

Comportement à la fatigue cyclique d'une aube par les caractéristiques vibratoires

¹S. Lecheb, ¹A. Nour, ¹A.Challil ²H. Kebir

¹Laboratoire Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique, F.S.I, Université de Boumerdès. ALGERIE.

Tél. /Fax: (213)24 81 14 78. Email : samir_lecheb@yahoo.fr

²Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, UTC, France.

Résumé- Les aubes de turbine Haute pression, constituées du superalliage monocristallin à base de Nickel. Leur bord d'attaque peut constituer des sites privilégiés d'endommagement et d'amorçage de fissures, ce qui est indispensable de prendre en compte dans le dimensionnement des aubes de turbines. Ce travail a consisté, dans un premier temps à réaliser une étude théorique, l'aube de turbine est modélisée comme une poutre de Timoshenko tournante, un modèle de croissance d'endommagements pour des cycles de fatigue est développé on utilise une approche de la mécanique continue de l'endommagement est intégrée au modèle de l'aube. Dans un deuxième temps a été donnée une approche numérique pour étudier l'effet de la croissance de l'endommagement sur les fréquences tournantes, et à voir l'effet de nombre de cycle sur la rigidité. En fin a été faite une simulation numérique de l'aube. Cela donc peut mettre en évidence l'endommagement mécanique qui nous permet de déterminer la durée de vie.

Mots-clés : Aube de turbine, Poutre de Timoshenko, Fatigue, Vibration.

I. INTRODUCTION

La turbine Haute Pression est située après la chambre de combustion. Elle convertit l'énergie cinétique des gaz brûlés en énergie mécanique. Ce sont les aubes qui conditionnent le rendement de la turbine. De fait, la modélisation de l'endommagement et la prévision de leur durée de vie constituent un axe de recherche principal. Les aubes de turbine des étages les plus chauds sont les pièces qui subissent les sollicitations les plus endommageant, en raison de nombreux facteurs tels que la température très élevée des gaz brûlés (souvent supérieure à la température de fusion des alliages), les forts gradients thermiques présents, notamment lors des phases de décollage et d'atterrissage, le fluage dû à la force centrifuge, la corrosion à chaud, les contraintes élevées induites par la géométrie complexe ainsi que la fatigue vibratoire. Ces conditions de fonctionnement, sévères mais également variables dans le temps au cours de la mission du moteur, exigent donc un niveau élevé des propriétés mécaniques (fatigue-fluage) et une stabilité vis-à-vis de

l'environnement (tenue à l'oxydation, la corrosion). La complexité de ces pièces a nécessité une parfaite intégration entre la conception, les matériaux et les techniques de fabrication. Les aubes sont par conséquent constituées d'un superalliage monocristallin à base de nickel revêtu d'aluminiums modifié par le chrome. Au bord d'attaque la sévérité du chargement thermomécanique local peut constituer des sites privilégiés d'endommagement.

II. MISE EN EQUATIONS

Cette étude est principalement visée les caractéristiques vibratoires d'une lame tournante avec un angle d'inclinaison et un angle d'attaque. La théorie utilisée est la poutre de Timoshenko. D'abord, en utilisant le principe de Hamilton, des équations du mouvement sont dérivées. Deux relations explicites sont établies. Elles expriment le paramètre de déplacement axial central et l'angle de rotation en termes de paramètre de déplacement transversal, respectivement. Avec ces deux relations, les trois équations caractéristiques couplées peuvent être découplées et réduites à une équation ordinaire de sixième ordre avec des coefficients variables. La méthode de série entière dérive les fréquences normales. L'effet de force de Coriolis et la déformation extensionnelle sont pris en compte pour évaluer le comportement vibratoire. La recherche pour les caractéristiques vibratoires des poutres tournantes a été étudiée pendant longtemps. Un excellent examen du sujet peut être trouvé dans le journal donné par Leissa [1], Ramamurti [2], et Rao [3]. En fait, la lame de turbine a généralement un angle d'inclinaison. Jusqu'ici, aucune solution analytique pour la vibration libre d'une poutre tournant avec un angle d'inclinaison, dans lequel l'effet de force de Coriolis et la déformation extensionnelle sont tenus compte, n'est présentée. Lin et Hsiao [4] ont utilisé le principe de d'Alembert pour dériver l'équation de mouvement d'une poutre de Timoshenko tournant, et ont discuté l'effet d'accouplement de la force de Coriolis et la déformation extensionnelle sur les fréquences normales d'une poutre tournant. Lee et Sheu [5] ont étudié l'effet de la force de Coriolis et la déformation extensionnelle sur les

