République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : **Sciences et Technologie**

Filière : **Génie Mécanique**

Spécialité : **Maintenance Industrielle**

Thème

Modélisation du comportement vibratoire des rotors flexibles

Présenté par :

BECHOUA Abdelouahab & MAHDJOUBI Belkhir

Devant le jury :

BOUHMAME Nacer	MAA	Président
KHALFI Mahdi	MAA	Examinateur
BELAKROUM Rasim	MCA	Encadreur

Année universitaire 2020/2021

Dédicaces

<u>Je dédie ce travail</u>

A La plus grande femme parmi les femmes de l'univers ∞ma chère mère∞ qui m'a porté comme un fœtus et m'a donné du lait pour la morale comme un bébé et m'a enseigné quand j'étais jeune et m'a accompagné de ses grandes supplications

À ∞ mon cher père∞fier de l'honorable, Et des vertus enracinées, L'aimant de moi, mon soutien solide, et oubliez le spécifique.

A toute la famille généreuse qui m'a soutenu et qui est toujours frères et sœurs

À la famille BECHOUA, et la famille BEKIRI et la famille BEN SADIA et la famille MAHDJOUBI et la famille BEN HADDA et la famille TOUAHER

Et la famille MANSOURI

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, A tous ceux que nous aimons sincèrement et partageons le même sentiment, A tous ceux que j'ai eus l'honneur de connaître, A tous ceux qui m'ont appris une lettre.

A toute la famille universitaire, au Département de génie mécanique

Tout le lot 2021

Merci !

BECHOUA Abdelouahab

Dédicaces

Je dédie

ce modeste travail

A ma très chère mère source de tendresse

A mon très cher père, qui m'encourage

Dans les instants délicats

A mes chers frères

A mes chères sœurs

A toute ma famille
A tous mes amis

MAHDJOUBI Belkhir

Remerciements

«Nous remercions dieu tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et

La volonté pour achever ce modeste travail.Nos sincères

Remerciements à notre encadreur, de mémoir monsieur

BELAKROUM Rassim

Professeur à l'Université de Kasdi Merbah Ouargla, pour sa patience, son

Soutien et ses encouragements continuels qui ont permis

L'aboutissement de ces efforts en dépit des difficultésque nous avons rencontrées dans

Ce travail. Nous tenons également à remercier tous ceux qui m'ont

Apporté leur aide de près ou de loin et nous a aidé à développer notre projet

Fin des études.»

BECHOUA Abdelouahab, MAHDJOUBI Belkhir

NOMENCLATURE

A_{e}: Amplitude adimensionnelle

λ : Rapport d’amortissement

ω : Fréquence naturelle

ω_n : Fréquence adimensionnelle

C : confusion d’amortissement

K : mode propre

Id :Moment d'inertie diamétral

Ip :Moment d'inertie polaire

E :Module de Young

a :Longueur appuis gauche - roue

b :Longueur appuis droit - roue

L :Longueur de l'arbre

m :masse de la roue

Sommaire

Chapitre III Modalisation des rotors par méthode des éléments finis

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction Générale

Introduction générale

Les machines tournantes sont connues comme des équipements essentielles qui sont souvent trouvées dans différents domaines de la technologie moderne tel que les installations industrielles, Ils comprennent deux éléments principaux, une partie fixe s'appelle le stator et une partie tournantes' appelle le rotor .Les arbres ou les rotors sont définis comme étant tout élément tournant autour d'un axe fixe. Ils constituent les pièces maîtresses des machines tournantes dont le domaine d'applications industrielles est très vaste (machines-outils, turbines, véhicules, turbocompresseurs, nucléaire…), L'arbre d'un rotor peut être considéré en tant qu'un corps élastique continu avec des propriétés d'inertie et de masse réparties tout le long de sa longueur surtout dans le domaine de grandes vitesses. Pour cela des types variés de vibrations apparaissent dans ce système mécanique et souvent limitent les performances et mettent en danger la sécurité d'opération.

Dans cette étude, on s'intéresse ou comportement vibratoire des arbres élastiques. Nous allons aborder la problématique par une approche analytique ainsi que la méthode les éléments finis.

Les cas étudies sont :

-Arbre symétrique, non symétrique avec et sons effets gyroscopique.

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres et une conclusion générale.

-Premier chapitre : Modélisation des rotors symétriques.

-Deuxième chapitre : Modélisation des rotors asymétriques.

-Troisième chapitre : Modélisation des rotors par la méthode des éléments finis

Chapitre I

Modélisation Des rotors Symétriques

Interdiction

L'étude du comportement dynamique et vibratoire des rotors occupe une place fondamentale dans l'histoire de la science, notamment dans la dynamique des structures et des machines tournantes. Il est considéré comme l'un des phénomènes les plus complexes nécessitant une modélisation et une simulation par des méthodes numériques très efficaces et rapides; plus de mener des expériences et des tests plus efficaces. Dans cette partie, nous présenterons une étude du comportement vibratoire du vertige de Jeffcott en général.

I.1 Modèle de Laval/ Jeffcott.

I.1.1 Description du modèle

Ce modèle est connu sous le nom de «rotor de Jeffcott" , et comme certains pays européens ont utilisé le nom de «rotor de Laval" pour rendre hommage à l'utilisation du modèle que Jeffcott n'a peut-être pas connu, ce dernier en a publié une étude en 1999.Le modèle de base dans l'étude et la compréhension du comportement dynamique des vibrations des arbres et rotors [01]. Le modèle de rotor le plus simple consiste en un arbre sans masse, au centre duquel se trouve un disque circulaire rigide fixe et qui est supporté par des roulements rigides. L'arbre a une section circulaire, soit de diamètre constant sur toute sa longueur, soit de répartition symétrique des portions étagées [02].

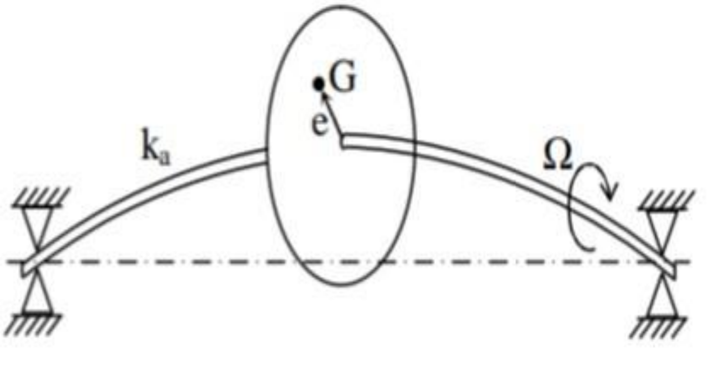


Figure 1. Modèle de Laval/Jeffcott.

I.1.2 Analyse sans amortissements

Considérons le cas le plus simple dans lequel nous étudions les vibrations de flexion latérale de Un modèle symétrique de Laval / Jeffcott est inhibiteur dans lequel la vitesse de rotation est constante, et La gravité et l'effet gyroscopique sont négligés [03]. Lorsque le système est en rotation, nous avons le phénomène de spin qui provoque Les centre géométriques et gravitationnels du disque vont osciller dans un plan perpendiculaire à Équilibre du système. Ils auront donc les deux degrés de liberté que nous supposons le long des axes du Taureau Et une once de marquée Oyez (Figure 2)

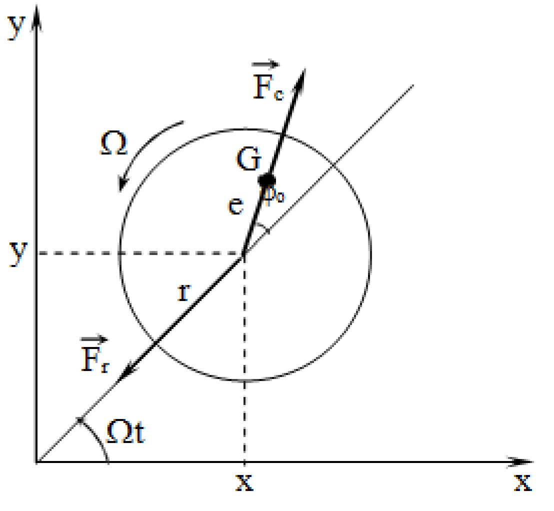


Figure 2. Mouvement du centre de gravité du rotor.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre du disque est donnée par:

$$\vec{F}_r + \vec{F}_C = m\vec{\gamma} \tag{I.1}$$

Avec la force centrifuge, en module Fr = $me\Omega^2$, les projections sur les axes ox et oy donnent :

$$\begin{cases} -k_a x + me\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi_0) = m\ddot{x} \\ -k_a y + me\Omega^2\sin(\Omega t + \varphi_0) = m\ddot{y} \end{cases} \tag{I.2}$$

Où

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k_a}{m}x = e\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \ddot{y} + \frac{k_a}{m}y = e\Omega^2\sin(\Omega t + \varphi_0) \end{cases} \tag{I.3}$$

On a deux équations découplées non homogènes dont les solutions doivent être la superposition de solutions homogènes et particulières soient : x = $x_h + x_p$ety $= y_h + y_p$.

Avec :

$$\begin{cases} x_h = A\cos(\omega_n t + \varphi) \\ y_h = B\cos(\omega_n t + \psi) \end{cases} \tag{I.4}$$

Où: la fréquence naturelle ou propre $\omega_n = \sqrt{\frac{k_a}{m}}$

Et

$$\begin{cases} x_p = A_e \cos(\Omega t + \varphi_e) \\ y_p = B_e \sin(\Omega t + \psi_e) \end{cases} \tag{I.5}$$

Les arrangements homogènes $x_h$et $y_h$des conditions sans deuxièmes individus adressent deux développements symphoniques simples qui se produisent de deux manières symétriques axes ox et oy. Leur organisation donne un développement plan dont l'état de la direction repose sur la constante À, B, j et y qui sont contrôlées en pensant aux conditions sous-jacentes. Selon Lissajous nous avons les cas d'accompagnement :

- Si φ -ψ = 0, la courbe est un segment de droite de pente positive.
- Si φ -ψ = π, la courbe est un segment de droite de pente négative.
- Si φ-ψ = π/2 et A = B, la courbe est un cercle tournant de y vers x.
- Si φ -ψ = -π/2 et A = B, la courbe est un cercle tournant de x vers y.
- φ -ψ<0 la courbe est une ellipse tournante de y vers x.
- φ -ψ>0 la courbe est une ellipse tournante de x vers y.

D’autre part les constantesA_e, φ_e, B_e et ω_e des solutions particulières se déterminent ensachant que ces dernières vérifient leurs équations correspondantes avec seconds membres.

Leurs expressions sont donc :

$$A_e = B_e = \frac{e\,\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_e = \psi_e = \varphi_0 \quad \text{si} \quad \omega < \omega_n$$

Où bien :

$$A_e = B_e = \frac{-e\,\Omega^2}{-\Omega^2+\omega_n^2} \quad et \quad \varphi_e = \psi_e = \varphi_0 + \pi \quad \text{Si}\omega > \omega_n$$

Et la solution particulières sont dans les deux cas égales à :

$$x_p = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2+\omega_n^2}\cos(\Omega t + \varphi_o) \tag{I.6}$$

Et

$$y_p = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2+\omega_n^2}\sin(\Omega t + \varphi_o) \tag{I.7}$$

Celles-ci abordent deux développements consonants simples ayant une adéquation similaire et déphasé d’un point de$\frac{\pi}{2}$. Leur pièce offre, comme l’indique Lissajous, une direction portée ronde $\frac{e\,\Omega^2}{-\Omega^2+\omega_n^2}$

Le développement ultérieur est de cette manière la superposition de deux directions, la première est la synthèse des arrangements homogène (ellipse, cercle ou segment de droite) et le second est la création d'arrangements explicites (cercle).

Les mêmes constatations peuvent être faites sur l'amplitude de cette solution particulière qui est le rayon de la trajectoire circulaire. Pour les clarifier plus facilement, considère la projection de l'excentricité e sur le prolongement de r qui est égal à ecosjo. On a alors :

- Si $\Omega<\omega_n$ (régime sous critique),$\frac{r}{e} < 0$ et ainsi$\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Le centre de gravité se trouve extérieur au centre géométrique.

- Si $\Omega >\omega_n$ (régime super critique),$\frac{r}{e} < 0$ et ainsi $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$.

Le centre de gravité intérieur au centre géométrique.

- Si $\Omega = \omega_n$ (régime critique), on a la valeur intermédiaire au cas précédents d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Mais théoriquement si r $\rightarrow\infty$, e sera négligeable.

- Si $\Omega\rightarrow\infty$, (régime hypercritique),$\frac{r}{e} \rightarrow -1$ d'où $\varphi \rightarrow -\pi$.

On a dans ce cas l'auto centrage.

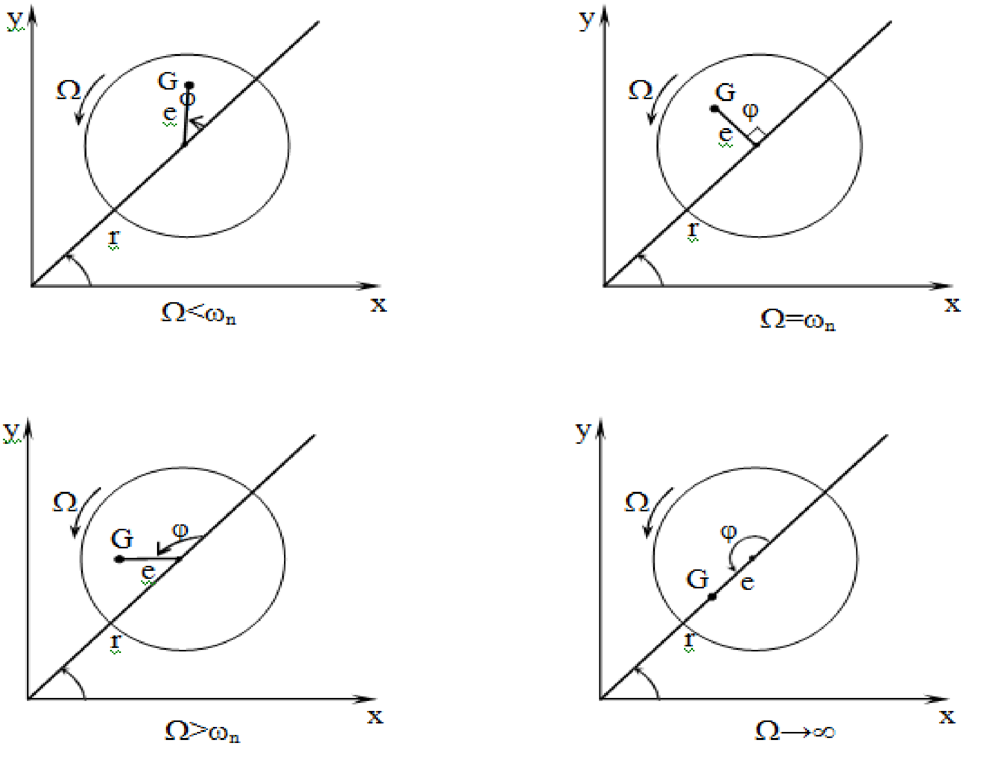


Figure 3. Position du centre de gravité selon la valeur de la vitesse de rotation.

I.2 Modèle avec paliers flexibles: cas isotopique

I.2.1 Modèle mathématique

Reprenons le modèle de Jeffcott et considérons les paliers flexibles et isotropes c.à.d. les caractéristiques sont identiques dans les 2 directions ox et oy (Figure 4) [04].

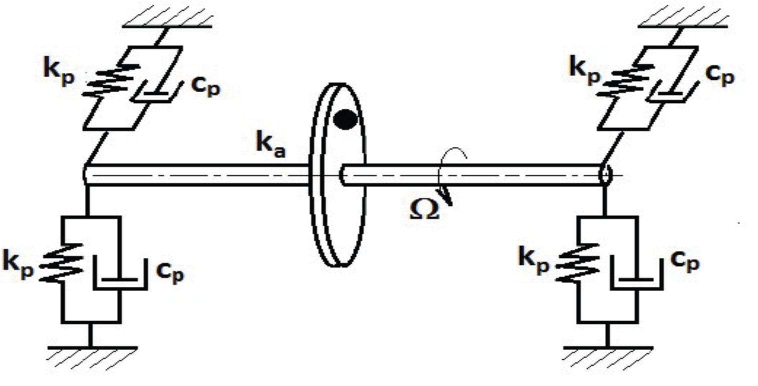


Figure 4.Modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.

Qui pourra être remplacé par l'oscillateur suivant (Figure 5) :

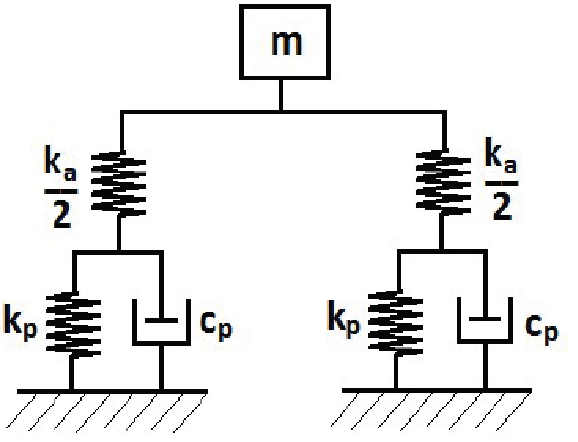


Figure 5. Oscillateur dans chaque direction.

Les raideurs et les coefficients d'amortissements seront donc pour les deux directions :

$$K = k_x = k_y = \frac{2k_a k_p}{2k_a + k_p} \tag{I.8}$$

Et

$$C = C_x = C_y = 2C_p \tag{I.9}$$

Les équations différentielles régissant le mouvement du système, s'écrivent alors :

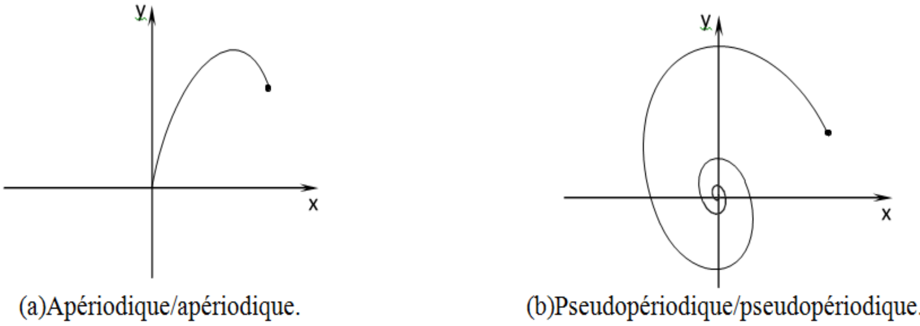
$$\begin{cases} -k_x - Cx + me\Omega^2 \cos \Omega t = m\ddot{x} \\ -k_y - Cy + me\Omega^2 \sin \Omega t = m\ddot{y} \end{cases} \quad (I.10)$$

Où

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = e\Omega^2 \cos \omega_e t \\ \ddot{y} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}y = e\Omega^2 \sin \omega_e t \end{cases} \quad (I.11)$$

Nous avons deux équations découplées non homogènes dont les solutions vont être la superposition de solutions homogènes $x = x_h + x_p$ et particulières $y = y_h + y_p$[03].

