastique rétrograde et expliquerons la terminologie utilisée dans ce dommaine. Et nous allons montrer le résultat d'existence et d'unicité de l'équation différentielle stochastique rétrograde **(EDSR)**.

2.1 Le résultat de paradoux-peng 1990

Dans cette section nous présenterons le premier résultat d'existence et d'unicité de **l'EDSR**. C'est dans le cas ou le générateur non linéaire. Nous rappelons que f est définie sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tell que pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$, le processus $\left\{ f(t,y,z)_{0 \leq t \leq T} \right\}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, F_T-mesurable, à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

Assumption :

Premierement nous donnons les hypothèses suivantes :

(L) Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s,$

1. Condition de lipschitz en (y,z) :pour tout t,y,y',z,z'

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z')|\leq\lambda\left(|y-y'|+\|z-z'\|\right).$$

2. Condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int_0^T|f(r,0,0)|^2\,dr\right]<\infty.$$

C'est le cas qui celui ou f ne dépond ni de y ni de z.on se donne ξ de carré intégrale et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et nous recherchons une solution a **l'EDSR**

$$\begin{cases} Y_t=F_tdt+Z_tdW_t, & 0\leq t\leq T, \\ Y_T=\xi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Lemme 2.1 *Soient* $\xi\in\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}\in\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ ***.L'EDSR*** *(2.2) possède une unique solution* (Y,Z) *tell que* $Z\in\mathcal{M}^2$.

Tout d'abrod nous supposons que (Y,Z) est une solution qui réalise $Z\in\mathcal{M}^2$ et cela nécessite de prendre l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ on à nécessairement

$$Y_t=\mathbb{E}\left(\xi+\int_t^TF_rdr|\mathcal{F}_t\right),$$

par conséquent nous déffinissons Y et puisque F est progressivement mesurable et puisque $\int_0^tF_rdr$ est un processus de filtration approprié $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$.

$$Y_t=\mathbb{E}\left(\xi+\int_0^TF_rdr|\mathcal{F}_t\right)-\int_0^tF_rdr:=\mathcal{M}_t-\int_0^tF_rdr,$$

$\mathcal{M}$ est une martingale brownienne, via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à $\mathcal{M}^2$ tel que

$$Y_t = \mathcal{M}_t - \int_0^t F_r dr = \mathcal{M}_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr,$$

On vérifait que (Y, Z) est une solution de **l'EDSR** pour $Y_T = \xi$, $0 \leq t \leq T$. On a

$$Y_t = \mathcal{M}_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr,$$

alors

$$Y_T = \mathcal{M}_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr,$$

donc

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= Y_t - Y_T \\ &= \mathcal{M}_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(\mathcal{M}_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr\right) \\ &= \mathcal{M}_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - M_0 - \int_0^T Z_r dW_r + \int_0^T F_r dr \\ &= \int_0^T Z_r dW_r + \int_0^T F_r dr. \end{aligned}$$

Les solutions qui vérifait $Z \in \mathcal{M}^2$ nous montrent l'unicité.

Théorème 2.1 ***([9] 1990)*** *L'unicité de la solution (Y, Z) tel que $Z \in \mathcal{M}^2$.*

Proof. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de banach ß^2 en construisant une application Ψ de $\mathcal{S}^2$ dans lui-mème de sorte que est (Y, Z) ∈ß^2 est solution de **l'EDSR** si et selement si c'est un poit fixe de Ψ.

Pour (U, V) élément de ß^2,on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de **l'EDSR**

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T,$$

Avec remarque, trouvons que **l'EDSR** celui-ci à une solution unique en ß^2,et avec posons

$F_r = f(r, U_r, V_r)$ ce processus appartient à $\mathcal{M}^2$ car f étant lipschitz

$$|F_r| \leq |f(r,0,0)| + \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|,$$

Une seule solution (Y, Z) peut être obtenue en appliquant **lemme (2.1)** et Z en construisant. Soient (U, V) et (U', V') deux éléments de ß^2 et $(Y, Z) = \Psi(U, V), (Y', Z') = \Psi(U', V')$ notant $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$ On a $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\} dt + z_t dW_t,$$

On applique la formule d'itô à $e^{\alpha t} |y_t|^2$ pour obtenir

$$d\left(e^{\alpha t} |y_t|^2\right) = \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t. \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\} dt + 2e^{\alpha t} y_r.z_r dW_r + e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt,$$

Par conséquent intégrant entre t et T, on obtient

$$\begin{aligned}\int_t^T d\left(e^{\alpha t} |y_t|^2\right) dr &= \int_t^T [\alpha e^{\alpha r} |y_r|^2 + 2e^{\alpha t} y_r. \{f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r', V_r')\}] dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r, \\ &= \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha |y_r|^2 + 2y_r. \{f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r', V_r')\}\right) dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r,\end{aligned}$$

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha |y_r|^2 + 2y_r. \{f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r', V_r')\}\right) dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r,$$

puisque f est lipschitz, alors la note $u = U - U', v = V - V'$.

