UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **MASTER**

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : NESRINE MAAMIR

Thème

Quelques résultats de perturbation singulières des problème hyperboliques semi-linéaires

Soutenu publiquement le : 28/06/2021

Devant le jury composé de :

Mohammed Kouidri	M.C.B.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Kelthome Kaliche	M.C.B.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Salima Azouz	M.C.B.	Ecole Normale Supérieure - Ouargla	Rapporteur

Didicaces

A ma chère mère, de nombreuses phrases, aussi expressives soient-elles, ne peuvent montrer le degré d'amour et d'affection que j'ai pour vous.
Tu m'as rempli de ta tendresse et de ton affection tout au long de mon voyage.
Elle n'a jamais cessé de me soutenir et de m'encourager tout au long de mes années scolaires, toujours à mes côtés pour me réconforter en cas de besoin.
En ce jour inoubliable, pour vous et moi, prenez ce travail comme un signe de ma reconnaissance et de mon amour.
Que Dieu vous donne santé, bonheur et longue vie afin que je puisse vous rendre heureux.
A toi, mon père, à toi, mon soutien dans cette vie, à toi, qui as planté en moi une ambition qui me pousse vers un avenir prospère, à celui qui m'a appris à résister aux vagues déchaînées de la mer, à celui qui m'a donné, et m'a encore donné sans limites, à celui qui a levé la tête haute avec fierté A mon cher époux, vos sacrifices et votre soutien m'ont permis tant moralement que matériellement de réussir mes études.
Ce travail est un témoignage de ma sincère et sincère gratitude et amour.
Je t'aime tellement À la famille de mon cher mari À ma deuxième mère, la mère de mon mari À mes chères surs, mes chers frères À mon cher ami

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Allah notre créateur.
Ensuite, je tiens particulièrement à remercier mon encadreur Dr. Salima Azouz pour son aide précieuse, sa patience et ses encouragements. Merci également au Dr. M. Kouidri de nous avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, au Dr. K. Kaliche honorent de sa présence dans ce jury en tant qu'examinateur.
Enfin, je n'oublierai pas de remercier tous les membres de Département des Mathematiques qui a participé à notre formation.

Abstract : In this note, we are concerned with the convergent behavior of semi-linear hyperbolic problems related to the small parameter $\varepsilon > 0$, using the monotony hypothesis. The convergence results that have been proven in different spaces are displayed in different spaces related to the direction of the derivation on a qualitative domain Ω. Some improvements are made when $\Omega = \Delta \times \omega$ is an expression about

Résumé : Dans ce mémoire, nous nous intéressons au comportement convergent des problèmes hyperboliques semi-linéaires liés au petit paramètre $\varepsilon > 0$, en utilisant l'hypothèse de la monotonie. Les résultats de convergence qui ont été prouvés sont affichés dans différents espaces liés à la direction de dérivation sur un champ qualitatif Ω.Certaines améliorations sont apportées lorsqu'elles sont $\Omega = \Delta \times \omega$ est un cylindre. Avec des coefficients dépendants des paramètres, la convergence de la résolution de tels problèmes vers la résolution d'un problème du même type défini dans a été démontrée, et des estimations de taux de convergence sont données. On peut voir ce travail comme une seule perturbation des problèmes hyperboliques dans certaines directions.

ملخص

في هذه المذكرة اهتممنا بالسلوك التقاربي لمسائل الزائدية شبه خطية التي تتعلق بالمعامل الصغير $\varepsilon>0$ ،باستخدام فرضية الرتابة يتم عرض نتائج التقارب التي تم اثباتها في فضاءات مختلفة متعلق باتجاه الاشتقاق على ميدان كيفي.Ω يتم اجراء بعض التحسينات عندما تكون $\Omega = \Delta \times \omega$ عبارة عن أسطوانة . مع معاملات تعتمد على معلمة تم إثبات تقارب حل مثل هذه المشكلات نحو حل مشكلة من نفس النوع المحدد في ω ، وتم إعطاء تقديرات معدل التقارب .يمكن للمرء أن يرى هذا العمل باعتباره اضطرابًا منفردًا للمشكلات الزائدية في بعض الاتجاهات.

Table des matières

Introduction

La théorie des perturbations singulières est un mélange fascinant d'analyse minutieuse, de raisonnement inférentiel et d'induction à partir de l'expérience. Les méthodes et techniques des perturbations singulières ont été très efficaces pour traiter les problèmes de nombreuses branches de la science.
Originaire de la dynamique des fluides, l'étude des perturbations singulières s'est étendue à une grande variété de scientifiques, avec des intérêts allant de l'ingénierie et de la biologie à presque mathématiques pures.
Une multitude de techniques et de résultats peuvent être trouvés dans les livres de Van Dyck (1964), Wassau (1965), Cole (1968), Nayfeh (1973), Black (1973) et O'Malley (1974), qui contiennent également références supplémentaires à des centaines d'articles dans la littérature périodique.
Le modèle mathématique de base de certains phénomènes est amélioré en incorporant d'abord certains effets qui ont été négligés, et le modèle amélioré est susceptible d'être un problème de perturbations singulières. D'autre part, l'intérêt théorique vient du fait que l'analyse des perturbations singulières n'est pas une généralisation et une extension directes de l'analyse de convergence classique et de la théorie des perturbations, mais plutôt une discipline complètement nouvelle implicitement ou explicitement.
Dans le premier chapitre, nous présentons les outils de base nécessaires à notre étude et identifions le problème dans le deuxième chapitre Nous étudions la convergence de u_ε avec u_0 dans $V(\Omega)$ en utilisant des méthodes de convergence faible combinées à un argument monotone. Dans le dernier chapitre, afin d'améliorer la convergence obtenue, nous considérons le champ cylindrique

Chapitre 1

Préliminaires

Nous rappelons dans ce chapitre quelques notions et propriétés de base.

1.1 Espaces L^p

Définition 1.1. *soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable et}\ |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}$$

est une norme sur $L^p(\Omega)$. Pour $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f\ \textit{mesurable et}\ \exists C \mid |f(x)| \leq C\ \textit{p.p sur}\ \Omega\}$$

avec

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C\ \textit{p.p sur}\ \Omega\}.$$

Théorème 1.1 (de Lax-Milgram)**.** *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H, telle que :*

i) $a(.,.)$ *est continue, i.e.* $\exists \Lambda > 0$ *tel que*

$$a(u,v) = \|u\|_H \|v\|_H \qquad \forall u, v \in H$$

ii) $a(.,.)$*est coercive, i.e.* $\exists \lambda > 0$ *tel que*

$$a(v,v) \leq \|v\|_H^2 \qquad \forall v \in H$$

Alors, pour tout,$f \in H'$,*il existe un unique* $u \in H$ *tel que :*

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.2 (Fischer-Riesz). $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach pour tout* p, $1 \leq p \leq \infty$

Proposition 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soient* f, $g \in L^2(\Omega)$. *Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et on a l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Soient, maintenant, ω_1 et ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement (d et m étant deux entiers positifs non nuls).

Théorème 1.3 (Théorème de Donsité). *L'espace des fonctions continues sur* Ω *à support compact* $C_c(\Omega)$, *et dense dans* $L^1(\Omega)$,*c'est-à-dire*

$$\forall f \in L^1(\Omega) \qquad et \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in C_c(\Omega) \mid \|f - f_1\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

Soient $\omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ des ouverts et soit $F : \omega_1 \times \omega_2 \to \mathbb{R}$ un fonction mesurable.

Théorème 1.4 (Tonelli). *Soit* $f : \omega_1 \times \omega_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On suppose que*

$$\int_{\omega_2} |f(x,y)|\, dy < \infty, \qquad p.p.\ x \in \omega_1$$

et que

$$\int_{\omega_1}\left(\int_{\omega_2}|f(x,y)|\,dy\right)dx<\infty$$

Alors $f\in L^1(\omega_1\times\omega_2)$.

Théorème 1.5 (Fubini)**.** *On suppose que* $f\in L^1(\omega_1\times\omega_2)$. *Alors,*

$$f(x,.)\in L^1(\omega_2)\qquad p.p.\ x\in\omega_1,\qquad et\qquad \int_{\omega_2}f(.,y)dy\in L^1(\omega_1).$$

De même,

$$f(.,y)\in L^1(\omega_1)\qquad p.p.\ y\in\omega_2,\qquad et\qquad \int_{\omega_1}f(x,.)dx\in L^1(\omega_2).$$

De plus, on a

$$\int_{\omega_1}\left(\int_{\omega_2}f(x;y)dy\right)dx=\int_{\omega_2}\left(\int_{\omega_1}f(x;y)dx\right)dy=\int\int_{\omega_1\times\omega_2}f(x;y)dxdy.$$

1.2 Espace des Distributions

Dans ce qui suit, on a besoin des notions suivantes

Définition 1.2. *On dit que* f *appartient à* $L^1_{loc}(\Omega)$ *si et seulement si pour tout* K*compact inclus dans* Ω, $1_K f\in L^1(\Omega)$ *(où* 1_K *est la fonction indicatrice de* K*).*

Définition 1.3. *On dit que* φ *appartient à* $D(\Omega)$ *si et seulement si* $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ *et* φ *est à support compact dans* Ω.

Définition 1.4. $D'(\Omega)$ *est l'espace des formes linéaires continues sur* $D(\Omega)$, *appelées distributions sur* Ω.

Proposition 1.2. *Supposons que* T_1, $T_2\in L^1_{loc}(\Omega)$ *et*

$$\langle T_1,\varphi\rangle=\langle T_2,\varphi\rangle\qquad\forall\varphi\in D(\Omega).$$

Alors $T_1=T_2$ *presque partout sur* Ω.

Définition 1.5. *Soit* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_2) \in N^n$, *on pose* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_2$. *Pour* $T \in D'(\Omega)$, *l'application* $\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$ *définit une distribution sur* Ω *qu'on note* $D^\alpha : T \to D^\alpha T$. *Alors, on a*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Proposition 1.3. *L'application* $\iota : L^1_{loc}(\Omega) \to D'(\Omega)$ *definie par*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \qquad \langle \iota(f), \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi dx,$$

est une injection continue.

On identifie donc les fonctions localement integrables donc a fortiori toutes les fonctions L^p, les fonctions continues a des distributions sans autre forme de proces. On derive indefiniment les distributions par dualite.

Proposition 1.4. *L'application* $D^\alpha : T \mapsto D^\alpha$ *est linéaire et continue de* $D'(\Omega)$ *dans* $D'(\Omega)$.

Définition 1.6. *Soit* T_i *une suite de distributions sur* Ω. *On dit que* $T_i \to T$ *dans* $D'(\Omega)$,*si*

$$\langle T_i, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Remarque 1.1. *Si la limite de* T_i *existe, elle est unique.*

Proposition 1.5. *Soit* $T_i, T \in L^p(\Omega)$. *Supposons que pour* $i \to \infty, T_i \to T$ *dans* $L^p(\Omega)$, *(resp.* $T_i \rightharpoonup T$ *dans* $L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

$$T_i \to T \qquad dans\ D'(\Omega).$$

Rappelons maintenant la notion de convergence faible d'une suite $(u_n), n \in \mathbb{N}$, dans un espace, X est dit faiblement convergent vers un élément $u \in X$, si

$$f(u_n) \to f(u) \text{ comme } n \to +\infty, \ \forall f \in X'$$

Dans ce cas, u est appelé une limite faible de la suite et nous écrivons

$$u_n \rightharpoonup u \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Noter que

$$u_n \to v \text{ dans } X \Rightarrow u_n \rightharpoonup v \text{ dans } X, \text{ quand } n \to +\infty.$$

L'inverse n'est pas vrai en général. Cependant, une suite faiblement convergente est bornée. Ensuite nous avons

Proposition 1.6. *Soit u_n, $u \in L^q(\Omega)$. Si nous supposons que lorsque $n \to +\infty, u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$,(respectivement $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^q(\Omega)$), $1 \leq q < \infty$, ensuite nous avons*

$$u_n \to u \text{ dans } D'(\Omega).$$

Théorème 1.6 (Faible compacité des boules)**.** *Si (u_n)est une suite bornée dans un Hilbert espace H, il existe une sous-séquence (u_{n_k}) de (u_n) et $u \in H$ telle que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \textit{ quand } n_k \to \infty.$$

Proposition 1.7. *Soit X un espace de Banach réflexif et (u_n)une suite bornée dans X. On suppose qu'il existe $u \in X$ tel que toute sous-suite faiblement convergente de (u_n) a une limite égale à u, alors toute la suite (u_n) converge faiblement vers u.*

Nous avons également

Définition 1.7. *Soient $(x_n)_n$ une suite de E et $x \in E$.*

i) *On dit que $(x_n)_n$ converge fortement vers x dans E et on note $x_n \to x$, si*

$$\|x_n - x\|_E \to 0.$$

ii) *On di tque $(x_n)_n$ converge faiblement dans E vers x, ce qu'on note $x_n \rightharpoonup x$, si*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \qquad \forall f \in E',$$

où $\langle .,. \rangle$désigne le crochet de dualité entre E' et E.

