UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté de Mathématiques et Sciences des Matières

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : ASMA LAKEHAL

Thème

Approximation d'un problème aux valeurs propres unidimensionnel

Soutenu publiquement le : 29/06/2021

Devant le jury composé de :

Djamal Ahmed Chacha	Prof.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Abdallah Bensayah	M.C.A.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Abderrazek Ghezal	M.C.A.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Ismail Merabet	M.C.A.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes très chère parents «**Abdarazzek** » et « **Sekhria** » qui ont oeuvré pour ma réussite, par leurs amours, leurs soutiens, leurs sacrifies consentis.

Pour toute leurs assistances et leurs présence dans ma vie.

Remerciements

Avant toute considération, je remercie **le Grand Dieu** le tout puissant qui, m'a aidé à achever ce memoire.

Je tiens tout a remercier en premier lieu mon encadreur **Docteur Ismail MERABET** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à ce memoire.

J'exprime également ma gratitude aux **Docteurs membres du Jury** qui m'ont honoré en acceptant de juger et d'evaluer ce memoire.

Je remercie également **les membres du département de Maths-Informatique**. Et tous **les professeurs** qui m'ont aidé pendant mon cursus.

Je remercie aussi **toute personne** de prés ou de loin qui a contribué à la finalisation de ce memoire.

Table des matières

Notations

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur 1D.
- $(.,.)$: Le produit scalaire et $\langle .,. \rangle$: Le produit de dualité.
- $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1 / v = 0 \text{ dans } \partial\Omega\}$.
- H^{-1} : dual de l'espace H_0^1.

INTRODUCTIONS

Le calcul numérique des valeurs propres et des fonctions propres des équations aux dérivées partielles est très important pratiquement dans tous les domaines des applications physiques et techniques.

Dans ce memoire, nous présentons la discrétisation par éléments finis des problèmes aux valeurs propres pour un problème modèle elliptique.

Ce memoire est réparti en quatre chapitres :

Dans le chapitre un : Nous considérerons comme exemple de motivation introductive : le problème parabolique de la conduction thermique dépendant du temps dans un corps physique qui conduit à une suite de problèmes elliptiques aux valeurs propres.

En suite on introduit quelques concepts de base en analyse fonctionnelle tels que les espaces de Banach et Hilbert, les espaces duals, les opérateurs compacts, les espaces normés, les opérateurs linéaires, l'opérateur adjoint, les opérateur compacts ... ext. [10] [11]

Dans le chapitre deux : Nous présentons la formulation primale pour le problème de Laplace unidimensionnel aux valeurs propres, nous présentons aussi la théorie spectrale pour opérateurs compacts, **min/max** des valeurs propres quotient de Rayleigh sont introduits et des résultats de monotonie sont prouvés. [3] [8]

Nous étudions aussi la demonstration de la convergence l'approximation de Galerkin des opérateurs compacts.

Dans le chapitre trois : Nous présentons la formulation mixte pour le problème aux valeurs propres du Laplacien unidimentionnel. [4] [6]

Finalement : Nous terminons ce mémoire par **une conclusion** et des perspectives.

Chapitre 1

Exemple préliminaire

1.1 Exemple de motivation

Nous commençons par Le problème de la conduction thermique dans un corps physique $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

On suppose que la température est maintenue à zéro sur le bord $\partial\Omega$.

Notre objectif est de déterminer la distribution de température $u(x,t)$ en un point : $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ de Ω au temps $t > 0$.

La loi physique qui décrit la conduction thermique , conduit à l'équation differentielle partielle suivante :

$$\begin{cases} \mu \dfrac{du}{dt} - div\,(A\nabla_x u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [\,0.T] \\ u(x,t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad \forall\, x \in \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

On postil le développement qui sépare les variables spatiales x de Ω de la variable temporelle t.

$$u(x,t) = v(x)\ w(t) \tag{1.2}$$

Sachant que par derivation partielle de $u(.,.)$ dans (1.2) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = v\dfrac{dw}{dt} \\ \nabla_x u = w\,(t)\,\nabla_x v \end{cases}$$

Par substitution dans la premiere equation dans (1.1) on obtient :

$$\mu\ v\ \frac{dw}{dt} - div_x\,(A\nabla_x v)\,w\,(t) = 0$$

Ce qui est equivalent a :

$$\mu v\frac{dw}{dt} = w\ div\,(A\nabla_x v)$$

Donc :

$$\frac{\mu}{w}\frac{dw}{dt} = \frac{div\,(A\nabla_x v)}{v} \qquad \forall x, \forall t$$

On obtient une egalité de deux fonctions a variables separées.

Cela n'est possible que si :

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{w}\dfrac{dw}{dt} = -\lambda \\ -div\,(A\nabla_x v) = \lambda v \\ \text{avec} \quad \lambda > 0 \quad \text{(constante)} \end{cases} \tag{1.3}$$

On verra plus tard que :

$$\begin{cases} -div\,(A\nabla_x v) = \lambda v \\ v\mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Admet des solutions non nulles si $\lambda > 0$.

il existe donc une suite croissante $(\lambda_i)_i$ tel que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..... < +\infty$$

Conciderant donc $(\lambda_j, v_j)_j$ solution du systeme suivant :

$$\begin{cases} -div\left(A\nabla_x v_j\right) = \lambda_j v_j \\ v_j \mid_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{avec} \;\; \mu \displaystyle\int v_j \bar{v}_j = \delta_{ij} \end{cases} \tag{1.4}$$

On remplace $(\lambda_j, v_j)_j$ solution du systeme precedant dans la premiere equation de (1.3) :

$$\mu\frac{dw_j}{dt} = -\lambda_j w_j\left(t\right)$$

Qui admet comme solution :

$$w_j\left(t\right) = a_j \; e^{-\lambda_j t}$$

On remplaçant dans (1.2) , on obtient :

$$u\left(x,t\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i v_j(x) \; e^{-\lambda_j t}$$

Les coefficients a_j peuvent être déterminés via la condition initiale dans (1.1) en développant f dans le fonctions propres v_j :

$$f\left(x\right) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j v_j(x) \quad avec \;\; f_j = \int f \bar{v}_j \mu$$

Donc

$$u\left(x,t\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i \bar{v}_j(x) \; e^{-\lambda_j t}$$

On note qu'à partir de (1.3) et de la positivité des valeurs propres, on peut montrer que $\lim_{t\to\infty} u\left(x,t\right) = 0$ et que le taux de décroissance pour la température u est géré par le facteur $e^{-\lambda_1 t}$.

1.1.1 Cas unidimensionnel

1) $\Omega =]0,1[$

2) $\mu = \; 1$ constante positive.

3) $A(x) = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Par substitution dans (1.1) :

$$\begin{cases} -v''(x) = \lambda\ v(x) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\ v(x) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de v et de λ sont :

$$\begin{cases} v(x) = \sin \sqrt{\lambda}\ x \\ \sqrt{\lambda} = k\pi \qquad , k = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \pi^2 \Rightarrow v_1(x) = \sin \pi x \\ \lambda_2 = 4\pi^2 \Rightarrow v_2(x) = \sin 2\pi x \\ \lambda_3 = 9\pi^2 \Rightarrow v_3(x) = \sin 3\pi x \end{cases}$$

Nous observons donc que :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq .... \leq +\infty$$

On obtient finalement Les solutions suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_k = k^2\ \pi^2 & \text{valeurs propres} \\ v_k = \sin\ k\pi & \text{vecteurs propres} \end{cases}$$

1.2 Les espaces de Banach

Définition 1.1 .

1. *Une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ est dite de Cauchy si et seulement si :*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

2. *Un e.v.n. est dit espace de Banach s'il est complet. autrement dit, si chaque suite de Cauchy converge (fortement) dans X .*

Théorème 1.2 *.[11]*
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans un e.v.n.X,alors cette suite est borneé dans X.

Corollaire 1.3 *.*
Soit X un espace normé et Y un espace de Banach ,alors $L(X, Y)$ est un espace de Banach.

L'espace de Banach X est dit séparable, s'il existe un sous-ensemble dénombrable et dense $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$.

1.3 Les espaces normés

Dans ce qui suit X désigne un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Nous rappelons la définition suivante :

Définition 1.4 *[10]*
Une norme $\|\cdot\|$ sur X est une application de $X \to [0, \infty[$ qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\forall x \in X, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{1.5}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \tag{1.6}$$

$$\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1.7}$$

Remarque 1.5 *.*

1. *On appelle $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé.*

2. *On peut définir plusieurs normes différentes sur X.*

3. *Deux normes* $\|.\|_1, \|.\|_2$ *sur* X *sont équivalentes, si et seulement si :*

$$\exists C, C' > 0, \quad C' \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \ , \quad \forall x \in X \tag{1.8}$$

4. *Des normes équivalentes induisent la même topologie sur* X.

Théorème 1.6 *(Riesz :N.O.E) [9]*
Soit X *un espace normé et soit* $Y \subsetneq X$ *un sous-espace propre fermé (* Y *fermé dans* X*). Pour tout* $0 < \theta < 1$ *(et* $0 < \theta \leq 1$ *si* X *est un espace de Hilbert) Il existe* $x_\theta \in X$ *avec :*

$$\|x_\theta\|_X = 1 \quad et \quad \theta \leq dist\,(x_\theta, Y) \leq 1.$$

1.4 Les opérateurs linéaires

Définition 1.7 *.*
Soit $L(X,Y)$ *une suite d'opérateurs linéaires et continues,de* X *dans* Y *.*

Corollaire 1.8 *.*
L'espace $L(X,Y)$ *est un espace normé avec la norme suivante :*

$$\|f\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f\,(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|f\,(x)\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f\,(x)\|_Y$$

Nous avons toujours l'inégalité :

$$\forall x \in X \quad et \quad T \in L\,(X,Y) \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \|T\| \, \|x\|_X$$

La norme d'une application linéaire et continue est d'ailleurs la plus petite constante C *.*

On dit que $(T_n)_n \in L(X,Y)$ converge vers T si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} \|T_n(x) - T(x)\|_Y = 0$$

Corollaire 1.9 *Pour chaque* $x \in X$, $T_n x$ *converge vers* Tx. *Alors :*

1. $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$

2. $T \in L(X, Y)$

3. $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$

Corollaire 1.10

$$T_1 \in L(Y, Z),\ T_2 \in L(X, Y) : T_1 \circ T_2 \in L(X, Z) \Rightarrow \|T_1 \circ T_2\| \leq \|T_1\| \, \|T_2\|$$

Théorème 1.11 *(Banach-Steinhaus).[2]*
Soient X et Y deux espaces vectoriels normes. Supposons que X soit un espace de Banach , $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(X, Y)$:

$$\forall x \in X, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

1.5 Les injections des espaces

1.5.1 Les injections des espaces

Soient X et Y deux espaces de Banach avec $X \subset Y$. L'injection $I : X \to Y$ est définie par :

$$Ix = x, \quad \forall x \in X$$

Il est claire que I est linéaire.

Définition 1.12 *Si l'injection I est bornée i.e*

$$\exists C > 0, \quad \textit{tel que} \quad \|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

on dit que l'injection I de X dans Y est continue

Exemple 1.13 $X = (C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *et* $Y = (C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2x + n & si\ x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & si\ x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\|f_n\|_Y = \frac{1}{2}, \quad \|f_n\|_X = n$$

1.6 Les espaces de Hilbert

Soit X un espace vectoriel. Une application $(.,.) : X \times X \to \mathbb{K}$ est appelé un produit scalaire sur X si : [8]

$$(x,x) > 0, \quad \forall x \in X \setminus \{0\} \tag{1.10}$$

$$(\lambda x + y, z) = \lambda (x,z) + (y,z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x, y, z \in X \tag{1.11}$$

$$(x,y) = \overline{(y,x)}, \quad \forall x, y \in X \tag{1.12}$$

Un espace Banach $(X, \|.\|_X)$, est appelé un espace de Hilbert s'il existe un produit scalaire sur X, tel que : $\|x\|_X = \sqrt{(x,x)} \quad \forall x \in X$.
De plus, à partir de $(1.10), (1.11), (1.12)$ nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{1.13}$$

Deux vecteurs $x,\ y$ dans X sont orthogonaux si et seulement si $(x,y) = 0$.
On note cela par $x \perp y$. Pour $A \subset X$:
$A^{\perp} := \{x \in X \mid \forall a \in A : (x,a) = 0\}$ est un sous-espace fermé de X.