Pour les solutions homogènes on considère les solutions des équations sans seconds membres. Si les frottements sont négligées les résultats sont exactement les mêmes que ceux du paragraphe précédent,(équation I.4) en remplaçant seulement k_a par k.pour les deux directions ox et oy, et qui sont les régimes apériodiques, apériodiques critiques ou pseudo périodiques. Ces derniers sont exponentiellement amortis et leur composition donneur mouvement plan amorti, c'est-à-dire allant vers l'origine [03] .l'allure est donnée pour les cas apériodique / apériodique ou apériodique critique / apériodique critique (Figure 6-a) et pseudo périodique / pseudopériodique (Figure 6-b).



(a)Apériodique/apériodique. (b)Pseudopériodique/pseudopériodique.

Figure 6. Représentation du régime transitoire.

En ce qui concerne les solutions particulières, elles ont la même forme que l'excitation. C'est à dire elles sont harmoniques de la forme donnée par (équationI. 5)

Données par :

$$A_e = B_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{\left(-\Omega^2 + \omega_n^2\right)^2 + 4C^2\Omega^2}} \quad (I.12)$$

Et

$$\varphi_e = \psi_e = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2c\Omega}{-\Omega^2+\omega_n^2}\right) \tag{I.13}$$

Où

Fréquences naturelles : $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Rapport d'amortis :$\lambda = \frac{c}{2m}$

Rapport de fréquence : $\overline{\omega} = \frac{\Omega}{\omega_n}$

Leur composition est, d'après Lissajous, une trajectoire circulaire dont le rayon est égal à (A_e oùB_e) et qui dépend de la fréquence d'excitation Ω avec l'allure ,où les mêmes constatations du cassants paliers sont faites.

I.2.2 Résultats et discussion.

Dans cette partie, nous avons utilisé un code qu'on a développé sous Maple soft

En supposant ce qui suit :

La masse de la roue: m=10 kg ; modes propres : k=1000 n/m ; Excentricité du balourd e=1

On obtient les résultats suivants :

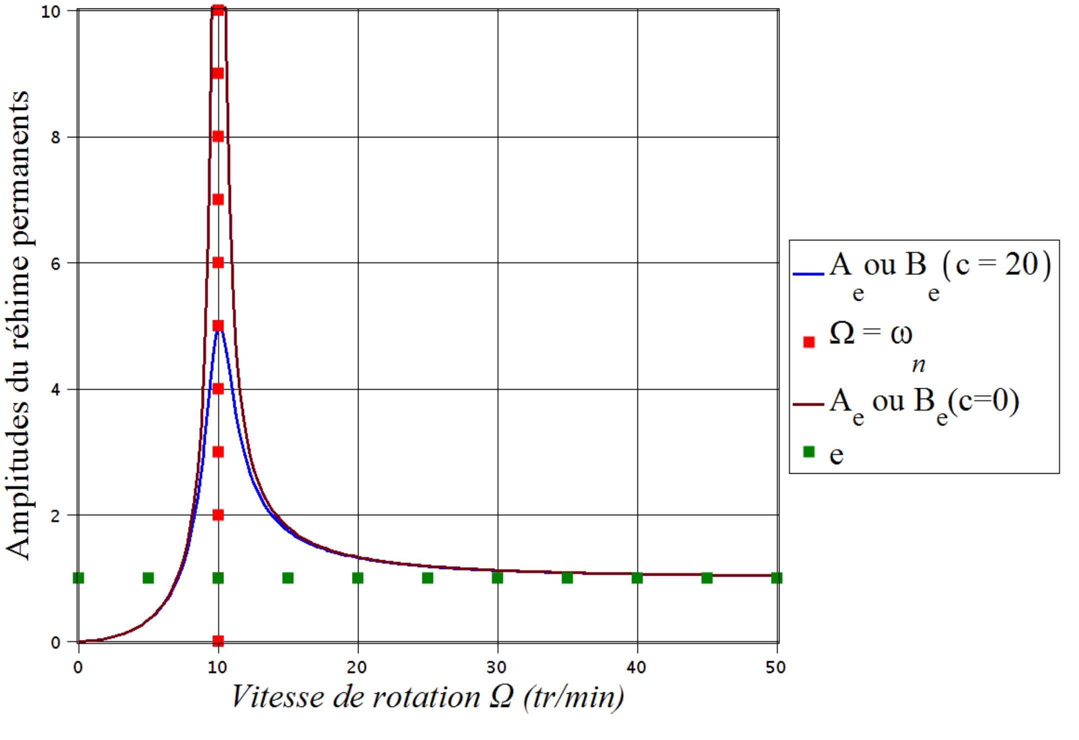


Figure 7. Amplitudes du régime permanent en fonction de la vitesse de rotation

À travers la (Figure 7) :

On note que amplitudes de régime permanent atteint la valeur limite maximale quoi qu'il arrive (c)lorsque la vitesse de rotation est égale à la fréquence propre ($\Omega=\omega_n = 10$).

Et la valeur amplitudes de régime permanent change avec le changement d'une valeur (c).

Dans ce cas, il y a y une vitesse critique ($\Omega = 10\ tr/min$)

I.3 Modèle avec paliers flexibles: cas anisotropique

I.3.1 Modèle mathématique

Reprenons le modèle JEFFCOTT et considérons les roulements flexibles et anisotropes à savoir. Les propriétés ne sont pas identiques dans les directions ox et oy [02].

Supposons qu'elles soient égales à $\mathrm{k_x}$ et $\mathrm{C_x}$ suivant ox et à $\mathrm{k_y}$ et $\mathrm{C_y}$ suivant oy.Dans ce cas les équations différentielles régissant le mouvement du système se réécrivent :

$$\begin{cases} -\mathrm{k_x} - \mathrm{C_x}\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{me}\Omega^2 \cos \Omega \mathrm{t} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}} \\ -\mathrm{k_y} - \mathrm{C_y}\dot{\mathrm{y}} + \mathrm{me}\Omega^2 \sin \Omega\, \mathrm{t} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{y}} \end{cases} \tag{I.14}$$

Où

$$\begin{cases} \ddot{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{C_x}}{\mathrm{m}}\dot{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{k_x}}{\mathrm{m}}\mathrm{x} = \mathrm{e}\Omega^2 \cos \omega_{\mathrm{e}}\mathrm{t} \\ \ddot{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{C_y}}{\mathrm{m}}\dot{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{k_y}}{\mathrm{m}}\mathrm{y} = \mathrm{e}\Omega^2 \sin \omega_{\mathrm{e}}\, \mathrm{t} \end{cases} \tag{I.15}$$

Puisque les deux équations sont discrètes hétérogènes et que leurs paramètres ne sont pas identiques. Leurs solutions seront une superposition des solutions homogènes x = x_h + x_p et des solutions spéciales y = y_h + y_p[03].

Pour les solutions homogènes d'équations sans second membre, on a une superposition de deux mouvements se produisant dans des directions perpendiculaires mais avec Différentes fréquences car les possibilités sont nombreuses. En négligeant le frottement à plusieurs fréquences, nous avons une représentation du lysa gus. Si c'est arbitraire, nous avons des courbes plates qui ne s'enroulent tout simplement pas[03]En revanche, en présence d'amortissement, il y a superposition de deux mouvements d'amortissement (transitoires) qui tendent vers zéro. D'autre part, des solutions spéciales suivent l'excitation harmonique. Ils ont le chiffre donné par (équation I.4) mais avec les constantes B_e,φ_e,B_e et ψ_e égales

$$A_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{\left(-\Omega^2+\omega_{n\pi}^2\right)^2+4\lambda_x^2\Omega^2}} \tag{I.16}$$

$$B_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{\left(-\Omega^2+\omega_{n\pi}^2\right)^2+4\lambda_y^2\Omega^2}} \tag{I.17}$$

$$\varphi_e = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2\lambda_x\Omega}{-\Omega^2+\omega_{nx}^2}\right) \tag{I.18}$$

Et

$$\psi_e = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2\lambda_y\Omega}{-\Omega^2+\omega_{ny}^2}\right) \tag{I.19}$$

Où

Fréquences naturelles $\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_{\overline{x}}}{m}}$; $\omega_{ny} = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$

Rapport d'amortis $\lambda_x = \frac{C_x}{2m}$; $\lambda_y = \frac{C_y}{2m}$

Rapport de fréquence $\overline{\omega}_x = \frac{\Omega}{\omega_{nx}}$; $\overline{\omega}_y = \frac{\Omega}{\omega_{ny}}$

I.3.2 Résultats et discussions

Dans cette partie, nous avons utilisé un code qu'on a développé sous Maple soft

En supposant ce qui suit :

La masse de la roue : m=10 kg ; modes propres : k_x=1000 n/m, k_y=250 n/m ; e=1

On obtient les résultats suivants :

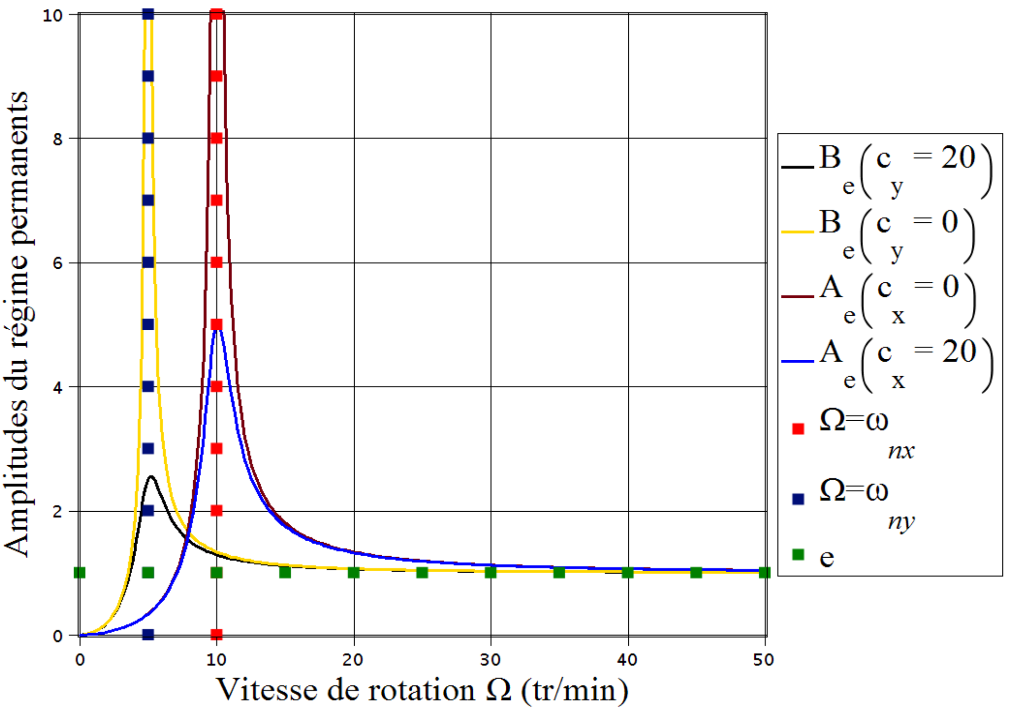


Figure 8. Amplitudes de régime permanent en fonction de la vitesse de rotation.

À travers la (Figure 8) :

Dans ce cas, il existe deux vitesses critiques ($\Omega = \omega_{nx}$ = 10HZ et $\Omega = \omega_{ny}$ = 5 HZ)

Conclusion

De ce que nous avons étudié dans ce chapitre (le rotor Jeffcott dans sa forme la plus simple), nous avons conclu que lorsque la vitesse de rotation du rotor est égale à sa fréquence naturelle, on dit que c'est la vitesse critique. , où les fréquences propres du rotor et les vitesses critiques changent avec le changement de modes propre

Chapitre II

Modélisation Des rotors Asymétriques

Introduction

Dans cette partie nous étudierons les vibrations transversales d'un modèle de rotor avec un disque offset, dans le premier cas nous expliquerons le cas plus général des rotors Jeffcott lorsque le disque est positionné avec un certain déplacement à mi-course. Dans le second cas, nous étudierons les vibrations transversales des rotors avec effet gyroscopique

II.2 Modèle de Jeffcott avec un disque décalé

II.2.1 Modèle mathématique

(Figure 9) illustre une situation plus générale du rotor Jeffcott dans laquelle le disque rigide est décalé de la mi- portée. En dehors de deux déplacements transversaux du centre du disque, c'est-à-dire x et y, l'inclinaison du disque autour des axes x et y, c'est-à-dire se produit pour de tels rotors, donnant au système de rotor quatre mouvements. Il y a quatre degrés de liberté (Figure 10) [07].

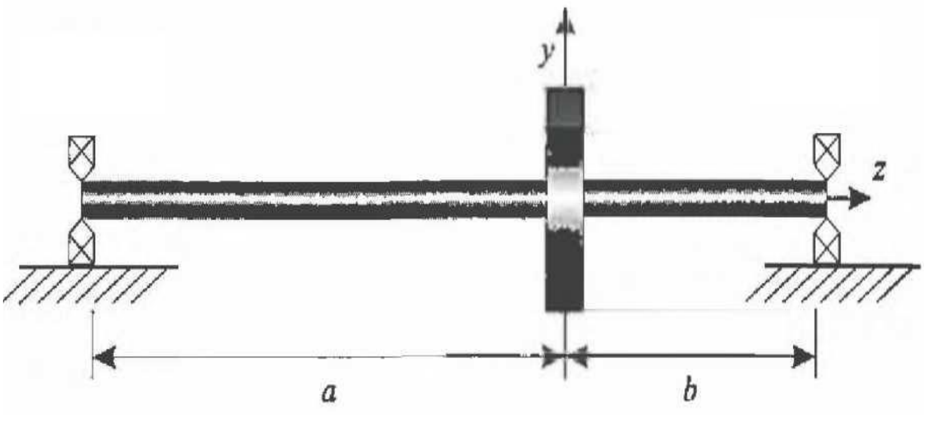


Figure 9.Rotor avec un disque décalé.

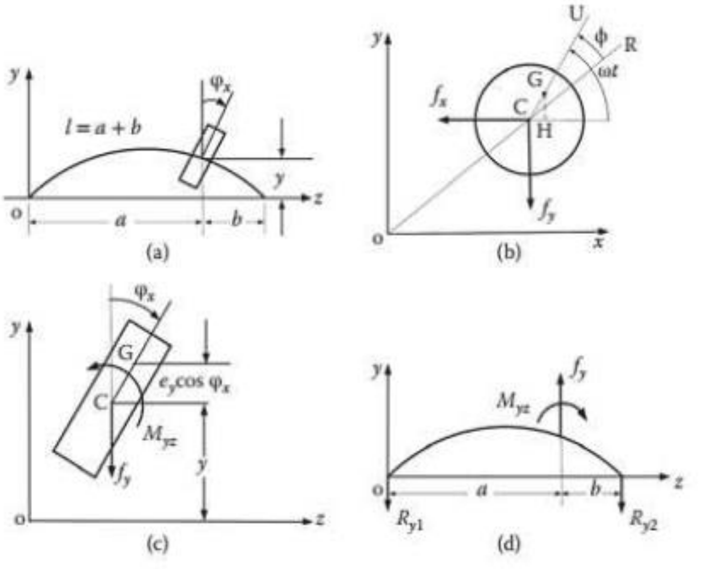


Figure 10 Schématisation d'un rotor avec un disque décalé dans le plan oyz (degrés de liberté et chargement dynamique).

À partir de (Figure 10), nous pouvons avoir les relations suivantes pour l'excentricité [07] :

$$e_x = CH = e \cos \omega t \quad \text{et} \quad e_y = GH = e \sin \omega t \tag{II.1}$$

Où $e_x$et e_y sont des composantes de l'excentricité, e, respectivement dans les directions x et y (en fait, ces composantes d'excentricité sont dans le plan du disque qui est incliné).

De (Figure 10) les équations de mouvement du disque dans les directions dans le y-et $\varphi_x$peuvent être écrites comme.

$$-f_y = m \frac{d^2}{dt^2}\left(y + e_y \cos \varphi_x\right) \Rightarrow -f_y = m \frac{d^2}{dt^2}(y + e \sin \omega t \cos \varphi_x) \tag{II. 2}$$

Autour d'oy:

$$f_y e_y \sin \varphi_x - M_{yz} = I_d \ddot{\varphi}_x \Rightarrow -f_y(e \sin \omega t)\sin \varphi_x - M_{yz} = I_d \ddot{\varphi}_x \tag{II.3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{y} + f_y = me \frac{d^2}{dt^2}(\cos \varphi_x \sin \omega t) \\ I_d \ddot{\varphi}_x + M_{yz} + e \sin \varphi_x f_y \sin \omega t = 0 \end{cases} \tag{II.4}$$

I_d Est le moment de la masse d'inertie à peu près sur l'axe des x, f_y est la force de réaction et M_{yz}est le moment de réaction, où m est la masse du disque. Il est à noter que l'image a été capturée autour du point G [07]. Le couplage non linéaire des équations avec la composante angulaire (titrage) du déplacement x est visible dans les équations ci-dessus φ_x

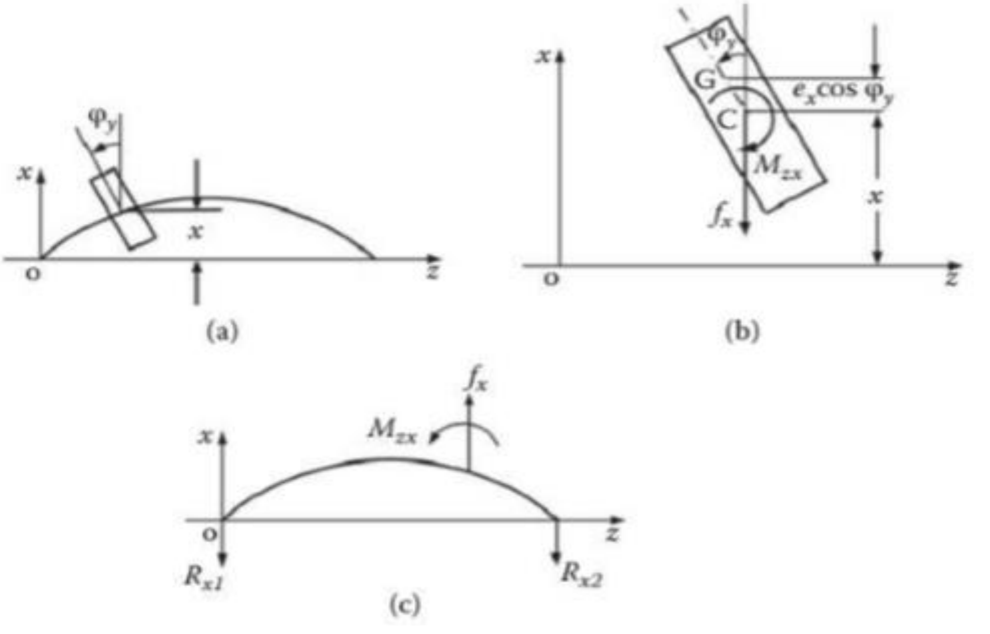


Figure 11.Schématisation d'un rotor avec un disque décalé dans le plan oxz

(Degrés de liberté et chargement dynamique).