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha |y_r|^2 + 2\lambda |y_r| |U_r| + 2\lambda |y_r| \|V_r\|\right) dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r,$$

pour tout $\epsilon > 0$, on a $2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2$,et donc l'intégralité précédente donne

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_t\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\epsilon}\right) |y_t|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r + \epsilon \int_t^T e^{\alpha r} \left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2\right) dr,$$

on prenez $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\epsilon}$ et trouvez

$$R_\epsilon = \epsilon \int_t^T e^{\alpha r} \left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2 \right) dr.$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_t\|^2 dr \leq & \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\frac{2\lambda^2}{\epsilon} + \frac{2\lambda^2}{\epsilon} \right) |y_t|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r + \\ & \epsilon \int_t^T e^{\alpha r} \left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2 \right) dr \\ & \leq 0 + R_\epsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r, \end{aligned}$$

donc

$$\forall t \in [0,T], \; e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_t\|^2 dr \leq R_\epsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r, \tag{2.3}$$

Puisque $\left\{ \int_0^T y_r.z_r dW_r, t \in [0,T] \right\}$ est une martingale uniformément intégrable. La martingale local $\left\{ \int_0^T e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r \right\}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartienent à $\mathcal{S}^2$ et Z, Z' appartienent à $\mathcal{M}^2$.

Par l'espérance et pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_t\|^2 dr \right] \leq \mathbb{E}[R_\epsilon],$$

de l'égalité (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] & \leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\left[\left(e^{\alpha t} |y_t|^2 \|z_t\|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}} |y_t| \left(e^{\alpha r} \|z_t\|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

et puis $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] \leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_t\|^2 dr \right],$$

Prenons ϵ tel que $\epsilon\left(3+C^2\right)(1 \vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathbb{ß}^2$ dans lui-mème si on le munit de la norme

$$\|(U,V)\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|V_r\right\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}.$$

qui en fait un espace de Banach-cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$, Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'**EDSR** (2.1) dans $\mathbb{ß}^2$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in\mathcal{M}^2$. ■

2.1.1 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 2.1 *Soit (Y,Z) la solution de **l'EDSR** et soit τ un temps d'arrêt majoré par T.*

*On suppose, outre l'hypothèse (**L**), que ξ est $F-$mesurable et que $f(t,y,z)=0$ dès que $t\geq\tau$.*

Proof. On a, $\mathbb{P}-p.s$

$$Y_t=\xi+\int_t^T f\left(r,Y_r,Z_r\right)dr-\int_t^T Z_r dW_r, 0\leq t\leq T,$$

pour $t=\tau, f\left(r,Y_r,Z_r\right)=0$ et le même temps $t\geq\tau$

$$\begin{aligned}Y_\tau &= \xi+\int_\tau^T f\left(r,Y_r,Z_r\right)dr-\int_\tau^T Z_r dW_r,\\ &= \xi-\int_\tau^T Z_r dW_r,\end{aligned}$$

on a

$$Y_\tau=\mathbb{E}\left(\xi|\mathcal{F}_\tau\right)=\xi$$

et on a

$$\int_{\tau}^{T} Z_r dW_r = 0$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau}^{T} Z_r dW_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\tau}^{T} \|Z_r\|^2 dr\right] = 0$$

Si $t \geq \tau$ nous montrons que $Y_\tau = Y_t$

$$\begin{aligned} Y_\tau &= Y_t + \int_{\tau}^{t} f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_{\tau}^{t} Z_r dW_r \\ &= Y_t + 0 + 0 \\ &= Y_t. \end{aligned}$$

■

2.2 EDSR linéaire

Dans ce paragraphe, nous examinos le cas particulier de **l'EDSR** linéaire pour le quel nous présenterons une formule plus au mois claire. On ce met dans le cas $k = 1$,ainsi Y est réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$, c'est-à-dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.2 *Soit* $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ *un processus à valeur dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *progrisevement mesurable et borné. Soient* $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$*un élément de* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ *et* ξ *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T-$*mesurable de carré intégrable, à valeurs réelles.* ***I'EDSR*** *linéaire*

$$Y_t = \xi + \int_{t}^{T} \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\}\, dr - \int_{t}^{T} Z_r dW_r$$

il y a solution unique réalisé

$$\forall t \in [0, T], \qquad Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left(\xi \Gamma_T + \int_{t}^{T} c_r \Gamma_r dr | \mathcal{F}_t\right)$$

avec pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_t^T b_r.dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2\, dr + \int_0^t a_r dr\right\}.$$

Commonçons par noter que le processus est en cours

$$d\Gamma_t = \Gamma_t\left(a_t dt + b_t.dW_t\right), \Gamma_0 = 1.$$

D'autre part, comme b *est borné, l'inégalité de Doob montre que* Γ *appartient à* $\mathcal{S}^2$.