Proposition 1.14 *Soit X un espace de Hilbert et $U \subset X$ un sous-espace fermé.*
nous avons :$X = U \oplus U^{\perp}$ c'est-à-dire :
$\forall x \in X : x = u + v, u \in U, v \in U^{\perp}, \|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
Un système de vecteurs orthonormés $(v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans un espace de Hilbert X est une base orthonormée de X si, pour tout $x \in X$, la sèrie de Fourier :
$\sum_{i \in \mathcal{I}} (x, v_i)\, v_i$ *converge vers x.*

Théorème 1.15 *Pour tout espace de Hilbert, il existe une base orthonormée.*

1.7 Espaces duals

1.7.1 Espace dual d'un espace linéaire normé

Soit X un espace linéaire normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

L'espace dual X' de X est l'espace de toutes les applications linéaires bornées.[11]

$$X' = L\left(X, \mathbb{K}\right)$$

X' est un espace de Banach de norme :

$$\|x'\|_{X'} := \|x'\|_{L(X,\mathbb{K})} = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{|x'\left(x\right)|_X}{\|x\|_X} \tag{*}$$

Pour $x'(x)$ on peut aussi écrire $< x, x' >_{X \times X'} = < x', x >_{X' \times X} = \; x'\left(x\right)$

où $< ., . >_{X \times X'}, < ., . >_{X' \times X}$ sont appelés formes duales .

Lemme 1.16 *si $X \hookrightarrow Y$ est une injection continue , alors $X' \hookrightarrow Y'$ est aussi une injection continue.*

1.7.2 Dual d'un opérateur

Proposition 1.17 *.[11]*

Soient X, Y deux espaces de Banach et soit : $T \in L\left(X, Y\right)$. Pour $y' \in Y'$:

$$< Tx, y' >_{Y \times Y'} = < x, x' >_{X,X'} \; , \; \forall x \in X \tag{1.14}$$

définit un unique $x' \in X'$. L'application $y' \to x'$ est linéaire et définit un opérateur dual tel que :$T' : Y' \to X' : T'y' = x'$. De plus, nous avons : $\mathcal{T}' \in L(Y', X')$

$$\|T'\|_{L(Y',X')} = \|T\|_{L(X,Y)} \tag{1.15}$$

L'un des principes les plus généraux de l'analyse fonctionnelle est l'extension des opérateurs linéaires qui sont définis sur quelque sous-espace d'un espace de Banach à l'ensemble des espaces de Banach.

Théorème 1.18 *.[8]*

Soit X un espace de Banach, M un sous-espace de X et f_0 une fonction linéaire continu

définie sur M. Alors il existe une forme linéaire continue f définie sur X qui vérifie :
i) f est une extension de f_0
ii) $\|f_0\|_{L(\mathbb{C},X)} = \|f\|_{L(\mathbb{C},X)}$.

Corollaire 1.19 *Soit X un espace de Banach et $x_0 \in X - \{0\}$. Alors, il existe une forme linéaire continu f_0 sur X telle que :*

$$f_0(x_0) = \|x_0\|_X \quad et \quad \|f_0\|_{X'} = 1$$

1.7.3 L'opérateur adjoint

Soit X un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Pour tout $y \in X$,
$f_y(.) := (., y)_X : X \to \mathbb{K}$ est continue et linéaire :
sur un : $f_y(.) \in X'$ $\quad et \quad$ $\|f_y\|_{X'} = \|y\|_X$.
L'inverse est le résultat du Théorème de Riesz.[8]

Théorème 1.20 *(Théorème de représentation de Riesz).*
Soit X un espace de Hilbert. Pour tout $f \in Y'$ il existe un unique $y_f \in X$ tel que :

$$\|f\|_{X'} = \|y_f\|_X \quad et \quad f(x) = (x, y_f)_X \quad \forall x \in X.$$

Corollaire 1.21 *Soit X un espace de Hilbert. Nous utilisons la même notation que dans le théorème précedent. [8]*

1. *Il existe une forme linéaire conjuguée inversible bornée :*
   $J_X : X \to X'$ *avec* $J_X y = f_y \quad , J_X^{-1} f = y_f$.
   L'application J_X est une isométrie : $\|J_X\|_{L(X,X')} = \left\|J_X^{-1}\right\|_{L(X',X)} = 1$
2. *X' est un espace de Hilbert avec un produit scalaire* $(x', y')_{X'} = \overline{\left(J_X^{-1}x', J_X^{-1}y'\right)_X}$
3. $\|x'\|_{X'}$ *est égal à* $\sqrt{(x', x')_{X'}}$
4. $X \cong X'$*avec* $x(x') := x'(x)$ *et nous identifions X à X''. En particulier, nous avons* $J_{X'} = J_X^{-1}, J_X = (J_X)', \quad T'' = T, pour \quad T \in L(X, Y) \quad si \quad Y = Y''$ *Et si les deux sont des espaces de Hilbert.*

Définition 1.22 *Soit X, Y les espaces de Hilbert et $L(X, Y)$ L'opérateur adjoint de T est donné par ,* $T^* := J_X^{-1} T' J_Y \in L(X, Y)$ *.tel que :*

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \|T^*\|_{L(Y,X)} \quad et \quad (Tx, y)_Y = (x, T^*y)_X \quad \forall x \in X, y \in Y \tag{1.16}$$

Définition 1.23 *:*

1. *$T \in L(X)$ est auto-adjoint si $T = T^*$*
2. *$T \in L(X)$ est une projection si $T^2 = T$.*

Proposition 1.24 *Soit $X_0 \subset X$ un sous-espace fermé de l'espace d' Hilbert X. Pour $x \in X$ il existe un unique ,* $x_0 \in X_0$ *avec :*

$$\|x - x_0\|_X = min\{\|x - y\|_X : y \in X_0\} \tag{1.17}$$

L'application $x \to x_0 := Px$ *est une projection orthogonale.*

1.7.4 La convergence faible

Le théorème de Bolzano-Weierstrass stipule que dans $K \in L(X)$ toute suite bornée a au moins un point d'accumulation. Cette affirmation ne tient que sous une forme plus faible lorsque l'on considère des espaces fonctionnels de dimension infinie.
Nous devrons d'abord définir le concept de convergence faible.

Définition 1.25 *Soit B un espace de Banach et soit B' son espace dual.*
Une suite$(u_l)_{l\in N} \subset B$, converge faiblement vers un élément $u \in B$ si :

$$\lim_{l\to\infty} \|f(u) - f(u_l)\|_{B'} = 0 \quad \forall f \in B'.$$

Afin de distinguer la convergence faible d'une suite $(u_l)_{l\in N}$ à un élément u de la convergence habituelle (forte), nous utilisons la notation, $u_l \rightharpoonup u$.

Théorème 1.26 *Soit l'espace de Banach B réflexif et soit $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans B. [11] tq :*

$$\sup_{l\in\mathbb{N}_0} \|u_l\|_B \leq C < \infty.$$

Alors il existe une sous-suite $\left(u_{l_j}\right)_{j\in N}$ qui converge faiblement vers, $u \in B$.

1.8 Les opérateurs compacts

Définition 1.27 *Le sous-ensemble* $U \subset X$ *de l'espace de Banach* X *est appelé précompact si toute suite* $(x_n)_{n \in N} \subset U$ *a une sous-suite convergente* $(x_{n_i})_{i \in N}$ *. Il est compact si, en outre,* $x = \lim_{i \to \infty} x_{n_i} \in U$ *.[11]*

Définition 1.28 *Soit* X, Y *deux espaces de Banach ,* $T \in L(X, Y)$ *est dit compact si* $\{Tx : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ *est précompact dans* Y *. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires compacts de* X *dans* Y *est :*

$$K(X, Y) = \{T \in L(X, Y) : T \text{ est compact}\}$$

Si $X = Y$ *, on écrit simplement* $K(X)$ *au lieu de* $K(X, Y)$*.*

Lemme 1.29 *.[8]*
Soit $X,\ Y,\ Z$ *des espaces de Banach, soit* $T_1 \in L(X, Y)$ *,* $T_2 \in L(Y, Z)$ *et soit au moins l'un des opérateurs* T_i *soit compact. Alors* $T = T_1 T_2 \in L(X, Y)$ *est également compact.*

Lemme 1.30

$$T \in L(X, Y) \text{ compact } \Rightarrow T' \in L(Y', X') \text{ compact.}$$

Corollaire 1.31 $X \subset\subset Y$ *si toute suite* $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ *avec* $\|x_i\|_X \leq 1$ *a une sous-suite qui converge dans* Y*.*

Remarque 1.32 *Pour* $\dim(X) < \infty$ *ou* $\dim(Y) < \infty$*,* $T \in L(X, Y)$*, est compact.*

Théorème 1.33 *(Heine-Borel). [8]*
Soit X *un espace vectoril normé, et :*

$$\overline{B_1(0)} \text{ compact} \Leftrightarrow \dim X < \infty$$

Le lemme suivant sera plus tard nécessaire pour les théorèmes d'existence lorsqu'il s'agit de problèmes variationnels.

Lemme 1.34 *Soit* $X \subset Y \subset Z$ *des espaces de Banach à plongement continu et soit* $X \subset\subset Y$*. Alors pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe une constante* $C_{\epsilon>0}$ *avec :*

$$\forall x \in X : \|x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X + C_\epsilon \|x\|_Z$$

1.9 L'alternative de Fredholm

Tout au long de cette section, nous supposons que X est un espace de Banach avec la norme $\|.\|_X$, même si : $X = \{0\}$.[11]

Définition 1.35 *Soit X un espace de Banach et $T \in L(X)$ L'ensemble résolvant de T est donné par :*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) = \{0\} \text{ et } R(\lambda I - T) = X\}$$

où $N(.)$ désigne le noyau de l'opérateur T et $R(.)$ son image.
Le spectre $\sigma(T)$, le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$, le spectre continu $\sigma_c(T)$ et le spectre résiduel $\sigma_r(T)$ sont donnés par :

$$\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$$
$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : N(\lambda I - T) \neq 0\}$$
$$\sigma_c(T) := \left\{\lambda \in \sigma(T) : N(\lambda I - T) = 0 \wedge R(\lambda I - T) \neq X \wedge \overline{R(\lambda I - T)} = X\right\}$$
$$\sigma_r(T) := \left\{\lambda \in \sigma(T) : N(\lambda I - T) = 0 \wedge \overline{R(\lambda I - T)} \neq X\right\}$$

Remarque 1.36 *:*

1. *on a $\lambda \in \rho(T)$ si $\lambda I - T : X \to X$ est bijective.*
   nous concluons que : $R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$, existe.
   La fonction $R_\lambda(T)$ est la résolvante de T , (est considérée comme une fonction de λ)et est désignée comme la fonction résolvante.

2. *$\lambda \in \sigma_p(T)$ est équivalent à : $\exists u \in X \setminus \{0\} : Tu = \lambda u$*
   On appelle λ une valeur propre et u un vecteur propre de T.
   L'espace propre de T correspondant à λ est $N(\lambda I - T)$.
   L'espace propre est un sous-espace T-invariant.

Définition 1.37 *Une application $A \in L(X, Y)$ est un opérateur de Fredholm si*

1. *$R(A)$ est fermé,*

2. *$dimN\left(A\right) < \infty$ et $codimR(A)) < \infty$. L'indice de l' opérateur Fredholm est :*

$$ind\left(A\right) := dimN\left(A\right) + codimR\left(A\right)$$

Le fait que la co-dimension de $R(A)$ est finie, implique que $Y = R(A) \oplus Y_0$ pour un sous-espace de dimension finie $Y_0 \subset Y$. On a $codimR\left(A\right) := dimY_0$ indépendant du choix de Y_0. La relation entre les opérateurs Fredholm et les opérateurs compacts est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.38 *.[8]*
Pour $T \in K(X)$, l'opérateur $(I - T)$ est un opérateur de Fredholm d'indice égal à 0 .

Théorème 1.39 *Soit $T \in K(X)$, l'ensemble $\rho\left(T\right)$ est un ouvert et la fonction résolvante $R_{(.)}\left(T\right)$, est une application complexe analytique de $\rho(T)$ dans $L(X)$,On a :*

$$\left\|R_{\lambda}\left(T\right)\right\|_{L(X)}^{-1} \leq dist\left(\lambda, \sigma\left(T\right)\right)$$

Théorème 1.40 *Soit $T \in L(X)$.si : $\sigma(T)$ est compact, non vide on a :*

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \to \infty} \left\|T^m\right\|_{L(X)}^{1/m} \leq \|T\|_{L(X)}$$

et $r(T)$ est appelé le rayon spectral de T.

Dans ce qui suit, nous étudierons le spectre des opérateurs compacts.