De la représentation du rotor dans le plan oxz, on peut écrire les équations différentielles du mouvement:

$$-\mathrm{f_x} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\mathrm{x} + \mathrm{e_x}\cos\varphi_\mathrm{y}\right) \Rightarrow -\mathrm{f_x} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\left(\mathrm{x} + \mathrm{e}\cos\omega\mathrm{t}\cos\varphi_\mathrm{y}\right) \qquad (\mathrm{II.5})$$

Avec :

$$-\mathrm{f_x}\mathrm{e_x}\sin\varphi_\mathrm{y} - \mathrm{M_{zx}} = \mathrm{I_d}\ddot{\varphi}_\mathrm{y} \Rightarrow -\mathrm{f_x}(\mathrm{e}\cos\omega\mathrm{t})\sin\varphi_\mathrm{y} - \mathrm{M_{zx}} = \mathrm{I_d}\ddot{\varphi}_\mathrm{y} \qquad (\mathrm{II.6})$$

Où Id est le moment d'inertie de masse diamétrale autour de leur axef_x, est la force de réaction et M_{zx} est le moment de réaction. Les équations(II 5) et(II 6) sont également couplées non linéairement avec la composante angulaire du déplacementφ_y. Cependant [07] ?deux mouvements de plans transversaux (c.-à-d. $y\,_z$etz_x) ne sont pas couplés et cela permettra d'analyser le mouvement à deux plans indépendamment l'un de l'autre, c'est-à-dire un ensemble d'équations(II 3) et (II 4) et d'équations(II 5) et(II 6) peuvent être résolus indépendamment les uns des autres.

Les forces de déséquilibre peuvent être simplifiées (c'est-à-dire par linéarisation) avec l'hypothèse d'un petit déplacement angulaire (c'est-à-dire cos φ_x = cos φ_y ≈1) et les équations (II 3) et(II 5) peuvent être simplifiées comme :

$$\mathrm{m}\ddot{\mathrm{y}} + \mathrm{f_y} = \mathrm{m}\omega^2\mathrm{e}\sin\omega\mathrm{t} \qquad (\mathrm{II.7})$$

Avec :

$$m\ddot{x} + f_z = m\omega^2 e \cos\omega t \tag{II.8}$$

Dans ce cas, le système d'équations différentielles gouvernant les vibrations transversales d'un rotor muni d'un disque décalé s'écrit [08] :

$$\begin{cases} m\ddot{y} + f_y = m\omega^2 e \sin\omega t \\ I_d\ddot{\varphi}_x + M_{yz} + e\varphi_x f_y \sin\omega t = 0 \\ m\ddot{x} + f_x = m\omega^2 e \cos\omega t \\ I_d\ddot{\varphi}_y + M_{zx} + e\varphi_y f_x \cos\omega t = 0 \end{cases} \tag{II.9}$$

Maintenant les équations (II 7),(II 4),(II 8) et () sont assemblées comme :

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_y \\ M_y \\ f_x \\ M_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_y(e\sin\omega t)\varphi_x \\ 0 \\ f_y(e\cos\omega t)\varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\omega^2 e\sin\omega t \\ 0 \\ m\omega^2 e\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{II.10}$$

qui peut être écrit en notation matricielle comme :

$$[M]\{\ddot{x}\} + \{R_L\} + \{R_{NL}\} = \{f_{unb}\} \tag{II.11}$$

Avec :

Matrice de masses : $[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}$,

Vecteur des accélérations: $\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_y \end{Bmatrix}$

Vecteur des forces de déséquilibrage : $\{f_{unb}\} = \begin{Bmatrix} m\omega^2 e\sin\omega t \\ 0 \\ m\omega^2 e\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$

Forces/Moments de réaction non-linéaire : $\{R_{NL}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_y(e\sin\omega t)\varphi_x \\ 0 \\ f_x(e\cos\omega t)\varphi_y \end{Bmatrix}$

Forces/Moments de réaction élastique linéaire : $\{R_L\} = \begin{Bmatrix} f_y \\ M_{yz} \\ f_x \\ M_{zx} \end{Bmatrix}$

Il convient de noter que l'ordre du vecteur de déplacement peut être modifié en fonction de la commodité et qu'en conséquence les éléments d'autres matrices et vecteurs changeront leurs positions. Les forces et moments de réaction sur l'arbre peuvent être exprimés en termes de [07].Déplacements d'arbre à l'emplacement du disque à l'aide de coefficients d'influence comme (Timoshenko et Young, 1968).

Dans le plan oxz:

$$\begin{cases} X = \alpha_{11} f_x + \alpha_{12} M_{zx} \\ \varphi_y = \alpha_{21} f_x + \alpha_{22} M_{zx} \end{cases} \tag{II.12}$$

Oùα_{ij} représente le déplacement à i^{th} station dû à une force unitaire à la j^{th} station gardant toutes les autres forces à zéro. Il est à noter que les termes déplacement et force sont utilisés comme sens général de sorte que le déplacement peut être un déplacement linéaire ou angulaire alors que la force peut être une force ou un moment [07]. Le couplage de l'effort et du déplacement dans deux plans orthogonaux n'a pas été envisagé en raison de la symétrie de l'arbre. L'équation (II 12) peut être écrite sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ M_{zx} \end{Bmatrix} \tag{II. 13}$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2 b^2}{3EIl} & \frac{-(3a^2 l - 2a^3 - al^2)}{3EIl} \\ \frac{ab(b-a)}{3EIl} & \frac{-(3al - 3a^2 - l^2)}{3EIl} \end{bmatrix} \tag{II.14}$$

Où EI est la flexion de la poutre, les paramètres de longueur a et b sont définis sur (Figure **11**) avec. À partir de la simple théorie de la déflexion des faisceaux, nous pouvons obtenir ces coefficients d'influence (Timoshenko et Young, 1968). L'équation (II 13) peut être écrite comme [07] :

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ M_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \tag{II.15}$$

Où k_{ij} est le coefficient de rigidité et est défini comme une force à la i^{th} station due à un déplacement unitaire à la j^{th} station gardant tous les autres déplacements à zéro. De même, comme l'arbre est symétrique par rapport à son axe de rotation, on peut obtenir

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ M_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \tag{II.16}$$

Les équations (II 15) et (II 16) peuvent être combinées sous forme matricielle comme :

$$\{R_L\} = [K]\{x\}$$

Avec :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & k_{12} \\ 0 & 0 & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}; \{R_L\} = \begin{Bmatrix} f_y \\ M_{yz} \\ f_x \\ M_{zx} \end{Bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} y \\ \varphi_x \\ x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.17)}$$

Matrice de rigidité : [K]; Vecteur des déplacements/rotations : {x}

Cette équation contient un produit des déplacements de translation et de rotation, ce qui rend les équations du système non linéaires. La présente analyse ne considère que les systèmes linéaires, de sorte que les contributions de ces termes non linéaires peuvent être ignorées avec l'hypothèse de petits déplacements.[08].

$$\{R_{NL}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_y e_y \varphi_x \\ 0 \\ f_x e_x \varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (k_{11}y + k_{12}\varphi_x)e_y\varphi_x \\ 0 \\ \left(k_{11}x + k_{12}\varphi_y\right)e_x\varphi_y \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.18)}$$

L'équation ci-dessus contient le produit des déplacements linéaires et angulaires, ce qui rend les équations du système non linéaires. La présente analyse ne considère que les systèmes linéaires, de sorte que les contributions de ces termes non linéaires peuvent être ignorées avec l'hypothèse de petits déplacements. En substituant les forces de réaction et les moments de l'équation (II 7) dans des équations de mouvement, c'est-à-dire i, e, l'équation(II 11), nous obtenons [07] :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f_{unb}\} \qquad \text{(II.19)}$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & k_{12} \\ 0 & 0 & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} y \\ \varphi_x \\ x \\ \varphi_y \end{Bmatrix};$$

$$\{f_{unb}\} = \begin{Bmatrix} m\omega^2 \operatorname{e sin} \omega t \\ 0 \\ m\omega^2 \operatorname{e cos} \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Calcul des fréquences naturelles :

Pour obtenir les fréquences propres du système, le déterminant de la matrice de rigidité dynamique, [Z] = ([K] -ω^2 [M]), doit être égal à zéro et résolu pour ω, ce qui donne quatre fréquences propres du système de rotor .Il devrait être découplé entre les deux mouvements du plan orthogonal (i, e, …) [07].

Correspondant à y etφ_x, et x etφ_y). Par conséquent, les équations de mouvement de chaque plan pourraient être résolues indépendamment Cela rendrait la taille de la matrice [Z] de moitié.

II.1.2 Résultats et discussion

Dans cette partie, nous avons utilisé un code qu'on a développé sous Maple soft.

II.1.2.1 Rotor sur deux appuis simples

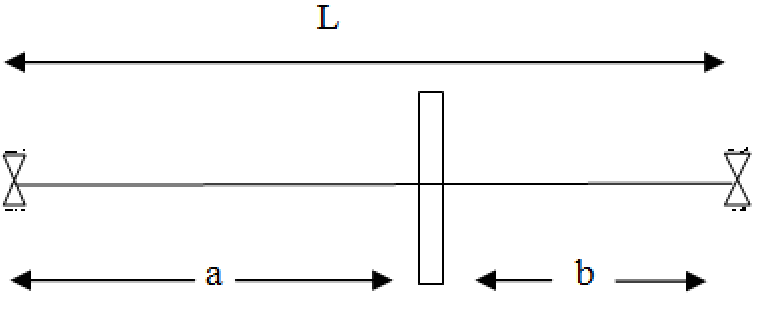


Figure 12. Rotors sur deux appuis simples

Ignorer les effets gyroscopiques et considérer:

moment d'inertie:I_{dm} =0.02;Moment d'inertie polaire:I_p=0.04 ;diamètre de l'arbre: d =0.01; Longueur de l'arbre=1m ; Longueur appuis gauche – roue:a=(0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,)m; Longueur appuis droit – roue: b=(0.5,0.4,0.3,0.2,0.1)m;masse de la roue: m=10kg; Module de Young: E =2.1*10:^{11} Mpa.

On obtient les résultats suivants:

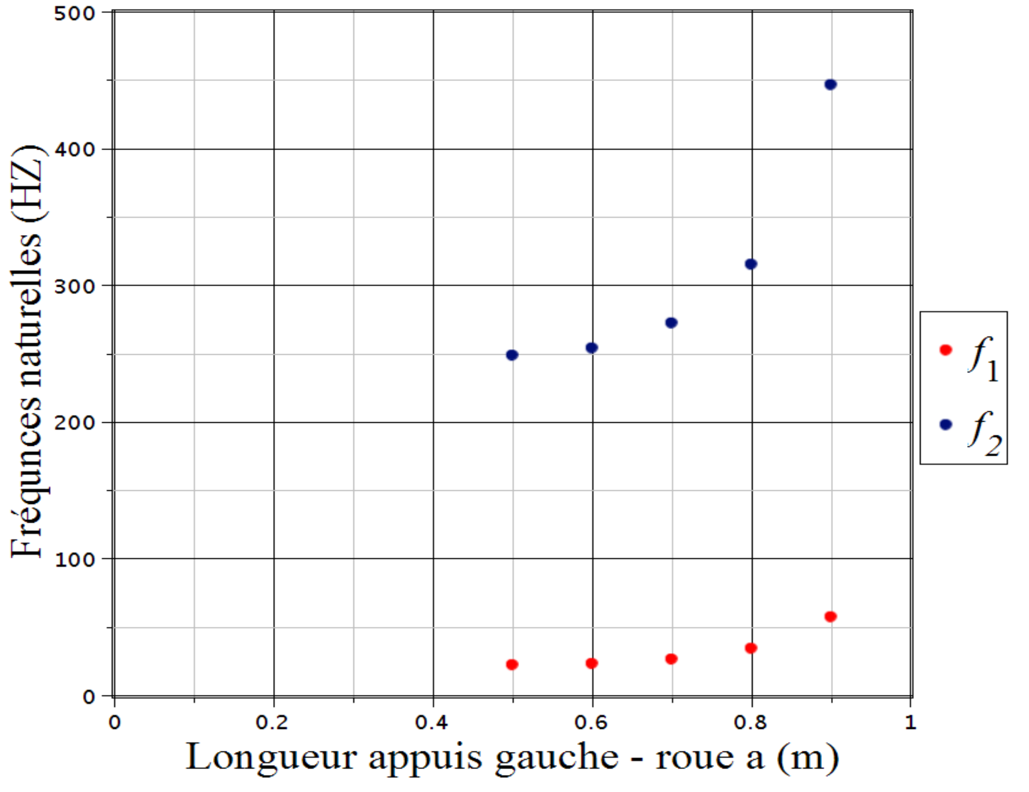


Figure 13. Fréquences naturelles en fonction longueur appuis gauche - roue (a)

Dans ce cas, nous remarquons que la fréquence propre augmente progressivement avec l'augmentation de la longueur des supports gauches - roue (A), ce qui signifie qu'il existe une relation proportionnelle directe (Figure 13)

Une augmentation de la valeur des fréquences signifie une augmentation de la valeur des vitesses critiques.

II.1.2.2 Rotor encastré-Libre

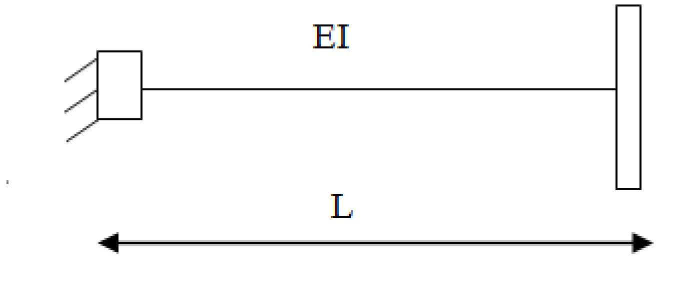


Figure 14. Rotor encastré-Libre

Ignorer les effets gyroscopiques et considérer:

Moment d'inertie:I_{dm} =0.02;Moment d'inertie polaire:I_p=0.04 ;diamètre de l'arbre: d =0.01; Longueur de l'arbre:L=1m;masse de la roue: m=10kg; Module de Young: E =2.1*10:^{11} Mpa.

On obtient les résultats suivants:

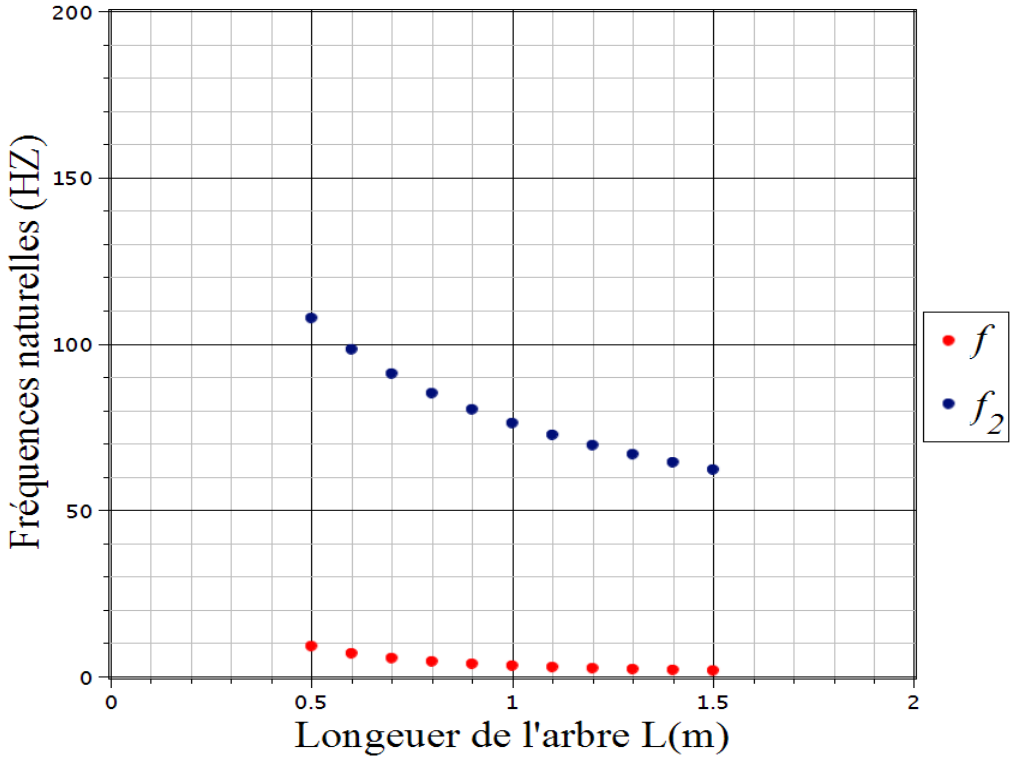


Figure 15. Fréquences naturelles en fonction longueur de l'arbre L

Dans ce cas, nous remarquons que la fréquence naturelle diminue progressivement avec l'augmentation de la longueur de l'arbre (L), ce qui signifie qu'il existe une relation inverse entre elles (Figure 15)

Une diminution de la valeur des fréquences signifie une diminution de la valeur des vitesses critiques.