Proof. De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y,Z) à **l'EDSR** linéaire ; il suffit de poser $f(t,y,z) = a_t y + z b_t + c_t$ et de vérifier que (**L**) est satisfait. Y appartient à $\mathcal{S}^2$.

La formule d'intégration par parties donne

$$d\Gamma_t Y_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\left\langle \Gamma, Y\right\rangle_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t.dW_t$$

ce qui montre que le processus $d\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $c \in \mathcal{M}^2$ et Γ, Y sont dans $\mathcal{S}^2$. Par suite

$$d\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = \mathbb{E}\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr | \mathcal{F}_t\right).$$

ce qui donne la formule déclarée. ■

Remarque 2.1 *Notez que si* $\xi \geq 0$ *et* $c_t \geq 0$ *alors la solution de **l'EDSR** linéaire vérifie* $Y_t \geq 0$. *Cette observation nous permettra d'obtenir la théorie de la comparaison dans le paragraphe suivant.*

Pour illustrer ce résultat prenons le cas où a *et* c *valent zéro. Nous avons alors*

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi \exp\left\{\int_t^T b_r.dW_r - \frac{1}{2}\int_t^T |b_r|^2\, dr\right\} | \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^*\left(\xi | \mathcal{F}_t\right),$$

où $\mathbb{P}$ est la mesure de densité par rapport à $\mathbb{P}$

$$L_T = \exp\left\{\int_0^T b_r.dWr - \frac{1}{2}\int_0^T |b_r|^2\, dr\right\},$$

*"La probabilité risque neutre" est la dexièume façon de la regarde, qui est de la regarder **EDSR** sous $\mathbb{P}^*$en fait sous $\mathbb{P}^*, B_t = W_t - \int_0^t b_r dr$ est un **MB** c'est le théorème de Girsanov. Donc l'équation écrivons à la forme*

$$-dY_t = Z_t b_t dt - Z_t dW_t = -Z_t dB_t, \qquad Y_t = \xi.$$

Donc sous $\mathbb{P}^*, Y$ est une martingale, ce qui montre aussi la formule.

On retrouve ainsi les changements de mesures de probabilité du type « transformation de Girsanov».

2.3 Théorème de comparaison

Dans cette section nous pouvons comparer les solution de deux **EDSR** (dans $\mathbb{R}$) dés que nous savons comparer les conditions términales et les générateurs ([9]).

Théorème 2.2 *Supposons que $k = 1$ et que $(\xi, f), (\xi', f')$ satisfaissent à l'hypothèse **(L)** et notez que $(Y, Z), (Y', Z')$ solution de **EDSR** correspondantes. Supposent également $\mathbb{P}-p.s.$ $\xi \leq \xi'$ et que $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P}-p.p$ (m mesure de Lebesgue). Alors*

$$\mathbb{P}-p.s. \qquad \forall t \in [0,T], \qquad Y_t \leq Y'_t.$$

Si de plus $Y_0 = Y'_0$, alors $\mathbb{P}-p.s, Y_t = Y'_t, 0 \leq t \leq T$ et

$f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P}-$mesure stictement positive $Y_0 < Y'_0$.

Proof. La preuve est fait par linéaire, ce qui nous permet de réduire au linéaire **EDSR**.

Nous cherchons une équation à réaliser par $U = Y' - Y$, on a notant $V = Z' - Z$ et $\varsigma = \xi' - \xi$,

$$U_t = \varsigma + \int_t^T \left(f'\left(r, Y_r, Z_r\right) - f\left(r, Y_r, Z_r\right)\right) dr - \int_t^T V_r dW_r.$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant

$$\begin{aligned} f'\left(r, Y_r', Z_r'\right) - f\left(r, Y_r, Z_r\right) = \quad & f'\left(r, Y_r', Z_r'\right) - f'\left(r, Y_r, Z_r'\right) + f'\left(r, Y_r, Z_r'\right) - \\ & f'\left(r, Y_r, Z_r\right) + f'\left(r, Y_r, Z_r\right) - f\left(r, Y_r, Z_r\right). \end{aligned}$$

(qui est positif ici).