Dans un espace de Hilbert, on a les caractérisations suivantes.

Proposition 1.8. *Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle .,. \rangle_H$. Soit $(x_n)_n$ une suite de H et $x \in H$. Alors,on a l'équivalence*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ dans } H \Leftrightarrow \langle x_n, y \rangle_H \to \langle x, y \rangle_H , \forall y \in H.$$

Proposition 1.9. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a*

i) *Si $x_n \to x$ dans E, alors $x_n \rightharpoonup x$ dans E.*

ii) *Si $x_n \to x$ dans$E$, alors $(x_n)_n$ est bornée.*

iii) *Si $x_n \to x$ dans E et $f_n \to f$ dans E', alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

L'assertion (iii) est applée résultat de convergence fort-faible.

1.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des outils utiles pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Dans cette section, nous nous concentrons sur ceux dont on aura besoin.

1.3.1 Espace $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $H^1(\Omega)$ le sous-espace de $L^2(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_i} v \in L^2(\Omega) \forall i = 1, \dots, d \right\},$$

où ∂_{x_i} désigne la dérivée au sens des distributions. On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} (\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v)_{L^2(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u; \nabla v)_{(L^2(\Omega))^d}, \tag{1.2}$$

dont la norme associée est

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = ((v,v)_{H^1(\Omega)})^{1/2} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{(L^2(\Omega))^d}\right)^{1/2}$$

Proposition 1.10. *L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.2), est un espace de Hilbert.*

1.3.2 Espace $H^1_0(\Omega)$

On note par

$$\begin{aligned} H^1_0(\Omega) &= \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \\ &= \left\{v \in H^1(\Omega) \mid \exists (\varphi_j)_j \subset D(\Omega) \text{ telleque } \varphi_j \to v \text{ dans } H^1(\Omega)\right\} \end{aligned}$$

Proposition 1.11. *L'espace $H^1_0(\Omega)$ muni de la topologie induite par celle de $H^1(\Omega)$, est un espace de Hilbert séparable.*

Théorème 1.7 (Inégalité de Poincaré)**.** *Si Ω est borné dans au moins dans une direction, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ dépendant uniquement de Ω telle que*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^d} \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega), \tag{1.3}$$

Par conséquent, l'expression

$$(u,v)_{H^1_0(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{(L^2(\Omega))^d} \tag{1.4}$$

définit un produit scalaire sur $H^1_0(\Omega)$ induisant la norme

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} = \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^d} \tag{1.5}$$

laquelle est équivalente à $\| \, . \, \|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème 1.8 (de Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Alors, on a*

i) *l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Il revient au même de dire que toute suite bornée de$H_0^1(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$*

ii) *l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, si Ω est suffsamment régulier.*

Proposition 1.12. *Soit v une fonction réelle définie sur $\Omega = \omega_1 \times \omega_2$ où ω_1 et ω_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors, on a*

i) $v \in D(\Omega) \implies (v(x_1, .) \in D(\omega_2) \qquad$ *pour tout $x_1 \in \omega_1$).*

ii) $v \in L^2(\Omega) \implies (v(x_1, .) \in L^2(\omega_2) \qquad$ *p.p. $x_1 \in \omega_1$).*

iii) $v \in H_0^1(\Omega) \implies (v(x_1, .) \in H_0^1(\omega_2) \qquad$ *p.p. $x_1 \in \omega_1$).*

Lemme 1.1 (Gronwal). *Soit $t_0 \in I, u, f, g \in C^0(I, \mathbb{R}^+)$ telles que pour tout $t \in I$,*

$$u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} u(s)g(s)ds \right|$$

Alors, pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} u(s)g(s) \exp\left(\left| \int_{s}^{t} g(r)dr \right| ds \right) \right|$$

Théorème 1.9 (Trace). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe$C^{m-1,1}$ par morceaux. Soient $u \in D(\overline{\Omega})$ et $v(x) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ le vecteur normal unitaire extèrieur au point x de $\partial\Omega$. On définit les opérateurs de trace normale sur $\partial\Omega$ par*

$$\begin{aligned} \gamma u &= u \mid_{\partial\Omega} \\ \gamma \frac{\partial^r}{\partial v^r} u &= \frac{\partial^r}{\partial v^r} u \mid_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

Définition 1.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et soit $1 \leq q \leq \infty$. Nous disons qu'une fonction de valeur réelle,$u$appartient à $L^q_{loc}(\Omega)$ si $u\chi \in L^q(\Omega)$ pour tout ensemble* *compact K contenu dans Ωoù χ est la fonction caractéristique de K. Notez que si $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ puis $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Lemme 1.2. *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0, \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Alors $u = 0$ p.p. sur Ω.

Théorème 1.10 (formule de Green)**.** *Pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega v(x)\partial_{x_i}u(x)dx = -\int_\Omega \partial_{x_i}v(x)u(x)dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0\left(v\right)\gamma_0\left(u\right)\eta_i d\sigma$$

où $v = (v_1, \ldots, v_n)$ l'unité extérieure normale à $\Gamma = \partial\Omega$ et γ_0 (respectivement $d\sigma$) désigne l'opérateur trace (respectivement la mesure superficielle sur $\Gamma = \partial\Omega$).

Chapitre 2

Comportement Asymptotique sur les Domaines Générales

2.1 Position du Problème.

Pour Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et pour une constante positive$T$, on pose $Q = (0,T) \times \Omega$. Nous dénoteons par $x = (X_1, X_2)$ les points à $\mathbb{R}^n$ où $X_1 = (x_1, \ldots, x_p)$, $X_2 = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$, et n, p $(n > p \geq 1)$ (Remarque pour $n = p$ signifie que tous les côtés vibrent ou ne vibrent pas (isotropic)) sont des entiers positifs). Avec cette notation, nous avons

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u)^T = \begin{pmatrix} (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_p} u)^T \\ (\partial_{x_{p+1}} u, \ldots, \partial_{x_n} u)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u \\ \nabla_{X_2} u \end{pmatrix}.$$

Dénotez par $A = (a_{ij}(x))$ une matrice $n \times n$ telle que

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

où $\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω, et depuis quelques $\lambda > 0$, nous avons l'hypothèse de l'hyperbolicité

$$A\xi.\xi \geq \lambda \left|\xi\right|, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{2.2}$$

où A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} sont quatre matrices bloc et A_{11}, A_{22} sont respectivement

$p \times p$ et $(n-p) \times (n-p)$matrices de telle sorte que

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Pour chaque ε, $(0 < \varepsilon < 1)$, nous avons mis la matrice perturbée

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Par conséquent, à partir de (2) nous avons

$$A_\varepsilon \xi \cdot \xi \geq \lambda \left(\varepsilon^2 \left| \overline{\xi_1} \right|^2 + \left| \overline{\xi_2} \right|^2 \right), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$A_{22} \overline{\xi_2} \cdot \overline{\xi_2} \geq \lambda \left| \overline{\xi_2} \right|^2, \qquad \forall \overline{\xi_2} \in \mathbb{R}^{n-p}, \tag{6}$$

où $\xi = (\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2)^T$ avec $\overline{\xi}_1 = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$ et $\overline{\xi}_2 = (\xi_{p+1}, \dots, \xi_n)^T$.

Démonstration. En utilisant l'équation (2), Premièrement, nous prouvons (5), on a

$$A_\varepsilon \xi . \xi = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix}$$

alors

$$A_\varepsilon \xi . \xi = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 A_{11} \overline{\xi_1} + \varepsilon A_{12} \overline{\xi_2} \\ \varepsilon A_{21} \overline{\xi_1} + A_{22} \overline{\xi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix}$$

donc

$$A_\varepsilon \xi \cdot \xi = \varepsilon^2 \left(A_{11} \overline{\xi_1} \right) \cdot \overline{\xi_1} + \varepsilon \left(A_{12} \overline{\xi_2} \right) \cdot \overline{\xi_1} + \varepsilon \left(A_{21} \overline{\xi_1} \right) \cdot \overline{\xi_2} + \left(A_{22} \overline{\xi_2} \right) \cdot \overline{\xi_2} \tag{$\circledast$}$$

C'est notre seconde main

$$A \xi \cdot \xi \geq \lambda \left| \xi_\varepsilon \right|^2$$

On'accepte

$$\left| \xi_\varepsilon \right|^2 = \left(\varepsilon^2 \left| \overline{\xi_1} \right|^2 + \left| \overline{\xi_2} \right|^2 \right) \text{ tel que } \xi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon \overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix}$$

alors

$$A\xi_\varepsilon \cdot \xi_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon\overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon\overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix}$$

Et dessus

$$A\xi_\varepsilon \cdot \xi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon A_{11}\overline{\xi_1} + A_{12}\overline{\xi_2} \\ \varepsilon A_{21}\overline{\xi_1} + A_{22}\overline{\xi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon\overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix}$$

donc

$$A\xi_\varepsilon \cdot \xi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \left(A_{11}\overline{\xi_1}\right) \cdot \overline{\xi_1} + \varepsilon \left(A_{12}\overline{\xi_2}\right) \cdot \overline{\xi_1} \\ \varepsilon \left(A_{21}\overline{\xi_1}\right) \cdot \overline{\xi_2} + \left(A_{22}\overline{\xi_2}\right) \cdot \overline{\xi_2} \end{pmatrix} \tag{$\circledast\circledast$}$$

De ($\circledast$) et ($\circledast\circledast$) nous avons

$$A_\varepsilon\xi \cdot \xi \geq \lambda \left(\varepsilon^2 \left|\overline{\xi_1}\right|^2 + \left|\overline{\xi_2}\right|^2\right), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Deuxièmement, prouvez (6)

$$A_{22}\overline{\xi_2} \cdot \overline{\xi_2} \geq \lambda \left|\overline{\xi_2}\right|^2, \qquad \forall \overline{\xi_2} \in \mathbb{R}^{n-p}$$

Prenez $\varepsilon \to 0$ dans l'équation (2)

$$A\xi \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^2$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix} \geq \lambda \left|\overline{\xi_2}\right|^2$$

alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{12}\overline{\xi_2} \\ A_{22}\overline{\xi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix} &= A_{22}\overline{\xi_2} \cdot \overline{\xi_2} \\ &\geq \lambda \left|\overline{\xi_2}\right|^2 \end{aligned}$$

donc

$$A_{22}\overline{\xi_2} \cdot \overline{\xi_2} \geq \lambda \left|\overline{\xi_2}\right|^2, \qquad \forall \overline{\xi_2} \in \mathbb{R}^{n-p}.$$

$\square$

Nous dénoteons par $|\ .\ |_E$ la norme d'un espace E et $\langle .,. \rangle$ son produit de dualité, sauf la $L^2(\Omega)$ norm est noté par $|\ .\ |_\Omega$. En outre, nous faisons les hypothèses suivantes (voir [14]). Que W soit un réflexif espace séparable Banach satisfaisant $W \subset L^2(\Omega)$ (imbriqué continu) et

$$H_0^1(\Omega) \cap W \text{ est dense dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } H_0^1(\Omega) \cap W \text{ est dense dansen } W. \tag{7}$$

Ainsi nous avons

$$H_0^1(\Omega) \cap W \subset H_0^1(\Omega), \quad W \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega), \quad W' \subset (H_0^1(\Omega) \cap W)'.$$