II.2 Vibrations transversales des rotors avec effet gyroscopique

II.2.1 Modèle mathématique

Cette section traite de l'effet gyroscopique qui distingue la dynamique de rotation comme distincte de la dynamique structurelle, associée aux parties non rotatives du système de rotor, telles que la coque et le noyau. Le rotor supérieur tourne lentement à grande vitesse dans une position inclinée. [06] De même, le rotor de la machine tournante est mis en rotation par rotation autour de l'axe de l'arbre mené. Le routeur ne tombe pas en raison du moment provoqué par l'effet gyroscopique, qui est proportionnel à la vitesse de rotation. Cet effet gyroscopique du système de rotor apparaît comme une tendance à l'autofocus lors de la rotation, ce qui peut être vu comme une augmentation de la rigidité de centrage. Il est absolument essentiel de comprendre l'effet de l'effet gyroscopique sur la fréquence naturelle et de résonance dans la réponse en fréquence dans les vibrations des machines tournantes. Les diagrammes de corps libres montrent le moment angulaire et la variation du moment angulaire, Par exemple, dans le plan z-x, le changement du moment angulaire est dans la direction x positive, ce qui donne lieu à un moment gyroscopique dans le sens horaire [08].

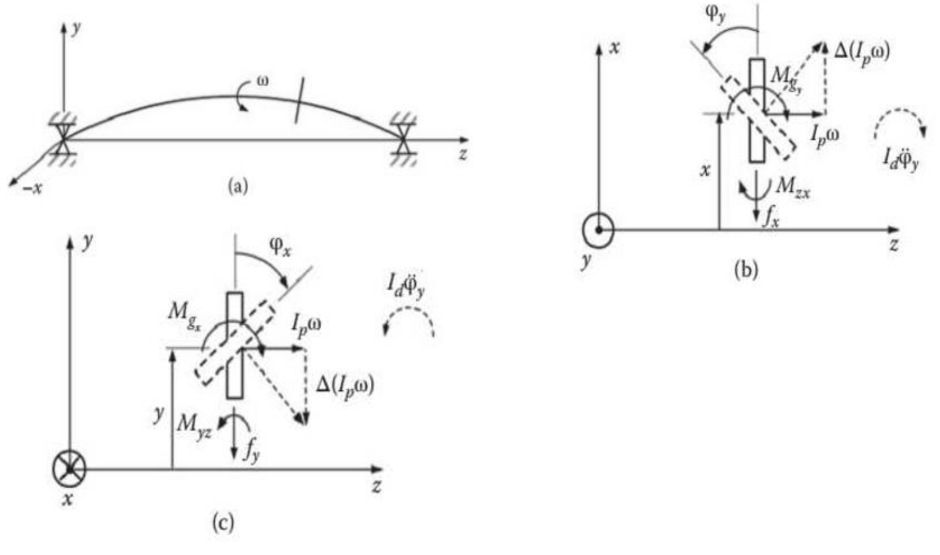


Figure 16. Coordonnées du système rotor dynamique

De la représentation du rotor dans le plan oxz, on peut écrire les équations différentielles du mouvement [08]:

$$-\mathrm{f_x} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}}; -\mathrm{f_y} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{y}} \text{ et} - \mathrm{M_{zx}} - \mathrm{M_{gy}} = \mathrm{I_d}\ddot{\varphi}_\mathrm{y} \ ; -\mathrm{M_{yz}} + \mathrm{M_{gx}} = \mathrm{I_d}\ddot{\varphi}_\mathrm{x} \qquad \text{(II.20)}$$

Considérez un sommet constitué d'un disque avec un arbre passant par son centre. Lorsqu'il tourne, en tournant autour de la tige, le moment gyroscopique agissant sur le dessus l'empêche de tomber (Figure 16). Si le frottement au niveau du support du dessus et la résistance de l'air sont tous deux négligeables, le dessus se traitera indéfiniment. Le moment gyroscopique est un conservateur, tout comme la force d'inertie ou la force du ressort [06].

Les moments gyroscopiques sont donnés par:

$$\begin{cases} M_{gy} = -I_p\omega\dot{\varphi}_x \\ M_{gx} = -I_p\omega y \end{cases} \qquad \text{(II.21)}$$

Les forces de réaction élastique sont:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ M_{zx} \\ M_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ll} & 0 & \alpha_{la} & 0 \\ & \alpha_l & 0 & \alpha_{la} \\ & & \alpha_{aa} & 0 \\ sym & & & \alpha_{aa} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \varphi_y \\ \varphi_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ll} & 0 & k_{la} & 0 \\ & k_{ul} & 0 & k_{la} \\ & & k_{aa} & 0 \\ \text{sym} & & & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \varphi_y \\ \varphi_x \end{Bmatrix} \quad \text{(II.22)}$$

Les équations différentielles du rotor sont:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_{ll}x + k_{la}\varphi_y = 0 \\ m\ddot{y} + k_{ll}y + k_{la}\varphi_x = 0 \\ I_d\ddot{\varphi}_y - I_d\omega\dot{\varphi}_x + k_{la}x + k_{aa}\varphi_y = 0 \\ I_d\ddot{\varphi}_x - I_d\omega\dot{\varphi}_y + k_{la}y + k_{aa}\varphi_x = 0 \end{cases} \quad \text{(II.23)}$$

Le comportement dynamique d'un système gyroscopique conservateur linéaire à n degrés de liberté peut être décrit par l'équation [05].

$$[M]\{\ddot{x}\} - \omega[G]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$$[M]\{\ddot{y}\} - \omega[G]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\}$$

Donc:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ & m & 0 & 0 \\ & & I_d & 0 \\ \text{sym} & & & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_x \end{Bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ll} & 0 & k_{la} & 0 \\ & k_{ul} & 0 & k_{la} \\ & & k_{aa} & 0 \\ \text{sym} & & & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \varphi_y \\ \varphi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.24)}$$

Matrice la masse :$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ & m & 0 & 0 \\ & & I_d & 0 \\ \text{sym} & & & I_d \end{bmatrix}$

Matrice gyroscopique:$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix}$

Matrices de rigidité du système de rotor: [k] $= \begin{bmatrix} k_{ll} & 0 & k_{la} & 0 \\ & k_{ul} & 0 & k_{la} \\ & & k_{aa} & 0 \\ \text{sym} & & & k_{aa} \end{bmatrix}$

Le vecteur de déplacement:$\{y\}$ =$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \varphi_y \\ \varphi_x \end{Bmatrix}$

I_dEst le moment d'inertie de masse diamétrale du disque

I_pEst le moment d'inertie de masse polaire du disque

Supposons que la solution générale soit: [08]

$$\{y\} = \{B\}e^{ut} \tag{II.25}$$

$$\{\dot{x}\} = u\{B\}e^{ut} \Longrightarrow \{\ddot{x}\} = u^2\{B\}e^{ut}$$

Donc: $(u^2[M] - \omega u[G] + [K])\{B\}e^{ut} = \{0\} \Longrightarrow (u^2[M] - \omega u[G] + [K])\{B\} = 0$

Pour une solution non triviale du système d'équation, il faut que:

$$|u^2[K]^{-1}[M] - \omega u[K]^{-1}[G] + [I]| = 0$$

Ou: $[K]^{-1} = [\alpha]$

$$|u^2[\alpha][M] - \omega u[\alpha][G] + [I]| = 0 \tag{II. 26}$$

Donc

$$\left| u^2 \begin{bmatrix} \alpha_{ll} & 0 & \alpha_{la} & 0 \\ & \alpha_n & 0 & \alpha_{la} \\ & & \alpha_{aa} & 0 \\ \text{sym} & & & \alpha_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ & m & 0 & 0 \\ & & I_d & 0 \\ \text{sym} & & & I_d \end{bmatrix} - \omega u \begin{bmatrix} \alpha_{\|} & 0 & \alpha_{la} & 0 \\ & \alpha_n & 0 & \text{c} \\ & & \alpha_{aa} & 0 \\ \text{sym} & & & \alpha_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Être récompensé:

$$\left| u^2 \begin{bmatrix} m\alpha_{ll} & 0 & I_d\alpha_{la} & 0 \\ 0 & m\alpha_{ll} & 0 & I_d\alpha_{la} \\ m\alpha_{la} & 0 & I_d\alpha_{aa} & 0 \\ 0 & m\alpha_{la} & 0 & I_d\alpha_{aa} \end{bmatrix} - \omega u \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_p\alpha_{la} \\ 0 & 0 & -I_p\alpha_{la} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p\alpha_{aa} \\ 0 & 0 & -I_p\alpha_{aa} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Être récompensé :

$$\begin{vmatrix} u^2 m\alpha_1 + 1 & 0 & u^2 I_d\alpha_{la} & -\omega u I_p\alpha_{la} \\ 0 & u^2 m\alpha_n + 1 & \omega u I_p\alpha_{la} & u^2 I_d\alpha_{la} \\ u^2 m\alpha_{la} & 0 & u^2 I_d\alpha_{aa} + 1 & -\omega u I_p\alpha_{aa} \\ 0 & u^2 m\alpha_{la} & \omega u I_p\alpha_{aa} & u^2 I_d\alpha_{aa} + 1 \end{vmatrix} \tag{II.27}$$

Ce déterminant donnera un polynôme de huitième degré, et les racines peuvent être obtenues par l'une des méthodes numériques. De la présente analyse, nous obtiendrons deux ensembles de fréquences naturelles similaires avec des signes différents

Pour un mouvement de tournoiement synchrone en mode. Direct (forward synchronus whirl) $u = \omega = \omega_{cr}^{F}$

$$\left((\omega_{cr}^{F})\right)^{2}[M] - [G] + [K]\{B\} = \{0\} \quad (II.28)$$

Donc :

$$\left((\omega_{cr}^{F})\right)^{2}[M]_{eff} + [K]\{B\} = \{0\} \quad (II.29)$$

Avec:

$$[M_{eff}] = [M] - [G] \quad (II.30)$$

Pour un mouvement de tournoiement synchrone en mode rétrograde (backorward synchronus whirl).

Dans ce cas, on a:

$$[M_{eff}] = [M] + [G] \quad (II.31)$$

Il faut observer à partir de l'équation(II 30) et (II 31) que la masse effective pour le mode direct est inférieure à la matrice de masse initiale, mais la masse effective pour le mode indirect est plus grande. En conséquence, l'effet net pour le mode direct serait une augmentation de la fréquence de rotation et une diminution de la fréquence de rotation pour le mode rétrograde [08].

La vitesse critique est la vitesse à laquelle l'excitation déséquilibrée coïncide avec l'une des fréquences propres du système. En raison des effets gyroscopiques, les modes propres des machines constituées d'éléments avec des moments d'inertie polaires significatifs dépendent substantiellement de la vitesse de rotation. Du fait du doublement des modes propres du système en raison du :

- Une précession directe où le rotor tourne dans le même sens que son mouvement de précession. Alors, sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croît.

- Une précession rétrograde, où le rotor tourne en sens inverse de son mouvement de précession, ce qui engendre une chute de la vitesse critique.

II.2.2 Modèle mathématique

Dans cette partie, nous avons utilisé un code qu'on a développé sous Maple soft.

II.2.2.1 Rotor sur deux appuis simples

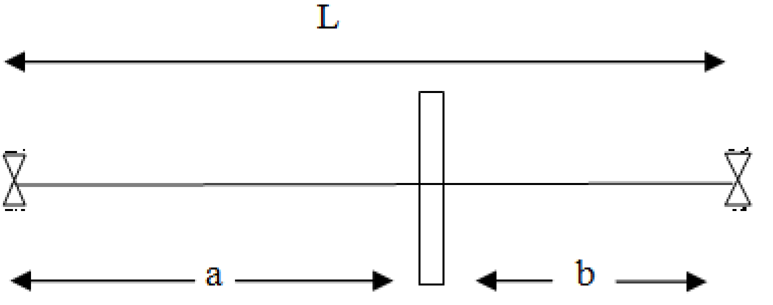


Figure 17. Rotor sur deux appuis simples

En tenant compte des effets gyroscopiques et en supposant ce qui suit:

Moment d'inertie:I_{dm} =0.02;Moment d'inertie polaire:I_p=0.04 ;diamètre de l'arbre: d =0.01; Longueur de l'arbre=1m ;masse de la roue: m=10kg; Module de Young: E =2.1*10:^{11} Mpa.

A-<u>Longueur appuis gauche – roue: a=0.5m; Longueur appuis droit – roue :b=0.5m</u>

On obtient les résultats suivants :

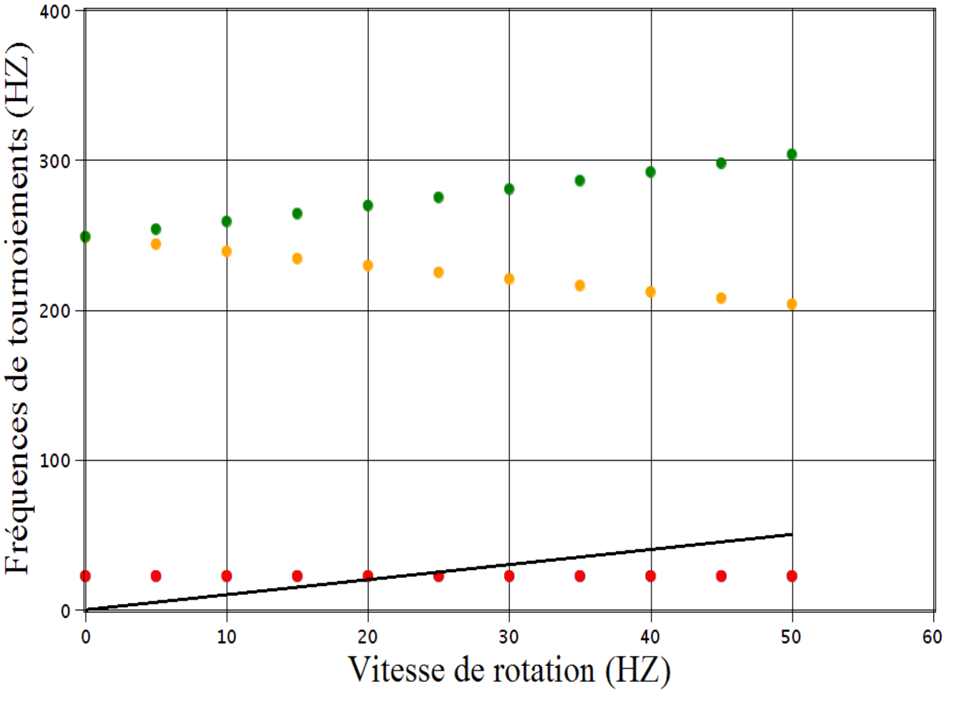


Figure 18. Fréquences du tournoiement en fonction vitesse de rotation

D'après la (Figure 18), on remarque que le point d'intersection de la courbe de fréquence du tournoiement avec la droite ($\omega = \nu$) est (22 ; 22), c'est-à-dire ($\omega = \nu$=22 HZ) donc la valeur de la vitesse critique est (22 HZ).

B- <u>Longueur appuis gauche – roue :a=0.75m; Longueur appuis droit – roue :b=0.25m</u>

On obtient les résultats suivants:

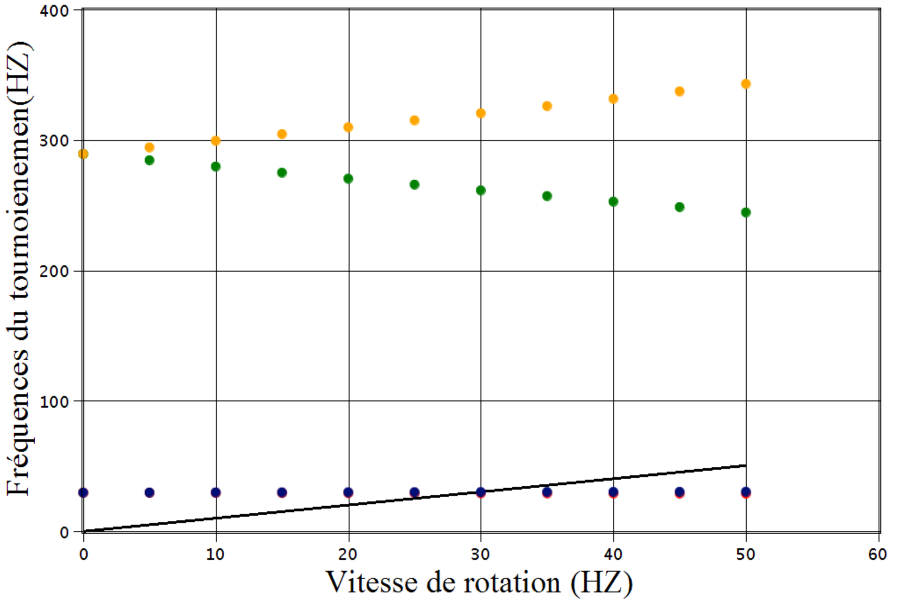


Figure 19. Fréquences du tournoiement en fonction vitesse de rotation

D'après la (Figure 19), on remarque que le point d'intersection de la courbe de fréquence du tournoiement avec la droite ($\omega = \nu$) est (29 ; 29), c'est-à-dire ($\omega = \nu$=29 HZ) donc la valeur de la vitesse critique est (29 HZ).