Remarque 1.41 *:*

1. *$dimX < \infty \Rightarrow \sigma\left(T\right) = \sigma_p\left(T\right)$.*
2. *$dimX < \infty \wedge T \in K\left(X\right) \Rightarrow 0 \in K\left(X\right)$. En général, 0 n'est pas une valeur propre de T.*

Le théorème principal de cette section est la théorie de Riesz-Schauder.

Théorème 1.42 *(Riesz-Schauder) Pour tout opérateur $T \in K(X)$ on a :*

1. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *consiste en un nombre dénombrable de valeurs propres (fini ou infini) avec* 0 *comme le seul point d'accumulation possible.*

2. *Pour* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *nous avons :*
   $1 \leq n_\lambda := \left\{n \in \mathbb{N} : N(\lambda I - T)^{n-1} \neq N(\lambda I - T)^n\right\} < \infty,$
   n_λ *est l'indice de* λ *et* $dimN(\lambda I - T)$ *est la multiplicité de* λ.

3. *(Décomposition de Riesz) Pour* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$*on a :*
$$X = N\left((\lambda I - T)^{n_\lambda}\right) \oplus R\left((\lambda I - T)^{n_\lambda}\right)$$
   Les deux sous-espaces sont fermés et T*-invariants et* $N(\lambda - T)^{n_\lambda}$ *est de dimension finie.*

4. *Pour* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, *soit* E_λ *la projection sur* $N(\lambda - T)^{n_\lambda}$ *selon la décomposition en (3).Puis*
$$E_\lambda E_\mu = \delta_{\lambda,\mu} E_\lambda \quad \forall \lambda, \mu \in \sigma(T \setminus) \{0\}.$$

La propriété $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$ peut être reformulée comme l'alternative de Fredholm.

Théorème 1.43 *(Alternative de Fredholm) .[11]*
Soit $T \in K(X)$ *Soit et* $\lambda = 0$. *Alors, soit :*
$$\forall y \in X \ \exists! x \in X : \lambda x - Tx = y$$
où
$$\exists x \in X \setminus \{0\} : \ \lambda x - Tx = 0$$

Définition 1.44 *Soit* X *un espace de Hilbert sur* K. *Alors,* $T \in L(X)$ *est normal si :*
$$T^*T = TT^*,$$
où T^* *est l'adjoint de* T.

Proposition 1.45 *Soit* X *un espace de Hilbert et soit* $T \in L(X)$ *un opérateur normal. Puis* $\lambda I - T$ *est normal pour tout* $\lambda \in K$*et il est :*
$$Test\ normal \Leftrightarrow \|Tx\|_X = \|T^*x\|_X \tag{1.18}$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$N(\lambda I - T) = N\left(\overline{\lambda} I - T^*\right)$$

Lemme 1.46 *Soit X un espace de Hilbert sur K et $X = 0$.*
Si $T \in L(X)$ est normal alors :

$$r(T) = \|T\|_{L(X)}$$

Théorème 1.47 *Soit X un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et soit $T \in \mathcal{K}(X)$ normal, $T = 0$. Alors T à la forme :*

$$Tx = \sum_{k \in N} \lambda_k (x, e_k)_X e_k \tag{1.19}$$

avec $N \subset \mathbb{N}$ et un système orthonormé $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $0 \neq \lambda_k \in \mathbb{C}$,où $\lambda_{\to k}0$ quand $k \to \infty$ si N est infini. De plus, X a la décomposition orthogonale

$$X = N(T) \oplus \overline{span\{e_k : k \in N\}}$$

Les nombres λ_k sont les valeurs propres de T correspondant aux vecteurs propres e_k. Les valeurs λ_k peuvent coïncider pour différentes valeurs de k. De plus, l'indice satisfait $n_{\lambda_k=1}$.

Remarque 1.48 *:*

1. *Soit X un espace de Hilbert et soit $T \in L(X)$ auto-joint, c'est-à-dire $T^* = T$. Alors, $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ et $\|T\|_{L(X)}$ ou $-\|T\|_{L(X)}$ est une valeur propre.*

2. *Si T est en plus semi-défini positif, c'est-à-dire $(Tx, x)_X \geq 0$, $\forall x \in X$, alors $\sigma_p(T) \subset [0, \infty]$ et $\|T\|_{L(X)}$ est une valeur propre.*

1.10 Les espaces de Sobolev

Dans cette sous-section, nous généraliserons la notion classique de dérivée pour certains sous-espaces de L^p qui sont notés comme des espaces de Sobolev.[11]

Définition 1.49 *:*

1. *Pour* $k \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [1, +\infty]$ *l'espace de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *et sa norme sont donnés par :*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{\varphi \in L^p(\Omega) \setminus \forall |\alpha| \leq k : D^\alpha(\varphi) \in L^p(\Omega)\}$$

$$\|\varphi\|_{k,p} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p}$$

Ici $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_d^{\alpha_d}\varphi$ *désigne la dérivée faible de* φ.

2. *Une semi-norme sur* $W^{k,p}(\Omega)$ *est donnée par :* $|\varphi|_{k,p} := \left\{\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \varphi\|^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{1/p}$ *Dans le cas* $p = 2, W^{k,2}(\Omega)$ *est un espace de Hilbert et nous écrivons* $H^k(\Omega)$ *tout court au lieu de* $W^{k,2}(\Omega)$ *et sautez l'index «2» pour la norme correspondante et pour la semi-norme.*

Théorème 1.50 *:[8]*

1. *L'espace* $W^{k,p}(\Omega)$ *de norme* $\|.\|_{k,p}$ *est un espace de Banach.*

2. $C^\infty(\Omega) \bigcap W^{k,p}(\Omega)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\Omega)$ *.*

3. $H^k(\Omega)$ *est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :*

$$(\varphi, \psi)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha \varphi D^\alpha \psi$$

En général, $C_0^\infty(\Omega)$ *n'est pas dense dans* $W^{k,p}(\Omega)$ *. La fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *par rapport à la norme* $\|.\|_{k,p}$ *définit l'espace de Sobolev avec des conditions aux limites nulles au sens «faible».*

Définition 1.51 $W_0^{k,p}(\Omega)$ *est la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *de* $W^{k,p}(\Omega)$ *-norme.*
Nous définissons $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Définition 1.52 *Le domaine* Ω *a une frontière de Lipschitz resp.* Ω *est un domaine de Lipschitz, s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et des ouverts* $U_1, ..., U_N \subset \mathbb{R}^d$ *avec les propriétés suivantes :*

1. $\partial\Omega \subset \bigcup_1^N U_i$
2. *Pour tout* $1 \leq i \leq N$, *l'intersection* $\partial\Omega \cap U_i$ *peut être représentée par le graphe d'une fonction continue Lipschitz.*

Remarque 1.53 *: Soit Ω un domaine de Lipschitz. Alors, il existe un champ normal extérieur presque partout sur $\partial\Omega$. Une conséquence du théorème de trace est la caractérisation alternative suivante de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.54 *:* $W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega) \ : \ \varphi_{|\partial(\Omega)} = 0 \right\}$
Pour de nombreuses applications, l'inégalité de Friedrich est un outil essentiel pour prouver l'existence et l'unicité.

1.11 Problèmes variationnels

Nous allons transformer les problèmes aux limites elliptiques (comme point de départ de leur discrétisation) en problèmes variationnels équivalents.[11]

Théorème 1.55 *(Lax-Milgram) .[8]*
Soit $(X, \|.\|_X)$avec X un espace de Banach, $l \in X'$ une fonction linéaire continue

$$a : X \times X \to \mathbb{C}$$

une forme sesquilinéaire continue. De plus, nous supposons que a est hermitienne :

$$a(u,v) = \overline{a(v,u)} \quad \forall u, v \in X$$

et coercitif : $\exists\alpha > 0$ tel que :

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X$$

Alors, la fonction $J \in C^2(X, \mathbb{R})$,

$$J(u) := \frac{1}{2} a(u,u) - Re(u)$$

a un minimiseur unique $u^* \in X$ Ce minimiseur est l'unique solution de

$$a(u^*, u) = l(v) \quad \forall v \in X \tag{1.20}$$

Théorème 1.56 *Soit,*

$$A := \|a\|_{L(X\times X,\mathbb{C})} := \sup_{u,v\in X-\{0\}} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|_X \|v\|_X}$$

Soit $S \subset X$ un sous-espace de dimension finie de X. L'unique minimiseur de J dans X resp. S est notée $u \in X$ resp.$u_{S\in S}$ nous S. donc :

$$\|u - u_S\|_X \leq \frac{A}{\alpha} \inf_{v\in S} \|u - v\|_X \tag{1.21}$$

Soit de plus H un espace de Hilbert de produit scalaire $(.,.)_H$ et de norme $\cdot \ \|.\|_H$ tel que X est un plongement continu et dense dans H pour la norme de H .
Pour $\varphi \in H$, soit $u_\varphi \in X$ désigne l'unique solution de :

$$a(v, u_\varphi) = (\varphi, v)_H \quad \forall v \in X \tag{1.22}$$

Donc

$$\|u - u_S\|_H \leq A \|u - u_S\|_X \sup_{\varphi\in H-\{0\}} \inf_{v\in S} \frac{\|u_\varphi - v\|_X}{\|\varphi\|_H} \tag{1.23}$$

Remarque 1.57 *On peut généraliser ce théorème en affaiblissant ces hypothèses*

Théorème 1.58 *Soit $(X\,\|.\|)_X$, $(Y\,\|.\|)_Y$ sont des espaces de Banach et $X \hookrightarrow_c Y$ et $a_1, a_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ deux formes sesquilinéaires continues. On suppose que la forme sesquilinéaire a est hermitienne et coercive.*
De plus, nous supposons pour la forme sesquilinéaire a_1 qu'il existe une constante $\overline{A} \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$a_1(u, v) \leq \overline{A} \|u\|_X \|v\|_Y \quad \forall u, v \in X \tag{1.24}$$

soit $a := a_1 + a_2$ ie :

$$a(u, v) := a_1(u, v) + a_2(u, v) \quad \forall u, v \in X$$

Pour tout $u \in X - \{0\}$, on suppose

$$a(u, u) \neq 0 \tag{1.25}$$

Ensuite, le problème :

$$a(u, v) = l(v) \ \wedge \ a(v, u) = l(v) \quad \forall v \in X \tag{1.26}$$

possède des solutions uniques pour toute fonction linéaire continue $l \in X'$

1.11.1 Solution faible

Tout au long de cette section, nous supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné de bord Lipschitz $\Gamma := \partial\Omega$, et vecteur normal n. Nous considérerons l'equation aux dérivées partielles linéaire, elliptique du second ordre. La forme générale est :

$$-\sum_{1\leq i,j\leq d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1.27}$$

où les hypothèses précises sur $f, c, b = (b_1, b_2, ..., b_d)^t$, et $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{d}$ seront formulés dans l'hypothèse(1.63) et la définition (1.64).

1. Conditions aux limites de Dirichlet (homogènes) : $u = 0$ sur Γ ,
2. Conditions aux limites de Neumann (inhomogènes) : $< \mathbf{A}\ n, \mathrm{grad}\ u >= g \ \ sur\ \Gamma$,
3. conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann : $u = 0\ sur\ \Gamma_D$ et $< \mathbf{A}\ n, \mathrm{grad}\ u >= g \ \ sur\ \Gamma_N$.

Ici, nous supposons que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ et $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ Pour les conditions aux limites mixtes, nous supposerons que Γ_D a une mesure de dimension $(d-1)$ positive.
La restriction à l'homogénitée de La condition aux limites de Dirichlet n'est pas indispensable mais évite les difficultés techniques. Soit $u \in C^2(\Omega)$ est une solution avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et $v \in C_0^\infty(\Omega)$ par Multiplication de (1.30) avec v, puis par intégration et application du théorème Gauss conduit à :

$$\int_\Omega fv = -\int_\Omega v div\left(\mathbf{A} grad\ u\right) + \int_\Omega < \mathbf{b}, \mathrm{grad}\ u > v + \int_\Omega cuv \tag{1.28}$$

$$= \int_\Omega (< grad\ v, \mathbf{A} grad\ u > + < \mathbf{b}, grad\ u > v + cuv\ ) \tag{1.29}$$

Comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ il s'ensuit que $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfait :

$$\int_\Omega (< \nabla v, \mathbf{A}\nabla u > + < \mathbf{b}, \nabla u > v + cuv\ ) = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_1^0(\Omega) \tag{1.30}$$

Vice versa, la relation (1.31) implique qu'une solution de (1.33) satisfait l'équation différentielle (1.30) pourvu qu'il soit suffisamment lisse, plus précisément, dans $C^2(\Omega)$.