(Rappeler que $(H_0^1(\Omega) \cap W)' = H^{-1}(\Omega) + W'$) Nous considérons une famille d'opérateurs non linéaires $\beta(t) : W \to W'$ satisfaisant

$$\beta v \in L^{q'}(0,T;W'), \qquad \forall v \in L^q(0,T;W), \tag{8}$$

où $1 \leq q < \infty$ et $1/q' = 1 - 1/q$. De plus, nous supposons que

$$\left.\begin{array}{l}
i)\text{Pour a.e.}t \in [0;T], \beta(t)\text{est continu dessous-espaces} \\
\text{ dimensionnels nis de } W \text{ à la topologie faible de} W' \\
ii)\exists b > 0 \text{ telque } \langle \beta(t)v; v \rangle \geq b\,|v|_W^q\,, \quad \forall v \in W, \text{p.p. } t \in [0;T], \\
iii)\ \langle \beta(t)v_1 - \beta(t)v_2, v_1 - v_2 \rangle \geq 0; \quad \forall v_1, v_2 \in W, \text{p.p. } t \in [0;T], \\
iv)\beta \text{ est hémicontinue et en voie des ensembles bornés de } L^q(0,T;W) \\
\text{aux ensembles bornés de } L^{q'}(0,T;W').
\end{array}\right\} \tag{9}$$

Nous faisons également les hypothèses suivantes sur le terme source et les données initiales

$$f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q), \tag{10}$$

$$u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega), \qquad u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega). \tag{11}$$

Ensuite, nous considérons le problème semi-linéaire défini par

$$\begin{cases} u'' - \nabla \cdot (A_\varepsilon \nabla u) + \beta u' = f \qquad \text{dans } \ Q, \\ u = 0 \qquad\qquad \text{au } (0;T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u^0_\varepsilon, \quad u'(0) = u^1_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{12}$$

En multipliant par la fonction de test et intégration sur Ω, nous obtenons

$$\int_\Omega u'' v dx - \int_\Omega \nabla \cdot (A_\varepsilon \nabla u) v dx + \int_\Omega \beta u' v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

$$\langle u''(t), v(t) \rangle - \int_\Omega \nabla \cdot (A_\varepsilon \nabla u) v dx + \langle \beta u'(t), v(t) \rangle = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

on applique la formule de Green

$$\langle u''(t), v \rangle - \int_{\partial\Omega} A_\varepsilon \nabla u \cdot \eta v ds + \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v dx + \langle \beta(t) u'(t), v \rangle = \int_\Omega f(t) v dx \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega),$$

pour condition limite $u = 0$ au $(0, T) \times \partial\Omega$, alors

$$\int_{\partial\Omega} A_\varepsilon \nabla u \cdot \eta v ds = 0.$$

donc

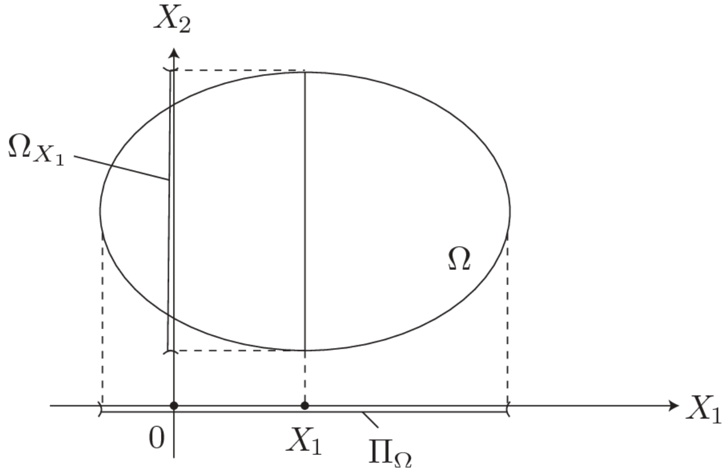
$$\langle u''(t), v(t) \rangle_\Omega + \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v dx + \langle \beta u'(t), v(t) \rangle = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

où le premier est pour dériver par rapport à t. Les hypothèses ci-dessus sont supposées assurer l'existence d'une solution faible unique u_ε satisfaisant (voir [14, 15])

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in C([0;T]; H_0^1(\Omega)), \quad u_\varepsilon^0 \in C([0;T]; L^2(\Omega)) \cap L^q(0,T;W), \\ \langle u_\varepsilon''(t), v\rangle + \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \cdot \nabla v dx + \langle \beta(t) u_\varepsilon'(t), v\rangle \\ = \int_\Omega f(t) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega); \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0, \qquad u_\varepsilon^0(0) = u_\varepsilon^1, \qquad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{13}$$

Nous étudions ici le comportement asymptotique de u_ε lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour faire cela et plus encore on note Π_1 la projection orthogonale de Ω sur l'espace $X_2 = 0$ et pour tout $X_1 \in \Pi_1$ on note Ω_{X_1} la section de Ω au-dessus de X_1 i.e.

$$\Omega_{X1} = \left\{ X_2 \in \mathbb{R}^{n-p} \mid (X_1, X_2) \in \Omega \right\}$$



Ensuite, nous introduisons l'espace suivant

$$V(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid v(X_1, .) \in H_0^1(\Omega_{X_1}) \text{ p.p. } X_1 \in \Pi_1 \right\}$$

équipé de la norme

$$v \mapsto |\nabla_{X_2} v|_\Omega .$$

En raison de l'inégalité de Poincare, la norme ci-dessus est équivalente à la norme classique sur$V(\Omega)$ Notez que l'incorporation de $V(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ n'est pas compacte, ce qui peut poser divers problèmes. Nous supposo.ns qu'il existe

$$u^0 \in V(\Omega), \qquad u^1 \in L^2(\Omega) \tag{14}$$

tel que

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon^0 \to 0, \qquad \nabla_{X_2} u_\in^0 \to \nabla_{X_2} u^0 \text{ et } u_\varepsilon^1 \to u^1 \text{dans } L^2(\Omega). \tag{15}$$

Bien sûr, la limite attendue de u_ε est $\widetilde{u}$, définie comme une solution du problème suivant

$$\begin{cases} \widetilde{u} \in C([0,T];V(\Omega)), \quad \widetilde{u}' \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^q(0,T;W), \\ \langle \widetilde{u}''(t), v\rangle + \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} \widetilde{u}(t) \cdot \nabla_{X_2} v dx + \langle \beta(t)\widetilde{u}'(t), v\rangle \\ = \int_\Omega f(t) v dx, \quad \forall v \in V(\Omega), \\ \widetilde{u}(0) = u^0, \quad \widetilde{u}'(0) = u^1 \qquad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{16}$$

Même si ce problème n'est pas classique, l'approche abstraite établie dans [14] peut être appliquée. En effet, sous les hypothèses $(1), (6) - (10)$ et (14), le problème(16) a une solution unique $\widetilde{u}$ qui satisfait l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} & |\widetilde{u}'(t)|^2 + \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} \widetilde{u}(t) \cdot \nabla_{X_2} \widetilde{u}(t) dx + 2 \int_0^t \langle \beta \widetilde{u}', \widetilde{u}' \rangle ds \\ = \; & \left|u^1\right|_\Omega^2 + \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u^0 \cdot \nabla_{X_2} u^0 dx + 2 \int_0^t \int_\Omega f \widetilde{u}' dx ds, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Démonstration. Puisque $V(\Omega) \cap W$ est dense dans $L^2(\Omega)$et que de (7) on a

$$V(\Omega) \cap W \subset L^2(\Omega) \subset (V(\Omega) \cap W)',$$

l'existence et l'unicité de la solution de (16) suivent en choisissant $V(\Omega)$ comme espace de base dans [14, Théorème 2.1]. L'égalité énergétique et la continuité sur t découlent de [15, Théorèmes 4.1, 4.2]. □

Le comportement asymptotique des problèmes linéaires, c'est-à-dire $\beta v = mv$ pour une certaine constante m, a été considéré dans [12]. Lorsque les problèmes satisfont certaines symétries cylindriques, un taux de convergence polynomial est établi dans [1, 9] ce qui donne des résultats de convergence meilleurs que ceux obtenus dans [12] mais pour une classe de problèmes assez restreinte. Nous étudions ici les mêmes problèmes pour les problèmes hyperboliques semi-linéaires (12). Notez que les améliorations introduites dans cet article ne sont pas uniquement consacrées à la non-linéarité du problème. En fait les résultats montrés ici améliorent même les résultats de convergence obtenus dans [12] et en utilisant une technique d'itération, introduite dans [7] et améliorée dans [8], un taux de convergence exponentiel est effectué au lieu deTraduirele polynôme dans [1, 9]. Des problèmes similaires sont considérés pour les problèmes paraboliques et elliptiques dans [2, 3, 4, 5, 6, 9, 11]. Contrairement au cas anisotrope, l'image est assez complète pour la théorie des perturbations singulières (isotropes) (pour plus de détails, voir [13]). Dans la section suivante, nous étudions la convergence de u_ε vers $u_0$dans $V(\Omega)$ en utilisant des méthodes de convergence faible combinées à un argument de monotonie. Notez que, en général, cette convergence ne tient pas dans $H^1(\Omega)$.Pour les régions éloignées de la limite latérale des domaines cylindriques, une convergence dans l'espace de Sobolev et quelques améliorations du taux de convergence sont présentées dans la troisième section.

2.2 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous étudions la convergence de u_ε vers u_0 en $V(\Omega)$ en utilisant une faible convergence méthodes combinées avec un argument de monotonie.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* $(1), (2), (7) - (11)$ *et* (15), *nous avons pour* $t \in [0, T]$, *où* $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}
&u_\varepsilon(t) \to \widetilde{u}(t) \qquad \textit{dans } V(\Omega),\\
&u'_\varepsilon(t) \to \widetilde{u}'(t), \qquad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \to 0 \qquad \textit{dans } L^2(\Omega),\\
&u'_\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{u}' \qquad \textit{dans } L^q(0,T;W),\\
&\beta u'_\varepsilon \rightharpoonup \beta \widetilde{u}' \qquad \textit{dans } L^{q'}(0,T;W\prime),\\
&\langle \beta u'_\varepsilon - \beta \widetilde{u}', u'_\varepsilon - \widetilde{u}' \rangle \to 0 \qquad \textit{dans } L^1(0;T)
\end{aligned} \tag{18}$$

où $\widetilde{u}$ *(resp.* u_ε*) est la solution du problème semi-linéaire* (16) *(resp.* (13)*). Les convergences ci-dessus sont des convergences vectorielles en* $L^2(\Omega)$*. Nous allons* *démontrer ce théorème dans les lemmes suivants.*

Lemme 2.1. *Selon les hypothèses de Theorème 2.1, nous avons*

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est borné dans } L^\infty(0,T;V(\Omega)), \\ (\varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est borné dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ (u'_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est borné dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^q(0,T;W), \\ (\beta u'_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est borné dans } L^{q'}(0,T;W') \end{cases} \tag{19}$$

Démonstration. L'égalité énergétique pour le problème (13) est donnée par (voir [15])

$$\langle u''_\varepsilon(t),v\rangle+\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon(t)\cdot\nabla v dx+\langle\beta(t)u'_\varepsilon(t),v\rangle=\int_\Omega f(t)vdx,\qquad \forall v\in H^1_0(\Omega),$$

