



# Etude du Comportement Chaotique et l'Organisation Fractale du Signal ECG : état de l'art

Ibticeme Sedjelmaci<sup>(1)</sup>, F.Bereksi.Regui<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> *Laboratoire de génie biomédical, Département d'électronique Biomédicale  
Faculté de Technologie ;  
Université ABOUBEKR BELKAÏD  
E-mail : ibticeme\_sedjelmaci@yahoo.fr  
E-mail : fethi.bereksi@mail.univ-tlemcen.dz*

**Résumé**— Le signal électrocardiogramme (ECG) possède une valeur clinique très importante pour le diagnostic de troubles cardiovasculaires. Raison pour laquelle la recherche de méthodes d'analyse et de classification ne cesse d'avancer afin d'arriver à la meilleure interprétation approchant le plus possible celle du médecin.

Cependant les méthodes non linéaires ont fait leurs preuves dans le traitement des signaux physiologiques. Notre choix a atterri sur la théorie du chaos et l'analyse fractale, développant de nombreux algorithmes pour estimer la dimension fractale ou encore l'exposant de Lyapunov. Cette étude va énumérer et éclaircir quelques uns de ces algorithmes pour faciliter éventuellement la classification et la distinction de quelques troubles du rythme cardiaque.

**Key-Words**— Analyse fractale, chaos, exposant de Lyapunov, exposant de Hurst, dimension de corrélation, entropie, ECG.

## I. INTRODUCTION

DANS le cadre du diagnostic, la description des signaux médicaux est une tâche complexe pour la détection des anomalies potentielles. L'idée d'interpréter des phénomènes naturels par des méthodes non linéaire n'est pas récente. Cependant l'intérêt est toujours d'actualité et de nombreuses recherches [1, 2, 3, 4, 5, 6] sont toujours menées car les systèmes non linéaires évoluent d'une manière qui peut s'avérer difficile à anticiper.

La théorie du chaos s'est retrouvée très médiatisée ces dernières années. C'est une théorie qui a su trouver de l'ordre caché sous le désordre apparent. On retrouve les applications de cette nouvelle discipline dans une multitude de domaines tels que la météorologie, la biologie, la sismologie, la médecine, etc.

Cependant, le rôle de l'organisation fractale dans les systèmes physiologiques est très important en ce qui concerne l'organisation des structures saines et la détermination de la façon dont ces systèmes sont capables de répondre et de s'adapter face aux stimuli extérieurs.

Ces deux mots : fractales et chaos sont souvent associés, peut être parce que leur développement médiatique a été concomitant. Aussi parce qu'il existe des liaisons entre ces

notions, liaisons dont les fils ne sont pas encore tous dénoués. Nous avons donc voulu en savoir plus sur ces liens par le biais d'une synthèse bibliographique.

## II. APERÇU SUR LE CHAOS ET LES FRACTALES

On appelle chaotiques des phénomènes complexes, dépendant de plusieurs paramètres et caractérisés par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Géométriquement, ces phénomènes dynamiques sont représentés dans un espace dont la dimension, qui peut être supérieure à celle de l'espace à trois dimensions, dépend du nombre de paramètres choisis pour les décrire. À chaque instant, l'état du phénomène est représenté par un point dans cet espace appelé *espace des phases*. L'évolution du système est décrite par la trajectoire de ce point. Pour les phénomènes les plus simples, ce point est attiré vers un point d'équilibre ou une courbe limite, près desquels il repasse périodiquement. Les mathématiciens appellent ces courbes limites des attracteurs.

Dans la représentation des systèmes chaotiques, les attracteurs sont des courbes fractales très complexes qui présentent une symétrie interne: à chaque échelle, il est semblable à lui-même (autosimilarité). Le désordre est dans le système, mais l'ordre fractal, en revanche, apparaît dans ses représentations géométriques qui permettent de bien illustrer la dépendance sensible des conditions initiales.

## III. APPLICATION DE L'ANALYSE FRACTALE ET LA THEORIE DU CHAOS SUR LE SIGNAL ECG

L'électrocardiogramme s'est facilement imposé comme outil de base pour la mesure du rythme cardiaque. Les premières méthodes utilisées par les cardiologues furent les méthodes classiques de traitement du signal: soit temporelles (calcul de différents paramètres statistiques) ou fréquentielles (distribution spectrale de l'énergie dans les basses et hautes fréquences). Seulement ces méthodes sont insuffisantes pour les signaux physiologiques.