fréquences normales d'une poutre tournant avec un angle incliné, et ont présenté plusieurs relations qualitatives entre les fréquences normales et les paramètres physiques sans analyse numérique. Généralement les solutions fondamentales pour le système de poutre tournant sont habituellement résolues par des méthodes d'approximation. Par exemple, la méthode d'élément fini [6-7, 15], la méthode de Galerkin [8], la méthode de Rayleigh-Ritz [9], la méthode de perturbation [10], la méthode de différence finie [11], la méthode dynamique de rigidité [12], et la méthode de transformation différentiel [13] sont employés. Dans cette étude, on a utilisée la méthode de série entière qui rapporte la solution fondamentale exacte du système de poutre tournant proposé. En ce qui concerne l'analyse numérique, des approches différentes est présentée pour évaluer l'effet résultant de si la déformation extensionnelle ou la force de Coriolis est tenue compte. Les effets respectifs de la vitesse, de l'angle d'inclinaison, de l'angle d'attaque et le rayon de rotor sur les fréquences normales de la poutre sont systématiques explorés.

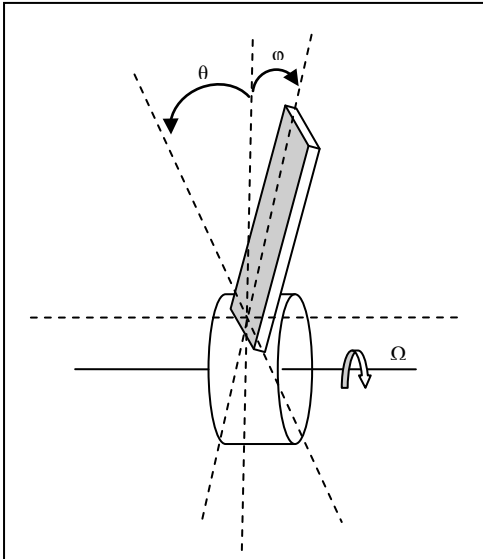


Fig.1 Poutre tournante avec un angle d'inclinaison (θ) et un angle d'attaque (ϕ)

D'abord, en utilisant le principe de Hamilton, des équations du mouvement sont dérivées. Deux relations explicites sont établies. Elles expriment le paramètre de déplacement axial central et l'angle de rotation en termes de paramètre de déplacement transversal, respectivement. Avec ces deux relations, les trois équations caractéristiques couplées peuvent être découplées et réduit à une équation ordinaire de sixième-ordre avec des coefficients variables. La méthode des séries entières dérive les fréquences normales. L'effet de force de Coriolis et la déformation extensionnelle sont pris en compte pour évaluer le comportement vibratoire. La recherche pour les caractéristiques vibratoires des poutres tournantes a été étudiée pendant longtemps. les équations de mouvement sont dérivées comme :

$$\begin{aligned} & \rho A \left[-2 \frac{\partial w}{\partial t} \Omega \sin \theta \cos \phi + u_0 \Omega^2 \cos^2 \phi + w \Omega^2 \cos \theta \sin \phi \cos \phi - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = -(x \cos \phi + R) \rho A \Omega^2 \cos \phi \\ & \rho I \left[-\psi \Omega^2 \cos^2 \phi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(-EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \left[kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] \\ & = -\Omega^2 \rho I \cos \theta \sin \phi \cos \phi \\ & \rho A \left[2 \frac{\partial u_0}{\partial t} \Omega \sin \theta \cos \phi + w \Omega^2 \sin^2 \theta + u_0 \Omega^2 \cos \theta \sin \phi \cos \phi \right. \\ & \left. + w \Omega^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_p \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & = -(x \cos \phi + R) \rho A \Omega^2 \cos \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (1)$$