En remplaçant $v=u'_\varepsilon$ en (13) et integrent sur $[0,t]$, on obtient

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^t\int_\Omega u''_\varepsilon(t)u'_\varepsilon(t)\,dxds\ &\textstyle+\int_0^t\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon(t)\cdot\nabla u'_\varepsilon dx\\ &\textstyle+\int_0^t\langle\beta(t)u'_\varepsilon(t),u'_\varepsilon\rangle=\int_0^t\int_\Omega f(t)u'_\varepsilon dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textstyle\frac12\int_\Omega(u'_\varepsilon(s))^2\,dx\,|_0^t\ &\textstyle+\frac12\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon(s)\cdot\nabla u_\varepsilon(s)\,dx\,|_0^t+\int_0^t\langle\beta u'_\varepsilon,u'_\varepsilon\rangle ds\\ &\textstyle=\int_0^t\int_\Omega f(t)u'_\varepsilon dx,\qquad\forall t\in[0,T]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textstyle\frac12\,|u'_\varepsilon(t)|^2_\Omega\ &\textstyle+\frac12\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon(t)\cdot\nabla u_\varepsilon(t)dx+\int_0^t\langle\beta u'_\varepsilon,u'_\varepsilon\rangle ds\\ &\textstyle=\frac12\,|u'_\varepsilon(0)|^2_\Omega+\frac12\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u^0_\varepsilon\cdot\nabla u^0_\varepsilon(t)dx\\ &\textstyle+\int_0^t\int_\Omega fu'_\varepsilon dxds,\qquad\forall t\in[0,T]\end{aligned}$$

pour $u^1_\varepsilon=u'_\varepsilon(0)$ donc

$$\begin{aligned}|u'_\varepsilon(t)|^2_\Omega\ &\textstyle+\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon(t)\cdot\nabla u_\varepsilon(t)dx+2\int_0^t\langle\beta u'_\varepsilon,u'_\varepsilon\rangle ds\\ &\textstyle=|u^1_\varepsilon|^2_\Omega+\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u^0_\varepsilon\cdot\nabla u^0_\varepsilon(t)dx\\ &\textstyle+2\int_0^t\int_\Omega fu'_\varepsilon dxds,\qquad\forall t\in[0,T]\end{aligned}\tag{20}$$

En utilisant $(1), (5)$, on a

$$\begin{aligned} |u'_\varepsilon(t)|^2_\Omega \quad & +\lambda\left(\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega + |\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega\right) + 2\int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle ds \\ & \leq |u^1_\varepsilon|^2_\Omega + \lambda\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u^0_\varepsilon|^2_\Omega + \lambda |\nabla_{X_2} u^0_\varepsilon|^2_\Omega \\ & +2\int_0^t \int_\Omega f u'_\varepsilon dx ds, \qquad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

Et en utilisant $(9-ii)$, nous avons

$$\begin{aligned} |u'_\varepsilon(t)|^2_\Omega + \quad & \lambda\left(\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega + |\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega\right) + 2b\int_0^t |u'_\varepsilon|^q_W \, ds \\ & \leq |u^1_\varepsilon|^2_\Omega + \lambda\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u^0_\varepsilon|^2_\Omega \\ & +\lambda |\nabla_{X_2} u^0_\varepsilon|^2_\Omega + 2\int_0^t \int_\Omega f u'_\varepsilon dx ds, \qquad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

Et en utilisant (15), il s'ensuit que

$$\varepsilon\nabla_{X_1} u^0_\varepsilon \to 0, \quad \left|\nabla_{X_2} u^0_\varepsilon\right|_\Omega \leq 2\left|\nabla_{X_2} u^0\right|_\Omega \text{ et } \left|u^1_\varepsilon\right|_\Omega \leq 2\left|u^1\right|_\Omega.$$

Bien sûr,si $u^1 = 0$ ou $u^0 = 0$, le membre droit des inégalités ci-dessus peut être remplacé par n'importe quelle constante positive. Cela implique

$$\begin{aligned} |u'_\varepsilon(t)|^2_\Omega \quad & +\lambda\left(\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t))|^2_\Omega + |\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega\right) + 2b\int_0^t |u'_\varepsilon|^q_W \, ds \\ & \leq 2|u^1|^2_\Omega + 2\lambda |\nabla_{X_2} u^0|^2_\Omega + 2|f|^2_Q + 2\int_0^t |u'_\varepsilon|_\Omega \, ds, \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |u'_\varepsilon(t)|^2_\Omega + \lambda(\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega + \quad & |\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega) + 2b\int_0^t |u'_\varepsilon|^q_W \, ds \\ & \leq C + C\int_0^t |u'_\varepsilon|^2_\Omega \, ds, \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

où C désigne une constante positive générique, indépendante de ε et t, prend souvent différentes valeurs dans la même formule. En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$|u'_\varepsilon(t)|^2_\Omega + \lambda(\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega + |\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t)|^2_\Omega) + 2b\int_0^t |u'_\varepsilon|^q_W \, ds \leq C, \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$|u'_\varepsilon(t)|, \quad \varepsilon |\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t)|, \quad |\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t)|, \quad \int_0^t |u'_\varepsilon|^q_W \, ds \leq C, \qquad \forall t \in [0,T] \tag{21}$$

La dernière estimation de la lemme suit par $(9 - iv)$ □

Lemme 2.2. *S'il existe* $z \in D'(Q)$ *et une sous-séquence de*$(u_\varepsilon)_\varepsilon$ *encore étiqueté* $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ *tel que* $u_\varepsilon \to z$ *en* $D'(Q)$ *puis*

$$z \in C([0,T];V(\Omega)), \quad z' \in C([0;T];L^2(\Omega)) \cap L^q(0,T;W) \tag{22}$$

et z *satisfait aux conditions initiales*

$$z(0) = u^0, \quad z'(0) = u^1. \tag{23}$$

En outre, pour chaque $t \in [0,T]$ *nous avons*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &\rightharpoonup z(t) \ \textit{dans}\ V(\Omega), \\ u'_\varepsilon(t) &\rightharpoonup z'(t), \qquad \varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon(t) \rightharpoonup 0 \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)24 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Démonstration. En raison de Lemme 2.2, nous pouvons extraire une faible sous-séquence convergente-encoreétiqueté $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et il existe $x \in L^{q'}(0,T;W')$ de telle sorte que

$$\varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0, \quad u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} z \quad \text{en } L^1(0,T;V(\Omega)),$$
$$u'_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} z' \quad \text{en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\begin{aligned} u'_\varepsilon &\rightharpoonup z' \quad \text{en} \quad L^q(0,T;W), \\ \beta u'_\varepsilon &\rightharpoonup \chi \quad \text{en } L^{q'}(0,T;W'). \end{aligned}$$

Pour vérifier que les limites sont telles qu'indiquées, nous utilisons les injections continues $L^2(Q) \subset D'(Q)$ et $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \subset D'(Q)$ avec la continuité de l'opérateur dérivé en $D'(Q)$. Puis en multipliant l'équation en (13) par $\phi \in D(]0,T[)$ et intégration plus $(0,T)$, nous obtenons

$$\int_0^T \langle u''_\varepsilon, v\phi\rangle ds + \int_0^T \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\phi dxds + \int_0^T \langle \beta u'_\varepsilon, v\phi\rangle ds = \int_0^T \int_\Omega fv\phi dxds$$

$$\int_0^T \langle u_\varepsilon, v\phi''\rangle ds + \int_0^T \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\phi dxds + \int_0^T \langle \beta u'_\varepsilon, v\phi\rangle ds = \int_0^T \int_\Omega fv\phi dxds$$

pour tout $t \in [0, T]$. En développant cette identité, en utilisant les différents blocs de A_ε, nous dérivons

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle u_\varepsilon, v\phi''\rangle ds + \int_0^T \int_\Omega \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{x_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} v\phi dxds + \int_0^T \int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{x_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x_2} v\phi dxds \\ & + \int_0^T \int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{x_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} v\phi dxds + \int_0^T \int_\Omega A_{22}\nabla_{x_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x_2} v\phi dxds + \int_0^T \langle \beta u'_\varepsilon, v\phi\rangle ds \\ = & \int_0^T \int_\Omega fv\phi dxds \end{aligned}$$

et passer à la limite en utilisant (25), il s'ensuit que

$$\varepsilon\nabla_{X_1} u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0, \text{ donc } \begin{array}{c} \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{x_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} v \overset{*}{\rightharpoonup} 0, \\ \varepsilon A_{21}\nabla_{x_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} v \overset{*}{\rightharpoonup} 0, \\ \varepsilon A_{12}\nabla_{x_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x_2} v \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \end{array} \qquad \forall v \in D(\Omega),$$

alors

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle z, v\phi''\rangle ds + \int_0^T \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z \cdot \nabla_{X_2} v\phi dxds + \int_0^T \langle \chi, v\phi\rangle ds \\ = & \int_0^T \int_\Omega fv\phi dxds, \quad \forall v \in D(\Omega), \forall \phi \in D(]0; T[)26 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notez que nous avons, à partir de (25),

$$z \in L^\infty(0, T; V(\Omega)), z' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^q(0, T; W)$$

et nous avons, à partir de (26),

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle z'', v\phi\rangle ds + \int_0^T \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z \cdot \nabla_{X_2} v\phi dxds + \int_0^T \langle \chi, v\phi\rangle ds \\ = & \int_0^T \int_\Omega fv\phi dxds, \qquad \forall v \in D(\Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle z'', v\rangle ds + \int_0^T \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z \cdot \nabla_{X_2} v dx ds + \int_0^T \langle \chi, v\rangle ds\\ = &\int_0^T \int_\Omega f v dx ds, \qquad \forall v \in D(\Omega)\end{aligned}$$

Nous dérivons l'équation sur l'intervalle $[0, T]$.

$$\langle z'', v\rangle + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z \cdot \nabla_{X_2} v dx + \langle \chi, v\rangle = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in D(\Omega),$$

on applique formul de Green

$$\begin{aligned}&\langle z'', v\rangle - \int_\Omega \nabla_{X_2} \cdot (A_{22}\nabla_{X_2} z) v dx + \int_{\partial\Omega} A_{22}\nabla_{X_2} z \cdot \eta v ds + \langle \chi, v\rangle\\ = &\int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in D(\Omega),\end{aligned}$$

et pour conditions initiales (23)

$$\int_{\partial\Omega} A_{22}\nabla_{X_2} z \cdot \eta v ds = 0.$$

donc

$$\langle z'', v\rangle - \int_\Omega \nabla_{X_2} \cdot (A_{22}\nabla_{X_2} z) v dx + \langle X, v\rangle = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in D(\Omega),$$

Nous dérivons l'équation sur Ω

$$z'' v - \nabla_{X_2} \cdot (A_{22}\nabla_{X_2} z) v + \chi v = f v, \qquad \forall v \in D(\Omega),$$

En divisant par la fonction de test tel que $\forall v \in D(\Omega)$

$$z'' - \nabla_{X_2} \cdot (A_{22}\nabla_{X_2} z) = f - \chi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) + L^{q'}(0, T; W') \tag{27}$$

Puis, selon [15, Theorems 4.1, 4.2], z satisfes la continuité dans le temps (22) et l'égalité énergétique suivante

$$\begin{aligned} & |z'(t)|^2_\Omega + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z(t)\cdot\nabla_{X_2} z(t)dx + 2\int_0^t \langle\chi, z'\rangle ds \\ = \; & |z'(0)|^2_\Omega + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z(0)\cdot\nabla_{X_2} z(0)dx + 2\int_0^t fz'dxds, \quad \forall t\in[0;T]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Maintenant, pour montrer que les conditions initiales sont satisfées, nous utilisons d'une part leidentités suivantes, établies en utilisant l'intégration par parties,

$$\int_0^t \langle z'', v\phi\rangle ds = \int_\Omega z'(s)v\phi(s)dx\Big|_0^t - \int_0^t \langle z', v\phi'\rangle ds$$

$$\int_0^t \langle z', v\phi'\rangle ds = \int_\Omega z(s)v\phi'(s)dx\Big|_0^t - \int_0^t\int_\Omega zv\phi'' dxds$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle z'', v\phi\rangle ds &= \int_\Omega z'(t)v\phi(t)dx - \int_\Omega z'(0)v\phi(0)dx \\ &\quad - \int_\Omega z(t)v\phi'(t)dx + \int_\Omega z(0)v\phi'(0)dx + \int_0^t\int_\Omega zv\phi'' dxds \end{aligned} \tag{2.5}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle u''_\varepsilon, v\phi\rangle ds &= \int_\Omega u'_\varepsilon(t)v\phi(t)dx - \int_\Omega u^1_\varepsilon v\phi(0)dx \\ &\quad - \int_\Omega u_\varepsilon(t)v\phi'(t)dx + \int_\Omega u^0_\varepsilon v\phi'(0)dx + \int_0^t\int_\Omega u_\varepsilon v\phi'' dxds \end{aligned} \tag{2.6}$$