C-<u>Longueur appuis gauche – roue: a=0.9m ; Longueur appuis droit – roue: b=0.1m</u>

On obtient les résultats suivant:

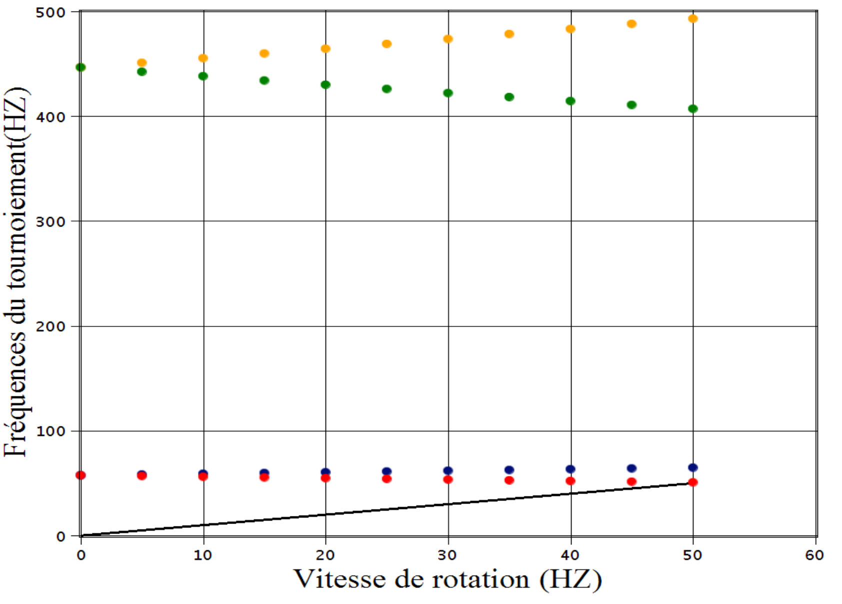


Figure 20. Fréquences du tournoiement en fonction vitesse de rotation

D'après la (Figure 20), on remarque que le point d'intersection de la courbe de fréquence du tournoiement avec la droite ($\omega = \nu$) est (50 ; 50), c'est-à-dire ($\omega = \nu$=50 HZ) donc la valeur de la vitesse critique est (50 HZ).

En étudiant les cas A, B et C (,Figure 18,Figure 19etFigure 20) on remarque que plus longueur appuis gauche – roue (a) la valeur de la vitesse critique augmente, ainsi que la fréquence adimensionnelles

Effet de disque

$$\upsilon = \frac{I_{dm} * \alpha_{22}}{m * \alpha_{11}}$$

Tableau 1: Effet de disque (υ) en fonction longueur appuis gauche - roue (a)

a	*α11*	*α22*	υ
0.5	0.0002022040238	0.0008088160950	0.00799999999802179999941227677983
0.75	0.0001137397634	0.001415428167	0.0248888888931872000080464384015
0.9	0.00002620564149	0.002361742999	0.180246913619819958851158045053 45

A partir du (Tableau 1), nous remarquons que l'effet du disque augmente avec l'augmentation longueur appuis gauche - roue (a)

II.2.2.2 Rotor encastré-Libre

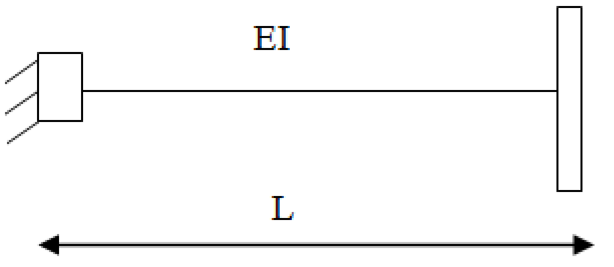


Figure 21. Rotor encastré-Libre

En tenant compte des effets gyroscopiques et en supposant ce qui suit :

Moment d'inertie :I_{dm} =0.02 ;Moment d'inertie polaire :I_p=0.04 ;diamètre de l'arbre : d =0.01 ;masse de la roue : m=10kg ; Module de Young : E =2.1*10:^{11} Mpa.

A-<u>Longueur de l'arbre : L=0.5m</u>

On obtient les résultats suivants :

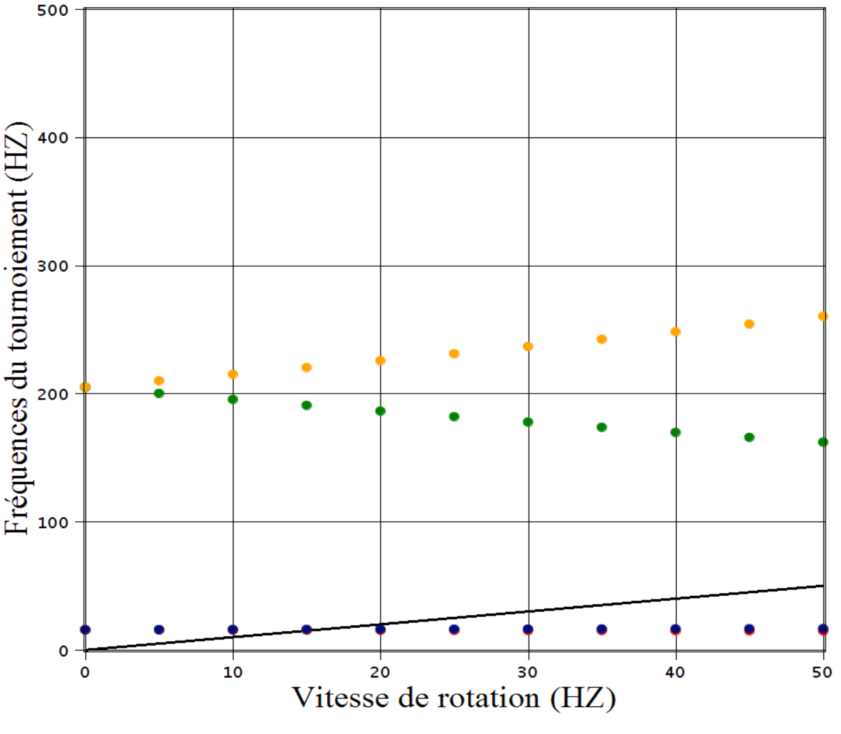


Figure 22. Fréquences du tournoiement en fonction vitesse de rotation

D'après la (Figure 22), on remarque que le point d'intersection de la courbe de fréquence du tournoiement avec la droite ($\omega = \nu$) est (15 ; 15), c'est-à-dire ($\omega = \nu$=15 HZ) donc la valeur de la vitesse critique est (15 HZ).

B-Longueur de l'arbre : L=1m

On obtient les résultats suivants :

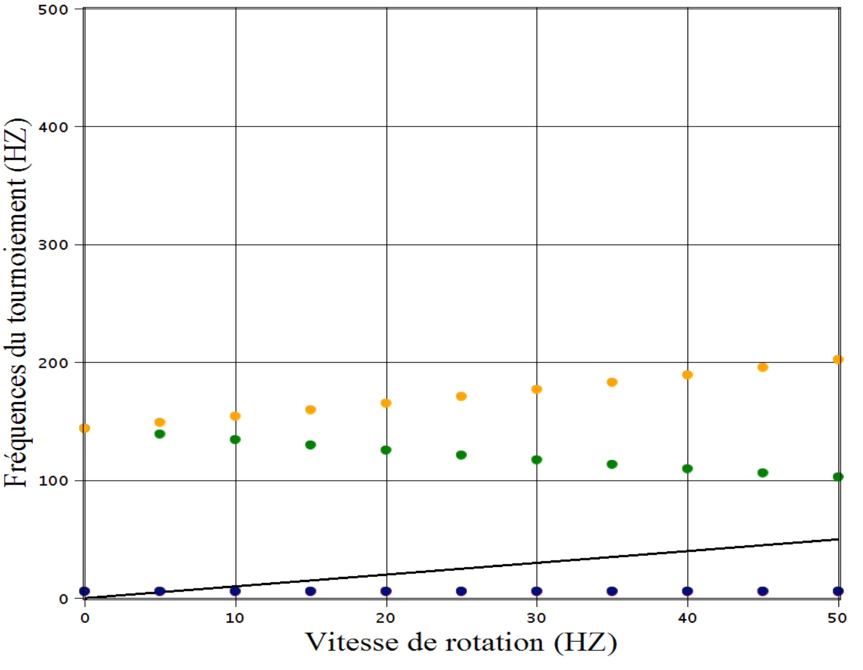


Figure 23.Fréquences du tournoiement en fonction vitesse de rotation

D'après la (Figure 22), on remarque que le point d'intersection de la courbe de fréquence du tournoiement avec la droite ($\omega = \nu$) est (5 ; 5), c'est-à-dire ($\omega = \nu$=5 HZ) donc la valeur de la vitesse critique est (5HZ)

.C-Longueur de l'arbre : L=1.5m

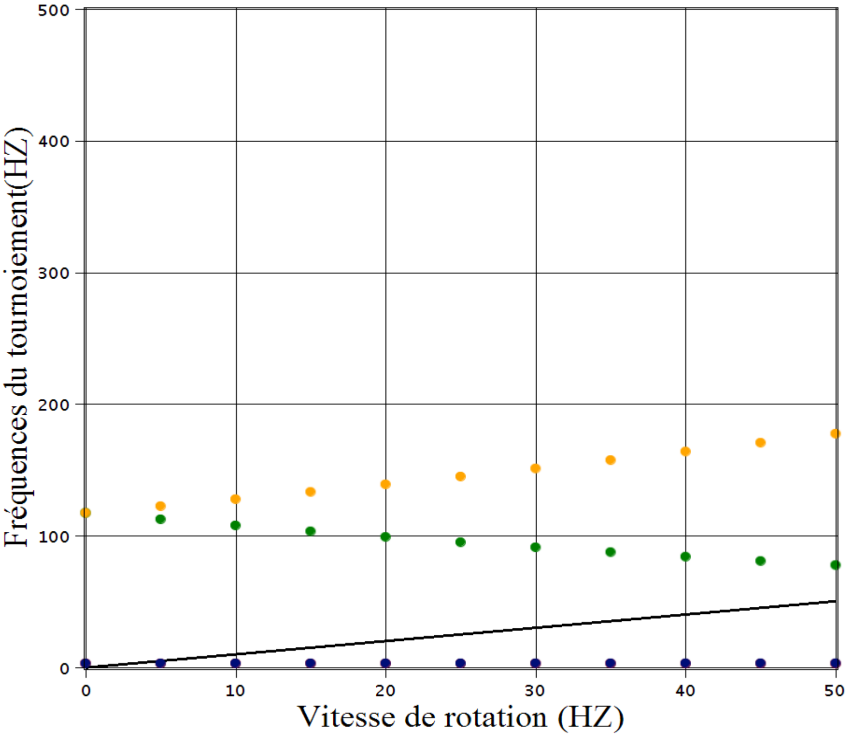


Figure 24. Fréquences du tournoiement en fonction vitesse de rotation

D'après la (Figure 24), on remarque que le point d'intersection de la courbe de fréquence du tournoiement avec la droite ($\omega = \nu$) est (3 ; 3), c'est-à-dire ($\omega = \nu$=3 HZ) donc la valeur de la vitesse critique est (3HZ)

En étudiant les cas A, B et C (Figure 22,Figure 23 et Figure 24) on remarque qu'au fur et à mesure que la longueur de la colonne augmente, la valeur de la vitesse critique diminue, ainsi que les fréquences adimensionnelles .

Effet de disque :

$$\upsilon = \frac{I_{dm} * \alpha_{22}}{m * \alpha_{11}}$$

Tableau 2 Effet de disque (υ) en fonction longueur de l’arbre(L)

L	α11	α22	υ
0.5	0.0004044080477	0.004852896573	0.024000000002967 3000001478457 2251
1	0.003235264382	0.009705793145	0.005999999999381 8125000456299 6484
1.5	0.01091901729	0.01455868972	0.002666666666666 6666666666666 6667

Nous remarquons dans le (Tableau 2) que l'effet disque diminue avec l'augmentation de la longueur de la colonne (L).

Conclusion.

Enfin, grâce à notre étude modèle de Jeffcott avec disque de déplacement et dans mon cas (rotor sur deux appuis simples, rotor encastré-Libre) en négligeant les effets gyroscopiques dans la première partie et en les considérant dans la seconde partie, alors que nous avons conclu que les propriétés physiques du rotor ont une influence sur le changement des fréquences et des vitesses critiques, mais l'effet le plus important est dû à l'effet gyroscopique

Chapitre III

Modélisation Des rotors Par la méthode des Eléments finis

Introduction

L'approche par élément a gagné en popularité en tant que méthode numérique; il englobe désormais non seulement la mécanique mais aussi l'écoulement des fluides, le transfert de chaleur, l'électromagnétisme et d'autres domaines. C'est aujourd'hui l'une des méthodes les plus utilisées pour la simulation numérique du comportement structurel sous des charges mécaniques complexes, qu'elles soient thermiques ou liées. Cette application comprend également les rotors. Dans ce chapitre on verra la modélisation des rotors par cette méthode numérique. Le rotor doit être discrétisé en des éléments finis.

III.1 Principe général de la méthode des éléments finis

L'approche par éléments finis cherche une solution d'approximation à une réponse exacte sous la forme d'un champ pour un problème physique défini sur n'importe quel domaine. Les étapes suivantes sont effectuées: modélisation, formulation du système d'équations différentielles et de ses conditions aux limites, maillage, sélection de la famille de champs locaux, discrétisation et résolution du système d'équations différentielles. [09]

III.2 Modélisation des rotors par la méthode des éléments finis

III.2.1 Modèle mathématique

Il est important de définir les éléments finis qui permettront de modéliser les rotors, y compris les disques, les arbres et les roulements, ainsi que de représenter les forces externes, notamment celles provoquées par les déséquilibres. [10]

III.2.1.1 L'arbre

L'arbre est décomposé en plusieurs éléments finis, dont chacun est un élément de poutre à deux nœuds et à section circulaire constante.

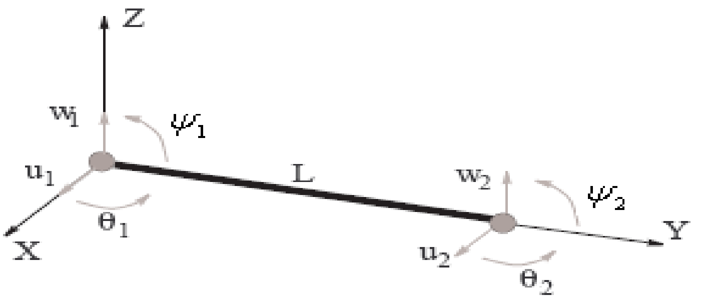


Figure 25 Degrés de liberté d'un élément d'arbre

Puisque les matrices sont constituées de quatre décalages et de quatre pentes, elles sont d'ordre 8 (cycles). Voici les relations entre le déplacement et les pentes :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \text{(III.1)}$$

Et le vecteur de déplacement nodal est :

$$\delta = [u_1, \omega_1, \theta_1, \psi_1, u_2, \omega_2, \theta_2, \psi_2] \quad \text{(III.2)}$$

Ce vecteur est séparé par deux vecteurs de déplacement $\delta_u$et δ_w

Correspondant respectivement aux mouvements selon X et Z, leur expression est :

$$\begin{cases} \delta_u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \\ \delta_\omega = [\omega_1, \theta_1, \omega_2, \theta_2]^T \end{cases} \quad \text{(III.3)}$$

L'élément fini de l'arbre est constitue en exprimant les déplacements u et w par :

$$\begin{cases} u = N_1(y)\delta_u \\ \omega = N_2(y)\delta_\omega \end{cases} \quad \text{(III.4)}$$

Où $N_1(y)$et$N_2(y)$ sont les vecteurs des fonctions de forme classique d'un élément de poutre en flexion.

$$\begin{cases} N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{2y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}\right] \\ N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{2y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right] \end{cases} \quad \text{(III.5)}$$

Substituer u, w par leurs expressions dans chacune contenant une expression pour les fonctions de la figure $N_1(y)$ et$N_2(y)$ et par leurs expressions dans l'expression de l'énergie --

L'énergie cinétique

Cinétique et de l'énergie de déformation de l'arbre, les équations lagrangiennes sont appliquées.

L'énergie cinétique de l'arbre est exprimée sous la forme compacte :

$$T_a = \frac{\rho S}{2}\int_0^L \left[\delta\dot{u}^t N_1^t N_1 \delta\dot{u} + \delta\dot{w}^t N_2^t N_2 \delta\dot{w}\right] dy + \frac{\rho I}{2}\int_a^L \left[\delta\dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy}\frac{dN_1}{dy}\delta\dot{u} + \delta\dot{w}^t \frac{dN_2^t}{dy}\frac{dN_2}{dy}\delta\dot{w}\right] dy$$
$$-2\rho I\left|\int_0^L \delta\dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy}\frac{dN_2}{dy}\delta w dy + \rho IL\right|^2 \quad \text{(III.6)}$$

En substituant les fonctions de déplacement et leur dérivée, on obtient :

$$T_a = \frac{1}{2}\delta\dot{u}^t M_1 \delta\dot{u} + \frac{1}{2}\delta\dot{w}^t M_2 \delta\dot{w} + \frac{1}{2}\delta\dot{u}^t M_3 \delta\dot{u} + \frac{1}{2}\delta\dot{w}^t M_4 \delta\dot{w} + \left|\delta\dot{u}^t M_5 \delta w + \rho IL\right|^2 \quad \text{(III.7)}$$

Où les matrices M_1 et M_2 sont les matrices de masse classiques, M_3et M_4 Donnent l'influence des effets d'inertie de rotation et M_5donne l'effet gyroscopique. Comme il a pu être observé précédemment, le dernier terme qui est une constante n'est pas considère par la suite (Ω= cte).

En appliquant l'opérateur différentiel de Lagrange sur l'expression de l'énergie Cinétique on trouve [11]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}}\right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M + M_a)\ddot{\delta} + C\dot{\delta} \quad \text{(III.8)}$$

Où M et $M_a$sont obtenues respectivement à partir de M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, et la matrice C vient de M_5. Ces matrices s'expriment [12] :

$$M = \frac{\rho SL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.9)}$$

$$c = \frac{\rho I}{15L}\begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -3L & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^3 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.10)}$$

$$c = \frac{\rho I}{15L}\begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & -4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.11)}$$

L’énergie de déformation

En introduisant les fonctions de forme dans l’expression de l’énergie de déformation on obtient :

$$U_a = \frac{EI}{2}\int_0^L \left[\delta u^t \frac{d^2N_1^t}{dy^2}\frac{d^2N_1}{dy^2}\delta u + \delta w^t \frac{d^2N_2^t}{dy^2}\frac{d^2N_2}{dy^2}\delta w\right] dy \quad \text{(III.12)}$$

Après intégration on obtient :

$$T_a = \frac{1}{2}\delta u^t K_I \delta u + \frac{1}{2}\delta w^t K_2 \delta w \quad \text{(III.13)}$$

Où K_1 et K_2 sont les matrices de raideur classiques. Il est fréquent de prendre en Compte l’effet de cisaillement caractérise par la quantité.