On introduit deux processus a et b : a est à valeurs réelles et b est un vecteur (colonne) de dimension d. On pose :

$$a_r = \begin{cases} \frac{f'\left(r, Y_r', Z_r'\right) - f'\left(r, Y_r, Z_r'\right)}{U_r}, \text{si } U_r \neq 0, \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour définir b, on doit introduire une autre notation :pour $0 \leq i \leq d$, $Z_r^{(i)}$est la ligne dont les $d - i$ dernières composantes sont celles de Z_r' et les i premières celles de Z_r pour $1 \leq i \leq d$ on pose

$$b_r^i = \begin{cases} \frac{f'\left(r, Y_r, Z_r^{(i-1)}\right) - f'\left(r, Y_r, Z_r^{(i)}\right)}{V_r^i}, \text{si } V_r^i \neq 0, \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

Etant donné que f' est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables et bornés. Alors ces notations on a

$$U_t = \varsigma + \int_t^T \left(a_r U_r + V_r b_r + c_r\right) dr - \int_t^T V_r dW_r,$$

où $c_r = f'\left(r, Y_r, Z_r\right) - f\left(r, Y_r, Z_r\right)$ .Par hypothèse, on a $\varsigma \geq 0$ et $c_r \geq 0$. Utilisant la formule «explicite» pour les **EDSR** linéaires **Proposition (2.2)**, on a pour $t \in [0, T]$,

$$U_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left(\varsigma \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr | \mathcal{F}_t\right),$$

avec pour $0 \leq r \leq T$.

$$\Gamma_r = \exp\left\{\int_0^r b_u.dW_u - \frac{1}{2}\int_0^r |b_u|^2\, du + \int_0^r a_u du\right\}.$$

Comme déjà mentionné lors de la remarque suivant **la Proposition (2.2)**, cette formule montre que $U_t \geq 0$,dès que $\varsigma \geq 0$ et $c_r \geq 0$.

Pour la seconde partie du résultat, si de plus $U_0 = 0$ on a

$$0 = \mathbb{E}\left(\varsigma\Gamma_T + \int_0^T c_r\Gamma_r dr\right).$$

et la variable aléatoire intégrée est positive. Par conséquent, elle est nulle $\mathbb{P}-p.s.$ ce qui termine la preuve de ce théorème en remarquant que dans ce cas $\varsigma = 0$ et $c_r = 0$. ■

Remarque 2.2 *On peut supposer que $f(t, Y_t', Z_t') \leq f'(t, Y_t', Z_t')$ au lieu de $f(t, Y_t, Z_t) \leq f(t, Y_t, Z_t)$ pour obtenir le résultat précédent. Il suffit de faire une linéarisation en partant de l'écriture*

$$\begin{aligned} f'(r, Y_r', Z_r') - f(r, Y_r, Z_r) = \quad & f'(r, Y_r', Z_r') - f(r, Y_r', Z_r') + f(r, Y_r', Z_r') - f(r, Y_r, Z_r') + f(r, Y_r, Z_r') \\ & - f(r, Y_r, Z_r). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques rétrogrades à coefficient continu

Dans cette chapiter, nous nous intéressons à l'affaiblissement des conditions sur f. On suppose que f satisfier les hypothèses suivantes :

(H2.1) Soit $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}$, est une fonction mesurable telque, pour tout $(y,\, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $f(.,y,z) \in \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R})$.

(H2.2) Il existe $C > 0$ $s.t.$ Pour tout $(t,\omega,y,z) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\left(t,\omega,y^{'},z^{'}\right) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$|f(t,\omega,y,z)| \leq C\left(1+|y|+|z|\right),$$

(H2.3) Pour fixe ω et t, $f(t,\omega,\cdot,\cdot)$ est continue.

Maintenant nous désignerons par $\mathcal{P}$ une tribu prévisible. Nous considérons aussi

$$\mathcal{H}^2\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{ Y : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n \text{ telque } Y \in \mathcal{P} \text{ et } ||Y||_{\mathcal{H}^2} = \sqrt{\mathbb{E}\int_0^t |Y_s|^2\, ds} \right\}.$$

Théorème 3.1 *Supposons que* $f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *est* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$ *fonction mesurable,ce qui satisfait*

– *Croissance linéaire :* $\exists K < \infty, \forall t, w, y, z$

$$|f(t, w, y, z)| \leq K(1 + |y| + |z|).$$

– *Pour t fixé,* w , $f(t, w, ., .)$ *continue.*

Alors si $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ **l'EDSR**

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)\,dt + Z_t dW_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

a une solution adaptée $(Y, Z) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^{d+1})$,où Y est un processus continue et Z prévisible. On suppose toujours que $d = 1$. Avant de donner la preuve du théorème d'existence de solution, nous définissons, une lemme l'approximation classique peut être prouvée en adaptant la preuve donnée dans J. J. Alibert et K. Bahlali ([1]).