En ce sens,le problème (1.32) est équivalent à l'équation différentielle (1.30) avec frontière de Dirichlet homogène conditions. Si l'on considère dans l'argument précédent les fonctions $v \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$, alors, il survient des termes limites supplémentaires $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} v$ dans (1.31), où $\tilde{n} = \mathbf{An}$. Si u satisfait le Neumann conditions aux limites on peut les substituer dans l'intégrale :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} v = \int_{\Gamma} gv$$

Ainsi, dans ce cas, nous allons modifier l'équation (1.30) par le terme supplémentaire $\int_{\Gamma} gv$ sur le côté droit. Avant de définir les solutions faibles, nous allons formuler les hypothèses de base sur les coefficients.

Théorème 1.59 *Les coefficients* $\mathbf{A}, \mathbf{b}, c$ *dans* (1.33) *satisfont :*

1.
$$\mathbf{A} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d}\right) \wedge \forall \mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{A}^{\mathbf{t}}\left(\mathbf{x}\right)$$
$$0 < a := \inf_{x\in\Omega} \lambda_{min}\left(\mathbf{x}\right) \leq \sup_{x\in\Omega} \lambda_{max}\left(\mathbf{x}\right) =: A < \infty$$
où $\lambda_{min}\left(\mathbf{x}\right)$ *désigne la plus petite valeur propre de* $\mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)$ *et* $\lambda_{max}\left(\mathbf{x}\right)$ *la plus grande.*

2. $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^{d}\right) \wedge div\, \mathbf{b} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(\Omega\right)$

3. $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(\Omega\right)$. *Ces considérations conduisent à la définition suivante.*

Définition 1.60 *:*

1. $u \in H_0^1\left(\Omega\right)$ *est une solution faible homogène* (1.30) *de l'équation différentielle avec Conditions aux limites de Dirichlet si elle satisfait :*
$$\int_{\Omega} \left(< \mathbf{A}\nabla u, \nabla v > + < \mathbf{b}, \nabla u > v + cuv\ \right) = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

2. $u \in H_D^1\left(\Omega\right) := \{\varphi \in H^1 : \varphi\,|_{\Gamma_D} = 0\}$ *est une solution faible de l'équation différentielle* (1.30) *avec des conditions aux limites mixtes si*
$$\int_{\Omega} < \mathbf{A} grad\ u, grad\ v > + < \mathbf{b}, grad\ u > v + cuv = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma_N} gv \ \ \forall v \in H_D^1(\Omega)$$

3. $u \in H^1(\Omega)$ *est une solution faible de l'équation différentielle* (1.30) *avec des conditions aux limites de Neumann si :*

$$\int_\Omega < \mathbf{A} grad\ u, grad\ v > + < \mathbf{b}, grad\ u > v + cuv = \int_\Omega fv + \int_\Gamma gv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Théorème 1.61 *(existence et unicité)[8]*

1. *Si* $-\frac{1}{2}\text{div } \mathbf{b} + c \geq 0$ *est satisfait, alors : l'équation différentielle* (1.30) *avec Les conditions aux limites de Dirichlet ont une unique solution faible de homogène .*

2. *Si* $-\frac{1}{2}\text{div } \mathbf{b} + c \geq 0$ *et* $< \mathbf{b}, \mathbf{n} > \geq 0$*dans* Γ_N *alors, l'équation différentielle* (1.30) *avec conditions aux limites mixtes a une solution faible unique.*

3. *Si* $c \geq c_0 > 0, -\frac{1}{2}\text{div } \mathbf{b} + c \geq 0$ *et* $< \mathbf{b}, \mathbf{n} > \geq 0$ *dans* Γ_N *alors, l'équation différentielle* (1.30) *avec des conditions aux limites de Neumann a une unique solution faible.*

4. *Si* $c = 0$, $-\frac{1}{2}\text{div } \mathbf{b} \geq 0$, $< \mathbf{b}, \mathbf{n} >= 0$ *dans* Γ *et* $\int_\Omega f + \int_\Gamma g = 0$ *alors, l'équation différentielle* (1.30) *avec les conditions aux limites de Neumann a une unique solution faible* u *avec* $\int_\Omega u = 0$.

Théorème 1.62 *[8]*

En outre des l'hypothèses du théorème (1.59)*, soit* $\Gamma \subset C^1(\Omega)$, Ω *convexe et* $f \in L^2(\Omega)$.
Nous supposons aussi que :
$c \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+^*\right), \mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_d)^t \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d\right)$
et $\mathbf{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^d \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d}\right)$.
On suppose qu'il existe (dans le cas du problème de Neumann mixte), une fonction g verifiant :

$$u_g \in H^2(\Omega) \text{ de sorte que : } \quad g = u_g\,|_{\Gamma_N}$$

Alors :
La solution faible u de l'équation différentielle elliptique homogène ou mixte ou les conditions aux limites de Neumann satisfont $u \in H^2(\Omega)$.

On obtient donc l'estimation a priori :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_g\|_{H^2(\Omega)} \right\}$$

La constante c *ne dépend que des coefficients :* c, $\mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ *dans l'équation différentielle :* (1.30).

Chapitre 2

Formulation primale pour le Laplacien en 1D

2.1 Le problème de Laplace en dimension 1D

Nous commençons par un exemple basic, il s'agit du problème unidimensionnel.[3]
Soit $\Omega =]0, \pi[$ et on considère le problème qui consiste à chercher les valeurs propres λ et les fonctions propres correspondants u (avec $u \neq 0$) telles que :

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Alors les valeurs propres sont les nombres :

$$\lambda = 1, 4, 9, 16, ...$$

et les sous-espaces propres sont engendrés par les fonctions :

$$\lambda_k = k^2 \qquad u_k\left(x\right) = \mathbf{sin}\left(kx\right)$$

$$\sin(kx), \quad k = 1, 2, 3, 4, ...$$

Une approximation standard par éléments finis, est obtenue en considérant une formulation variationnelle convenable.

Soit $V = H_0^1(\Omega)$, On multiplie l'équation précédente par une fonction $v \in V$, et on intègre par partie, On obtient le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in V \setminus \{0\} \quad \text{telles que :} \\ \displaystyle\int_0^\pi u'(x)v'(x)\ dx = \lambda \int_0^\pi u(x)v(x)\ dx, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{2.2}$$

Une approximation de Galerkin de ce problème variationnel est basée sur un espace de dimension fini :

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\} \subset V$$

et consiste à chercher les valeurs propres discrètes λ_h et les vecteurs propres $u_h \neq 0$ tels que :

$$\int_0^\pi u_h'(x)v_h'(x)\ dx = \lambda_h \int_0^\pi u_h(x)v_h(x)\ dx, \quad \forall v_h \in V_h$$

Il est bien connu que cela conduit un système algébrique de la forme :

$$Ax = \lambda Mx$$

Où la matrice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ est définit par :

$$a_{ij} = \int_0^\pi \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\ dx$$

La matrice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^N$ est définit par :

$$m_{ij} = \int_0^\pi \varphi_j(x)\varphi_i(x)\ dx$$

Etant donné une discrétisation uniforme de $[0, \pi]$ de pas h, et soit V_h l'espace des éléments finis $P1$ (conformes) alors, les matrices associées sont données par :

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \cdot \begin{cases} 2 & \text{pour } i = j \\ -1 & \text{pour } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{pour le reste} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$m_{ij} = h \cdot \begin{cases} 4/6 & \text{pour } i = j \\ 1/6 & \text{pour } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{pour le reste} \end{cases} \tag{2.4}$$

Avec $i, j = 1, ..., N$, où N représente le nombre des noeuds intérieurs de l'interval $[0, \pi]$

$$u_h^{(k)}(ih) = \sin(kih), \quad i = 1, ..., N \tag{2.5}$$

Et les valeurs propres correspondantes sont données par :

$$\lambda_h^{(k)} = \frac{6}{h^2} \frac{1-\cos(kh)}{2+\cos(kh)} \tag{2.6}$$

On trouve immédiatement, que :

$$\|u^{(k)} - u_h^{(k)}\|_V = O(h), \quad |\lambda^{(k)} - \lambda_h^{(k)}| = O(h^2) \tag{2.7}$$

Avec $u^{(k)}(x) = \sin(kx)$ et $\lambda^{(k)} = k^2$.

On observe que :

$$\lambda_h^{(k)} = k^2 + \frac{k^4}{12} \cdot h^2 + O(k^6 h^4), \quad \text{lorsque } h \to 0$$

1. Cette propriété a une interprétation physique, car les vecteurs propres présentent plus des oscillations lorsque la fréquence augmente, un maillage plus fin est nécessaire pour avoir une bonne approximation.

2. La deuxième observation importante dans (2.6) c'est le fait que toutes les valeurs propres sont approchées suppérieurement .

$$\lambda^{(k)} \le \lambda_h^{(k)} \le \lambda^{(k)} + C(k)h^2$$

3. Si le même calcul de valeur propre est effectué avec V_h égal à l'espace des polynômes continus par morceaux de degré au plus $p \geq 2$ et s'annulant aux extrémités alors les estimations (2.7) deviennent :

$$\left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_V = O\left(h^p\right) \ , \quad \left| \lambda^{(k)} - \lambda_h^{(k)} \right| = O\left(h^{2p}\right)$$

Dans tous les cas, l'ordre d'approximation des valeurs propres est double par rapport au taux d'approximation des fonctions propres correspondantes. C'est le comportement typique des problèmes aux valeurs propres symétriques.

2.2 Théorie spectrale pour opérateurs compacts

Soit A un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert H dans lui-même.

Définition 2.1 . *[4]*

On appelle spectre de A et l'on note $\sigma(A)$ l'ensemble des scalaires λ tels que $A - \lambda Id$ ne Soit pas inversible.

On dit que λ est une valeur propre de A si $\ker(A - \lambda Id) = \{0\}$ c'est-à-dire si $A - \lambda Id$ n'est pas injectif. Dans ce cas, tout élément non nul de ce noyau est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque 2.2 .

Naturellement, en dimension finie, le spectre ne contient que des valeurs propres, mais il n'en va pas de même en dimension infinie en général, où il est tout à fait possible que $A - \lambda Id$ soit injectif sans être pour autant inversible.

Notons qu'il serait indiqué ici de complexifier l'espace H pour pouvoir parler de spectre comme sous-ensemble de C, mais nous n'aurons affaire qu'à des situations où le spectre est de toutes façons réel.

Étant donné un opérateur linéaire continu A sur H, il est facile de voir qu'il existe un unique opérateur linéaire A^* continu sur H tel que :

$$\forall (x, y) \in H \times H, \quad (Ax, y) = (x, A^* y)$$

L'opérateur A^* s'appelle l'adjoint de A.

Quand A est tel que $A^* = A$, on dit que A est auto-adjoint.

Le théorème spectral de base pour ce qui nous concerne est une généralisation aux espaces de Hilbert du théorème bien connu de diagonalisation orthogonale des endomorphismes symétriques dans un espace euclidien ou des matrices symétriques.

Théorème 2.3 . *[4]*

Soit A un opérateur compact auto-adjoint d'un espace de Hilbert H
séparable de dimension infinie.