Une caractéristique des systèmes physiologiques est leur grande complexité. L'approche traditionnelle qui prétend qu'un système biologique s'autorégule et s'équilibre après une quelconque perturbation n'est plus vérifiée. Les

méthodes non linéaires indiquent que les signaux générés par les organismes biologiques tendent à montrer une structure irrégulière, non-stationnaire et des fluctuations complexes même à l'état de repos.

Lorsqu'il ya une perte de complexité fractale ou dynamique, les sorties régulières des processus physiologiques sont pauvres en information et le système perd sa capacité à s'adapter aux nouveaux facteurs qui changent de manière continue et peut devenir hautement prévisible. Des méthodes mathématiques et de traitement du signal ont relevé aussi la présence de corrélation à long terme dans les séries temporelles qui décrivent les fluctuations au cours du temps des systèmes physiologiques.

L'analyse fractale ainsi que la théorie du chaos sont des méthodes non linéaires qui peuvent être appliqué à ce genre de signaux. Leurs méthodes d'analyses peuvent être utilisés [7, 8, 9] pour détecter des anomalies dans le signal par exemple et développer une nouvelle classe de signaux pour une variété d'applications dans le traitement du signal.

Quelques paramètres communs connus dans la théorie du chaos et de l'analyse fractale : la dimension fractale, la dimension de la corrélation, exposant de Lyapunov, exposant de Hurst, l'entropie...

#### IV. MÉTHODES

Une fractale serait un objet mathématique caractérisé par son irrégularité et son autosimilarité. Ces deux propriétés bien que peu compatibles permettent de modéliser de façon déterministe des objets naturels très complexes. Les fractales permettent cette dualité entre propriétés en combinant une grande régularité de structure et une grande irrégularité de forme. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique mesurant la relation entre l'irrégularité et l'autosimilarité de la fractale : la dimension fractale de l'objet.

##### A. Dimensions fractales

Lors de son application en traitement du signal, l'analyse fractale est dans la majorité des cas utilisée à travers la notion de dimension fractale. De nombreuses méthodes existent pour la calculer [10, 11], chacune ayant ses propres bases théoriques. Ces diversités mènent souvent à l'obtention de dimensions différentes par des méthodes distinctes pour un même objet. Ces différences s'expliquent par le fait que dans la majorité des cas, la dimension de Hausdorff-Besicovitch (équation (2)) ne peut pas être calculée sous cette forme. Les méthodes utilisent alors divers algorithmes pour estimer le paramètre  $N$ .

Soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $N(\varepsilon; K)$  le nombre minimum de boules fermés de rayon  $\varepsilon$  nécessaire pour recouvrir  $K$ . On définit alors la dimension fractale, notée  $D_f$  par :

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \quad (1)$$

S'il existe une bonne notion de dimension, c'est la dimension de Hausdorff. Par contre, elle est difficile à calculer, mais elle possède les bonnes propriétés mathématiques et pour beaucoup de sous-ensembles intéressants, elle coïncide avec la dimension fractale. C'est la raison pour laquelle la dimension fractale (surtout la dimension dite de boîte) est celle qui est la plus utilisée dans la pratique.

##### A.1. Dimension d'Hausdorff

Afin de mesurer correctement la dimension d'ensembles fractals, Hausdorff a introduit cette nouvelle notion de dimension en considérant un ensemble et une partition en boules de rayon  $\varepsilon$  de cet ensemble (appartenant à  $\mathbb{R}^n$ ), le nombre  $N(\varepsilon)$  de boules nécessaires définit, par son comportement en loi de puissance, la dimension fractale  $D_h$  de l'ensemble définit par :

$$D_h = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)} \quad (2)$$

##### A.2. Dimension comptage de boîte

Les méthodes de cette classe partagent les étapes suivantes : chaque algorithme nécessite un maillage du signal par des « boîtes », puis la formulation d'une probabilité dans chacune d'elles et enfin l'estimation de la dimension fractale par le calcul d'une régression linéaire comme expliquée dans [12]. Ces méthodes ont été les premières définies pour estimer la dimension fractale d'un signal. Leur principe est relativement simple et facile à développer. Cependant, elles présentent des inconvénients.