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad \text{(III.14)}$$

Avec le module de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \quad \text{(III.15)}$$

υ Est le coefficient de poisson et $S_r$est l’aire réduite de la section. L’influence de L’effet de cisaillement qui donne une matrice $K_s$dont la démonstration est n’est pas Traitée, mais son influence est incluse dans la matrice de raideur classique. La Matrice de raideur classique vient deK_1, K_2et K_5

En appliquant l’opérateur différentiel de Lagrange sur l’expression de l’énergie De déformation on trouve [11] :

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = k\delta \quad \text{(III.16)}$$

Avec K = $K_c$la matrice de raideur dont l’expression :

$$k_c = \frac{EI}{(1+a')L^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (2+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.17)}$$

On ajoute les matrices de raideur $K_i$et d'amortisseur $C_i$de l'amortissement interne qui sont définies comme suivant :

La matrice de raideur due a l'amortissement interne K_i:

$$C_i = \frac{EI\beta}{(1+a')}\begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -(4+a')L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2+a')L^2 \\ 0 & 6L & (4+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (2+a')L^2 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -(2+a')L^2 & -6L & 0 & 0 & -(4+a')L^2 \\ 0 & 6L & (2+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a')L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.19)}$$

$$C_i = \frac{EI\beta}{(1+a')}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (2+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.20)}$$

III.2.1.2 Paliers :

Les forces et les déplacements sont liés aux propriétés de base. Les pentes et moments fléchissant ne sont pas pris en compte..

$$\begin{cases} F_u = -k_{xx}u - k_{xz}\omega - C_{xx}u - C_{xz}\omega \\ F_\omega = -k_{zx}u - k_{zz}\omega - C_{zx}u - C_{zz}\omega \\ F_\theta = F_\psi = 0 \end{cases} \quad \text{(III.21)}$$

Et comme F_θ=F_ψ=0, on a :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\omega \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \omega \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} & 0 & 0 \\ C_{zx} & C_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \text{(III.22)}$$

La matrice de rigidité est la première, tandis que la matrice d'amortissement visqueux est la seconde. Souvent ces moules sont inégaux, et leurs conditions peuvent fortement varier en fonction de la vitesse de rotation.

III.2.1.3 Disque :

C'est la modélisation d'un disque par éléments finis qui est montré ici. Lorsque le disque est symétrique et non flexible, c'est le cas. Un nœud à quatre degrés de liberté peut être utilisé pour modéliser le Disque : deux translations u et w selon x et z, et deux rotationsθ et ψ autour de x et z.

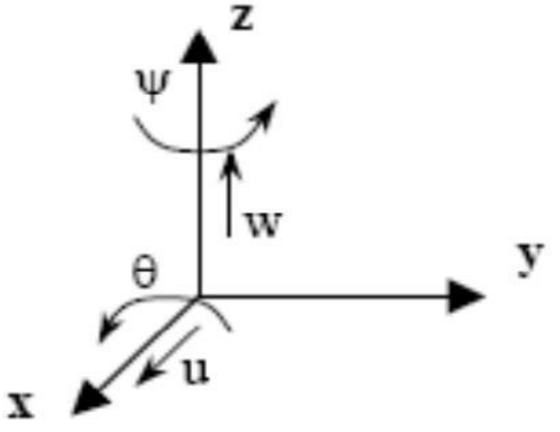


Figure 26 Degrés de liberté d'un élément de disque

Le vecteur déplacement nodal de centre de disque est pris de la forme :

$$\delta = [u, \omega, \theta, \psi]^T \qquad \text{(III.23)}$$

On retrouve les matrices et vecteurs disques distincts en appliquant les équations de Lagrange au calcul de l'énergie cinétique du disque (matrices de masse, matrices d'amortissement, matrice de rigidité et vecteur de force).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \delta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = [M_d]\{\ddot{\delta}\} + [C_d]\{\dot{\delta}\} + [K_d]\{\delta\} \qquad \text{(III.24)}$$

Avec [M_d] et [C_d] respectivement sont la matrice de masse et la matrice de L'effet gyroscopique, qui ont pour expression :

$$M_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{dx} \end{bmatrix}$$

Et

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}$$

III.2.1.4 Balourd

On peut trouver l'expression de l'énergie cinétique de déséquilibre à l'aide de l'opérateur différentiel de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \delta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -md\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \qquad \text{(III.25)}$$

Et :

$$\delta = [u, \omega,]^t \qquad \text{(III.26)}$$

$$\begin{bmatrix} F_{bu} \\ F_{b\omega} \end{bmatrix} = m_b d\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \qquad \text{(III.27)}$$

III.2.2 Résultats et discussions

Dans cette partie, nous avons utilisé un code de calcul libre sous Matlab

III.2.2.1 Premier cas étudié (rotor symétrique sur appuis élastiques)

Les données du premier cas étudié sont :

Longueur de l'arbre 1m.

Module de Young E = 2.1 10^{11}Pa.

Module d'élasticité transversal G = 81.2 10^9 Pa.

Masse volumique ρ = 7800 kg/m^3.

Diamètre extérieur de l'arbre 0.05m.

Diamètre du disque 0.28m;

Coefficient de rigidité des paliers k=10^6N/m;

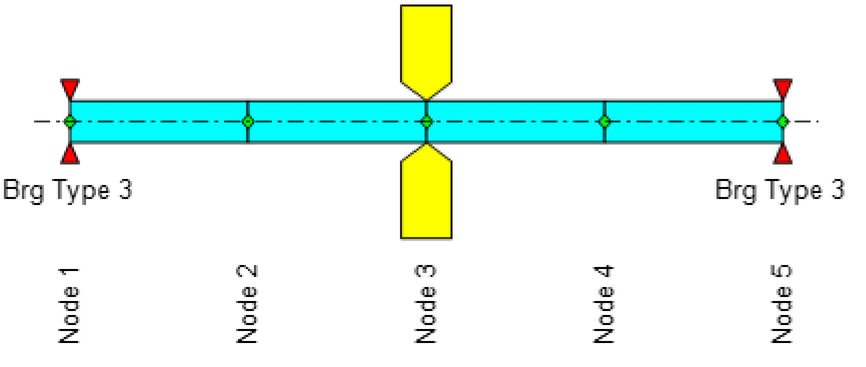


Figure 27. Rotor symétrique sur appuis élastiques

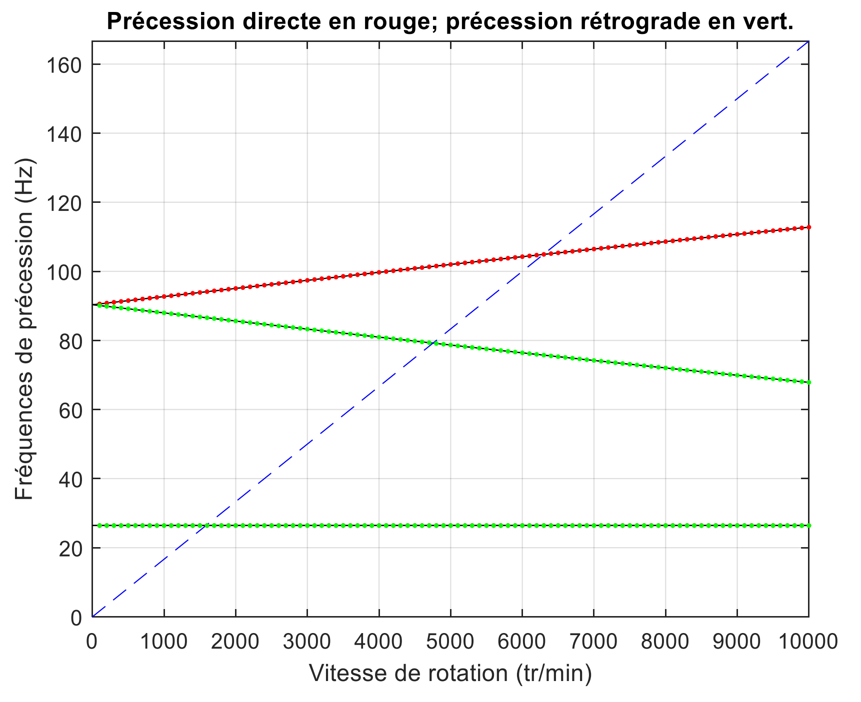


Figure 28.Diagramme de Campbell d'un rotor symétrique (k=10^6N/m)

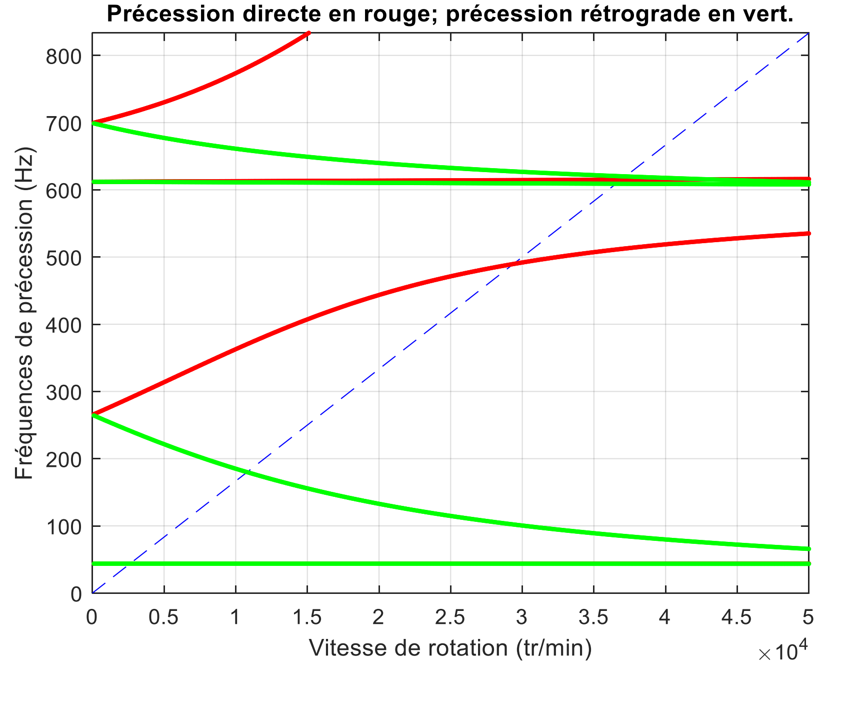


Figure 29.Diagramme de Campbell (k=10^8N/m)

A travers (Figure 28,Figure 29)

On note qu'il y a quatre vitesses critiques

Tableau 3. Trois premières vitesses critiques en fonction de la rigidité des paliers

	$K=10^6$ N/m	$K=10^7$ N/m	$K=10^8$ N/m	$K=10^9$ N/m
Ω_1	1500tr/min	2300tr/min	2400tr/min	2450tr/min
Ω_2	4700tr/min	9500tr/min	10700tr/min	10800tr/min
Ω_3	6200tr/min	17600tr/min	29400tr/min	31300tr/min

à travers (

Tableau 3),on remarque que

Dans ce cas, lorsque (k) augmente, la valeur de vitesse critique augmente

III.2.2.2Deuxième cas étudié (rotor non-symétrique)

Les données du deuxième cas étudié sont :

Longueur de l'arbre 1m.

Module de Young $E = 2.1\ 10^{11}$Pa.

Module d'élasticité transversal $G = 81.2\ 10^9$ Pa.

Masse volumique $\rho = 7800\ kg/m^3$.

Diamètre extérieur de l'arbre 0.05m.

Diamètre du disque 0.28m;

Coefficient de rigidité des paliers $k=10^6$N/m;

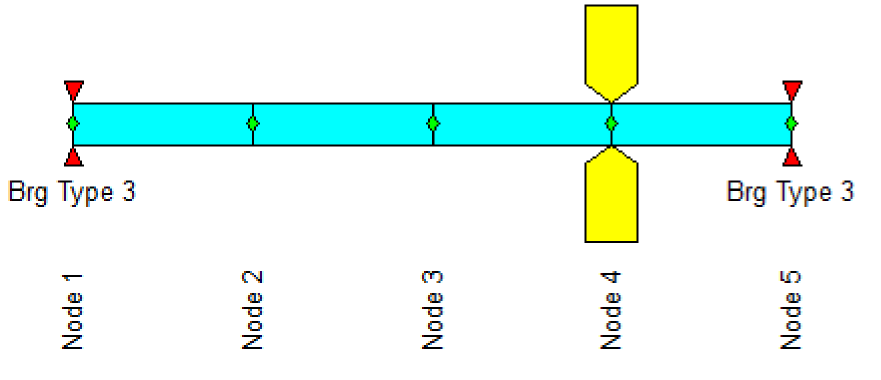


Figure 30. Rotor non-symétrique sur appuis élastiques

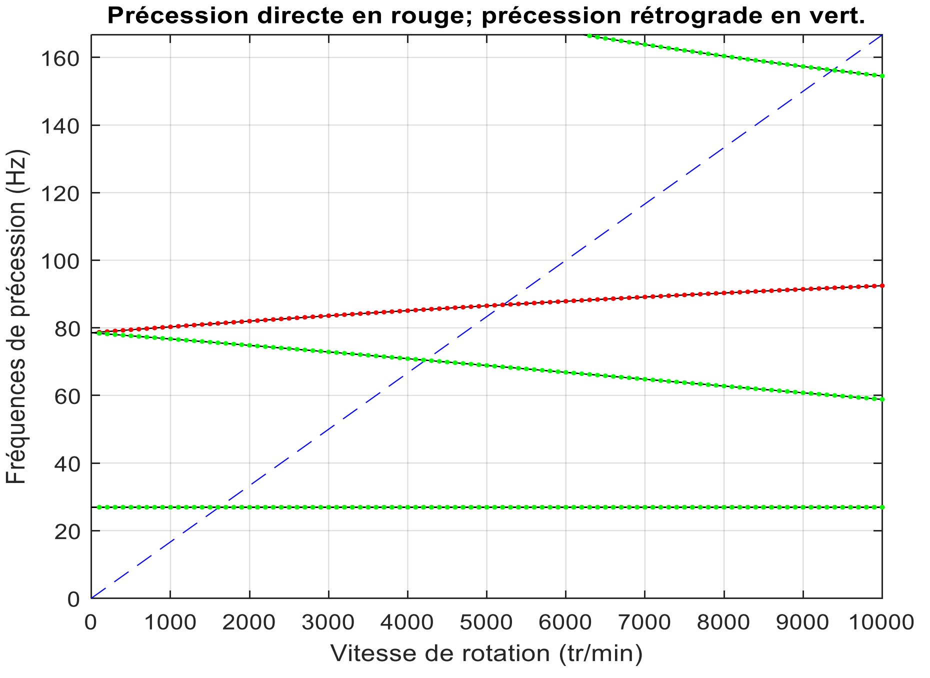


Figure 31. Diagramme de Campbell d'un rotor non-symétrique ($k=10^6$N/m)

Tableau 4. Trois premières vitesses critiques d'un rotor symétrique et non-symétrique.

	Symétrique	Non-symétrique
Ω_1	1500tr/min	1600tr/min
Ω_2	4700tr/min	7067tr/min
Ω_3	6200tr/min	5200tr/min

A travers (Figure 31.Tableau 4), on remarque que :

Dans cas rotor symétrique la vitesse critique est incrémentée

Dans cas non symétrique la vitesse critique est incrémentée puis diminue

III.2.2.3 Troisième cas étudié (rotor avec deux disques)

Les données du premier cas étudié sont :

Longueur de l'arbre 1m.

Module de Young E = 2.1 10^{11}Pa.

Module d'élasticité transversal G = 81.2 10^9 Pa.

Masse volumique ρ = 7800 kg/m^3.

Diamètre extérieur de l'arbre 0.05m.

Diamètre du disque 0.28m;

Coefficient de rigidité des paliers $k=10^6$N/m;

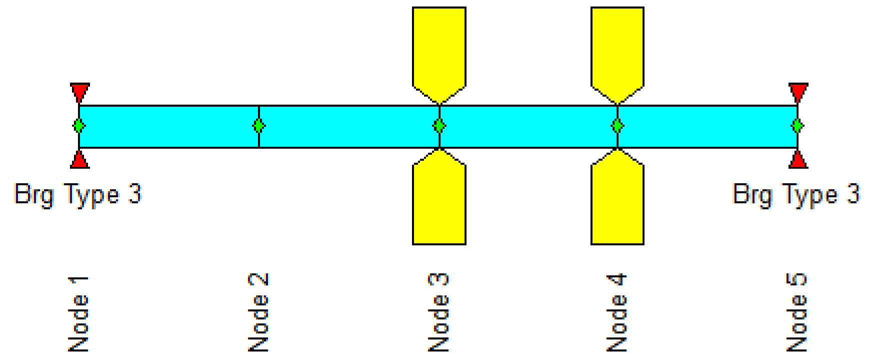


Figure 32. Rotor avec deux disques sur appuis élastiques

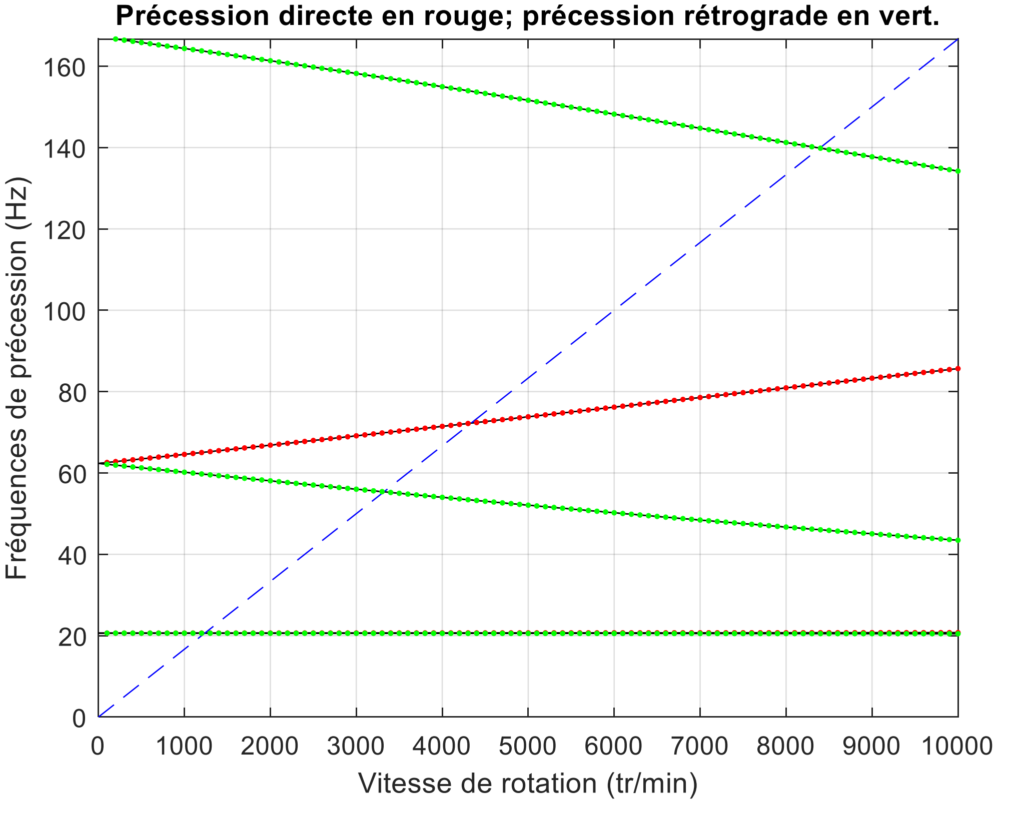


Figure 33. Diagramme de Campbell d'un rotor avec deux disques

A travers (Figure 33) on remarque que :

Nous avons quatre vitesses critiques et leur valeur augmente de vitesse de rotation

Conclusion

Les équations générales d’un rotor soumis à une rotation uniforme ont été développées dans ce chapitre en utilisant la méthode des éléments finis. Elle est plus adaptée pour modéliser les systèmes réels dans la mesure où l’on connait les caractéristiques dynamiques des paliers par exemple. Elle permet l’étude de l’ensemble des modes de vibration du rotor. Elle est également modulaire car chaque élément du rotor possède ses propres caractéristiques. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l’utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque nœud. Le code de calcul développé reproduit tous les principaux phénomènes de dynamique linéaire de rotor en flexion. Il constitue une plateforme pour l’étude de la dynamique des rotors en flexion

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons abordé la problématique des vibratoires transmissions soles des arbres élastiques. En première lieu, nous sommes basé sur une approche analytique en utilisant comme support le logiciel de calcule symbolique Maple.