Alors les trois équations originales sont combinées dans une équation ordinaire sixième ordre découplée avec des coefficients variables seulement en termes de variable étaient suit :

$$a_6 W^{(6)}(\xi) + a_5 W^{(5)}(\xi) + a_4 W^{(4)}(\xi) + a_3 W'''(\xi) + a_2 W''(\xi) + a_1 W'(\xi) + a_0 W(\xi) = 0 \quad (2)$$

A. Solutions fondamentales et équations de fréquence

Dans cette étude, la méthode des séries entières est appliquée pour résoudre les équations de mouvement de ce système de poutre. La solution générale du système est :

$$W = C_1 W_1(\xi) + C_2 W_2(\xi) + C_3 W_3(\xi) + C_4 W_4(\xi) + C_5 W_5(\xi) + C_6 W_6(\xi) \quad (3)$$

Les équations de fréquence sont obtenues :

$$\begin{aligned} & b_{j6} \sum_{i=1}^6 C_i W_i^{(5)} + b_{j5} \sum_{i=1}^6 C_i W_i^{(4)} + b_{j4} \sum_{i=1}^6 C_i W_i^{(3)} + b_{j3} \sum_{i=1}^6 C_i W_i^{(2)} + \\ & b_{j2} \sum_{i=1}^6 C_i W_i' + b_{j1} \sum_{i=1}^6 C_i W_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (4)$$

Les six solutions fondamentales normales exactes indépendantes sont la forme de :

$$W_i = \sum_{j=0}^{\infty} k_{i,j} \xi^j, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (5)$$

On utilise la formule de répétition, les six solutions fondamentales normales exactes peuvent être produit. Par conséquent, la solution générale du système est obtenue.

B. Analyse numérique et discussion

Pour les données suivant ($\Phi=0$, $r=3$, $\alpha=10$, $k_s=0.32693$, $L_z=20$) :

	$\theta=0$	$\theta=45$	$\theta=90$
Λ_1	24.81	20.128	17.617
Λ_2	29.78	35.114	38.202
Λ_3	58.81	57.793	56.876
Λ_4	93.71	93.163	92.620
Λ_5	100.86	102.22	103.50
Λ_6	148.80	146.66	145.14

Tab.1 Six premières fréquences normales avec différent angle d'attaque θ

($\Phi=0, \theta=90, r=1, L_z=1000$)

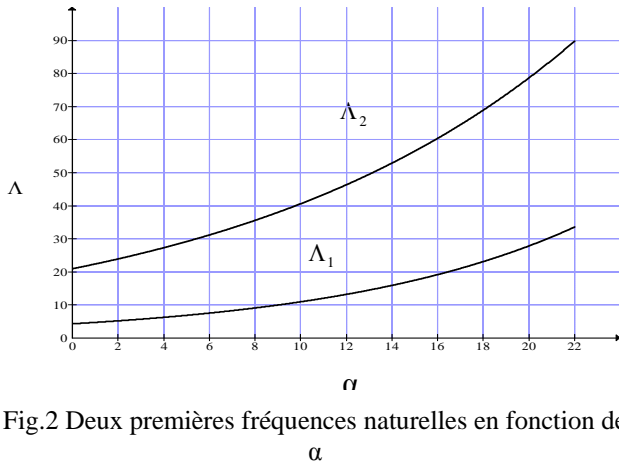


Fig.2 Deux premières fréquences naturelles en fonction de α

On peut constater que si le paramètre extensionnel de rotation sans dimensions est grand, ou la vitesse de rotation est haute, l'effet de force de Coriolis et la déformation extensionnelle ont la signification important. La plupart des fréquences normales diminuent à mesure que l'angle d'inclinaison ou d'attaque est augmenté. Cette étude montre l'influence des effets de force de Coriolis et la déformation extensionnelle sur les fréquences normales d'une poutre de Timoshenko tournante.