Puis en multipliant l'équation en (13) par $\phi \in C^\infty([0,T])$ et intégration plus $(0,T)$et tous les $v\in D(\Omega)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle u''_\varepsilon, v\phi\rangle ds + \int_0^t\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v\phi dxds + \int_0^t \langle\beta u'_\varepsilon, v\phi\rangle ds \\ = \; & \int_0^t\int_\Omega fv\phi dxds, \qquad \forall v\in D(\Omega), \phi\in C^\infty([0,T]), \end{aligned}$$

D'autre part en utilisant (25)

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0, \quad u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} z, \quad \beta u'_\varepsilon \rightharpoonup \chi$$

Et en utilisant (27) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle u''_\varepsilon, v\phi \rangle ds &= \int_0^t \int_\Omega f v\phi dxds - \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon, v\phi \rangle ds - \int_0^t \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\phi dxds \\
&\to \int_0^t \int_\Omega f v\phi dxds - \int_0^t \langle X, v\phi \rangle ds - \int_0^t \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} z \cdot \nabla_{X_2} v\phi dxds \\
&= \int_0^t \langle z'', v\phi \rangle ds.
\end{aligned}$$

Puis en passant à la limite dans (30) pour $\phi(t) = \phi'(t) = 0$ donc

$$\int_0^t \langle u''_\varepsilon, v\phi \rangle ds = -\int_\Omega u^1_\varepsilon v\phi(0)dx + \int_\Omega u^0_\varepsilon v\phi'(0)dx + \int_0^t \int_\Omega u_\varepsilon v\phi'' dxds$$

En utilisant (15), donnez-nous

$$\int_0^t \langle u''_\varepsilon, v\phi \rangle ds = -\int_\Omega u^1 v\phi(0)dx + \int_\Omega u^0 v\phi'(0)dx + \int_0^t \int_\Omega u_\varepsilon v\phi'' dxds$$

Et en utilisant (25), nous trouvons

$$\int_0^t \langle z'', v\phi \rangle ds = -\int_\Omega u^1 v\phi(0)dx + \int_\Omega u^0 v\phi'(0)dx + \int_0^t \int_\Omega z v\phi'' dxds. \tag{31}$$

En comparant(29) et (31), nous

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle z'', v\phi \rangle ds - \int_0^t \langle z'', v\phi \rangle ds &= -\int_\Omega u^1 v\phi(0)dx + \int_\Omega u^0 v\phi'(0)dx + \int_0^t \int_\Omega z v\phi'' dxds. \\
&\quad - \left(-\int_\Omega z'(0) v\phi(0)dx + \int_\Omega z(0) v\phi'(0)dx + \int_0^t \int_\Omega z v\phi'' dxds \right)
\end{aligned}$$

$$-\int_\Omega u^1 v\phi(0)dx + \int_\Omega u^0 v\phi'(0)dx - \left(-\int_\Omega z'(0) v\phi(0)dx + \int_\Omega z(0) v\phi'(0)dx \right) = 0$$

donc

$$-\langle z'(0), v\phi(0)\rangle + \int_\Omega z(0)v\phi'(0)dx = -\int_\Omega u^1(0)v\phi dx + \int_\Omega u^0 v\phi'(0)dx; \quad \forall v \in D(\Omega).$$

Cela montre la première identité dans (23) en choisissant $\phi(0) = 1, \phi'(0) = 0$. La seconde l'identité est démontrée en choisissant $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 1$.Ensuite, puisque (21) détient pour chaque $t \in [0, T]$, il existe $\zeta_0; \zeta_1$ et ζ_2 de telle sorte que - jusqu'à une subséquence-

$$\varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon(t) \longrightarrow \zeta_2(t), \quad u'_\varepsilon(t) \to \zeta_1(t) \text{ en } L^2(\Omega) \text{ et vous } u_\varepsilon(t) \to \zeta_0(t) \text{ en } V(\Omega)$$

Passer à la limite dans (30) pour $\phi(0) = \phi'(0) = 0$, en comparant avec (29) et en faisant valoir comme ci-dessus pour différents choix de $\phi(t)$ et $\phi'(t)$ rendements

$$\zeta_0(t) = z(t), \quad \zeta_1(t) = z'(t) \text{ et } \zeta_2(t) = 0.$$

Cela complète la preuve de la lemme. □

Notez que nous n'avons pas encore utilisé la monotonicité de β. Cette hypothèse joue un rôle important pour surmonter le manque de compacité et pour déterminer clairement limite du terme non lignear, comme nous le verrons dans le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Selon les hypothèses de Lemme 2.3, nous avons*

$$\beta u'_\varepsilon \to z' \text{ en à } L^{q'}(0, T; W') \tag{32}$$

et z est la solution de (16).

Démonstration. pour $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^q(0, T; W)$, nous allons définir

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(t, v) &= \frac{1}{2}|(u_\varepsilon - z)'(t)|^2_\Omega + \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta v, u'_\varepsilon - v\rangle ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \begin{pmatrix} \nabla_{X_1}u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1}u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

pour chaque $t \in [0,T]$.Grâce à la monotonicité de β et (5), il est clair que $M_\varepsilon(t,v) \geq 0$. Développement M_ε nous obtenons

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(t,v) &= \frac{1}{2}\left|u'_\varepsilon(t)\right|^2_\Omega + \frac{1}{2}\left|z'(t)\right|^2_\Omega - \int_\Omega u'_\varepsilon z'(t)dx \\ &+ \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon u'_\varepsilon \rangle ds - \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon, v\rangle ds + \int_0^t \langle \beta v, v - u'_\varepsilon\rangle ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &\int_\Omega A_\varepsilon \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} dx \\ = &\int_\Omega \begin{pmatrix} \varepsilon^2 A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} dx \\ = &\int_\Omega \begin{pmatrix} \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) + \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \\ \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) + A_{22}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} dx \\ = &\int_\Omega \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx + \int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx \\ &+ \int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) dx + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \cdot \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) dx \\ = &\int_\Omega \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx + \int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx \\ &- \int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx + \int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon(t) dx \\ &- \int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) dx \\ &- \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A_\varepsilon \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) \end{pmatrix} dx \\
= \;& \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \cdot \nabla u_\varepsilon(t) dx - \int_\Omega \varepsilon A_{12} \nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx \\
& - \int_\Omega \varepsilon A_{21} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx - \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) dx \\
& - \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
M_\varepsilon(t,v) \;=\;& \frac{1}{2}\left|u_\varepsilon'(t)\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\left|z'(t)\right|_\Omega^2 - \int_\Omega u_\varepsilon' z'(t) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \cdot \nabla u_\varepsilon(t) dx \\
& + \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' u_\varepsilon' \rangle ds - \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon', v \rangle ds + \int_0^t \langle \beta v, v - u_\varepsilon' \rangle ds \\
& - \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon A_{12} \nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon A_{21} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx \\
& - \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx.
\end{aligned}$$

En tenant compte (20), nous obtenons

$$\begin{aligned}
M_\varepsilon(t,v) \;=\;& \int_0^t \int_\Omega f u_\varepsilon' dx ds + \frac{1}{2}\left|u_\varepsilon^1\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon^0(t) \cdot \nabla u_\varepsilon^0(t) dx \\
& + \frac{1}{2}\left|z'(t)\right|_\Omega^2 - \int_\Omega u_\varepsilon' z'(t) dx + - \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon', v \rangle ds + \int_0^t \langle \beta v, v - u_\varepsilon' \rangle ds \\
& - \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon A_{12} \nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon A_{21} \nabla_{X_1} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx \\
& - \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - z)(t) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_\varepsilon(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx.
\end{aligned}$$

Passer à la limite des rendements

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} M_\varepsilon(t,v) \;=\;& \int_0^t \int_\Omega f z' dx ds + \frac{1}{2}\left|u^1\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22} \nabla u^0(t) \cdot \nabla u^0(t) dx - \frac{1}{2}\left|z'(t)\right|_\Omega^2 \\
& - \int_0^t \langle \chi, v \rangle ds + \int_0^t \langle \beta v, v - z' \rangle ds - \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} z(t) \cdot \nabla_{X_2} z(t) dx.
\end{aligned}$$

Puis, par (23) et (28),donc

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} M_\varepsilon(t,v) &= \int_0^t \int_\Omega f z' dx ds + \frac{1}{2}\left|u^1\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22}\nabla u^0(t)\cdot\nabla u^0(t)dx - \frac{1}{2}\left|z'(t)\right|_\Omega^2 - \int_0^t \langle\chi, v\rangle ds \\ &+ \int_0^t \langle\chi, z'\rangle ds - \int_0^t \langle\chi, z'\rangle ds + \int_0^t \langle\beta v, v - z'\rangle ds - \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z(t)\cdot\nabla_{X_2} z(t)dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} M_\varepsilon(t,v) &= \int_0^t \int_\Omega f z' dx ds + \frac{1}{2}\left|u^1\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22}\nabla u^0(t)\cdot\nabla u^0(t)dx + \int_0^t \langle\beta v - x, v - z'\rangle ds \\ &- \frac{1}{2}\left|z'(0)\right|_\Omega^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2} z(0)\cdot\nabla_{X_2} z(0)dx - \int_0^t f z' dx ds, \end{aligned}$$

On utilise conditions initiales $z(0) = u^0$et $z'(0) = u^1$, Elles nous donnent

$$\lim_{x\to 0} M_\varepsilon(t,v) = \int_0^t \langle\beta v - x, v - z'\rangle ds \geq 0, \qquad \forall t \in [0;T]. \tag{33}$$

Choisir $v = z' - \theta\varphi, \varphi \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^q(0,T;W)$ et $\theta < 0$ nous obtenons

$$\int_0^T \langle\beta(z' - \theta\varphi) - x, \varphi\rangle ds \geq 0$$

location $\theta \to 0$ et en utilisant $(9 - iv)$, nous tirons

$$\int_0^T \langle\beta z' - \chi, \varphi\rangle ds \geq 0, \qquad \forall\varphi \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^q(0,T;W).$$

Cela implique que

$$\beta = z'\chi \text{ p.p. } Q.$$

et donc z est la solution unique de(16), c'est-à-dire $z = \widetilde{u}$. □

Démonstration. de Theorème 2.1. Grâce aux Lemmes 2.3 l'existence de la sous-Lemme 2.4 est assuré. Ainsi, puisque la limite de chaque sous-séquence de vous u_ε est unique,les convergences $(24), (25)$ et (32) tiennent pour toute la séquence.

Enfin, en prenant $v = \widetilde{u}'$ en (33), nous obtenons

$$\underset{\varepsilon\to 0}{lim} M_\varepsilon(t, \widetilde{u}') = \int_0^t \langle \beta\widetilde{u}' - \beta\widetilde{u}', \widetilde{u}' - \widetilde{u}'\rangle ds = 0$$

Depuis, par (5) et $(9 - iii)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left|(u_\varepsilon - \widetilde{u})'(t)\right|_\Omega^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon^2 \left|\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t)\right|_\Omega^2 + \left|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - \widetilde{u})(t)\right|_\Omega^2\right) + \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', u_\varepsilon' - \widetilde{u}'\rangle ds \\ \leq \; & M_\varepsilon(t; \widetilde{u}') \to 0, \end{aligned}$$

les fortes convergences dans (18) suivent. Cela met fin à la preuve du theorème. □

Remarque 2.1. *Si β est uniformément monotone, c'est-à-dire pour une certaine constante $\delta > 0$ nous avons*

$$\langle \beta(t)u - \beta(t)v, u - v\rangle \geq \delta \left|u - v\right|_W^q, \qquad \forall u, v \in V, a.e.t \in [0, T],$$

puis nous obtenons la forte convergence

$$\langle \beta(t)u_\varepsilon' - \beta(t)\widetilde{u}', u_\varepsilon' - \widetilde{u}'\rangle \geq \delta \left|u_\varepsilon' - \widetilde{u}'\right|_W^q, en\ L^q(0, T; W)$$

Alors

$$\left|u_\varepsilon' - \widetilde{u}'\right|_W^q = 0$$

Donc

$$u_\varepsilon' \to \widetilde{u}' \ en\ L^q(0, T; W). \tag{34}$$

Remarque 2.2. *Si A dépend de t, c'est à dire.$A = A(t; x)$, avec des coefficients en $C^1(\overline{Q})$ on peut montrer que les convergences du théorème 2.1 sont au moins valables quand*

$$\int_\Omega A_\varepsilon'(t)\nabla v \cdot \nabla v dx \leq 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in [0; T].$$