3.1 Lemme d'approximation

Soit $f : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec croissance linéaire c'est-à- dire qu'il existe $K < \infty$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^P \qquad |f(x)| \leq K(1 + |x|). \tag{3.2}$$

puis la séquence des fonctions

$$f_n(x) = \inf_{Y \in \mathbb{Q}} \{f(y) + n|x - y|\}.$$

est bien défini pour $n \geq K$ et ca satisfait :

i) Croissance linéaire :$\forall x \in \mathbb{R}^P$

$$|f_n(x)| \leq K(1 + |x|).$$

ii) Monotonie dans n :$\forall x \in \mathbb{R}^P$, $f_n(x)$ est croissante en n.

iii) Condition de lipschitz :$\forall x, y \in \mathbb{R}^P \left|f_n(x) - f_n(y)\right| \leq n\left|x-y\right|.$

iv) Convergence : si

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x).$$

II est facile de vérifier que, grâce à l'ypothese de croissance linéaire sur f, f_n est bien défini pour $n \geq K$. Aussi il suit aussi que $f_n \leq f$ encore une fois, à partire de la condition de croissance linéaire sur f, on obtient

$$\begin{aligned} f_n(x) \geq \inf_{y\in\mathbb{Q}^P}\left\{-K - K|y| + K|x-y|\right\} &= \inf_{y\in\mathbb{Q}^P}\left\{-K - K|y| + K|x| + K|y|\right\} \\ &= \inf_{y\in\mathbb{Q}^P}\left\{-K + K|x|\right\} \\ &= \inf_{y\in\mathbb{Q}^P}\left\{-K(1+|x|)\right\} \\ &= -K(1+|x|). \end{aligned}$$

De la définition de la séquence (f_n). Prendre $\epsilon > 0$ et considérer $y_\epsilon \in \mathbb{Q}^P$ tel que $n > m$

$$\inf\left\{f(y) + n|x-y|\right\} > \inf\left\{f(y) + m|x-y|\right\},$$

$$f_n > f_m,$$

$$\begin{aligned} f_n(x) &\geq f(y_\epsilon) + n|x-y_\epsilon| - \epsilon \\ &\geq f(y_\epsilon) + n|y-y_\epsilon| + n|x-y_\epsilon| - n|y-y_\epsilon| - \epsilon \\ &\geq f(y_\epsilon) + n|y-y_\epsilon| + n|x| - n|y_\epsilon| - n|y| + n|y_\epsilon| - \epsilon \\ &\geq f(y_\epsilon) + n|y-y_\epsilon| - n|x-y| - \epsilon \\ &\geq f(y_\epsilon) + n|y| - n|y_\epsilon| - n|x| + n|y| \\ &\geq f_n(y) - n|x-y| - \epsilon. \end{aligned}$$

A cet effet, en interchangeant les roles de x et y, et depuis ϵ est aribitraire on en déduit que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq n |x - y| .$$

Afin de prouver (iv) ; considérer $x_n \to x$ prendre pour chaque $n, y_n \in \mathbb{Q}^P$

$$f_n(x) \geq f_n(x_n) \geq f(y_n) + n |x_n - y_n| - \frac{1}{n}.$$

Puisque $(f(x_n))$ est borné et f a une croissance linéaire, on en déduit que (y_n) est borné, tout comme $(f(y_n))$.par conséquent

$$\limsup_n n |y_n - x_n| < \infty.$$

Et en particulier $y_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, en outre

$$f(x_n) \geq f_n(x_n) \geq (y_n) - \frac{1}{n},$$

dont le résultat suit.

3.2 Existence de solution minimal

Considérer pour fixe (t, w), la séquance $f_n(t, w, y, z)$ associé à f par le **Lemme 3.1**. Considérez aussi $h(t, w, y, z) = K(1 + |y| + |z|)$ Puis f_n et h sont des fonctions mesurables de $\wp \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$,ainsi que des fonctions de lipschitz. Puisque $\xi \in \mathbb{L}^2$ on obtient de Pardoux et Peng ([9]) les **BSDE** suivants ont une solution adaptée unique sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

$$\begin{cases} dY_t^n = -f_n(t, Y_t^n, Z_t^n)\, dt + Z_t^n dW_t, \ n \geq K, \\ Y_T^n = \xi. \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} dU_t = -h(U_t, V_t)\,dt + V_t dW_t, \\ U_T = \xi. \end{cases} \tag{3.4}$$

On utilisant le théorème de comparaison on dit que

$$\forall n \geq m \geq K, \qquad Y^m \leq Y^n \leq U \qquad dt \otimes d\mathbb{P} - p.s. \tag{3.5}$$

Lemme 3.1 *Il exist une constante A dépondant uniquement de K, T et $\mathbb{E}(\xi^2)$ tel que*

$\forall n \geq K,$

$$\|Y^n\|_{\mathcal{H}^2} \leq A, \qquad \|Z^n\|_{\mathcal{H}^2} \leq A, \qquad \|U\|_{\mathcal{H}^2} \leq A, \qquad \|V\|_{\mathcal{H}^2} \leq A.$$