III. FATIGUE DE L'AUBE

Les lames de turbines subissent à des chargements cycliques causant la détérioration structurale qui peut mener à la rupture. Il est important de savoir combien d'endommagements ont eu lieu à n'importe quel moment particulier, et de surveiller l'état ou la santé de la lame pour éviter la rupture catastrophique des lames. Dans le cas d'une aube de turbine, le modèle de Gallerneau [16] est phénoménologique qui dissocie les phases de microamorçage et de micropropagation de fissures dans le processus de détérioration du matériau par fatigue. Qui reproduit bien les mécanismes observés sur le substrat et le revêtement dans le processus d'endommagement. La phase de microamorçage on observe une interaction entre la fatigue et l'oxydation. La phase de micropropagation provoquée par une interaction fatigue-fluage. Quelques études récentes ont considéré des approches systématisées dynamiques modeler la croissance de l'endommagement basée sur les équations tandis que d'autres ont employé les modèles basés de physique Roy [17]. La rigidité de la structure est graduellement réduite avec la progression de la fissure, et la rigidité est liée aux caractéristiques vibratoires de la structure. La fréquence diminuée prouve que la rigidité de la structure est décroissante et sert ainsi d'indicateur de l'endommagement à la progression de la fissure de surveillance de la structure. Les études choisies ont modelant des lames de turbines en tant que poutre de Timoshenko tournantes avec la torsion (Krupka [18], Rao [19]). Quelques études ont adressé des endommagements dans de tels poutre utilise les caractéristiques vibratoires. Cependant, ces études

adressent typiquement des endommagements à un moment donné se dirigent dans l'histoire opérationnelle et ne regardent pas l'effet de la croissance de l'endommagement sur les caractéristiques vibratoires (Takahashi [20], Hou [21]). Dans les additions, des lames de turbines sont conçues pour subir la quantité considérable de l'endommagement accumulé avant la rupture. Par conséquent, il est souhaitable d'indiquer qu'une lame est dite « endommagé » au point quand sa vie opérationnelle est terminée presque. Pour étudier le comportement dynamique structural de la poutre endommagée, un modèle d'endommagements doit être intégré dans le modèle de l'aube. Un certain nombre de modèles de l'endommagement sont disponibles dans Fatemi [22], La mécanique de rupture permet l'utilisation de quelques études basée s'approche pour inclure dans la formulation d'élément finie Kujawski [23]. L'effet de la croissance de l'endommagement peut être modelé utilisant des modèles de progression de la fissure tels que la loi de Paris (Rao [24], Simha [25]). Une autre approche est d'employer un modèle phénoménologique conçu des mesures expérimentales qui rapporte la perte de rigidité au niveau de la structure à la croissance des endommagements. Typiquement, la plupart des ruptures de rotor de turbine à vapeur sont provoquées par la fatigue cyclique (CF) Jing [26]. Les contraintes élevées qui causent CF se produit typiquement pendant le démarrage à froid et le glissement des phases d'arrêt de paramètre d'opération de la turbine. En raison des vitesses de déformation élevées implicites dans CF, elle est typiquement accompagnée de déformation en plastique. CF est également la vie la plus significative réduisant le mécanisme de rupture pour des moteurs d'avions militaires dus aux changements de commande de puissance éprouvés lors du fonctionnement Naeem [27]. La plupart de travail sur le cycle de fatigue CF dedans basé sur la théorie linéaire d'accumulation d'endommagement Jing [26]. Cependant, cette théorie a comme conséquence des calculs bruts d'accumulation de l'endommagement et les résultats prévus sont très différents dans la pratique. En réalité, l'accumulation de l'endommagement de CF est un processus non linéaire. La mécanique continue de dommages (CDM) fournit une manière de décrire le procédé entier de rupture du déclenchement de micro-rupture et de la formation de fissure visuelle pour structurer la rupture. Un modèle de l'endommagement basé sur CDM pour l'analyse de l'endommagement de CF est choisi dans cette étude. Une vue d'ensemble récente des modèles de croissance de l'endommagement est donnée dedans Fatemi [22].