Exemple 2.1. *Comme d'habitude, nous prenons $v = \beta\left|v\right|^{q-2} v$, pour $q \geq 2$.Puis satis es les conditions requises dans (9) avec $W = L^q(\Omega)$, et est uniformément* *monotone de puis. Nous avons*

$$\int_{\Omega} \left(|u|^{q-2} u - |v|^{q-2} v\right)(u-v)dx \geq |u-v|^{q}_{L^q(\Omega)}$$

Ainsi, les convergences (18) *et* (34) *tiennent en l'espèce. En outre, compte tenu des* (8), (10) *et* (14) *nous pouvons facilement voir comme dans [3] que*

$$u^0(X_1,.) \in H^1_0(\Omega_{X_1}), u^1(X_1,.) \in L^2(\Omega_{X_1})$$

$$\beta\widetilde{u}'(X_1,.) \in L^{q'}(0;T;L^{q'}(\Omega_{X_1})), f(X_1,.) \in L^2(0;T;L^2(\Omega_{X_1})),$$

pour a.e. $X_1 \in \Pi_1$. *Puis par la même technique utilisée dans* [3, 12], *qui est indépendante de la linéarité du problème, il est facile de montrer que, pour a.e.* $X_1 \in \Pi_1, \widetilde{u}(X_1,.)$ *est la solution unique au problème*

$$\begin{cases} \widetilde{u}(X_1,.) \in C([0;T];H^1_0(\Omega_{X_1})), \\ \widetilde{u}'(X_1;)C([0;T];L^2(\Omega_{X_1})) \cap L^q(0;T;L^q(\Omega_{X_1})), \\ \langle \widetilde{u}''(t;X_1;X_2), v\rangle + \int_{\Omega_{X_1}} A_{22}(t,X_1,X_2)\nabla_{X_2}\widetilde{u}(t,X_1,X_2)\cdot\nabla_{X_2} v dX_2 \\ \quad + \int_{\Omega_{X_1}} |\widetilde{u}'(t,X_1,X_2)|^{q-2}\,\widetilde{u}'(t,X_1,X_2)v dX_2 \\ \quad = \int_{\Omega_{X_1}} f(t,X_1,X_2)v dX_2, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega_{X_1}), \\ \widetilde{u}(0,X_1,.) = u^0(X_1,.), \quad \widetilde{u}'(0,X_1,.) = u^1(X_1,.) \quad \text{en } \Omega_{X_1}. \end{cases}$$

Notez qu'ici X_1 *joue le rôle d'un paramètre et que cette forme est plus classique,*(13), *de ned dans une dimension inférieure.*

Chapitre 3

Convergences dans les domaines cylindriques

Dans Theorème 2.1, on peut remarquerconvergence du $\nabla_{X_1} u_\varepsilon$, ce qui empêche la convergence d'être Espace Sobolev $H^1(\Omega)$. Cela était attendu depuis u_ε et sa limite $\widetilde{u}$ ne sont pas nécessairement appartiennent au même espace $H_0^1(\Omega)$. En particulier, sur les cylindres, une couche limite peut apparaissent près de la limite latérale. Maintenant, afin d'améliorer la convergence ci-dessus résultats, nous considérons un domaine cylindrique

$$\Omega = \Delta \times \omega,$$

où Δ (resp. ω) est un sous-ensemble ouvert délimité de $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{R}^{n-p}$). Let Δ_0 et Δ' être deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^p$ satisfaisant

$$\Delta_0 \subset\subset \Delta' \subset\subset \Delta,$$

et définir

$$\Omega_0 = \Delta_0 \times \omega, \quad Q_0 = (0,T) \times \Omega_0, \qquad \Omega' = \Delta' \times \omega, \quad Q' = (0,T) \times \Omega'.$$

Considérez une fonction de coupure lisse $\varrho = \varrho(X_1)$, satisfaisant

$$supp(\varrho) \subset \Delta', \varrho = 1 \text{ sur } \Delta_0, \qquad 0 \le \varrho \le 1 \text{ et } |\nabla_{x_1}\varrho| \le C.$$

Nous modifions légèrement l'hypothèse $(9 - iii)$ en supposant que la monotonie de β lorsque nous multiplions par une fonction de coupure, c'est-à-dire

$$\langle \beta' t)v_1 - \beta(t)v_2, (v_1 - v_2)\eta \rangle \ge 0, \qquad \forall v_1, v_2 \in W, \text{ p.p. } t \in [0, T], \tag{35}$$

où $\eta = \eta(X_1)$ est toute fonction positive avec $supp(\varrho) \subset \Delta$. En fait, nous n'avons-besoin de prendre $\eta = \varrho^2(X_1)$ dans les épreuves des prochains théoriques, voir aussi Remarque 4. Dans la paragraphe suivante, si la solution limite $\widetilde{u}$ satisfi es une certaine régularité hypothèses, nous améliorerons le taux de convergence dans les régions éloignées des couches limites.

3.0.1 Convergences dans l'espace Sobolev H^1

Théorème 3.1 (3.1)**.** *Selon les hypothèses de Theorème 2.1, nous supposons en outre que* (35) *détient et*

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}\widetilde{u} \in L^2(Q), \qquad pour\ i = 1, .., n, \quad j = 1, ..., p, \tag{36}$$

$$\left|u^1_\varepsilon - u^1\right|_{\Omega'}, \quad \left|\nabla_{X_2}(u^0_\varepsilon - u^0)\right|_{\Omega'} = O(\varepsilon), \qquad \left|\nabla_{X_1}u^0_\varepsilon\right|_{\Omega'} = O(1), \tag{37}$$

alors

$$\sup_{t\in[0,T]} |(u - \widetilde{u})(t)|_{\Omega_0}, \qquad \sup_{t\in[0,T]} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - \widetilde{u})(t)|_{\Omega_0} = O(\varepsilon), \tag{38}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |(u' - \widetilde{u}')(t)|_{\Omega_0} = O(\varepsilon), \qquad \int_0^T \langle \beta u\prime_\varepsilon - \beta\widetilde{u}', (u'_\varepsilon - \widetilde{u}')\varrho^2 \rangle ds = O(\varepsilon^2), \tag{39}$$

et nous avons la faible convergence

$$\nabla_{X_1}u_\varepsilon(t) \rightharpoonup \nabla_{X_1}\widetilde{u}(t) \ en\ L^2(\Omega_0), \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{40}$$

Démonstration. Prend $w_\varepsilon = u_\varepsilon - \widetilde{u}$ puis comparant (13) et (16) rendements

$$\begin{aligned}
&\langle u''_\varepsilon(t) - \widetilde{u}''(t), v\rangle + \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \cdot \nabla v dx - \int_\Omega A_\varepsilon \nabla \widetilde{u}(t) \cdot \nabla v dx \\
&+\langle \beta(t) u'_\varepsilon(t), v\rangle - \langle \beta(t)\widetilde{u}'(t), v\rangle \\
= \;& \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} \widetilde{u}(t) \cdot \nabla_{X_2} v dx - \int_\Omega A_\varepsilon \nabla \widetilde{u}(t) \nabla v dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle u''_\varepsilon(t) - \widetilde{u}''(t), v\rangle + \int_\Omega A_\varepsilon \nabla \left(u_\varepsilon - \widetilde{u}\right)(t) \nabla v dx + \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta \widetilde{u}', v\rangle ds \\
= \;& \int_\Omega \varepsilon^2 A_{11} \nabla_{X_1} \widetilde{u} \cdot \nabla_{X_1} v dx + \int_\Omega \varepsilon A_{21} \nabla_{X_2} \widetilde{u} \cdot \nabla_{X_1} v dx + \int_\Omega \varepsilon A_{12} \nabla_{X_1} \widetilde{u} \cdot \nabla_{X_2} v dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle w''_\varepsilon, v\rangle + \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla v dx + \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta \widetilde{u}', v\rangle ds \\
= \;& \int_\Omega \left\{\varepsilon^2 \nabla_{X_1} \cdot (A_{11} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \varepsilon \nabla_{X_2} .(A_{21} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \varepsilon \nabla_{X_1} \cdot (A_{12} \nabla_{X_2} \widetilde{u})\right\} v dx
\end{aligned}$$

pour chaque $v \in H^1_0(\Omega)$ Tester formellement cette identité avec $v = w'_\varepsilon \varrho^2$ et performant l'intégration sur $(0, t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega w''_\varepsilon w'_\varepsilon \varrho^2 ds dx + \int_0^t \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla (w'_\varepsilon \varrho^2) dx ds \\
&+ \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta \widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho^2\rangle ds \\
= \;& \int_0^t \int_\Omega \left\{\varepsilon^2 \nabla_{X_1} \cdot (A_{11} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \varepsilon \nabla_{X_2} \cdot (A_{21} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \varepsilon \nabla_{X_1} \cdot (A_{12} \nabla_{X_2} \widetilde{u})\right\} w'_\varepsilon \varrho^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left|w'_\varepsilon(t) \varrho\right|^2_\Omega - \frac{1}{2} \left|w'_\varepsilon(0) \varrho\right|^2_\Omega + \int_0^t \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla (w'_\varepsilon \varrho^2) dx ds \\
&+ \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta \widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho^2\rangle ds \\
= \;& \int_0^t \int_\Omega \left\{\varepsilon^2 \nabla_{X_1} \cdot (A_{11} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \varepsilon \nabla_{X_2} \cdot (A_{21} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \varepsilon \nabla_{X_1} \cdot (A_{12} \nabla_{X_2} \widetilde{u})\right\} w'_\varepsilon \varrho^2 dx
\end{aligned}$$

où $w'_\varepsilon(0) = w^1_\varepsilon = u'_\varepsilon(0) - \widetilde{u}'(0)$ et $w_\varepsilon(0) = w^0_\varepsilon = u_\varepsilon(0) - \widetilde{u}(0)$. Le terme intégral A_ε peut s'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla (w'_\varepsilon \varrho^2) dx ds &= \int_0^t \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w'_\varepsilon \varrho^2 + 2A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla \varrho w'_\varepsilon \varrho dx ds \\ &= \int_0^t \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w'_\varepsilon \varrho^2 dx ds \\ &\quad +2\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega A_{11} \nabla_{x_1} w_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} \varrho w'_\varepsilon \varrho dx ds \\ &\quad +2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega A_{12} \nabla_{x_2} w_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} \varrho w'_\varepsilon \varrho dx ds\end{aligned}$$