Clairement a partir (3.5), il exist une constante A qui ne dépend de K, T et $\mathbb{E}(\xi^2)$ tel que

$$\sup_{n \geq k} \|Y^n\|_{\mathcal{H}^2} \leq A, \qquad \|U\|_{\mathcal{H}^2} \leq A \qquad \text{et} \qquad \|V\|_{\mathcal{H}^2} \leq A.$$

pour le reste de la preuve considérez que $\epsilon^2 > K$ est un nombre fixe une application de la formule d'itô aux semi-martingales $(Y_t^2)^2$ rendements

$$\xi^2 = (Y_t^n)^2 + 2\int_t^T Y_s^n dY_s^n + \int_t^T d[Y^n, Y^n]_s,$$

on a

$$dY_t^n = -f_n(t, Y_t^n, Z_t^n)\,dt + Z_t^n dW_t, n \geq K,$$

alors

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (Y_t^n)^2 + 2\int_t^T Y_s^n dY_s^n + \int_t^T d[Y^n, Y^n]_s, \\ &= (Y_t^n)^2 + 2\int_t^T Y_s^n [-f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\,ds + Z_s^n dW_t] + \int_t^T d[Y^n, Y^n]_s, \\ &= (Y_t^n)^2 - 2\int_t^T Y_s^n f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\,ds + 2\int_t^T Y_s^n Z_s^n dW_s + \int_t^T (Z_s^n)^2\,ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(Y_t^n\right)^2=\xi^2+2\int_t^T Y_s^n f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)ds-2\int_t^T Y_s^n Z_s^n dW_s-\int_t^T \left(Z_s^n\right)^2 ds.$$

Prenent esperance mathématique des deux cotés et en utilisant le fait que $\int Y_s^n Z_s^n dW_s$ est un martingale de moyenne zéro, nous en déduisons

$$\mathbb{E}\left(Y_t^n\right)^2+\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s^n ds\right)=\mathbb{E}\left(\xi^2\right)+2\mathbb{E}\left(\int_t^T Y_s^n f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)ds\right),$$

par conséquent nous obtenons a partir de la condittion de croissance linéaire uniforme sur f_n (Voir (i) du **Lemme 3.1**) pour $t=0$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(Y_t^n\right)^2+\mathbb{E}\left(\int_0^T Z_s^n ds\right)=\mathbb{E}\left(\xi^2\right)+2\mathbb{E}\left(\int_0^T Y_s^n\left[K\left(1+\left|Y_s^n\right|+\left|Z_s^n\right|\right)\right]ds\right),$$

aussi en peut ecrire

$$\left\|Z^n\right\|_{\mathcal{H}^2}^2\leq\mathbb{E}\left(\xi^2\right)+2K\left\|Y^n\right\|_{\mathcal{H}^2}^2+2K\mathbb{E}\int_0^T\left|Y_s^n\right|\left(1+\left|Z_s^n\right|\right)ds.$$

Remarquez que pour $a\geq 0,b\geq 0$ on a

$$\begin{cases}2ab\leq a^2\epsilon^2+\frac{b^2}{\epsilon^2},\\ 2a\leq a^2\epsilon^2+\frac{1}{\epsilon^2}.\end{cases}$$

Donc

$$2K\mathbb{E}\int_0^T\left|Y_s^n\right|\left(1+\left|Z_s^n\right|\right)ds\leq K\mathbb{E}\int_0^T\left\{\frac{1}{\epsilon^2}+2\epsilon^2\left|Y_s^n\right|^2+\frac{1}{\epsilon^2}\left|Z_s^n\right|^2\right\}ds,$$

et

$$\left\|Z^n\right\|_{\mathcal{H}^2}^2\leq\mathbb{E}\left(\xi^2\right)+\frac{KT}{\epsilon^2}+2K\left(\epsilon^2+1\right)\left\|Y^n\right\|_{\mathcal{H}^2}^2+\frac{K}{\epsilon^2}\left\|Z^n\right\|_{\mathcal{H}^2}^2,$$

puisque $1-\frac{K}{\epsilon^2}>0$ nous déduisons pour $n\geq K$

$$\left\|Z^n\right\|_{\mathcal{H}^2}^2\leq\frac{\mathbb{E}\left(\xi^2\right)+\frac{KT}{\epsilon^2}+2K\left(\epsilon^2+1\right)A^2}{1-\frac{K}{\epsilon^2}}<\infty.$$

d'ou le resultat demandé.

Lemme 3.2 *Sous les hypothése* ***(H2.1)-(H2.3)*** *la suite* (Y^n, Z^n) *converges in* $\mathcal{H}^2\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$ *vers* (Y, Z).

Prendre $n_0 \geq K$ puisque (Y^n) est croissant et borné en $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$, on déduit du théorème de convergence dominé que Y^n converge en $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$. On notera par Y la limite de (Y^n).