A. Modèle d'endommagements

Il y a plusieurs modèles pour la croissance de prévision de l'endommagement avant la rupture. Les modèles d'un certain CF proposés dans le passé ont limité la validité aux cas particuliers [28,29]. La signification physique des paramètres modèles ne sont également pas claire. Pour des applications de technologie, les modèles basés sur la mécanique continue de

l'endommagement sont utiles. Ils n'exigent pas les modèles détaillés de la progression de la fissure utilise la mécanique de rupture mais capturent la nature non linéaire de la croissance de l'endommagement. Ils sont basés sur une variable de l'endommagement continue D qui peuvent être définis [22] en tant que $D=1-E/E_0$. Nous sommes intéressés par le chemin de la croissance de l'endommagement pendant qu'il évolue du 0 à 1 ou les indicateurs de l'endommagement sont les fréquences et les modes propres. Après qu'une recherche de la littérature, un modèle utile de l'endommagement ait été obtenu à partir [30]. Le modèle adresse CF et est développé en utilisant une fonction potentielle de l'endommagement. Le modèle de l'endommagement est

$$D = 1 - (1 - D_0) \left(1 - \frac{N}{N_f} \right)^{N_f \alpha} \quad (6)$$

Il y a trois paramètres dans le modèle ci-dessus : D_0 ; N_f ; N_{fa} . Il y a plusieurs méthodes pour mesurer les variables de l'endommagement D, comme mentionné par Le maître [31]. Pour CF, les meilleurs mécanismes incluent le module d'élasticité suivi de la méthode d'amplitude d'effort de cycle. Pour des mesures basées sur la rigidité élastique, cette méthode a besoin des mesures précises de contrainte. Typiquement, des jauges de contrainte sont employées et E le plus exactement est mesuré pendant le déchargement. Une autre approche qui est employée près [30] s'appelle la méthode d'amplitude d'effort de cycle. La loi unidimensionnelle de la plasticité cyclique à la stabilisation peut être écrite comme rapport de puissance entre la contrainte $\Delta\sigma$ et la déformation $\Delta\varepsilon$ aux cycles :

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\Delta\sigma}{K_C(1-D)} \right)^M \quad (7)$$

K_C et M est les paramètres du matériau.

$$D = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0} \quad (8)$$

Pour la déformation de ± 0.5

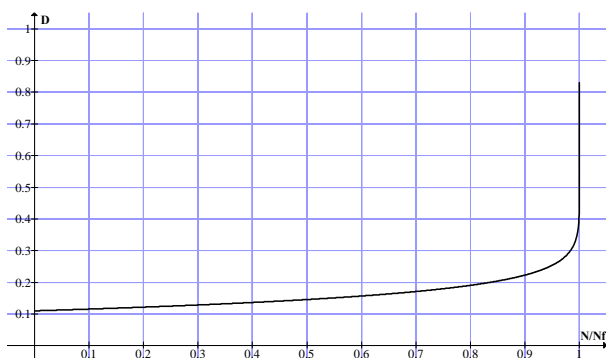


Fig.3 Variation de l'endommagement D et en fonction du nombre de cycle

La courbe de l'endommagement montrée prouve que D varie rapidement aux dernières étapes et lentement à l'étape moyenne de 10% à 80% de tous les cycles. Généralement la courbe de l'endommagement peut être divisée en trois étapes. L'étape 1 se produit jusqu'au $N/N_f=0.1$ quand des augmentations de valeur de l'endommagement dues aux changements des sous-structures de dislocation. Dans l'étape 2, il y a une augmentation lente en valeur de l'endommagement jusqu'au $N/N_f=0.8$. Dans l'étape 3, les l'endommagement grimpent plus rapidement jusqu'à 1 dû au commencement de la localisation de l'endommagement et à la formation des microfissures de fatigue. D'un point de vue de condition de surveillance, il est utile de savoir quand la lame a atteint l'étape 3. Le point $N/N_f=0.8$ est donc choisi dans cette étude comme temps où la vie de la lame est presque finie et la lame doit être remplacée. Pour les résultats numériques. La rigidité de poutre et la croissance de l'endommagement de fatigue avec le nombre du cycle montré dans le tableau :