1. *Le spectre de A est la réunion de $\{0\}$ et soit d'une suite λ_j de valeurs propres réelles non nulles tendant vers 0, soit d'un nombre fini de valeurs propres réelles non nulles.*

2. *L'espace propre $\ker(A - \lambda_j Id)$, est de dimension finie si λ_j est non nul.*

3. *Il existe une base hilbertienne e_j de H formés de vecteurs propres et l'on a :*

$$\forall x \in H, \quad Ax = \lambda x \quad , (A - \lambda)x = 0$$

2.3 Problèmes variationnels aux valeurs propres

Nous commençons par des problèmes de valeurs propres du Laplacien symétriques posés de manière variationnelle. Nous avons donc affaire à des espaces de Hilbert réels et à des formes bilinéaires réelles. . [8]

$$H = L^2(\Omega) \qquad V = H_0^1(\Omega) \subset H$$

Soient V et H des espaces de Hilbert réels.

$$a(.,.) : \qquad V \times V \to \mathbb{R}$$

Les formes bilinéaires symétriques et continues, et coercive les éléments suivant problème

$$b(.,.) \quad : \quad H \times H \to \mathbb{R}$$

Trouve $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour certains $u \in V$ avec $u \not\equiv 0$ tel que :

$$a(u,v) = \lambda\, b(u,v) \quad \forall v \in V \tag{2.8}$$

Etant donné $f \in H$, nos hypothèses garantissent l'existence d'un unique $Tf \in V$ tel que :

$$a(Tf,v) = b(f,v) \quad \forall v \in V$$

Ce qui est souvent une conséquence d'un plongement compact de$V$ dans H.
On considère $T : H \to H$ auto-adjoint.
on rappelle en particulier que le spectre $\sigma(T)$ de T est un ensemble dénombrable

Tous les éléments positifs de $\sigma(T)$ sont des valeurs propres de multiplicité finie et leurs réciproques sont exactement les valeurs propres de (2.8) . De plus, les solutions propres ont les mêmes espaces propres que celles de T.
Soit $\lambda^{(k)}, k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de λ avec la numérotation naturelle :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ....\lambda_i \leq ....$$

Où la même valeur propre peut être répétée plusieurs fois selon sa multiplicitée. Soit $u(k)$ les fonctions propres correspondantes, avec la normalisation standard :

$$b(u_i, u_i) = 1$$

$$E_i \ = \textbf{span}(u_i)$$

Nous observons explicitement que même pour des valeurs propres simples, la procédure de normalisation n'identifie pas $u(k)$ de manière unique.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$$

Il est bien connu que les fonctions propres jouissent des orthogonalités :

$$a\left(u^{(m)}, u^{(n)}\right) = b\left(u^{(m)}, u^{(n)}\right) = 0 \quad m \neq n \tag{2.9}$$

Qui se déduit facilement de (2.9) si $\lambda^{(m)} \neq \lambda^{(n)}$ sinon, pour plusieurs valeurs propres, lorsque $\lambda^{(m)} = \lambda^{(n)}$, les fonctions propres $u^{(m)}$ *et* $u^{(n)}$ peuvent être choisies telles que les orthogonalités (2.9) soient vérifiées.
Le quotient de Rayleigh (KTR) est un outil important pour l'étude des valeurs propres : il s'avère que :

$$\lambda_1 = \min_{\mathrm{v} \in V} \frac{a(v,v)}{b(v,v)} \quad , \quad u_1 = arg \ \min_{\mathrm{v} \in V} \frac{a(v,v)}{b(v,v)} \tag{2.10}$$

$$\lambda_k = \min_{v \in \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} E_i\right)^{\perp}} \frac{a(v,v)}{b(v,v)} \quad , \quad u_k = arg \min_{v \in \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} E_i\right)^{\perp}} \frac{a(v,v)}{b(v,v)}$$

Où il a été implicitement compris que les minimums sont pris pour $v = 0$ de sorte que les quantités aux dénominateurs ne disparaissent pas.

Le symbole " $\perp$ " désigne le complément orthogonal dans V par rapport au produit scalaire induit par la forme bilinéaire b. En raison des orthogonalités (2.9).

Il s'avère que le complément orthogonal pourrait également être pris par rapport au produit scalaire induit par a.

La discrétisation de Galerkin est basée sur un espace de dimension finie $V_h \subset V$ et se lit comme suit :

Trouvé $\lambda_h \in \mathbb{R}$ tel que pour certains $u_h \in V_h$ avec $u_h \not\equiv 0$ on a :

$$a\left(u_h, v\right) = \lambda_h b\left(u_h, v\right) \quad \forall v \in V_h \tag{2.11}$$

Remarque 2.4 . *[8]*

La théorie que nous décrivons s'applique à une approximation générale de Galerkin.

Puisque V_h est un sous-espace de Hilbert de V.

Nous pouvons répéter les mêmes commentaires que nous avons faits pour le problème(2.8)*, à partir de la définition de l'opérateur de solution discrète $T_h : H \to H$: étant donné $f \in H$, $T_h f \in V_h$ est défini uniquement par :*

$$a\left(T_h f, v\right) = b\left(f, v\right) \quad \forall v \in V_h$$

Puisque V_h est de dimension finie, T_h est compact; les modes propres de T_h sont en correspondance bijective avec celles de (2.11)*, et nous pouvons ordonner les valeurs propres discrètes comme suit :*

$$\lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq ....\lambda_{i,h} \leq .... \leq \lambda_{N(h),h}$$

Où les valeurs propres peuvent être répétées selon leur multiplicité.Nous utilisons $u_h^{(k)}$ avec la normalisation $b\left(u_h^{(k)}, u_h^{(k)}\right) = 1$ pour désigner les fonctions propres discrètes, et $E_h^{(k)} = span\left(u_h^{(k)}\right)$pour les espaces propres associés. Les fonctions propres discretes satisfont aux mêmes orthogonalités que les fonctions continues,

$$a\left(u_h^{(m)}, u_h^{(n)}\right) = b\left(u_h^{(m)}, u_h^{(n)}\right) = 0 \; si \; m \neq n$$

Où encore cette propriété est un théorème lorsque $\lambda_h^{(m)} \neq \lambda_h^{(n)}$ ou une définition quand $\lambda_h^{(m)} = \lambda_h^{(n)}$

De plus, les propriétés du quotient de Rayleigh peuvent être appliquées aux modes propres discrets comme suit :

$$\lambda_{1,h} = \min_{v \in V_h} \frac{a\left(v,v\right)}{b\left(v,v\right)} \quad , \quad u_{1,h} = arg \min_{v \in V_h} \frac{a\left(v,v\right)}{b\left(v,v\right)} \tag{2.12}$$

$$\lambda_{i,h} = \min_{v \in \left(\bigoplus_{k=1}^{i-1} E_{k,h}\right)^{\perp}} \frac{a\left(v,v\right)}{b\left(v,v\right)} \quad , \quad u_{i,h} = arg \min_{v \in \left(\bigoplus_{k=1}^{i-1} E_{k,h}\right)^{\perp}} \frac{a\left(v,v\right)}{b\left(v,v\right)}$$

Où le symbole $(\perp)$ˇdésigne maintenant le complément orthogonal dans V_h. Une conséquence facile de l'inclusion $V_h \subset V$ et des propriétés du quotient de Rayleigh est :

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda_h^{(1)}$$

C'est-à-dire que la première valeur propre discrète est toujours une limite supérieure de la première valeur propre continue. Malheureusement, les équations (2.10) et (2.12) ne permettent pas d'insérer une limite entre les autres valeurs propres, car ce n'est pas vrai dans le cas général $\left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} E_{k,h}\right)^{\perp}$ est un sous-ensemble de $v \in \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} E_k\right)^{\perp}$.
Pour cette raison, nous rappelons l'importante caractérisation min-max des valeurs propres.

Proposition 2.5 . *[3]*
(Le quotient de Rayleigh). Les valeur propre λ_k du problème(2.8) satisfait :

$$\lambda_k^{(h)} = \min_{E \in V_k} \max_{v \in E} \frac{a\left(v,v\right)}{b\left(v,v\right)}$$

Où V_k désigne l'ensemble de tous les sous-espaces E de V avec $dimE = k$.

Preuve. Afin de montrer que λ_k est supérieur ou égal au min-max,Prendre $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ donc $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$, A partir des orthogonalités et la normalisation des fonctions propres, il est facile d'obtenir $u^{(u)}$ pour tout $i \leq k$, et donc $\dfrac{a(v,v)}{b(v,v)} \leq \lambda^{(k)}$.La preuve de l'inégalité inverse donne également l'information supplémentaire que le minimum est atteint pour :
$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ et le choix $v = u^{(k)}$ Il est clair que si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ alors le choix optimal pour$v$ est $u^{(k)}$ d'autre part, si $E \neq \bigoplus_{k=1}^{i} E_k$ alors il existe $v \in E$ avec v orthogonal à $u^{(u)}$ pour tout $i \leq k$, et donc $\dfrac{a(v,v)}{b(v,v)} \leq \lambda^{(k)}$, ce qui montre que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ est le

choix optimal pour E où $V_{k,h}$ désigne l'ensemble de tous les sous-espaces E de V_h avec $dimE = k$. ■

La condition min-max analogue pour le problème discret (2.11) énonce :

$$\lambda_{k,h} = \min_{E \in V_{k,h}} \max_{v \in E} \frac{a(v,v)}{b(v,v)} \tag{2.13}$$

Où $V_h^{(k)}$ désigne l'ensemble de tous les sous-espaces de V_h de dimension égale à k.

2.3.1 Conséquences

C'est alors une conséquence facile qu'une approximation conforme $V_h \subset V$ implique que toutes les valeurs propres sont approchées d'en haut pour tout :

$$k = 1,,,, N(h) \quad on\ a \quad \lambda_{k,h} \geq \lambda_k$$

Puisque tous les ensembles $E_h \in V_h^{(k)}$ dans la propriété discrète min-max sont également dans $V^{(k)}$,

Et donc le minimum discret est évalué sur un ensemble plus petit que le un continu

2.4 Définition de la convergence

[4] Tout d'abord, nous voudrions comme la k^{ime} valeur propre discrète pour converger vers la k^{ime} continue.

La convergence des fonctions propres est un peu plus,compliquée puisque nous ne pouvons pas exigerà $u_h^{(k)}$ de converger vers $u^{(k)}$ dans une norme appropriée.

La définition naturelle de la convergence utilise la notion d'écart entre les espaces de Hilbert, définie par $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que pour $N \in \mathbb{N}$

$$\lambda_{m(1)} < \lambda_{m(2)} < \dots\dots\dots < \lambda_{m(N)} < \dots.$$

$$\hat{\delta}(E,F) = \mathbf{max}(\delta(E,F), \delta(F,E))$$

Où E, F sous-espaces de H

$$\delta(E,F) = \sup_{u \in E, \|u\|_H = 1} \inf_{v \in F} \|u - v\|_H$$

[2] Pour tout entier positif k, soit $m(k)$ désignent la dimension de l'espace couvert par les premiers k espaces propres distincts. On dit alors que le problème aux valeurs propres discrètes (2.11) converge vers le un continu (2.8) .

Définition 2.6 . *[3]*

La définition de la convergence est vérifieé :si, pour tout $\epsilon > 0$ et $k > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout , $h < h_0$, tel que :

$$\lim_{i=1,\dots,m(N)} |\lambda_i - \lambda_{i,h}| \leq \epsilon \tag{2.14}$$

$$\hat{\delta}\left(\bigoplus_{i=1}^{m(N)} E_i \ , \ \bigoplus_{i=1}^{m(N)} E_{i,h}\right) \leq \epsilon$$

Remarque 2.7 *Il est remarquable que cette définition inclut toutes les propriétés dont nous avons besoin : convergence des valeurs propres et des fonctions propres avec une multiplicité correcte.*

Théorème 2.8 . *[3]*

Si :

$$\|T - T_h\|_{\mathcal{L}(H,H)} \to 0 \tag{2.15}$$

Si T est auto-adjoint et compact

la Convergence uniforme $\Leftrightarrow$ Convergence des valeurs propres

Stratégie :

1) prouver la convergence uniforme.

2) estimer l'ordre de convergence.

2.5 Approximation de Galerkin des opérateurs compacts

Proposition 2.9 . *[6]*

Si T est compact de H vers V et que P_h converge fortement à l'opérateur identité de V vers H, puis la norme de convergence (2.15) de H à H est vrai.

1. On pose, $T_h = P_h T$, avec P_h projection orthogonale par rapport ă la forme bilinéaire a.

$$T - T_h = (I - P_h)\, T$$

2. Conséquence de : $a\,(Tf - T_h f, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$
   Si $(I - P_h)$ converge vers zéro point par point et que (T) est compact , alors :
   $(T - T_h)$ converge vers zéro uniformément
   (conséquence du principe de bornage uniforme de Banach-Steinhaus)

Preuve.
Montrons d'abord que $\left\{\|I - P_h\|_{\mathcal{L}(V,H)}\right\}$ est borné. Définissons $c\,(h,u)$ par

$$\|(I - P_h)\, u\|_H = c\,(h,u)\, \|u\|_V$$

La convergence forte (point par point) signifie que Pour chaque u sur un
$c\,(h,u) \to 0$ (convergence ponctuelle)
$M\,(u) = \mathbf{max}_h c\,(h,u) < \infty$ implique $\|I - P_h\|_{\mathcal{L}(V,H)} \leq C$ uniformément
prendre $\{f_h\}$ s.t.$\|f_h\|_H = 1$ et $\|T - T_h\|_{\mathcal{L}(H)} = \|(T - T_h) f_h\|_H$
Puisque f_h est borné dans H et que T est compact de H dans V , il existe une sous-suite, que l'on note encore f_h, telle que : $Tf_h \to W$ en V .
Nous prétendons que $\|(I - P_h)\, Tf_h\|_H \to 0$

$$\begin{aligned}\|(I - P_h)\, Tf_h\|_H &\leq \|(I - P_h)\,(Tf_{h-W})\|_H + \|(I - P_h)\, W\|_H \\ &\leq C\, \|Tf_h - W\|_V + \|(I - P_h)\, W\|_H \leq \epsilon\end{aligned}$$

■

2.6 Conclusion

Pour la formulation standard de Galerkin : Tous les schémas d'éléments finis conformes fournissant une bonne approximation du problème et peuvent être appliqués avec succès au problème aux valeurs propres correspondants.