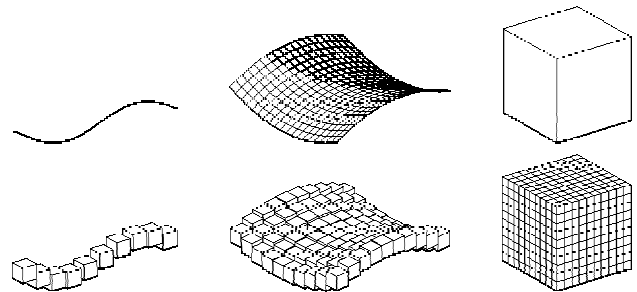


Figure 2 : Dimensions de boîte pour différentes formes

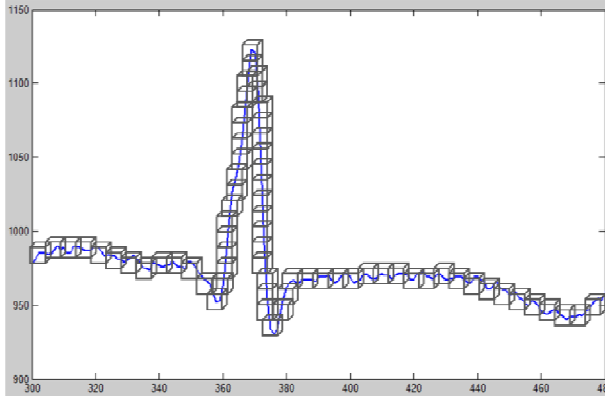
##### A.3. Dimension de boîte des graphes

La formule de cette méthode est établie par [13] comme suit :

Soit  $K$  un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^{d+1}$ .  $N(K, \varepsilon)$  est le nombre de cubes dyadiques de côté  $2^{-i}$  nécessaires pour recouvrir  $K$ . La dimension supérieure de boîte de  $K$  est la dimension fractale notée par :

$$\overline{\dim_b(k)} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln N(K, \varepsilon)}{\varepsilon \ln 2} \quad (3)$$

Cette formule établit l'estimation de la dimension de boîte du graphe d'une fonction à partir de ses coefficients d'ondelette en reliant cette dimension à la taille de ses coefficients.



**Figure 2 :** Dimensions de boîte pour un PQRST d'un signal ECG

#### A.4. Dimension de corrélation

La détection du chaos pour les données expérimentales se fait le plus souvent par la dimension de corrélation, utilisant généralement la méthode de Grassberger and Procaccia [14]. Le calcul se fait généralement par la mesure de la distance  $dr$  proportionnelle à  $r$ , entre chaque paire de points  $N$ . La dimension de corrélation est donnée par  $D_2 = d \log(C) / d \log(r)$  quand  $dr \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 0$ , and  $N \rightarrow \infty$ .

#### B. Exposant de Lyapunov

Les systèmes dynamiques peuvent être parfois très sensibles aux petites variations d'une condition initiale. Ces petites variations prennent rapidement de l'ampleur. Alexander Lyapunov, un mathématicien russe, s'est intéressé à ce phénomène et a développé une entité appelée "exposant de Lyapunov" qui mesure la vitesse à laquelle ces variations peuvent s'amplifier dans les systèmes décrivant dans l'espace un état qui évolue dans le temps, ou encore le degré de sensibilité d'un système dynamique [15].

Soit une application discrète  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui applique  $xt$  sur  $xt + 1$ . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues pour trouver alors un réel  $\lambda$  tel que après  $t$  itérations [16] :

$$\left| f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0) \right| \cong \varepsilon e^{t\lambda} \quad (4)$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left| \frac{f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0)}{\varepsilon} \right| \cong t\lambda \quad (5)$$

Si l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, il vient :

$$\lambda \cong \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df^t(x_0)}{dx_0} \right| \quad (6)$$

Finalement, en faisant tendre  $t$  vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln \left| f'(x_i) \right| \quad (7)$$

moyennant la notation :

$$f'(x_i) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (8)$$

$\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov. Cette quantité sert à mesurer le degré de sensibilité d'un système suite à une très petite variation de sa condition initiale  $x_0$ . Un tel système (ayant une des caractéristiques des systèmes chaotiques) aura une quantité  $\lambda$  positive. Si, par contre elle sera négative on perd de l'information sur les conditions initiales, et de petites variations n'ont aucun effet à long terme sur le système. L'exposant de Lyapunov est en fait une mesure du degré de stabilité d'un système.