Proof. Maintenant en utilisant la formule d'itô appliqué pour $|Y_t^n - Y_t^m|^2$, on trouve pour $n, m \geq n_0$

$$\mathbb{E}\left(|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \int_t^T |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds\right) \leq 2\mathbb{E}\int_t^T (Y_s^n - Y_s^m)\left(f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)\right) ds,$$

en déduire d'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwartz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \textstyle\int_t^T |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds\right) \leq \quad & 2\left(\mathbb{E}\textstyle\int_t^T (Y_s^n - Y_s^m)^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \left(\mathbb{E}\textstyle\int_t^T \left(f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)\right)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

puisque f_n et f_m sont uniformément à croissance linéaire et le fait que $(\|(Y^n, Z^n)\|_{\mathcal{H}^2})$ est borné (Voir le **Lemme 3.2**), on obtient l'existence d'une constanate $C(K, T, \mathbb{E}(\xi^2))$ tell que pour tout $n, m \geq n_0$

$$\mathbb{E}\left(|Y_0^n - Y_0^m|^2 + \int_t^T |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds\right) \leq C\left(K, T, \mathbb{E}\left(\xi^2\right)\right)\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^n - Y_s^m|^2\, ds.$$

Alors

$$\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds \leq C\left(K, T, \mathbb{E}\left(\xi^2\right)\right)(T - t)\,\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[t,T]} |Y_s^n - Y_s^m|^2\right),$$

c'est à dire

$$\|Z^n - Z^m\|_{\mathcal{H}^2}^2 \leq 2C\,\|Y^n - Y^m\|_{\mathcal{H}^2}.$$

Ainsi (Z^n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, d'ou il existe Z tel que $Z^n \overset{\mathcal{H}^2}{\to} Z$. ■

(Preuve de Théorem 3.1)

Pour tout $n \geq n_0 \geq K$ nous avons $Y^{n_0} \leq Y^n \leq U$. De plus (Y^n) converge vers à $Y \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R})$

dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$. Par conséquent $G = \sup_n |Y^n|$ est $dt \otimes d\mathbb{P}$ intégrable, par contre, puisque $Z^n \overset{\mathcal{H}^2}{\to} Z$ on peut supposer que il existe une sous-séquence tel que $Z^n \to Z dt \otimes d\mathbb{P} - p.s$ et $M = \sup_n |Z^n|$ est $dt \otimes d\mathbb{P}$ intégrable. Par conséquent à partir de (i) et (iv) du **Lemme 3.1**, nous obtenons pour presque tout w

$$f_n(t, Y_t^n, Z_t^n) \underset{n\to\infty}{\to} f(t, Y_t, Z_t) \qquad dt - p.p,$$

et

$$\begin{aligned} |f_n(t, Y_t^n, Z_t^n)| &\leq K\left(1 + \sup_n |Y_t^n| + \sup_n |Z_t^n|\right) \\ &= K(1 + G + M) \in \mathbb{L}^1([0, T], dt). \end{aligned}$$

Ainsi pour presque tout w et uniformément en t

$$\int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds \underset{n\to\infty}{\to} \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds,$$

a partir des propriétés de continité de l'intégrale stochastique, nous obtenons.

$$\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T Z_s^n dW_s - \int_t^T Z_s dW_s\right| \overset{\mathbb{P}}{\to} 0.$$

Maintenant pour une sous-suite, on peut supposer que la dernière convergence est $\mathbb{P} - p.s.$ finallement

$$|Y_t^n - Y_t^m| \leq \int_t^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)|\, ds + \left|\int_t^T Z_s^n dW_s - \int_t^T Z_s^m dW_s\right|,$$

et donc en prenant des limites sur m et supremum sur t on obtient.

$$\sup_{t\leq T}|Y_t^n - Y_t| \leq \int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s, Z_s)|\, ds + \sup_{t\leq T}\left|\int_t^T Z_s^n dW_s - \int_t^T Z_s dW_s\right| \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

d'ou l'on déduit que Y^n converge uniformément en t vers Y (en particulier Y est un processus continue).

Proof. Rappelez-vous que (Y^n) est monotone, par conséquent nous avons en fait la convergence uniforme pour toute la suite et pas seulement pour une sous-suite. En prenant les limites de (3.3), nous en déduisons que (Y, Z) est un solution adapté dans $\mathcal{H}^2$ de (3.1).
Soit $\left(\hat{Y}, \hat{Z}\right)$ un solution de $\mathcal{H}^2$ de (3.1). A partir du théorème de comparaison on obtient que $\forall n\ Y^n \leq \hat{Y}$ et donc $Y \leq \hat{Y}$ pronveant que Y est la solution minimale. ■

Remarque 3.1 *Par le **Théorème 3.1**, on sait qu'il existe une solution du **EDSR** (3.1) "minimal où maximal" sous les hypothèses **(H2.1)-(H2.3)**, mais les solutions de (3.1) peuvent être non uniques.*

Exemple 3.1 *Par exemple, considérons le **EDSR** suivant :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T |Y_s|\, ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{3.6}$$

*Notons que (3.6) satisfait **(H2.1)-(H2.3)**, de plus, pour tout* $c \in [0, T]$,

$$(Y_.; Z_.) = \left(\max\left(e^{c-t}\,|Y_c|\,, e^{-(c-t)}\,|Y_c|\right); 0\right).$$

sont les deux solutions de (3.6). La solution de (3.6) n'est pas unique.