2.7 Une preuve directe de la convergence pour les VP du Laplacien

[4] Les valeurs propres et les fonctions propres u avec $u \neq 0$. tels que :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Preuve.

Une formulation variationnelle de notre problème peut être obtenue en introduisant l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ et en cherchant $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V$, avec $u \neq 0$, tel que :

$$(\textbf{grad}\ u\ ,\ \textbf{grad}\ v) = \lambda\,(u, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.16}$$

Soit $V_h \subset V$ l'espace des éléments finis linéaires par morceaux sans conditions aux limites. On considère alors l'approximation suivante du problème : trouver $\lambda_h \in \mathbb{R}$ et $u_h \in V_h$ avec $u_h \neq 0$, tels que :

$$(\textbf{grad} u_h, \textbf{grad} v) = \lambda_h\,(u_h, v) \quad \forall v \in V_h. \tag{2.17}$$

Nous utilisons la notation de la section précédente pour les solutions propres de notre problèmes continus et discrets.

En particulier, nous adoptons l'énumération convention que les valeurs propres sont répétées selon leur multiplicité.

Nous savons déjà du principe min-max énoncé dans la proposition . Que toutes les valeurs propres sont approchées d'en haut, c'est-à-dire :

$$\lambda^{(k)} \leq \lambda_h^{(k)}\ \forall k$$

De sorte que, pour montrer la convergence des valeurs propres, nous avons besoin de la borne supérieure

$$\lambda_h^{(k)} \leq \lambda^{(k)} + \epsilon\,(h)$$

Avec $\epsilon\,(h)$ tendant vers zéro lorsque h tend vers zéro. Nous utiliserons

$$E_h = \Pi_h V^k$$

Dans la caractérisation min-max des valeurs propres discrètes (2.13), où

$$V^{(k)} = \bigoplus_{i=1}^{k} E^{(i)}$$

et $\Pi : V \to V_h$ désigne la projection elliptique

$$(\mathbf{grad}\,(u - \Pi_h u)\,, \mathbf{grad} u_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

Pour ce faire, nous devons vérifier si la dimension de E_h est égale à k. Cela peut être faux en général (par exemple, la dimension entière de V_h pourrait être plus petit que k), mais c'est vrai si h est assez petit, par conséquent de la borne :

$$\|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \geq \|v\|_{L^2(\Omega)} - \|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V. \tag{2.18}$$

En effet, si on prend h tel que :

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V^{(k)}, \tag{2.19}$$

Alors (2.18) implique que Π_h est injectif de $V^{(k)}$ dans E_h. Il est clair que (2.19) est satisfaite pour h suffisamment petit.

Prendre Eh dans l'équation discrète min-max donne :

$$\begin{aligned}
\lambda_h^{(k)} &\leq \max_{w \in E_h} \frac{\|\mathbf{grad} w\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|w\|^2_{L^2(\Omega)}} = \max_{v \in V^{(k)}} \frac{\|\mathbf{grad}\,(\Pi_h v)\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\Pi_h v\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&\leq \max_{v \in V^{(k)}} \frac{\|\mathbf{grad} v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\Pi_h v\|^2_{L^2(\Omega)}} = \max_{v \in V^{(k)}} \frac{\|\mathbf{grad} v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} \frac{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\Pi_h v\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&\leq \lambda^{(k)} \max_{v \in V^{(k)}} \frac{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\Pi_h v\|^2_{L^2(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Pour estimer le dernier terme, supposons que Ω soit convexe. Puis, il est bien connu que $V^{(k)}$ est contenu dans $H^2(\Omega)$ et que

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\lambda^{(k)} h^2 \|v\|_{L^2(\Omega)} = C(k)\, h^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Ainsi, à partir de (2.18), on obtient

$$\|\Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \geq \|v\|_{L^2(\Omega)} \left(1 - C(k)\, h^2\right),$$

qui donne l'estimation finale,

$$\lambda_h^{(k)} \leq \lambda^{(k)} \left(\frac{1}{1 - C(k) h^2} \right)^2 \simeq \lambda^{(k)} \left(1 + C(k) h^2 \right)^2 \simeq \lambda^{(k)} \left(1 + 2C(k) h^2 \right).$$

Dans le cas d'un domaine général Ω, il est possible d'obtenir le suivant résultat plus général :

$$\lambda_h^{(k)} \leq \lambda^{(k)} \left(1 + C(k) \sup_{v \in V^{(k)}, \|v\|=1} \|v - \Pi_h v\|^2_{H^1(\Omega)} \right) \tag{2.20}$$

Nous concluons cette section par une estimation des fonctions propres.l'étude du cas des valeurs propres multiples n'est pas si simple.Nous commençons avec la situation où $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(k)}$ pour tout $i \neq k$ (c'est-à-dire que $\lambda^{(k)}$ est un simplevaleur propre). On introduit la quantité suivante . [1]

$$\rho_h^{(k)} = \max_{i \neq k} \frac{\lambda^{(k)}}{\left| \lambda^k - \lambda_h^{(i)} \right|}$$

Ce qui est logique pour h suffisamment petit puisque $\lambda^{(k)}$ est une valeur propre simple et on sait déjà que $\lambda_h^{(i)}$ tend vers $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(k)}$. On considère également la projection $L^2(\Omega)$ de $\Pi_h u^{(k)}$ sur l'espace parcouru par $u_h^{(k)}$,

$$w_h^{(k)} = \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(k)} \right) u_h^{(k)}$$

pour estimer la différence $\left(u^{(k)} - u_h^{(k)} \right)$ comme suit :

$$\left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)} \right\| + \left\| \Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)} \right\| + \left\| w_h^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|. \tag{2.21}$$

Le premier terme de (2.21) peut être facilement estimé en termes de puissances de h en utilisant les propriétés de Π_h ; commençons par l'analyse du second terme. De la définition de $w_h^{(k)}$, nous avons

$$\Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)} = \sum_{i \neq k} \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)} \right) u_h^i,$$

qui donne

$$\left\| \Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)} \right\|^2 = \sum_{i \neq k} \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)} \right)^2 \tag{2.22}$$

tel que :

$$\begin{aligned}\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right) &= \frac{1}{\lambda_h^{(i)}}\left(\mathbf{grad}\ \Pi_h u^{(k)}, \mathbf{grad}\ u_h^{(i)}\right)\\ &= \frac{1}{\lambda_h^{(i)}}\left(\mathbf{grad}\ u^{(k)}, \mathbf{grad}\ u_h^{(i)}\right)\\ &= \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda_h^{(i)}}\left(u^{(k)}, u_h^{(i)}\right),\end{aligned}$$

C'est,

$$\lambda_h^{(i)}\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right) = \lambda^{(k)}\left(u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)$$

Soustraire $\lambda^{(k)}\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)$ des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\left(\lambda_h^{(i)} - \lambda^{(k)}\right)\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right) = \lambda^{(k)}\left(u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)$$

Qui donne :

$$\left|\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)\right| \leq \rho_h^{(k)}\left|\left(u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)\right|$$

on obtient finalement :

$$\left\|\Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\|^2 \leq \left(\rho_h^{(k)}\right)^2 \sum_{i\neq k}\left(u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)^2 \tag{2.23}$$

$$\leq \left(\rho_h^{(k)}\right)^2 \left\|u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}\right\|^2 \tag{2.24}$$

Afin de borner le terme final dans (2.21), nous observons que si nous montrons que :

$$\left\|u_h^{(k)} - w_h^{(k)}\right\| \leq \left\|u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\| \tag{2.25}$$

Alors on peut conclure que :

$$\left\|u_h^{(k)} - w_h^{(k)}\right\| \leq \left\|u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}\right\| + \left\|\Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\| \tag{2.26}$$

et nous avons déjà estimé les derniers deux termes. De la définition de $w_h^{(k)}$ nous avons :

$$u_h^{(k)} - w_h^{(k)} = u_h^{(k)}\left(1 - \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(k)}\right)\right)$$

En outre

$$\left\|u^{(k)}\right\| - \left\|u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\| \leq \left\|w_h^{(k)}\right\| \leq \left\|u^{(k)}\right\| + \left\|u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\|$$

et la normalisation de $u^{(k)}$et $u_h^{(k)}$ donne :

$$1 - \left\| u^{(k)} - w_h^{(k)} \right\| \leq \left| \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(k)} \right) \right| \leq 1 + \left\| u^{(k)} - w_h^{(k)} \right\|$$

C'est,ce :

$$\left| \left| \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(k)} \right) \right| - 1 \right| \leq \left\| u^{(k)} - w_h^{(k)} \right\| \tag{2.27}$$

La normalisation des fonctions propres ne les identifie pas de manière unique , mais seulement jusqu'à leur signe. Donc, nous devons choisir le signe approprié de $u_h^{(k)}$ Afin d'avoir une bonne approximation de $u^{(k)}$ qui fournit :

$$\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(k)} \right) \geq 0,$$

de sorte que nous pouvons conclure que le membre de gauche de (2.25) est égal à $w^{(k)}$ tq :

$$\left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \left(1 + \rho_p^{(k)} \right) \left\| u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

En particulier, dans le cas d'un domaine convexe cela donne la borne optimale

$$\left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2$$

L'erreur dans la norme d'énergie peut être estimée de manière standard comme suit :

$$\begin{aligned}
C \left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \left\| \mathbf{grad} \left(u^{(k)} - u_h^{(k)} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left\| \mathbf{grad}\ u^{(k)} \right\|^2 - 2 \left(\mathbf{grad}\ u^{(k)}, \mathbf{grad}\ u_h^{(k)} \right) + \left\| \mathbf{grad}\ u_h^{(k)} \right\|^2 \\
&= \lambda^{(k)} - 2\lambda^{(k)} \left(u^{(k)}, u_h^{(k)} \right) + \lambda_h^{(k)} \\
&= \lambda^{(k)} - 2\lambda^{(k)} \left(u^{(k)}, u_h^{(k)} \right) + \lambda^{(k)} - \left(\lambda^{(k)} - \lambda_h^{(k)} \right) \\
&= \lambda^{(k)} \left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\lambda^{(k)} - \lambda_h^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

Le terme dominant dans la dernière estimation est le second, il donne la borne optimale suivante (2.20) :

$$\left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C(k) \sup_{v \in V^{(k)}, \|v\|=1} \left\| v - \Pi_h v \right\|_{H^1_{(\Omega)}}$$

Afin de conclure l'analyse de convergence du problème (2.17), il reste à discuter de la convergence des fonctions propres dans le cas de plusieurs solutions propres.

Nous discuterons le cas d'une double valeur propre, mais notre analyse se généralise facilement à toute multiplicité car, Certaines des techniques les détails sont identiques aux arguments utilisés dans le cas d'une fonction propre de multiplicité 1, Soit $\lambda^{(k)}$ une valeur propre de multiplicité 2, c'est-à-dire $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k+1)}$ et $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(k)}$ pour $i \neq k, k+1$

Analogue considérations valables pour l'approximation de $u^{(k+1)}$. Il est clair qu'on ne peut pas s'attendre à $u_h^{(k)}$ pour converger vers u^k par conséquent, nous cherchons une combinaison linéaire appropriée de deux fonctions propres discrètes

$$w_h^{(k)} = \alpha_h u_h^{(k)} + \beta_h u_h^{(k+1)}$$

A partir de l'étude ci-dessus, il semble raisonnable de faire le choix suivant :

$$\alpha_h = \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(k)}\right), \qquad \beta_h = \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(k+1)}\right)$$

De sorte que $w_h^{(k)}$ sera la projection $L^2(\Omega)$ de $\Pi_h u^{(k)}$ sur l'espace parcouru par $u_h^{(k)}$ et $u_h^{(k+1)}$. L'analogue de (2.21) contient alors deux terms

$$\left\|u^{(k)} - u_h^{(k)}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}\right\| + \left\|\Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\| + \left\|w_h^{(k)} - u_h^{(k)}\right\|.$$

et seul le dernier doit être estimé. tel que :

$$\Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)} = \sum_{i \neq k, k+1} \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right) u_h^i,$$

qui donne

$$\left\|\Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\|^2 = \sum_{i \neq k, k+1} \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)^2 \tag{2.28}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right) &= \frac{1}{\lambda_h^{(i)}} \left(\mathbf{grad}\ \Pi_h u^{(k)}, \mathbf{grad}\ u_h^{(i)}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_h^{(i)}} \left(\mathbf{grad}\ u^{(k)}, \mathbf{grad}\ u_h^{(i)}\right) \\
&= \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda_h^{(i)}} \left(u^{(k)}, u_h^{(i)}\right),
\end{aligned}$$