Pour des cas plus complexes, nous avons utilisé la méthode des éléments finis. Les configurations étudiées sur : -Les rotors symétriques

-Les rotors avec un disque décalé

-Les rotors avec deux disques

Les modèles mathématiques et numériques utilisés ont permis la détermination des fréquences naturelles et par conséquent des vitesse critiques des système des rotors étudies

Annexes

Annexes A

Rotor avec paliers fléxibles:cas isotopique

> $restart;$
> $with(linalg):$
> $with(LinearAlgebra):$
> $k := 1000;\ c_p := 10;\ m := 10;\ e := 1;$

#k:modes propres , m:masse de la roue , e: , α_b :

$$k := 1000$$
$$c_p := 10$$
$$m := 10$$
$$e := 1$$

> $c := 2 \cdot c_p$

$$c := 20$$

>

Les équations différentielles régissant le mouvement du système, s'écrivent alors:

> $ode1 := x''(t) + \frac{c}{m} \cdot x'(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = e \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t)$

$$ode1 := D^{(2)}(x)(t) + 2\,D(x)(t) + 100\,x(t) = \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

> $ode2 := y''(t) + \frac{c}{m} \cdot y'(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = e \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$

$$ode2 := D^{(2)}(y)(t) + 2\,D(y)(t) + 100\,y(t) = \Omega^2 \sin(\Omega t)$$

>

En ce qui concerne les solutions particulières, elles ont la même forme que l'exicitation.mais avec les constantes A_e , et B_e

> $sol1 := dsolve(ode1, x(t))$

$$sol1 := x(t) = e^{-t} \sin(3\sqrt{11}\,t)\,\_C2 + e^{-t} \cos(3\sqrt{11}\,t)\,\_C1 + \frac{\Omega^2 \left(-\Omega^2 \cos(\Omega t) + 2 \sin(\Omega t)\,\Omega + 100 \cos(\Omega t)\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000}$$

> $sol2 := dsolve(ode2, y(t))$

$$sol2 := y(t) = e^{-t} \sin(3\sqrt{11}\,t)\,\_C2 + e^{-t} \cos(3\sqrt{11}\,t)\,\_C1 - \frac{\Omega^2 \left(\Omega^2 \sin(\Omega t) + 2\,\Omega \cos(\Omega t) - 100 \sin(\Omega t)\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000}$$

> $particularsol1 := dsolve(\{ode1, x(0) = 0, x'(0) = 0\}, x(t))$

$$particularsol1 := x(t) = -\frac{1}{33} \frac{e^{-t} \sin(3\sqrt{11}\,t)\sqrt{11}\,\Omega^2 \left(\Omega^2 + 100\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000} + \frac{e^{-t} \cos(3\sqrt{11}\,t)\,\Omega^2 \left(\Omega^2 - 100\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000} + \frac{\Omega^2 \left(-\Omega^2 \cos(\Omega t) + 2 \sin(\Omega t)\,\Omega + 100 \cos(\Omega t)\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000}$$

$>particularsol2 := dsolve(\{ode2, y(0)=0, y'(0)=0\}, y(t))$

$$particularsol2 := y(t) = \frac{1}{33}\,\frac{e^{-t}\sin(3\sqrt{11}\,t)\sqrt{11}\,(\Omega^5 - 98\,\Omega^3)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000} + \frac{2\,e^{-t}\cos(3\sqrt{11}\,t)\,\Omega^3}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000} - \frac{\Omega^2\,(\Omega^2\sin(\Omega t) + 2\,\Omega\cos(\Omega t) - 100\sin(\Omega t))}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000}$$

$>\lambda := \frac{c}{2\cdot m}$ #Rapport d'amortiss

$$\lambda := 1$$

$>\omega_n := \sqrt{\frac{k}{m}}$ #` Fréquences Natureles

$$\omega_n := 10$$

#Les constantes A_e, B_e :

$>A_e := \frac{\Omega^2\cdot e}{\sqrt{(-\Omega^2+\omega_n{}^2)^2 + (2\cdot\lambda\,\Omega)^2}}; B_e := \frac{\Omega^2\cdot e}{\sqrt{(-\Omega^2+\omega_n{}^2)^2 + (2\cdot\lambda\,\Omega)^2}};$
 # amplitude de rigime

$$A_1 := \frac{\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2+100)^2 + 4\,\Omega^2}}$$

$$B_1 := \frac{\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2+100)^2 + 4\,\Omega^2}}$$

Annexes B

Rotor avec palier flexibles : cas anisotropique

$>restart;$
$>with(linalg):$
$>with(LinearAlgebra):$
$>k_x := 1000;\ k_y := 250;\ c_p := 10;\ c_q := 10;\ m := 10;\ e := 1;$
#k:modes propres , m:masse de la roue , e: $,\alpha_b$

$$k_x := 1000$$

$$k_y := 250$$

$$c_p := 10$$

$$c_q := 10$$

$$m := 10$$

$$e := 1$$

$>c_x := 2\cdot c_p;\ c_y := 2\cdot c_q$

$$c_x := 20$$

$$c_y := 20$$

\>

Supposons qu'elles soient égales à k_x et α_x suivant ox et à k_y et α_x suivant oy. Dans ce cas les équations différentielles régissant le mouvement du système se réécrivent

\> $$ode1 := x''(t) + \frac{c_x}{m}\cdot x'(t) + \frac{k_x}{m}\cdot x(t) = e\cdot\Omega^2\cdot\cos(\Omega\cdot t);\ ode2 := y''(t) + \frac{c_y}{m}\cdot y'(t) + \frac{k_y}{m}\cdot y(t) = e\cdot\Omega^2\cdot\sin(\Omega\cdot t)$$

$$ode1 := D^{(2)}(x)(t) + 2\,D(x)(t) + 100\,x(t) = \Omega^2\cos(\Omega\,t)$$

$$ode2 := D^{(2)}(y)(t) + 2\,D(y)(t) + 25\,y(t) = \Omega^2\sin(\Omega\,t)$$

\>

En ce qui concerne les solutions particulières, elles ont la même forme que l'excitation.mais avec les constantes A_e , et B_e

\> $$sol1 := dsolve(ode1, x(t));\ sol2 := dsolve(ode2, y(t))$$

$$sol1 := x(t) = e^{-t}\sin(3\sqrt{11}\,t)\,\_C2 + e^{-t}\cos(3\sqrt{11}\,t)\,\_C1 + \frac{\Omega^2\left(-\Omega^2\cos(\Omega\,t) + 2\sin(\Omega\,t)\,\Omega + 100\cos(\Omega\,t)\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000}$$

$$sol2 := y(t) = e^{-t}\sin(2\sqrt{6}\,t)\,\_C2 + e^{-t}\cos(2\sqrt{6}\,t)\,\_C1 - \frac{\Omega^2\left(\Omega^2\sin(\Omega\,t) + 2\,\Omega\cos(\Omega\,t) - 25\sin(\Omega\,t)\right)}{\Omega^4 - 46\,\Omega^2 + 625}$$

\> $$particularsol1 := dsolve(\{ode1, x(0) = 0, x'(0) = 0\}, x(t));$$

$$particularsol1 := x(t) = -\frac{1}{33}\,\frac{e^{-t}\sin(3\sqrt{11}\,t)\sqrt{11}\,\Omega^2\left(\Omega^2 + 100\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000} + \frac{e^{-t}\cos(3\sqrt{11}\,t)\,\Omega^2\left(\Omega^2 - 100\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000} + \frac{\Omega^2\left(-\Omega^2\cos(\Omega\,t) + 2\sin(\Omega\,t)\,\Omega + 100\cos(\Omega\,t)\right)}{\Omega^4 - 196\,\Omega^2 + 10000}$$

\> $$particularsol2 := dsolve(\{ode2, y(0) = 0, y'(0) = 0\}, y(t))$$

$$particularsol2 := y(t) = \frac{1}{12}\,\frac{e^{-t}\sin(2\sqrt{6}\,t)\sqrt{6}\left(\Omega^5 - 23\,\Omega^3\right)}{\Omega^4 - 46\,\Omega^2 + 625} + \frac{2\,e^{-t}\cos(2\sqrt{6}\,t)\,\Omega^3}{\Omega^4 - 46\,\Omega^2 + 625} - \frac{\Omega^2\left(\Omega^2\sin(\Omega\,t) + 2\,\Omega\cos(\Omega\,t) - 25\sin(\Omega\,t)\right)}{\Omega^4 - 46\,\Omega^2 + 625}$$

\> $\lambda_x := \frac{c_x}{2\cdot m};\ \lambda_y := \frac{c_y}{2\cdot m}$ #Rapport d'amortiss

$$\lambda_x := 1$$

$$\lambda_y := 1$$

$>\omega_{nx} := \sqrt{\frac{k_x}{m}}$; $\omega_{ny} := \sqrt{\frac{k_y}{m}}$ # *Fréquences Natureles*

$$\omega_{nx} := 10$$

$$\omega_{ny} := 5$$

$> A_e := \frac{\Omega^2 \cdot e}{\sqrt{\left(-\Omega^2 + \omega_{nx}{}^2\right)^2 + \left(2 \cdot \lambda_x \Omega\right)^2}}$; $B_e := \frac{\Omega^2 \cdot e}{\sqrt{\left(-\Omega^2 + \omega_{ny}{}^2\right)^2 + \left(2 \cdot \lambda_y \Omega\right)^2}}$

amplitude de rigime

$$A_1 := \frac{\Omega^2}{\sqrt{\left(-\Omega^2 + 100\right)^2 + 4\,\Omega^2}}$$

$$B_1 := \frac{\Omega^2}{\sqrt{\left(-\Omega^2 + 25\right)^2 + 4\,\Omega^2}}$$

Annexes C

Vibrations Transversal du rotor avec disque décalé

```
> restart;
>with(linalg):
```

$>$ *with*(*LinearAlgebra*) :

- *Matrice de Masse*

$>$ $Idm := 0.02$; $d := 0.01$; $E := 2.1 \cdot 10^{11}$; $L := 1$; $a := 0.5$; $b := 0.5$; $Ip := 0.04$; $m := 10$;

#I dd: Moment d'inertie diametral, E : Module de Young, L : Longueur de l'arbre, a: Longueur appuis gauche - roue, b: Longueur appuis droit - roue, Ip: Moment d'inertie polaire, m: masse de la roue; Idm: moment d'inertie; d: diametre de l'arbre

$$Idm := 0.02$$

$$d := 0.01$$

$$E := 2.100000000\,10^{11}$$

$$L := 1.5$$

$$a := 0.5$$

$$b := 0.5$$

$$Ip := 0.04$$

$$m := 10$$

$> Idd := \frac{3.14 \cdot d^4}{64}$;

$$Idd := 4.906250000\,10^{-10}$$

$> M := matrix(2, 2)$;

$$M := array(1 ..2, 1 ..2, [\ ])$$

>
> $M[1,1] := m;\ M[1,2] := 0;\ M[2,1] := 0;\ M[2,2] := Idm;$

$$M_{1,1} := 10$$

$$M_{1,2} := 0$$

$$M_{2,1} := 0$$

$$M_{2,2} := 0.02$$

>

- ## Matrice d'influence

> *# rotor sur deux appuis simples*
> $\#alpha11 := \left(\frac{a^2 b^2}{(3 \cdot E \cdot Idd \cdot L)}\right);$
> $\#alpha12 := -\frac{\left(3 \cdot a^2 L - 2 \cdot a^3 - a \cdot L^2\right)}{3 \cdot E \cdot Idd \cdot L};$
> $\#alpha21 := \frac{(a \cdot b \cdot (b - a))}{3 \cdot E \cdot Idd \cdot L};$
> $\#alpha22 := -\frac{\left(3 \cdot a \cdot L - 3 \cdot a^2 - L^2\right)}{3 \cdot E \cdot Idd \cdot L};$
>
> *# Rotor encastré-Libre*

> $alpha11 := \frac{L^3}{E \cdot Idd};$

$$\alpha 11 := 0.03275705186$$

> $alpha12 := \frac{L^2}{3 \cdot E \cdot Idd};$

$$\alpha 12 := 0.007279344857$$

> alpha21 := alpha12;

$$\alpha 21 := 0.007279344857$$

> $alpha22 := \frac{L}{E \cdot Idd};$

$$\alpha 22 := 0.01455868972$$

>
>

>

> alpha := $matrix(2, 2)$;

$$\alpha := array(1..2, 1..2, [\,])$$

>
> alpha[1, 1] := $alpha11$; alpha[1, 2] := $alpha12$; alpha[2, 1] := $alpha21$; alpha[2, 2] := $alpha22$;

$$\alpha_{1,1} := 0.03275705186$$

$$\alpha_{1,2} := 0.007279344857$$

$$\alpha_{2,1} := 0.007279344857$$

$$\alpha_{2,2} := 0.01455868972$$

> $print(\text{alpha});$

$$\begin{bmatrix} 0.03275705186 & 0.007279344857 \\ 0.007279344857 & 0.01455868972 \end{bmatrix}$$

> $K := matrix(2, 2);$

$$K := array(1..2, 1..2, [\ ])$$

> $K := inverse(\text{alpha});$

$$K := \begin{bmatrix} 34.34375001 & -17.17187500 \\ -17.17187500 & 77.27343749 \end{bmatrix}$$

> $print(M);$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

> $print(multiply((K), \text{alpha}));$

$$\begin{bmatrix} 1.000000000 & 0. \\ -1.\ 10^{-10} & 1.000000000 \end{bmatrix}$$

- *Calcul des fréquences propres du systèmes*

> $eigenvalues(K, M);$

$$3864.053698, 3.052476060$$

> $MMalpha := matrix(2, 2);$

$$MMalpha := array(1..2, 1..2, [\ ])$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do for** j **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do** $MMalpha[i,j] := 0$ **end do end do**;
> $print(MMalpha);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>
> $MMalpha := multiply((\text{alpha}), M);$

$$MMalpha := \begin{bmatrix} 0.3275705186 & 0.0001455868971 \\ 0.07279344857 & 0.0002911737944 \end{bmatrix}$$

> $Identt := Matrix(2, shape = identity);$

$$Identt := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $MMK := matrix(2, 2);$

$$MMK := array(1..2, 1..2, [\ ])$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do for** j **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do** $MMK[i,j] := 0$ **end do end do**;
> $print(MMK);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do for** j **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do** $MMK[i,j] := \left(\nu^2 \cdot MMalpha[i,j] - Identt(i, j)\right)$ **end do end do**;

>
> $print(MMK);$

$$\begin{bmatrix} 0.3275705186\,\nu^2 - 1 & 0.0001455868971\,\nu^2 \\ 0.07279344857\,\nu^2 & 0.0002911737944\,\nu^2 - 1 \end{bmatrix}$$

> $MMMK := matrix(2, 2);$

$$MMMK := array(1\,..2, 1\,..2, [\,])$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do for** j **from** 1 **by** 1 **to** 2 **do** $MMMK[i, j] := 0$ **end do end do**;

> $print(MMMK);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $MMMK[1, 1] := MMK[1, 1];\ MMMK[1, 2] := MMK[1, 2]; MMMK[2, 1] := MMK[2, 1];$
$MMMK[2, 2] := MMK[2, 2];$

$$MMMK_{1,\,1} := 0.3275705186\,\nu^2 - 1$$

$$MMMK_{1,\,2} := 0.0001455868971\,\nu^2$$

$$MMMK_{2,\,1} := 0.07279344857\,\nu^2$$

$$MMMK_{2,\,2} := 0.0002911737944\,\nu^2 - 1$$

> $print(MMMK)$

$$\begin{bmatrix} 0.3275705186\,\nu^2 - 1 & 0.0001455868971\,\nu^2 \\ 0.07279344857\,\nu^2 & 0.0002911737944\,\nu^2 - 1 \end{bmatrix}$$

> $MMMK[1, 1] \cdot MMMK[2, 2] - MMMK[2, 1] \cdot MMMK[1, 2];$

$$\left(0.3275705186\,\nu^2 - 1\right)\left(0.0002911737944\,\nu^2 - 1\right) - 0.00001059777231\,\nu^4$$

> $solve(\{\ \mathbf{(28)} = 0\ \})$

$$\{\nu = 1.747133670\}, \{\nu = -1.747133670\}, \{\nu = 62.16151360\}, \{\nu = -62.16151360\}$$

>

Annexes D

Vibrations Transversal avec effet gyroscopique

```
> restart;
>with(linalg):
```