Notant que ϱ est indépendant de X_2car $\varrho = \varrho(X_1)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} |w'_\varepsilon(t)\varrho|^2_\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon(s) \cdot \nabla w_\varepsilon(s) \varrho^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta \widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho^2 \rangle ds \\ = \;& \frac{1}{2} |w'_\varepsilon(0)\varrho|^2_\Omega + \int_0^t \int_\Omega \varepsilon \left\{ \varepsilon \nabla_{X_1} \cdot (A_{11} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \nabla_{X_2} \cdot (A_{21} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \nabla_{X_1} \cdot (A_{12} \nabla_{X_2} \widetilde{u}) \right\} w'_\varepsilon \varrho^2 dx \\ & -2\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega A_{11} \nabla_{x_1} w_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} \varrho w'_\varepsilon \varrho dx ds - 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega A_{12} \nabla_{x_2} w_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} \varrho w'_\varepsilon \varrho dx ds\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} |w'_\varepsilon(t)\varrho|^2_\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon(t) \cdot \nabla w_\varepsilon(t) \varrho^2 dx - \frac{1}{2} A_\varepsilon \nabla w^0_\varepsilon \cdot \nabla w^0_\varepsilon \varrho^2 dx \\ & + \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta \widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho^2 \rangle ds \\ = \;& \frac{1}{2} |w'_\varepsilon(0)\varrho|^2_\Omega + \int_0^t \int_\Omega \varepsilon \left\{ \varepsilon \nabla_{X_1} \cdot (A_{11} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \nabla_{X_2} \cdot (A_{21} \nabla_{X_1} \widetilde{u}) + \nabla_{X_1} \cdot (A_{12} \nabla_{X_2} \widetilde{u}) \right\} w'_\varepsilon \varrho^2 dx \\ & -2\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega A_{11} \nabla_{x_1} w_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} \varrho w'_\varepsilon \varrho dx ds - 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega A_{12} \nabla_{x_2} w_\varepsilon \cdot \nabla_{x_1} \varrho w'_\varepsilon \varrho dx ds\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left|w_\varepsilon'(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon(t)\cdot\nabla w_\varepsilon(t)\varrho^2 dx + \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', w_\varepsilon'\varrho^2\rangle ds \\
= \; & \frac{1}{2}\left|w_\varepsilon^1\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon\nabla w_\varepsilon^0\cdot\nabla w_\varepsilon^0\varrho^2 dx \\
& + \int_0^t\int_\Omega \varepsilon\left\{\varepsilon\nabla_{X_1}\cdot(A_{11}\nabla_{X_1}\widetilde{u}) + \nabla_{X_2}.(A_{21}\nabla_{X_1}\widetilde{u}) + \nabla_{X_1}\cdot(A_{12}\nabla_{X_2}\widetilde{u})\right\} w_\varepsilon'\varrho^2 dxds \\
& -2\varepsilon^2\int_0^t\int_\Omega A_{11}\nabla_{X_1}w_\varepsilon\cdot\nabla_{X_1}\varrho w_\varepsilon'\varrho dxds \\
& -2\varepsilon\int_0^t\int_\Omega A_{12}\nabla_{X_2}w_\varepsilon\cdot\nabla_{X_1}\varrho w_\varepsilon'\varrho dxds.41
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous pouvons facilement voir cette identité lorsque la régularité de la solution permet de multiplications (voir [10]). Dans le cas général, on peut procéder par régularisation en tant que dans[1, 9, 10]. Puis en utilisant (5)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left|w_\varepsilon'(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon^2\left|\nabla_{X_1}w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\lambda\left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \int_0^t\langle\beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', w_\varepsilon'\varrho^2\rangle ds \\
= \; & \frac{1}{2}\left|w_\varepsilon^1\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\lambda\left|\varepsilon^2\nabla_{X_1}w_\varepsilon^0\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\lambda\left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon^0\varrho\right|_\Omega^2 \\
& + \int_0^t\int_\Omega \varepsilon\left\{\varepsilon\nabla_{X_1}\cdot(A_{11}\nabla_{X_1}\widetilde{u})\varrho + \nabla_{X_2}\cdot(A_{21}\nabla_{X_1}\widetilde{u})\varrho + \nabla_{X_1}\cdot(A_{12}\nabla_{X_2}\widetilde{u})\varrho\right\} w_\varepsilon'\varrho dxds \\
& -2\lambda\varepsilon^4\int_0^t\left|\nabla_{X_1}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 ds - 2\varepsilon^2\int_\Omega\left|w_\varepsilon'\nabla_{X_1}\varrho\right|_\Omega^2 ds \\
& -2\lambda\varepsilon^3\int_0^t\left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 ds. - 2\varepsilon\int_0^t\left|\nabla_{X_1}\varrho w_\varepsilon'\right|_\Omega^2 ds.
\end{aligned}$$

et utilisant l'inégalités de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left|w_\varepsilon'(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon(t)\cdot\nabla w_\varepsilon(t)\varrho^2 dx + \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', w_\varepsilon'\varrho^2\rangle ds \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left|w_\varepsilon^1\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon^0\cdot\nabla w_\varepsilon^0\varrho^2 dx \\
& + \int_0^t \varepsilon\left|\varepsilon\nabla_{X_1}\cdot(A_{11}\nabla_{X_1}\widetilde{u})\varrho + \nabla_{X_2}\cdot(A_{21}\nabla_{X_1}\widetilde{u})\varrho + \nabla_{X_1}\cdot(A_{12}\nabla_{X_2}\widetilde{u})\varrho\right|_\Omega^2 ds + + \int_0^t \left|w_\varepsilon'\varrho\right|_\Omega^2 ds \\
& -2\lambda\varepsilon^4\int_0^t \left|\nabla_{X_1}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 ds - 2\varepsilon^2\int_\Omega \left|w_\varepsilon'\nabla_{X_1}\varrho\right|_\Omega^2 ds \\
& -2\lambda\varepsilon^3\int_0^t \left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 ds - 2\varepsilon\int_0^t \left|w_\varepsilon'\nabla_{X_1}\varrho\right|_\Omega^2 ds.
\end{aligned}$$

et utilisant l'inégalités det Young $ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^{p'}$ $C_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}$ avec, on a

$$\begin{aligned}
& \left|w_\varepsilon'(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \lambda\varepsilon^2\left|\nabla_{X_1}w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \lambda\left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', w_\varepsilon\varrho^2\rangle ds \\
\leq\ & C\left\{\left|w_\varepsilon^1\varrho\right|_\Omega^2 + \left|\varepsilon^2\nabla_{X_1}w_\varepsilon^0\varrho\right|_\Omega^2 + \left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon^0\varrho\right|_\Omega^2\right\} \\
& + C\varepsilon^2\int_0^t \left|\varepsilon\nabla_{X_1}\cdot(A_{11}\nabla_{X_1}\widetilde{u})\varrho + \nabla_{X_2}\cdot(A_{21}\nabla_{X_1}\widetilde{u})\varrho + \nabla_{X_1}\cdot(A_{12}\nabla_{X_2}\widetilde{u})\varrho\right|_\Omega^2 ds \\
& + C\varepsilon^2\int_0^t \left|w_\varepsilon'\nabla_{X_1}\varrho\right|_\Omega^2 ds + C\int_0^t \lambda\varepsilon^2\left|\nabla_{X_1}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 + \lambda\left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 + \left|w_\varepsilon'\varrho\right|_\Omega^2 ds.
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.2, $\left|w_\varepsilon'\nabla_{X_1}\varrho\right|_Q$ est borné, puis en utilisant (37) il vient

$$\begin{aligned}
& \left|w_\varepsilon'(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \lambda\varepsilon^2\left|\nabla_{X_1}w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 \\
& + \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', w_\varepsilon'\varrho^2\rangle ds \\
\leq\ & O(\varepsilon^2) + C\int_0^t \left|w_\varepsilon'\varrho\right|_\Omega^2 + \lambda\varepsilon^2\left|\nabla_{X_1}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 + \lambda\left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon\varrho\right|_\Omega^2 ds.
\end{aligned}$$

Application de l'inégalité Gronwall que nous obtenons

$$\left|w_\varepsilon'(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \left|\nabla_{X_2}w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', w_\varepsilon'\varrho^2\rangle ds = O(\varepsilon^2), \tag{42}$$

$$|\nabla_{X_1} w_\varepsilon(t)\varrho|_\Omega^2 \leq C, \tag{43}$$

Ainsi, nous tirons (38) et (39) de puis $\varrho = 1$sur Ω_0. Enfin, grâce à (43), pour toute $t \in [0,T]$ nous pouvons extraire une sous-que faiblement convergente de $(\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t))_\varepsilon$ à la seule limite possible $\nabla_{X_1}\widetilde{u}(t)$ en $L^2(\Omega_0)$. Cela implique la convergence de l'ensemble séquence puisque la limite est unique. □

Remarque 3.1. *Bien sûr, la deuxième hypothèse dans* (37) *signifie que* $\nabla_{X_1} u_\varepsilon^0$*est délimité en* $L^2(\Omega_0)$, *puis par l'hypothèse rst dans la même ligne, nous pouvons voir que* $\nabla_{X_1} u_\varepsilon^0$ *converge faiblement vers le* $\nabla_{X_1} u^0$ *en* $L^2(\Omega_0)$, *comme ce que nous avons exactement obtenu dans le theorème pour* $\nabla_{X_1} u_\varepsilon(t)$ *pour chaque* $t \in [0,T]$. *Notez que, comme on le voit dans [10], ce type de conditions est nécessaire et suffisant pour déduire la convergence de vous* ε.

Lorsque la matrice A *a une structure diagonale, nous pouvons améliorer la convergence ci-dessus résultats.*

Corollaire 3.1 (matrice diagonale)**.** *Selon les hypothèses de Theorème 3.1, nous supposons en outre que* $A_{12} = A_{21} = 0$ *et*

$$\left|u_\varepsilon^1 - u^1\right|_{\Omega'}, \quad \left|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon^0 - u^0)\right|_{\Omega'} = o(\varepsilon) \ \textit{et} \ \left|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon^0 - u^0)\right|_{\Omega'} = o(1), \tag{44}$$

alors

$$\sup_{t\in 0;T]} |(u_\varepsilon - u)(t)|_{\Omega_0}, \qquad \sup_{t\in 0;T]} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - \widetilde{u})(t)|_{\Omega_0} = o(\varepsilon),$$

$$\sup_{t\in 0;T]} |(u'_\varepsilon - \widetilde{u}')(t)|_{\Omega_0} = o(\varepsilon), \qquad \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta\widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho^2\rangle ds = o(\varepsilon^2),$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - \widetilde{u})(t)|_{\Omega_0} \to 0$$

En particulier, nous avons la forte convergence

$$u_\varepsilon(t) \to \widetilde{u}(t) \ \textit{en} \ \ H^1(\Omega_0), \qquad \forall t \in [0,T]\,.$$

Démonstration. Compte tenu du fait que $A_{12} = A_{21} = 0$ dans (41), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2}\left|w_\varepsilon'(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \left|\nabla_{X_1} w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\nabla_{X_2} w_\varepsilon(t)\varrho\right|_\Omega^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \langle \beta u_\varepsilon' - \beta\widetilde{u}', w_\varepsilon'\varrho^2\rangle ds \\ \leq\ & \frac{C}{\varepsilon^2}\left\{\left|w_\varepsilon^1\varrho\right|_\Omega^2 + \left|\varepsilon^2\nabla_{X_1} w_\varepsilon^0\varrho\right|_\Omega^2 + \left|\nabla_{X_2} w_\varepsilon^0\varrho\right|_\Omega^2\right\} \\ & + C\left|\int_0^t\int_\Omega \nabla_{X_1}\cdot(A_{11}\nabla_{X_1}\widetilde{u})w_\varepsilon'\varrho^2 dxds + \int_0^t\int_\Omega A_{11}\nabla_{X_1} w_\varepsilon\cdot\nabla_{X_1}\varrho w_\varepsilon'\varrho^2 dxds\right|, \end{aligned}$$

pour chaque $t \in [0, T]$; Nous pouvons toujours changer Ω_0 par Ω' dans Theorème 3.1, puis utilisez le convergences $(38) - (40)$ dans les intégrales dans le A_{11} fait partie l'inégalité ci-dessus, nous en déduisons que les deux dernières intégrales ont tendance à zéro. Ainsi, par (44), le corollaire suit. □

Corollaire 3.2. *L'hypothèse* (35) *est fréquente, et parfois c'est une conséquence simple de la monotonicité comme dans l'exemple ci-dessus. En outre, dans le contexte de la cet exemple, nous pouvons obtenir plus de résultats de convergence grâce à*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|u|^{q-2}u - |v|^{q-2}v\right)(u-v)\varrho^2 dx \ &\geq\ \int_{\Omega_0} (|u|^{q-2}u - |v|^{q-2}v)(u-v)dx \\ &\geq\ |u-v|_{L^q(\Omega_0)}^q \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il s'ensuit que

$$|u_\varepsilon' - \widetilde{u}'|_{L^q(Q_0)} = O(\varepsilon^{2/q}), \qquad (= o(\varepsilon^{2/q}) \textit{ dans le boîtier des tructure diagonale})$$

3.0.2 Convergences exponentielles.

En ce qui concerne les problèmes elliptiques (voir [2, 8]), une taux de convergence $u_\varepsilon \to \widetilde{u}$ vous pouvez être montré si la limite hyperbolique problèmes de valeur sont approximativement invariants dans le cadre de traductions arbitraires X_1 directions, c'est-à-dire en supposant que

$$\begin{aligned} A_{12}(X_1,X_2) &= A_{12}(X_2), \quad A_{22}(X_1,X_2) = A_{22}(X_2), \\ u^0(X_1,X_2) &= u^0(X_2); \quad u^1(X_1,X_2) = u^1(X_2), \qquad f(X_1,X_2) = f(X_2). \end{aligned} \tag{45}$$

Nous pouvons envisager des conditions initiales plus générales comme dans [1], mais ici pour la raison de la simplicité que nous supposons

$$u_\varepsilon^1 = u^1, \quad u_\varepsilon^0 = u^0 \qquad \text{en} \quad \Delta' \times \omega. \tag{46}$$

Ensuite, nous avons le theorème suivant.