C'est,

$$\lambda_h^{(i)} \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right) = \lambda^{(k)} \left(u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)$$

Soustraire $\lambda^{(k)} \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)$ des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\left(\lambda_h^{(i)} - \lambda^{(k)}\right) \left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right) = \lambda^{(k)} \left(u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)$$

Qui donne :

$$\left|\left(\Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)\right| \leq \rho_h^{(k)} \left|\left(u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)\right|$$

avec la définition appropriée de $\rho_h^{(k)}$,

$$\rho_h^{(k)} = \max_{i \neq k, k+1} \frac{\lambda^{(k)}}{\left|\lambda^{(k)} - \lambda_h^{(i)}\right|},$$

ce qui est logique pour h suffisamment petit, puisque nous savons que $\lambda_h^{(i)}$ a tendance à $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(k)}$ pour $i \neq k, k+1$. De (2.28) on obtient finalement

$$\left\|\Pi_h u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\|^2 \leq \left(\rho_h^{(k)}\right)^2 \sum_{i \neq k, k+1} \left(u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}, u_h^{(i)}\right)^2 \tag{2.29}$$

$$\leq \left(\rho_h^{(k)}\right)^2 \left\|u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}\right\|^2 \tag{2.30}$$

Ce qui donne la borne optimale

$$\left\|u^{(k)} - w_h^{(k)}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(1 + \rho_h^{(k)}\right) \left\|u^{(k)} - \Pi_h u^{(k)}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

La dérivation des estimations de convergence dans la norme énergétique est moins immédiate, puisque nous ne pouvons pas répéter l'argument utilisé pour le cas des solutions propres de multiplicité 1. La principale différence est que l'approximation fonction propre $w_h^{(k)}$ n'est pas normalisé. Cependant, la preuve peut être modifiée comme suit

$$\begin{aligned}
C\left\|u^{(k)}-w_h^{(k)}\right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \left\|\mathbf{grad}\left(u^{(k)}-w_h^{(k)}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left\|\mathbf{grad}\ u^{(k)}\right\|^2 - 2\left(\mathbf{grad}\ u^{(k)}, \mathbf{grad}\ w_h^{(k)}\right) + \left\|\mathbf{grad}\ w_h^{(k)}\right\|^2 \\
&= \lambda^{(k)} - 2\lambda^{(k)}\left(u^{(k)}, w_h^{(k)}\right) + \alpha_h^2\lambda_h^{(k)} + \beta_h^2\lambda_h^{(k+1)} \\
&= \lambda^{(k)} - 2\lambda^{(k)}\left(u^{(k)}, w_h^{(k)}\right) + \left(\alpha_h^2+\beta_h^2\right)\lambda_h^k - \left(\left(\alpha_h^2+\beta_h^2\right)\lambda_h^{(k)} - \alpha_h^2\lambda_h^{(k)} - \beta_h^2\lambda_h^{(k+1)}\right. \\
&= \lambda^{(k)}\left\|u^{(k)}-w_h^{(k)}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_h^2\left(\lambda^{(k)}-\lambda_h^{(k)}\right) - \beta_h^2\left(\lambda^{(k)}-\lambda_h^{(k+1)}\right)
\end{aligned}$$

et on obtient l'estimation optimale

$$\left\|u^{(k)}-w_h^{(k)}\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C(k) \sup_{v\in V^{(k+1)},\|v\|} \|v-\Pi_h v\|_{H^1(\Omega)}.$$

.Le théorème suivant résume les résultats obtenus jusqu'à présent.

Théorème 2.10 *Soit* $(\lambda^{(i)}, u^{(i)})$ *des solutions du problème* (2.17) *, et soit* $(\lambda_h^{(i)}, u_h^{(i)})$ *les solutions discrètes correspondantes du problème* (2.18).
Soit $\Pi_h : V \to V_H$ *la projection elliptique. Alors, pour tout* k *pas plus grand que la dimension de* V_h*, pour* h *suffisamment petit, nous avons :*

$$\lambda^{(k)} \leq \lambda_h^{(k)} \leq \lambda^{(k)} + C(k) \sup_{v\in V^{(k)},\|v\|=1} \|v-\Pi_h v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \textit{avec} \quad V^{(k)} = \oplus_{i\leq k} E^{(k)}$$

Soit $\lambda^{(k)}$ *une valeur propre de multiplicité* $m \geq 1$*, de sorte que :*

$$\lambda^{(k)} = ... = \lambda^{(k+m-1)} \quad \textit{et} \quad \lambda^{(i)} \neq \lambda^{(k)} \quad \textit{pour} \quad i \neq k, ..., k+m-1$$

Donc il existe :

$$\left\{w_h^{(k)}\right\} \subset E_h^{(k)} \oplus ... \oplus E_h^{(k+m-1)}$$

Tel que :

$$\left\|u^{(k)}-w_h^{(k)}\right\|_{H^1_{(\Omega)}} \leq C(k) \sup_{v\in V^{(k+m-1)},\|v\|=1} \|v-\Pi_h v\|_{H^1(\Omega)}$$

Aussi

$$\left\|u^{(k)}-w_h^{(k)}\right\|_{L^2_{(\Omega)}} \leq C(k) \left\|u^{(k)}-\Pi_h u^{(k)}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

■

Les résultats présentés jusqu'à présent sont optimaux lorsque toutes les fonctions propres sont lisses. Par exemple, si le domaine est convexe.

Il est bien connu que $\|v - \Pi_h v\|_{H^1_\Omega} = O\left(h\right)$ pour toutes les fonctions propres V, de sorte que ce théorème donne le second ordre optimal de convergence pour les valeurs propres, premier ordre en $H^1_{(\Omega)}$ pour les fonctions propres, et du second ordre dans $L^2_{(\Omega)}$ pour les fonctions propres.

En revanche, si le domaine n'est pas régulier , il s'avère généralement que certains les espaces propres contiennent des fonctions propres lisses, tandis que d'autres peuvent contenir des fonctions propres singulières.

Dans de tels cas, on obtient du théorème un sous-optimal estimation, puisque certaines bornes sont données en termes d'approximation de $V^{(k)}$.

Par conséquent, si nous nous intéressons à la k^{ieme} valeur propre, nous devons considérer les propriétés de régularité de tous les espaces propres jusqu'au k^{ieme}.

Ce comportement sous-optimal n'est pas observé en pratique ; les investigations théoriques présentées dans les sections suivantes confirmeront que le taux de convergence de la kième valeur propre(fonction propre) est en effet lié à l'approximation des fonctions propres associées à la k^{ieme} valeur propre, seule.

Pour des résultats plus précis concernant les valeurs propres multiples.

Chapitre 3

Formulation mixte d'un problème aux VP

3.1 Formulation mixte pour le problème de Laplace en dimension 1D

Il s'agit du problème unidimensionnel.

Soit $\Omega =]0, \pi[$ et on considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Il est classique de réécrire le problème de Laplace (3.2) comme un système du premier ordre qui consiste à chercher les valeurs propres λ et les fonctions propres correspondantes u (avec $u \neq 0$)tels que, pour certains s.

$$\begin{cases} s(x) - u'(x) = 0, & \text{dans } \Omega \\ s'(x) = -\lambda u(x) & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

déterminé à partir de s et des conditions aux limites. D'autre part, ce pourrait ne plus être vrai pour le cas discret . en particulier, nous voulons définir la multiplicité de λ comme la dimension de l'espace associé à la solution u ; en général, il se peut qu'il y ait est plus d'un s associé à u, et nous ne voulons pas considérer le multiplicité de s lors de l'évaluation de la multiplicité de λ.comme la dimension de u.

On considère $\Sigma = H^1(\Omega)$, $U = L^2(\Omega)$ et pour $s \in \Sigma$:

$$\int_0^\pi s(x)t(x)\ dx + \int_0^\pi u(x)t'(x)\ dx = 0, \quad \forall t \in \Sigma$$

$$\int_0^\pi s'(x)v(x)\ dx = -\lambda \int_0^\pi u(x)v(x)\ dx, \quad \forall v \in U$$

La discrétisation de Galerkin est basée sur les sous-espaces discrets $\Sigma_h \subset \Sigma$, $U_h \subset U$ et pour $s_h \in \Sigma_h$

$$\int_0^\pi s_h(x)t(x)\ dx + \int_0^\pi u_h(x)t'(x)\ dx = 0, \quad \forall t \in \Sigma_h \tag{3.3}$$

$$\int_0^\pi s_h'(x)v(x)\ dx = -\lambda \int_0^\pi u(x)v(x)\ dx, \quad \forall v \in U_h \tag{3.4}$$

Si $\Sigma_h = \{\varphi_1, ..., \varphi_{N_s}\}$ et $U_h = \{\Psi_1, ..., \Psi_{N_u}\}$, alors on peut introduire les matrices $A = \{a_{k,l}\}_{k,l=1}$, $M_U = \{m_{i,j}\}_{i,j=1}$, $B = \{b_{j,k}\}$, $(j = 1, .., N_u, k = 1, .., N_s)$ tel que :

$$\begin{cases} a_{k\ell} = \displaystyle\int_0^\pi \varphi_\ell(x)\varphi_k(x)\ dx \\ m_{ij} = \displaystyle\int_0^\pi \psi_j(x)\psi_i(x)\ dx \\ b_{jk} = \displaystyle\int_0^\pi \varphi_k'(x)\psi_j(x)\ dx \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors, le système algébrique s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1.1 Les éléments $P1 - P0$

Un element instable :

Si N est le nombre d'intervals dans notre décomposition de Ω, alors les dimensions impliquées sont $N_s = N + 1$ et $N_u = N$. Dans ce cas, il est possible de calculer explicitement les solutions propres. Étant donné que les solutions exactes sont :[2]

$$\lambda_h^k = (6/h^2)\frac{1-\cos(kh)}{2+\cos(kh)}$$

$$U_h^k \mid_{]ih,(i+1)h[}= \frac{s_h^k\left(ih\right) - s_h^k\left(\left(i+1\right)h\right)}{h\lambda_h^k}$$

$$s_h^{(k)}\left(ih\right) = kcos\left(kih\right),\ pour(k=1,..,N)$$

les fréquences discrètes sont exactement les mêmes dans la methode primale (1D),et que le nombre de degrés de liberté : ici N est le nombre d' intervals, tandis que dans la methode primale (1D), N étant le nombre de nœuds internes, c'est-à-dire on calcule une valeur de plus avec le schéma mixte sur le même maillage. d'autre part, les fonctions propres sont différentes, puisqu'ici ce sont des constantes par morceaux alors qu'elles étaient continues par morceaux linéaires. Plus précisément, on peut montrer que si l'on considère la solution exacte $u^{(k)}\left(x\right) = sin(kx)$, alors on a

$$\int_{ih}^{(i+1)h}\left(u^{(k)}\left(x\right) - u_h^{(k)}\left(x\right)\right)dx = \frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda_h}\int_{ih}^{(i+1)h}u^{(k)}\left(x\right)dx$$

En particulier, il s'avère que $u_h^{(k)}$ n'est pas la projection L^2 de $u^{(k)}$ sur l'espace des constantes par morceaux.Le bon élément Schéma $P1 - P0$ (en général,($P_{(k+1)} - P_k$)

3.1.2 Les éléments $P1 - P1$

Un élément instable :

VP Exactes	VP pour N = 8	N= 16	N=32	N = 64	N= 128	N=
	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
1	1.0001	1.0000(4.1)	1.0000(4.0)	1.0000(4.0)	1.0000(4.0)	1.0000
4	3.9660	3.9981(4.2)	3.9999(4.0)	4.0000(4.0)	4.0000(4.0)	3.9999
	7.4257	8.5541	8.8854	8.9711	8.9928	8.9998
9	8.7603	8.9873(4.2)	8.9992(4.1)	9.0000(4.0)	9.0000(4.0)	8.9999
16	14.8408	15.9501 (4.5)	15.9971(4.1)	15.9998(4.0)	16.0000(4.0)	15.9999
25	16.7900	24.5524(4.2)	24.9780(4.3)	24.9987(4.1)	24.9999(4.0)	24.9999
	38.7154	29.7390	34.2165	35.5415	35.8846	35.998
36	39.0906	35.0393(1.7)	35.9492(4.2)	35.9970(4.1)	35.9998(4.0)	35.9999
49		46.7793	48.8925(4.4)	48.9937(4.1)	48.9996(4.0)	48.9999

TABLE 3.1 – taux de calculs des (valeurs propres) pour le Laplacien mixte unidimensionnel calculé avec le schéma $P_1 - P_1$