#### C. Exposant de Hurst

Certains phénomènes naturels ont une dépendance temporelle à long terme : les corrélations de leurs séries persistent de manière continue. Ces caractéristiques peuvent prouver la présence d'une structure fractale. Hurst a introduit une notion (largement développée par la suite par Mandelbrot) dans le but de détecter la structure de dépendance de long terme d'une série temporelle. L'exposant de Hurst permet de classer les séries temporelles en fonction de leur mémoire.

L'exposant de Hurst est compris entre 0 et 1. Un exposant supérieur à 0.5 révèle que si une série a augmenté précédemment, il est fort probable qu'il continue à le faire (phénomènes de persistance). Ces séries ont une mémoire à long terme, les événements actuels et les événements futurs ont une corrélation à long terme (la variable est sensible à son histoire). A l'inverse un exposant inférieur à 0.5 qui révèle un phénomène d'anti-persistance.

#### D. L'entropie

La notion de sensibilité à l'état initial traduit une instabilité locale dans l'espace de phase qui peut être traduite par un autre concept que celui de l'exposant de Lyapunov : le concept d'entropie de Kolmogorov qui est lié à la non-



prédictibilité du système et qui schématise une création continue de l'information.

## V. ESTIMATIONS

Dans la majorité des cas, les valeurs des dimensions ou des exposants de Lyapunov sont impossibles à déterminer théoriquement, même si l'évolution du système est parfaitement connue. Il est possible alors d'avoir recours à des simulations numériques permettant l'estimation de ces dimensions et exposants. Ce sont les estimateurs de la dimension de corrélation et du plus grand des exposants de Lyapunov locaux qui reviennent le plus souvent.

### A Dimension de corrélation

L'estimation de la dimension de corrélation est notamment très attractive car d'une simplicité assez importante. Si on connaît  $N$  points de l'attracteur,  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , pour plusieurs rayons  $rk > 0$ , on détermine la proportion  $C(N, rk)$  de bipoints  $(X_i, X_j)$  dont l'inter-distance est inférieure à  $rk$ , et on fait une régression des  $\log C(N, rk)$  par les  $\log rk$ ; le coefficient de proportionnalité estimé est une estimation de la dimension de corrélation.

### B plus grand des exposants de Lyapunov locaux

Pour l'estimation des exposants de Lyapunov, la plupart du temps, il suffit d'estimer le plus grand de ces réels, dont le signe, relatif au comportement de deux trajectoires initialement voisines, décidera de la nature du système: un exposant positif est une condition nécessaire, dans le cas d'un système suffisamment régulier, à son caractère chaotique. Dans l'évolution dynamique locale du système, Le plus grand des exposants domine les autres très rapidement, et caractérise à lui seule cette dynamique locale.

## VI. LES SIGNAUX PHYSIOLOGIQUES

Les signaux physiologiques présentent une large variété de formes. Pour les décrire, la mesure de l'amplitude et de la fréquence est typique. Cela rend la comparaison des signaux à différentes largeurs de bande difficile. De plus de telles mesures n'autorisent pas de comparaison dans des groupes de sujet où la fréquence absolue des rythmes peut être différente d'une personne à une autre et peut dépendre d'autres facteurs tels que le sexe et l'âge. En général, les signaux montrent une 'complexité' qui varie entre eux. Certains paraissent extrêmement aléatoires lorsque d'autres suivent certains modèles à différents intervalles. En effet, dans la recherche médicale, la variabilité du signal ou la complexité du système correspondent aux conditions physiologiques. L'estimation directe de complexité/variabilité du signal offre donc certains avantages dans la recherche clinique. Premièrement, la complexité est une description intuitive et facilite donc l'interprétation des résultats de la mesure. Deuxièmement, les mesures de l'invariabilité autorisent la comparaison à travers différents patients de leurs

insensibilités aux mesures absolues telles que l'amplitude et la fréquence.