> $with(Student[LinearAlgebra]):$

>

> $Idm := 0.02\ ; d := 0.01; E := 2.1 \cdot 10^{11}; L := 1\ ; a := 0.75; b := 0.25\ ; Ip := 0.04; m := 10;$

#I : Moment d'inertie diametral, E : Module de Young, L : Longueur de l'arbre, a: Longueur appuis gauche - roue, b: Longueur appuis droit - roue, Ip: Moment d'inertie polaire, m: masse de la roue, Idm: moment d'inertie,diametrale de masse, dia: diametre de l'arbre

$$Idm := 0.02$$

$$d := 0.01$$

$$E := 2.100000000\,10^{11}$$

$$L := 1$$

$$a := 0.75$$

$$b := 0.25$$

$$Ip := 0.04$$

$$m := 10$$

$> Idd := \frac{3.14 \cdot d^4}{64};$

$$Idd := 4.906250000\ 10^{-10}$$

- ## Matrice de Masse

$> M := matrix(4, 4);$

$$M := array(1..4, 1..4, [\ ])$$

$> M[1, 1] := m; M[1, 2] := 0; M[1, 3] := 0; M[1, 4] := 0; M[2, 1] := 0; M[2, 2] := \mathrm{m}; M[2, 3] := 0; M[2, 4] := 0; M[3, 1] := 0; M[3, 2] := 0; M[3, 3] := Idm; M[3, 4] := 0; M[4, 1] := 0; M[4, 2] := 0; M[4, 3] := 0; M[4, 4] := Idm;$

$$M_{1,1} := 10$$

$$M_{1,2} := 0$$

$$M_{1,3} := 0$$

$$M_{1,4} := 0$$

$$M_{2,1} := 0$$

$$M_{2,2} := 10$$

$$M_{2,3} := 0$$

$$M_{2,4} := 0$$

$$M_{3,1} := 0$$

$$M_{3,2} := 0$$

$$M_{3,3} := 0.02$$

$$M_{3,4} := 0$$

$$M_{4,1} := 0$$

$$M_{4,2} := 0$$

$$M_{4,3} := 0$$

$$M_{4,4} := 0.02$$

$> print(M);$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

- ## Matrice Gyroscopique

$> G := matrix(4, 4);$

$$G := array(1..4, 1..4, [\ ])$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do for** j **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do** $G[i, j] := 0.0$ **end do end do**;

$> print(G);$

$$\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

> $G[3,4] := Ip; G[4,3] := -Ip;$

$$G_{3,4} := 0.04$$

$$G_{4,3} := -0.04$$

> $print(G);$

$$\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.04 \\ 0. & 0. & -0.04 & 0. \end{bmatrix}$$

- ## Matrice d'influence

> *# rotor sur deux appuis simples*

> $alpha11 := \left(\frac{a^2 b^2}{(3 \cdot E \cdot Idd \cdot L)}\right);$

$$\alpha 11 := 0.0001137397634$$

> $alpha12 := -\frac{\left(3 \cdot a^2 L - 2 \cdot a^3 - a \cdot L^2\right)}{3\, E \cdot Idd \cdot L};$

$$\alpha 12 := -0.0003033060358$$

> $alpha21 := \frac{(a \cdot b \cdot (b - a))}{3 \cdot E \cdot Idd \cdot L};$

$$\alpha 21 := -0.0003033060358$$

> $alpha22 := -\frac{\left(3 \cdot a \cdot L - 3 \cdot a^2 - L^2\right)}{3 \cdot E \cdot Idd \cdot L};$

$$\alpha 22 := 0.001415428167$$

> *# Rotor encastré-Libre*

> $\#alpha11 := \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot Idd};$

> $\#alpha12 := \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot Idd};$

> #alpha21:=alpha12;

> $\#alpha22 := \frac{L}{E \cdot Idd};$

>

> $ALPHA := matrix(4, 4);$

$$ALPHA := array(1..4, 1..4, [\ ])$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do for** j **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do** $ALPHA[i, j] := 0.0$ **end do end do**;

> $ALPHA[1,1] := alpha11; ALPHA[1,3] := alpha12; ALPHA[2,2] := alpha11; ALPHA[2,4] := alpha12; ALPHA[3,1] := alpha12; ALPHA[3,3] := alpha22; ALPHA[4,2] := alpha12; ALPHA[4,4] := alpha22:$

$$ALPHA_{1,1} := 0.0001137397634$$

$$ALPHA_{1,3} := -0.0003033060358$$

$$ALPHA_{2, 2} := 0.0001137397634$$

$$ALPHA_{2, 4} := -0.0003033060358$$

$$ALPHA_{3, 1} := -0.0003033060358$$

$$ALPHA_{3, 3} := 0.001415428167$$

$$ALPHA_{4, 2} := -0.0003033060358$$

> *print*(*ALPHA*);

$$\begin{bmatrix} 0.0001137397634 & 0. & -0.0003033060358 & 0. \\ 0. & 0.0001137397634 & 0. & -0.0003033060358 \\ -0.0003033060358 & 0. & 0.001415428167 & 0. \\ 0. & -0.0003033060358 & 0. & 0.001415428167 \end{bmatrix}$$

▪ Calcul de l'équation caractéristique

> omega := 50;   *# Vitesse de rotation de larbre*

$$\omega := 50$$

> *Malpha* := *matrix*(4, 4);

$$Malpha := array(1 ..4, 1 ..4, [\ ])$$

> *Malpha* := *multiply*(*ALPHA*, *M*);

$$Malpha := \begin{bmatrix} 0.001137397634 & 0. & -0.000006066120716 & 0. \\ 0. & 0.001137397634 & 0. & -0.000006066120716 \\ -0.003033060358 & 0. & 0.00002830856334 & 0. \\ 0. & -0.003033060358 & 0. & 0.00002830856334 \end{bmatrix}$$

> *Galpha* := *matrix*(4, 4);

$$Galpha := array(1 ..4, 1 ..4, [\ ])$$

> *Galpha* := *multiply*(*ALPHA*, *G*);

$$Galpha := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & -0.00001213224143 \\ 0. & 0. & 0.00001213224143 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.00005661712668 \\ 0. & 0. & -0.00005661712668 & 0. \end{bmatrix}$$

> *MKK* := *matrix*(4, 4);

$$MKK := array(1 ..4, 1 ..4, [\ ])$$

> *MKKG* := *matrix*(4, 4); *Inden* := *matrix*(4, 4);

$$MKKG := array(1 ..4, 1 ..4, [\ ])$$

$$Inden := array(1 ..4, 1 ..4, [\ ])$$

>

> *Ident* := *Matrix*(4, *shape* = *identity*);

$$Ident := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **for** *i* **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do for** *j* **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do** *MKK*[*i*, *j*] := 0 **end do end do**;

> $print(MKK);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do for** j **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do** $MKK[i,j] := \left(\nu^2 \cdot Malpha[i,j] - \nu \cdot \text{omega} \cdot Galpha[i,j]\right)$ **end do end do**;

>

> $print(MKK);$

$$\big[\left[0.001137397634\,\nu^2, 0., -0.000006066120716\,\nu^2, 0.0006066120715\,\nu\right],$$
$$\left[0., 0.001137397634\,\nu^2, -0.0006066120715\,\nu, -0.000006066120716\,\nu^2\right],$$
$$\left[-0.003033060358\,\nu^2, 0., 0.00002830856334\,\nu^2, -0.002830856334\,\nu\right],$$
$$\left[0., -0.003033060358\,\nu^2, 0.002830856334\,\nu, 0.00002830856334\,\nu^2\right]\big]$$

> $MKKG[1,1] := MKK[1,1] + Ident[1,1]; MKKG[1,2] := MKK[1,2] + Ident[1,2];$
$MKKG[1,3] := MKK[1,3] + Ident[1,3]; MKKG[1,4] := MKK[1,4] + Ident[1,4];$

$$MKKG_{1,1} := 0.001137397634\,\nu^2 + 1$$
$$MKKG_{1,2} := 0.$$
$$MKKG_{1,3} := -0.000006066120716\,\nu^2$$
$$MKKG_{1,4} := 0.0006066120715\,\nu$$

> $MKKG[2,1] := MKK[2,1] + Ident[2,1]; MKKG[2,2] := MKK[2,2] + Ident[2,2];$
$MKKG[2,3] := MKK[2,3] + Ident[2,3]; MKKG[2,4] := MKK[2,4] + Ident[2,4]:$

$$MKKG_{2,1} := 0.$$
$$MKKG_{2,2} := 0.001137397634\,\nu^2 + 1$$
$$MKKG_{2,3} := -0.0006066120715\,\nu$$

> $MKKG[3,1] := MKK[3,1] + Ident[3,1]; MKKG[3,2] := MKK[3,2] + Ident[3,2];$
$MKKG[3,3] := MKK[3,3] + Ident[3,3]; MKKG[3,4] := MKK[3,4] + Ident[3,4]:$

$$MKKG_{3,1} := -0.003033060358\,\nu^2$$
$$MKKG_{3,2} := 0.$$
$$MKKG_{3,3} := 0.00002830856334\,\nu^2 + 1$$

> $MKKG[4,1] := MKK[4,1] + Ident[4,1]; MKKG[4,2] := MKK[4,2] + Ident[4,2];$
$MKKG[4,3] := MKK[4,3] + Ident[4,3]; MKKG[4,4] := MKK[4,4] + Ident[4,4]:$

$$MKKG_{4,1} := 0.$$
$$MKKG_{4,2} := -0.003033060358\,\nu^2$$
$$MKKG_{4,3} := 0.002830856334\,\nu$$

> $print(MKKG);$

$$\left[\left[0.001137397634\,\nu^2+1, 0., -0.000006066120716\,\nu^2, 0.0006066120715\,\nu\right],\right.$$
$$\left[0., 0.001137397634\,\nu^2+1, -0.0006066120715\,\nu, -0.000006066120716\,\nu^2\right],$$
$$\left[-0.003033060358\,\nu^2, 0., 0.00002830856334\,\nu^2+1, -0.002830856334\,\nu\right],$$
$$\left.\left[0., -0.003033060358\,\nu^2, 0.002830856334\,\nu, 0.00002830856334\,\nu^2+1\right]\right]$$

> $MKKK := \langle\langle MKKG[1,1], MKKG[1,2], MKKG[1,3], MKKG[1,4]\rangle | \langle MKKG[2,1], MKKG[2,2], MKKG[2,3], MKKG[2,4]\rangle | \langle MKKG[3,1], MKKG[3,2], MKKG[3,3], MKKG[3,4]\rangle | \langle MKKG[4,1], MKKG[4,2], MKKG[4,3], MKKG[4,4]\rangle\rangle$

$$MKKK := \left[\left[0.001137397634\,\nu^2+1, 0., -0.003033060358\,\nu^2, 0.\right],\right.$$
$$\left[0., 0.001137397634\,\nu^2+1, 0., -0.003033060358\,\nu^2\right],$$
$$\left[-0.000006066120716\,\nu^2, -0.0006066120715\,\nu, 0.00002830856334\,\nu^2+1, 0.002830856334\,\nu\right],$$
$$\left.\left[0.0006066120715\,\nu, -0.000006066120716\,\nu^2, -0.002830856334\,\nu, 0.00002830856334\,\nu^2+1\right]\right]$$

> $Determinant(MKKK)$

$$1.904174432\,10^{-16}\,\nu^8 + 3.407576001\,10^{-11}\,\nu^6 + 0.000001394282005\,\nu^4 + 0.002339426142\,\nu^2 + 1$$

> $solve(\{\,(\mathbf{62}) = 0\,\})$

$$\{\nu = -28.70856893\,I\}, \{\nu = 28.70856893\,I\}, \{\nu = -30.13967359\,I\}, \{\nu = 30.13967359\,I\}, \{\nu = -244.2819317\,I\}, \{\nu = 244.2819317\,I\}, \{\nu = -342.8508266\,I\}, \{\nu = 342.8508266\,I\}$$

Annexes E

Modalisation des rotors par méthode des éléments finis

```
% File name: Example_05_09_01.m
%
% Example 5.9.1
%
% This example has isotropic bearings
% A model with 4 Timoshenko beam elements
%
clear
closeall
% Set the material parameters
E = 2.1e11;
G = 81.2e9;
rho = 7800;
damping_factor = 0;  % no damping in shaft
% Consideramodel with 6 equal length elements
% Shaft is 1m long
model.node = [1 0.0; 2 0.25; 3 0.5; 4 0.75; 5 1.0];
% Assume shaft type 2 -Timoshenko with gyroscopic effects included
% Solid shaft with 50mm outside diameter
shaft_od = 0.05;
shaft_id = 0.0;
model.shaft = [2 1 2 shaft_odshaft_id rho E G damping_factor; ...
2 2 3 shaft_odshaft_id rho E G damping_factor; ...
```

```
2 3 4 shaft_odshaft_id rho E G damping_factor; ...
2 4 5 shaft_odshaft_id rho E G damping_factor];
% Disk 1 at node 3 has diameter of 280mm and thickness of 70mm
% Note inside diameter of disk is assumed to be the outside diameter
% of the shaft
disk1_od= 0.28;
disk2_od = 0.28;
disk_thick = 0.07;
model.disc = [1 4 rho disk_thick disk1_od shaft_od; ...
              1 3 rho disk_thick disk2_od shaft_od];
% Constant stiffness short isotropic bearing (1NM/m) with no damping
% Bearings at the endsof the shaft -nodes 1 and 7
bear_stiff = 1e6;
model.bearing = [3 1 bear_stiffbear_stiff 0 0; ...
3 5 bear_stiffbear_stiff 0 0];
% Draw the rotor
figure(1), clf
picrotor(model)
% Plot the Campbell diagram
% ==========================
%Define the rotor spin speed range
Rotor_Spd_rpm = 0:100:10000.0;
Rotor_Spd = 2*pi*Rotor_Spd_rpm/60;  % convert to rad/s
%Calculate the eigensystem for the range of rotor spin speeds
[eigenvalues,eigenvectors,kappa] = chr_root(model,Rotor_Spd);
%Plot Campbell diagram
figure(2)
NX = 1;
damped_NF = 1; % plot damped natural frequencies
plotcamp(Rotor_Spd,eigenvalues,NX,damped_NF,kappa)
```

Références:

[01] Jeffcott, H. H., ″ The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed ″, Phil. Mag., Vol. 6, no. 37, pp. 304-314, 1919.

[02] https://www.researchgate.net/figure/Modele-de-LAVAL-JEFFCOTT-Cest-le-modele-de-base-ou-elementaire-il-se-compose-dun_fig5_336944457

[03]BELAHRACHE Saliha, Née DJERRI (ANALYSE DYNAMIQUE DES CORPS CONTINUS EN ROTATION : APPLICATION AUX ARBRES MOTEURS) ,MEMOIRE MAGISTER,UNIVERSITE-MENTOURI–CONSTANTINE,2006-2007

[04] Meddour Belkacem (Dynamique des machines tournantes), Université Abbas Laghrou

[05] R. M. Bulatovic "A stability theorem for gyroscopic systems"Montenegro, Yugoslavia, Received November 18, 1997; revised March 12, 1998

[06]Osami Matsushita" Gyroscopic Effect on Rotor Vibrations" The National Defense Academy Yokosuka Japan, 23 May 2017, Vibrations of Rotating Machinery pp. 153-180

[07] https://pdfcoffee.com/jefcott-model-with-ofset-disc-pdf-free.html

[08]https://www.scribd.com/document/497744856/Chapitre3?fbclid=IwAR2Xx6WS4F5MzEPj010vfxzJdDw_j2flNM6Nrt2rJgRSGzIDceaGhQwV5DM

[09] CRAVEUR J., Modélisation des éléments finis, Dunod, 2008

[10] BRAHMI H., « Etude du comportement vibratoire et simulation numérique des charges dynamiques d'un rotor flexible », Université M'Hamed BOUGARA, Alger, 2010

[11] P.Majored "stability of rotor with periodically angular velocity" school of mechanical, materials, manufacturing engineering and management, TheUniversity of Nottingham, University Park, notting N672RD.U.K.

[12], Chellil Ahmed, Identification et modélisation par éléments finis des charges dynamiques du rotor principal d'hélicoptère

Résumé

La prédiction adéquate du comportement vibratoire des rotors joue un rôle primordial dans la sécurité de fonctionnement ainsi qu'à l'amélioration des performances des machines tournantes. De nos jours, les concepteurs sont appelés à prévoir de manière judicieuse la dynamique des machines-outils, turbomachines, turbopropulseur, installation nucléaire etc… Par le présent travail, nous avons d'aborder cette thématique et explorer théoriquement et numériquement la dynamique de certains rotors. Les modèles théoriques sons exploités afin de développer un outil de calcul adapté à la problématique. Le code de calcul développé, nous ont permis de calculer : Les vitesses critiques en fonction des vitesses de rotation

Mots des clés : Vitesse critique ; Dynamique des rotors ; Balourd ; Fréquences propres ; Modes propres.

Abstract

Correct prediction of the vibratory behavior of rotors plays an essential role in the operational safety as well as in improving the performance of rotating machines. Nowadays, designers are called upon to judiciously predict the dynamics of machine tools, turbomachines, turboprop engines, nuclear installations, etc. Through this work, we have tackled this theme and theoretically and numerically explore the dynamics of certain rotors. Theoretical models are used in order to develop a calculation tool adapted to the problem. The computer code developed, allowed us to calculate: The critical speeds as a function of the rotational speeds

Key words: Critical speed; Dynamics of rotors; Unbalance; Eign frequencies; Eigen modes.

ملخص

يلعب التنبؤ الصحيح للسلوك الاهتزازي للدوارات دورًا أساسيًا في السلامة التشغيلية وكذلك في تحسين أداء الآلات الدوارة. في الوقت الحاضر ، يُطلب من المصممين التنبؤ بحكمة بديناميكيات الأدوات الآلية ، والآلات التور بينية ، والمحركات التور بينية ، والمنشآت النووية ، وما إلى ذلك من خلال هذا العمل ، تناولنا هذا الموضوع واستكشفنا ديناميكيات بعض الدوارات نظريًا وعدديًا. تستخدم النماذج النظرية من أجل تطوير أداة حسابية تتكيف مع المشكلة. تم تطوير رمز الحساب ، مما سمح لنا بحساب: السرعات الحرجة كدالة لسرعات الدوران

الكلمات المفتاحية :السرعة الحرجة,ديناميكيات الدوارات,عدم التوازن,الترددات الذاتية,الرموز الذاتية