Il est bien connu que l'élément $P1 - P1$ n'est pas stable pour l'approximation du problème source de Laplace unidimensionnel (Babushka et Narasimhan 1997). En particulier, il a été démontré qu'il produit des résultats acceptables pour les solutions lisses, bien qu'il ne soit pas convergent dans le cas de singulier Les données. Même si les fonctions propres du problème que nous considérons sont régulières (en effet, ils sont analytiques), le $P1 - P1$ ne donne pas de bons résultats. [6]

3.1.3 Les éléments $P2 - P0$

Un élément interessant :

VP Exactes	VP pour N = 8	N= 16	N=32	N = 64	N= 128
1	5.47061	5.9238(1.9)	5.9808(2.0)	5.9952(2.0)	5.9988(2.0)
4	19.8800	22.8245(1.8)	23.6953(1.9)	23.9232(2.0)	23.9807(2.0)
9	36.7065	48.3798(1.6)	52.4809(1.9)	53.6123(2.0)	53.9026(2.0)
16	51.8764	79.5201(1.4)	91.2978(1.8)	94.7814(1.9)	95.6925(2.0)
25	63.6140	113.1819(1.2)	138.8165(1.7)	147.0451(1.9)	149.2506(2.0)
36	71.6666	146.8261(1.1)	193.5192(1.6)	209.9235(1.9)	214.4494(2.0)
49	76.3051	178.6404(0.9)	253.8044(1.5)	282.8515(1.9)	291.1344(2.0)
64	77.8147	207.5058(0.8)	381.0804(1.4)	365.1912(1.8)	379.1255(1.9)
81		232.8461	384.8425(1.3)	456.2445(1.8)	478.2172(1.9)
100		254.4561	452.7277(1.2)	555.2659(1.7)	588.1806(1.9)
dof	9	56	257	1106	4573

TABLE 3.2 – Calcul du taux des VP (Valeurs propres) pour le Laplacien mixte unidimensionnel avec le schéma $P_2 - P_0$. par rapport à 6λ

Dans ce cas, il n'y a pas de fausses solutions, mais les valeurs propres calculées sont fausses d'un facteur 6. Plus précisément, elles convergent bien vers six fois les solutions exactes. En particulier, il s'avère que les fonctions propres u_h sont des approximations correctes de u, tandis que les fonctions s_h contiennent des composantes parasites qui sont clairement associé à une bulle dans chaque élément. Ce comportement est lié au fait que l'ellipticité dans le noyau discret n'est pas satisfaite pour la présence des fonctions bulle dans l'espace P_2. [4]

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce memoire nous avons considéré la resolution des problèmes aux valeurs propres du Laplacien unidimentionnel.

Le problème consiste à chercher les valeurs propres λ et les fonctions propres correspondants u (avec $u \neq 0$) verifiants :

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u(0) = u(\Pi) = 0 \end{cases}$$

Une approximation standard par éléments finis, est obtenue en considérant une formulation variationnelle convenable.

Soit $V = H_0^1(\Omega)$, On multiplie l'équation precedente par une fonction $v \in V$, et on intègre par partie, On obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in V \setminus \{0\} \quad \text{telles que :} \\ \displaystyle\int_\Omega u'(x)v'(x)\ dx = \lambda \int_\Omega u(x)v(x)\ dx, \quad \forall v \in V \end{cases}$$

La méthode de Galerkin consiste a considérer un sous-espace de dimension finie $V_h \subset V$

et a chercher $\lambda_h \in \mathbb{R}$ et $u_h \in V_h \setminus \{0\}$ tels que :

$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h \; dx \; dy = \lambda \int_\Omega u_h v_h \; dx \; dy, \quad \forall v_h \in V_h$$

On déduit les résultats suivants :

1. Toutes les valeurs propres sont approchées supérieurement .

2. Si le même calcul de valeur propre est effectué avec V_h égal à l'espace des polynômes continus par morceaux de degré au plus $p \geq 2$ et s'annulant aux extrémités alors les estimations deviennent ;

$$\left\| u^{(k)} - u_h^{(k)} \right\|_V = O\left(h^p\right) \;, \quad \left| \lambda^{(k)} - \lambda_h^{(k)} \right| = O\left(h^{2p}\right)$$

3. Certains espaces propres contiennent des fonctions propres régulières (lisses), tandis que d'autres peuvent contenir des fonctions propres singulières. Dans de tels cas, on obtient du théorème (2.10) une sous-optimale estimation, puisque certaines bornes sont données en termes d'approximation de $V^{(k)}$.

4. La Formulation de Galerkin est standard dans tous les schémas d'éléments finis et fournir une bonne approximation du problème.
   Cette formulation primale peut être appliquée avec succès au problème aux valeurs propres du Laplacien.

5. **Par contre La formulation mixte** :

   (a) **Les éléments** $P1 - P0$ **Le bon element** : Si N est le nombre d'intervals dans notre décomposition de Ω, alors les dimensions impliquées sont $N_s = N + 1$ et $N_u = N$.
   Dans ce cas, il est possible de calculer explicitement les solutions propres.
   Étant donné que les solutions exactes sont :

$$\lambda_h^k = (6/h^2)\frac{1 - \cos(kh)}{2 + \cos(kh)}$$

$$U_h^k \mid_{]ih,(i+1)h[} = \frac{s_h^k\left(ih\right) - s_h^k\left(\left(i+1\right)h\right)}{h\lambda_h^k}$$

$$s_h^{(k)}\left(ih\right) = kcos\left(kih\right),\ pour(k = 1, .., N)$$

les fréquences discrètes sont exactement les mêmes dans la methode primale ,et que le nombre de degrés de liberté de fredholm : ici N est le nombre d'intervals, tandis que dans la methode primale (1D), N étant le nombre de nœuds internes, c'est-à-dire on calcule une valeur de plus avec le schéma mixte sur le même maillage.

D'autre part, les fonctions propres sont différentes, puisqu'ici ce sont des constantes par morceaux alors qu'elles étaient continues par morceaux linéaires.

Plus précisément, on peut montrer que si l'on considère la solution exacte $u^{(k)}\left(x\right) = sin(kx)$, alors :

$$\int_{ih}^{(i+1)h} \left(u^{(k)}\left(x\right) - u_h^{(k)}\left(x\right)\right) dx = \frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda_h} \int_{ih}^{(i+1)h} u^{(k)}\left(x\right) dx$$

En particulier, il s'avère que $u_h^{(k)}$ n'est pas la projection L^2 de $u^{(k)}$ sur l'espace des constantes par morceaux.Le bon élément Schéma $P1 - P0$.

Dans ce cas, il n'y a pas de fausses solutions, mais les valeurs propres calculées sont fausses d'un facteur 6.

Plus précisément, elles convergent bien vers six fois les solutions exactes.

En particulier, il s'avère que les fonctions propres u_h sont des approximations correctes de u, tandis que les fonctions s_h contiennent des composantes parasites qui sont clairement associé à une bulle dans chaque élément.

Ce comportement est lié au fait que l'ellipticité dans le noyau discret n'est pas satisfaite pour la présence des fonctions bulle dans l'espace P_2.

(b) **L'element** $P1 - P1$ **Un élément gênant :** Il est bien connu que l'élément ne donne pas de bons résultats.

N'est pas stable pour l'approximation du problème source de Laplace unidimensionnel .

En particulier, il a été démontré qu'il produit des résultats acceptables pour les solutions lisses, bien qu'il ne soit pas convergent dans le cas de singulier. Même si les fonctions propres du problème que nous considérons sont régulières (en effet, ils sont analytiques).

(c) **Les éléments** $P2 - P0$ **Un élément interessant** : Dans ce cas, il n'y a pas de fausses solutions, mais les valeurs propres calculées sont fausses d'un facteur 6. Plus précisément, elles convergent bien vers six fois les solutions exactes.
En particulier, il s'avère que les fonctions propres u_h sont des approximations correctes de u, tandis que les fonctions s_h contiennent des composantes parasites qui sont clairement associé à une bulle dans chaque élément.
Ce comportement est lié au fait que l'ellipticité dans le noyau discret n'est pas satisfaite pour la présence des fonctions bulle dans l'espace P_2.

Bibliographie

[1] Huang, Weizhang. "Computation of eigenvalue problems with anisotropic diffusion operators." AIP Conference Proceedings. Vol. 1648. No. 1. AIP Publishing LLC, 2015.

[2] Brézis, Haïm, and Guido Stampacchia. "Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques." Bulletin de la Société Mathématique de France 96 (1968) : 153-180.

[3] Boffi, Daniele, and Carlo Lovadina. "Analysis of new augmented Lagrangian formulations for mixed finite element schemes." Numerische Mathematik 75.4 (1997) : 405-419.

[4] D. Boffi, F. Brezzi and L. Gastaldi (2000a), 'On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form', Math. Comp. 69, 12Boffi, Daniele, and Carlo Lovadina. "Analysis of new augmented Lagrangian formulations for mixed finite element schemes." Numerische Mathematik 75.4 (1997) : 405-419.1–140.

[5] Heuser, Harro, and Hellmuth Wolf. "Metrische Räume." Algebra, Funktionalanalysis und Codierung. Vieweg+ Teubner Verlag, 1986. 27-39.

[6] Gupta, Praveen Kumar, A. H. M. E. T. Yildirim, and K. N. Rai. "Application of He's homotopy perturbation method for multi dimensional fractional Helmholtz equation." International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow (2012).

[7] Babuška, Ivo, and R. Narasimhan. "The Babuška-Brezzi condition and the patch test : an example." Computer methods in applied mechanics and engineering 140.1-2 (1997) : 183-199.

[8] Allaire, Grégoire. Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[9] Rocks, Through Natural, and Math Mech. "Abasheeva, L and Pyatkov, SG (1997). Counterexamples in indefinite Sturm—Liouville problems. Siberian Adv. Math. 7 (4), 1-8. Agranovich, MS and Vishik, MI (1964). Elliptic problems with parameter and parabolic problems of general form. Uspekhi Mat. Nauk 19 (3), 53-161 (in Russian)." J. Math. Anal 16.3 : 500-519.

[10] A .Bensayah. Complements d'analyse fonctionnelle. Année , 2019 – 2020.

[11] Arioli, Mario, et al. "Interplay between discretization and algebraic computation in adaptive numerical solutionof elliptic PDE problems." GAMM Mitteilungen 36.1 (2013) : 102-129.

الملخص:

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة القيمة التقريبية لمشكلة القيم الذاتية في البعد الأول ،وبالستخدام طريقة غلاغكا والنظرية الطيفية لمشغلين المدمجين (الحد الأكبر والحد الأصغر)،تم تقديم القيمة الذاتية لمخرجي رايلاي، في البداية نقوم بشرح الطريقة وخصائصها الرياضية ثم نقوم بعرض الأمثلة العددية.

النتائج العددية التي تم الحصول عليها تثبت مدى فعالية الطريقة.

الكلمات المفتاحية:

القيم الذاتية ، الحد الأكبر، الحد الأصغر، التقارب ،دمج العوامل، فضاء هلبارت فضاء بناخ.

Abstract:

THE MAIN OBJECTIVE OF THIS WORK IS TO STUDY THE APPROXIMATE VALUE OF THE EIGENVALUE PROBLEM IN THE FIRST DIMENSION, AND BY USING THE METHOD GALAGA AND THE SPECTRAL THEORY OF THE COMBINED OPERATORS (MAXIMUM AND MINIMUM), THE EIGENVALUE WAS PRESENTED TO RAYLEIGH DIRECTORS, IN THE BEGINNING WE EXPLAIN THE METHOD AND ITS MATHEMATICAL PROPERTIES THEN WE PRESENT THE NUMERICAL EXAMPLES. THE OBTAINED NUMERICAL RESULTS PROVE THE EFFECTIVENESS OF THE METHOD.

KEY WORDS:

EIGENVALUES, MAXIMUM, MINIMUM, CONVERGENCE, INTEGRATION OF FACTORS, HELLBART SPACE, BANACH SPACE.

Résumé :

L'objectif principal de ce travail est d'étudier la valeur approchée du problème des valeurs propres dans la première dimension, et en utilisant la méthode galga et la théorie spectrale des opérateurs combinés (maximum et minimum), la valeur propre a été présenté aux directeurs de Rayleigh, au début nous expliquons la méthode et ses propriétés mathématiques Puis nous montrons des exemples numériques. Les résultats numériques obtenus prouvent l'efficacité de la méthode.

LES MOTS CLES :

valeurs propres, maximum, minimum, convergence, intégration de facteurs, espace de Hellbart, espace de Banach.