Théorème 3.2 (3.2)**.** *Selon les hypothèses de Theorème 2.1, nous supposons en outre que* (35), (45) *et* (46) *tenir. Puis il existe deux constantes* $K, \gamma > 0$*, de telle sorte que*

$$\sup_{t\in 0;T]} |(u'_\varepsilon - \widetilde{u}')(t)|_{\Omega_0}, \qquad \sup_{t\in 0;T]} |(u_\varepsilon - \widetilde{u})(t)|_{H^1(\Omega_0)} \le Ke^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}.$$

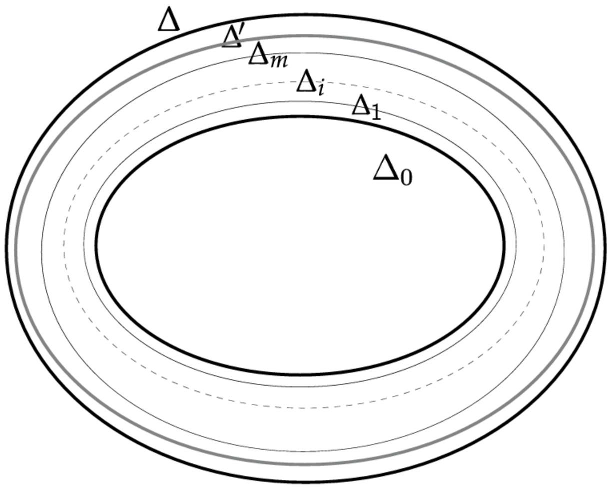
Démonstration. La preuve est basée sur la technique d'itération introduite dans [8] sans perte de généralité, nous supposons que dist $(\Delta_0, \Delta \setminus \Delta\prime) > 1$ et set $m = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ pour un fi xed $\varepsilon > 0$ ([.] désigne la partie integer). Car ε assez petit, nous pouvons toujours construire un séquence $(\Delta_i)_{0\le i\le m+1}$ d'ensembles strictement croissants de telle sorte que

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\subset \ \subset \Delta_1 \subset\subset \cdots \subset\subset \Delta_m \subset\subset \Delta_{m+1} := \Delta', \\ dist(\Delta_i, \Delta \setminus \Delta_{i+1}) &\ge \varepsilon, \qquad i = 0, \ldots, m+1 \end{aligned}$$

Que $(\varrho_i)_{1\le i\le m+1}$ soit une famille de fonctions en fonction uniquement de X_1 de telle sorte que

$$\begin{matrix} supp(\varrho_i) \subset \Delta_i, \quad \varrho_i = 1 \text{ sur } \Delta_{i-1} \\ 0 \le \varrho_i \le 1 \ et \ |\nabla x_1 \varrho_i| \le \frac{C}{\varepsilon}, \end{matrix} \quad i = 1, ..., m+1 \tag{47}$$

où C est une constante indépendante de ε. Ensuite, en utilisant (45), nous récrivons



(41) comme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left|w'_\varepsilon(t)\varrho_i\right|^2_\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon \nabla\omega_\varepsilon.\nabla\omega_\varepsilon \varrho_i^2 dx + \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta\widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho^2\rangle ds \\ = & -2\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega A_{11}\nabla x_1 \omega_\varepsilon \cdot \nabla x_1 \varrho_i \omega'_\varepsilon \varrho_i dxds \\ & -2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega A_{12}\nabla x_2 \omega_\varepsilon.\nabla x_1 \varrho_i \omega'_\varepsilon \varrho_i dxds, \end{aligned}$$

depuis $\widetilde{u}$ you et $A_{12} = A_{21}^T$ sont indépendants de X_1. Puis grâce à (47)et l'application L'inégalité de Gronwall que nous obtenons

$$\left|w'_\varepsilon(t)\right|^2_{\Omega_{i-1}} + \varepsilon^2 \left|\nabla_{X_1} w_\varepsilon(t)\varrho\right|^2_{\Omega_{i-1}} + \left|\nabla_{X_2} w_\varepsilon(t)\varrho\right|^2_{\Omega_{i-1}} + \int_0^t \langle \beta u'_\varepsilon - \beta\widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho^2\rangle ds \le C\int_0^t \left|w'_\varepsilon\right|^2_{\Omega i\setminus\Omega_{i-1}} ds. \tag{3.3}$$

Ici, nous avons mis $\Omega_i = \Delta_i \times \omega$ et tenir compte du fait que $supp(\nabla x_1 \varrho_i) \subset \Delta_i \setminus \Delta_{i-1}$. En particulier, nous avons

$$\left|w'_\varepsilon(t)\right|^2_{L^2(\Omega_{i-1})} \le C\int_0^T \left|w'_\varepsilon\right|^2_{\Omega_i\setminus\Omega_{i-1}} ds$$

Intégration des deux côtés sur $[0,T]$ nous obtenons

$$\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_{i-1}}\, dt \leq CT\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_i\setminus\Omega_{i-1}}\, dt = CT\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_i}\, dt - CT\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_{i-1}}\, dt.$$

ainsi

$$\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_{i-1}}\, dt \leq k\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_i}\, dt,$$

où $k = \frac{CT}{1+CT} < 1$. Itérer cette inégalité pour $i = 2, ..., m+1$, nous tirons

$$\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_1}\, dt \leq k^m\int_0^T |w'_\varepsilon|^2_{\Omega_{m+1}}\, dt \leq K^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\, |w'_\varepsilon|^2_Q\,,$$

depuis $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Puis selon Lemme 2.2, $|w'_\varepsilon|^2_Q$ est délimité et revenir en arrière à (48), écrit pour $i = 1$, il vient

$$\sup_{t\in 0;T]} |w'_\varepsilon(t)|^2_{\Omega_0}\,, \qquad \sup_{t\in 0;T]} |\nabla_{X_2} w_\varepsilon(t)|^2_{\Omega_0}\,, \qquad \int_0^T \langle \beta u'_\varepsilon - \beta\widetilde{u}', w'_\varepsilon \varrho_1^2\rangle ds \leq Ce^{-\frac{\gamma_1}{\varepsilon}};$$

$$\varepsilon^2 \sup_{t\in 0;T]} |\nabla_{X_1} w_\varepsilon(t)|^2_{\Omega_0} \leq Ce^{-\frac{\gamma_1}{\varepsilon}}$$

où $\gamma_1 = -\ln k$, La dernière inégalité implique

$$\sup_{t\in 0;T]} |\nabla_{X_1} w_\varepsilon(t)|^2_{\Omega_0} \leq Ce^{-\frac{\gamma_1}{\varepsilon}}$$

pour certains positifs $\gamma < \gamma_1$. Cela complète la preuve du theorème. □

Remarque 3.2. *La preuve ci-dessus donne également*

$$\int_0^T \langle \beta u'_\varepsilon - \beta\widetilde{u}', (u'_\varepsilon - \widetilde{u}')\, \varrho_1^2\rangle ds \leq Ke^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}$$

Notez que ϱ_1 dépend de ε,mais si nous prenons β comme dans l'exemple ci-dessus,il s'ensuit que

$$|u'_\varepsilon - \widetilde{u}'|_{L^q(Q_0)} \leq Ke^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}$$

Notations

$:=$ égal par définition

$E' =$ dual de l'espace E

$|.|_{\Omega} =$ norme d'espace $L^2(\Omega)$

$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ pour $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\Omega =$ domaine ouvert dans $\mathbb{R}^n$

$\Omega' =$fermeture de Ω

$\partial\Omega = \Gamma$ frontière de Ω

$\Omega' \subset\subset \Omega = \Omega'$fortement inclus dans Ω ,i.e,$\overline{\Omega}' \subset \Omega$

$supp(u) =$La fermeture de $\{x \in \Omega \, | u(x) \neq 0\}$

$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$

$\Delta_{x_1} u = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$

$\Delta_{x_2} u = \sum_{i=p+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$

$(|u_\varepsilon - u| = O(\varepsilon)$ comme $\varepsilon \to 0) \Leftrightarrow \exists C \geq 0, |u_\varepsilon - u| \leq C\varepsilon$ pour ε suffisamment proche de 0

$(|u_\varepsilon - u| = o(\varepsilon)$ comme $\varepsilon \to 0) \Leftrightarrow \frac{|u_\varepsilon - u|}{\varepsilon} \to 0$ comme $\varepsilon \to 0$

quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes sont souvent utilisées pour dériver des estimations dans l'analyse.

Une inégalité polynomiale

soit $1 < p < +\infty$ et $ab > 0$,en suite

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

L'inégalité de Young

Supposons $1 < p, p' < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors pour tout a,$b > 0$, il est vrai

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Il est parfois pratique d'utiliser le formulaire

$$ab \leq \alpha a^p + C_\alpha b^{p'}, C_\alpha = \alpha^{-1/(p-1)}$$

Inégalité de Holder

Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$.Supposons que $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Puis

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq |u|_{L^p(\Omega)} \, |v|_{L^{p'}(\Omega)} \, .$$

L'inégalité de Minkowski

Supposons $1 \leq p \leq \infty$. Alors pour tout $u, v \in L^p(\Omega)$

$$|u+v|_{L^p(\Omega)} \leq |u|_{L^p(\Omega)} + |v|_{L^p(\Omega)}$$

Bibliographie

[1] B. Brighi and S. Guesmia, Asymptotic behaviour of solutions of hyperbolic problems on a cylindrical domain, in Contin. Dyn. Syst., 2007, Dynamical Systems and Di er-ential Equations, Proceedings of the 6^{th} AIMS International Conference, suppl., 160169.

[2] M. Chipot, On some anisotropic singular perturbation problems, Asymptot. Ana., 55 (2007), 125-144.

[3] M. Chipot and S. Guesmia, On the asymptotic behavior of elliptic, anisotropic singular per-turbations problems, Commun. Pure Appl. Anal., 8 (2009), 179-193.

[4] M. Chipot and S. Guesmia, On a class of integro-di erential problems, Commun. Pure Appl. Anal., 9 (2010), 1249-1262.

[5] M. Chipot and S. Guesmia, On some anisotropic, nonlocal, parabolic singular perturbations problems, Applicable Analysis, to appear.

[6] M. Chipot and S. Guesmia, Correctors for some asymptotic problems, Proc. Steklov Inst. Math., 270 (2010), 263-277.

[7] M. Chipot and A. Rougirel, On the asymptotic behaviour of the solution of parabolic problems in cylindrical domains of large size in some directions, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 1 (2001), 319-338.

[8] M. Chipot and K. Yeressian, Exponential rates of convergence by an iteration technique, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 346 (2008), 21-26.

[9] S. Guesmia, du Comportement Asymptotique de certaines Equations aux Derivees Partielles dans des Domaines Cylindriques," These Universit de Haute Alsace, 2006.

[10] S. Guesmia, Some results on the asymptotic behavior for hyperbolic problems in cylindrical domains becoming unbounded, J. Math. Anal. Appl., 341 (2008), 11901212.

[11] S. Guesmia, Asymptotic behaviour of elliptic boundary-value problems with some small coef-cients, Electron. J. Di erential Equations, 59 (2008), 1-13.

[12] S. Guesmia and A. Sengouga, Anisotropic singular perturbation of hyperbolic problems, Appl.Math. Comput. 217 (2011), 8983-8996.

[13] J.-L. Lions, Singulieres dans les Problemes aux Limites et en Controle Optimal," Lecture Notes in Math., 323, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[14] J.-L. Lions and W. A. Strauss, Some non-linear evolution equations, Bull. Soc. Math. France,93 (1965), 43-96.

[15] W. A. Strauss, On continuity of functions with values in various Banach spaces, Paci c J.Math., 19 (1966), 543-551.