Bibliographie

[1] Alibert, J.J. and Bahlali, K., 2001. Genericity in deterministic and stochastic differential equations. In Séminaire de Probabilités XXXV (pp. 220-240). Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] Bismut, J.M., 1978. An approximation method in optimal stochastic control. SIAM Journal on Control and Optimization, 16(1), pp.122-130.

[3] Briand, P., 2001. Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] Gauthier, G., 2011. Calcul stochastique I.

[5] Golse, F., Laszlo, Y., Pacard, F. and Viterbo, C., 2013. Analyse réelle et complexe. Ecole Polytechnique, Département de mathématiques.

[6] Jeanblanc, M. and Simon, T., 2005. Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[7] Jeanblanc, M., 2006. Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[8] Lepeltier, J.P. and San Martin, J., 1997. Backward stochastic differential equations with continuous coefficient. Statistics & Probability Letters, 32(4), pp.425-430.

[9] Pardoux, E. and Peng, S., 1990. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), pp.55-61.

[10] Roux, R., Partie 1 : Etude de l'équation de la chaleur.

[11] Tudor, C., 2007. Cours de calcul stochastique.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du v.a X.
EDS	Equation Différentielle Stochastique.
$EDSR$	Equation Différentielle Stochastique Rétrograde.
$BDSE$	Backward Stochastic Differential Equations.
$\mathbb{P}$	La probabilité.
$\mathbb{P}-p.s$	La probabilité presque sûrment.
$\mathbb{P}-p.p$	La probabilité presque partout.
$resp$	Respectivement.
MB	Mouvement Brownien.
sup	Supérieur
inf	Inférieur
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filtré.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0;T]$ avec la mesure de $d\mathbb{P}$
$m \otimes \mathbb{P}-p.p$	Presque par tout par rapport la mesure $m \otimes \mathbb{P}$
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d\ +1}\right)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^{d+1}$

Annexe B : Quelques outils mathématique

Théorème 3.2 ***(Inégalité de Doop)*** *[11] $\forall p > 1$, si $\{X_N\}_{n=1,...,N}$ est une martingale dans $\mathbb{L}^p$*

$$E\left[|X_N|^p\right] \leq E\left[X^{*p}\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|X_N|^p\right],$$

avec $X^* := \max\left(|X_1|, ..., |X_N|\right)$.

Théorème 3.3 ***(espace de Banach)*** *[5] un espace de Banach est un espace vectoriel normé.*

Définition 3.1 ***(Suite de Cauchy)*** *[10] On dit qu'une suite de réels est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq N \ \text{ et } m \geq N) \Rightarrow (|u_n - u_m| \leq \epsilon).$$

Cette proposition peut se comprendre comme

$$\lim_{m,n \to \infty} |u_n - u_m| = 0.$$

Théorème 3.4 ***(de point fixe de Banach)*** **:***Soit M un espace métrique complet et $f : M \to M$ une contraction.*

Alors f a un unique point fixe a :

$$f(a) = a$$

Résumé

Dans notre travaill nons avons étudié s'il existe une solution minimale où maximale aux équations différentielles stochastique rétrogdrades.

1-Le premièr résultat est fondamental établi par Paradoux et Peng en 1990 qui étudierie cas ou le générateur f est globalement lipschitzien avec un condition terminale ξ, est FT-mesurable et de carré intégrable. La preuve de ce resultat est basé sur un argument de poit fixe.

2-Le dexième résultat, traite le problème de l'existence des solution pour l'EDSR dont le générateur f et continue et la condition terminale ξ et borné.

Mots clés: Equation différentielle stochastique rétrogrades, Processus d'itô, Processus stochastique, Solution minimale, Solution maximale, Existence et unicité.

Summary

In our work we have studied whether there exists a minimal or maximal solution to the backward stochastic differential equations.

1-The first result is fundamental established by Paradoux and Peng who study the case where the generator f is globally Lipschitzian with a terminal condition ξ, FT-measurable with an integrable square. The proof of result is based on a fixed poit argument.

2-The second result, deals with the problem of the existence of the solutions for the BSDEs whose generator f is continuous and the terminal condition ξ and bounded.

Keywords: Backward stochastic différential équation; Itô process; Stochastic process; Minimum solution; Maximum solution; Existence and uniqueness.

ملخص

لقد درسنا في عملنا هذا وجود حل أدنى أو أقصى للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية ذات مولد مستمر و يحقق شرط التزايد الخطي من أجل الوصول لهذه النتيجة نعتمد على تقنيات التقارب ونظرية المقارنة

الكلمات المفتاحية :

- المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية.
- الحل الأدنى و وجوده.
- نظرية المقارنة.