Cependant, les systèmes biologiques sains peuvent prétendre à des dynamiques irrégulières avec des fluctuations complexes, même à l'état de repos. Les méthodes issues des mathématiques non-linéaires ont mis en évidence la présence de ces irrégularités dans les séries temporelles. Ces irrégularités physiologiques révèlent des structures cachées qui sont dépendantes des perturbations d'ordre pathologique ou liées au vieillissement (perte de complexité de la série).

## VII. CONCLUSION

Cet article a permis d'avoir une vue générale des méthodes pour un choix plus facile de leurs applications. L'analyse fractale ainsi que la théorie du chaos peuvent être un outil efficace dans des problèmes de traitement du signal dans le domaine médical. Cependant, elles sont plus efficaces lorsque l'algorithme le plus approprié est pris en considération, pour cela il est nécessaire de faire une étude comparative du comportement de chacune des méthodes sur les données.

## REFERENCES

- [1] Vijay Sharma, "Deterministic Chaos and Fractal Complexity in the Dynamics of Cardiovascular Behavior: Perspectives on a New Frontier", Cardiovascular Medicine Journal, Vol. 3, pp110-123, 2009.
- [2] P.A. Absil, R. Sepulchre, A. Bilge, P. Gérard, "Analyse non linéaire des fluctuations du rythme cardiaque par la méthode DFA", Bulletin scientifique - Association des ingénieurs électriciens sortis de l'Institut élettrotechnique Montefiore, vol. 111, pp. 3-10, 1998.
- [3] Raúl Carvajal, Niels Wessel, Montserrat Vallverdú, Pere Caminal, Andreas Voss, "Correlation dimension analysis of heart rate variability in patients with dilated cardiomyopathy", Computer Methods and Programs in Biomedicine, Vol. 78, pp133-140, 2005.
- [4] R. U. Acharya, C. M. Lim, P. Joseph, "Heart rate variability analysis using correlation dimension and detrended fluctuation analysis", ITBM-RBM, Vol. 23, pp333-339, 2002.
- [5] Angeline Wong, Leejay Wu, Phillip B. Gibbons, Christos Faloutsos, "Fast estimation of fractal dimension and correlation integral on stream data", Information Processing Letters 93 (2005) 91-97.
- [6] Ary L. Goldberger, "Nonlinear Dynamics, Fractals and Chaos: Applications to Cardiac Electrophysiology", Annals of Biomedical Engineering, Vol. 18, pp. 195-198, 1990.
- [7] Nahina Islam, Nafiz Intiaz Bin Hamid, Adnan Mahmud, Sk. M. Rahman, Arafat H. Khan, "Detection of Some Major Heart Diseases Using Fractal Analysis", International Journal of Biometrics and Bioinformatics (IJBB), Vol. 4, Issue 2, 2010.
- [8] P.Y. Muller, N. Contento, H. Rix, "Fractal Dimension on ECG", Engineering in Medicine and Biology Society, Vol.14. Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE, 1992.
- [9] Paul Manneville, "Dynamique non linéaire et chaos", Séminaire E2PHY, 25 Aout 2005.
- [10] P. Gonçalves, P. Abry, G. Rilling, and P. Flandrin, "Fractal dimension estimation: empirical mode decomposition versus wavelets". In IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc., Honolulu, Hawaii (US), 2007.
- [11] Michael J. Vrheľ, Chuihee Lee, and Michael Unser, "Fractal dimension estimation using the fast continuous wavelet transform", Biomedical Engineering and Instrumentation Program, SPIE Vol. 2569, 1995.



The INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRONICS  
& OIL: FROM THEORY TO APPLICATIONS  
March 05-06, 2013, Ouargla, Algeria



- [12] R. Lopes, P. Dubois, I. Bhourri, H. Akkari-Bettaieb, S. Maouche, N. Betrouni, "La géométrie fractale pour l'analyse de signaux médicaux : état de l'art", IRBM 31, pp189-208, 2010.
- [13] Stéphane JAFFARD, "Sur la dimension de boîte des graphes", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Vol 326, Issue 5, pp555-560, March 1998.
- [14] P Grassberger and I Procaccia, "Characterization of Strange Attractors", Physical Review Letters **50**, pp346-349, 1983.
- [15] J. B. Dingwell, "Lyapunov Exponents", Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering, 2006.
- [16] A. Wolf, Jack B. Swift, Harry L. Swinney and J.A. Vastano, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", Physica 16D, pp285-317, 1985.