N/Nf	0.2	0.4	0.6	0.8	0.99	0.999
E/E0	0.98	0.863	0.843	0.809	0.678	0.592

Tab.2 Réduction de rigidité en fonction du nombre de cycle

$N_f = 2030$ est le nombre de cycles à la rupture

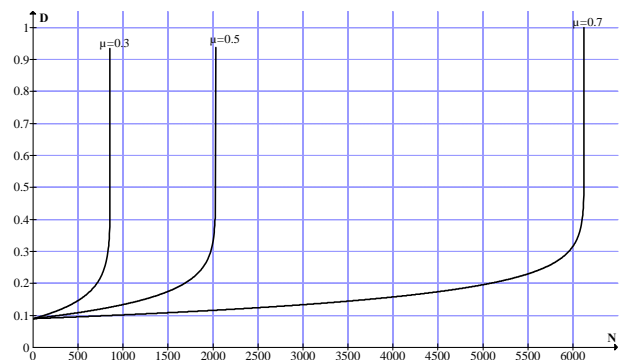


Fig.4 Variation de l'endommagement s avec le nombre des cycles pour différents cas de charge de déformation μ .

La figure montre que pour la croissance des contraintes des charges cycliques on a croissance de l'endommagement et donc rupture avancée.

N/Nf	0	0.3	0.6	0.9	0.999	0.9999
Λ_1	24.81	24.55	24.40	23.81	22.57	21.06
Λ_2	29.78	29.73	29.46	28.80	26.69	25.31
Λ_3	58.81	58.63	57.95	56.50	51.89	49.52
Λ_4	93.71	93.43	92.99	90.66	84.25	81.02
Λ_5	100.86	100.68	99.97	97.74	94.35	91.83
Λ_6	148.80	148.48	147.50	145.53	138.77	135.23

Tab.3 Variation de la fréquence modale avec le nombre de cycle

Le tableau montre les fréquences tournantes réelles diminue pendant que la croissance de l'endommagement progresse et la réduction de la rigidité. Et montre que les fréquences tournantes peuvent être employées comme indicateur virtuel de la variable de l'endommagement D.

B. Détection de l'endommagement

Mode	1	2	3	4	5	6
f [hz]	0.82	0.89	2.21	2.95	3.01	3.17

Tab.4 Réduction des fréquences au N/Nf = 0.8

Ces résultats prouvent que les changements mesurables des fréquences se produisent en raison de l'endommagement de CF. Considérer l'endroit (N/Nf = 0.8 et D = 0.2), qui est légèrement avant la rupture complet du matériel, le seuil d'arrêt de la vie de la pièce.

Pour intégrer le seuil d'arrêt on suivre les démarches montrées dans l'organigramme suivant :

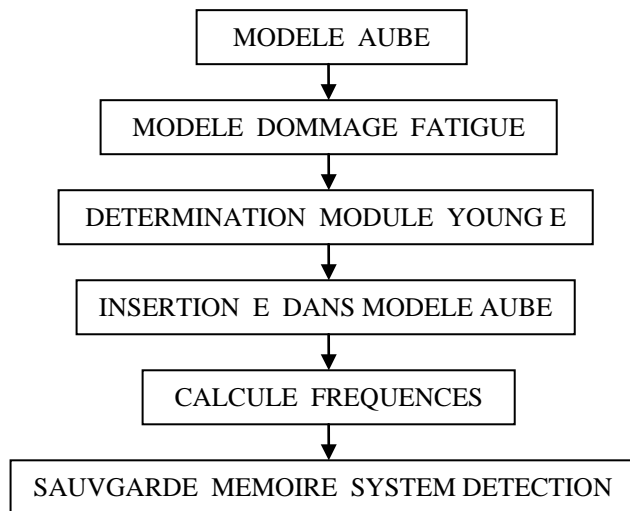


Fig.5 Organigramme de détection de l'endommagement

On propose une méthode de détecter l'étape finale de l'endommagement basée sur placer des seuils sur le changement de fréquence. La réduction de la fréquence font peut être considérée un résiduel de santé qui peut être dépisté pour la surveillance de condition de la lame de turbine. Dans le meilleur des cas, les résiduels devraient seulement être effectués par des défauts. Cependant, même pour un système intact, la présence du bruit de perturbation, et la modélisation des erreurs font devenir des résiduels différents de zéro et interfèrent la détection des défauts.

IV. SIMULATION NUMERIQUE

La géométrie de l'aube est modelée sur le code SOLIDWORKS, et les résultats numérique sont obtenus par le code de calcul ABAQUS.

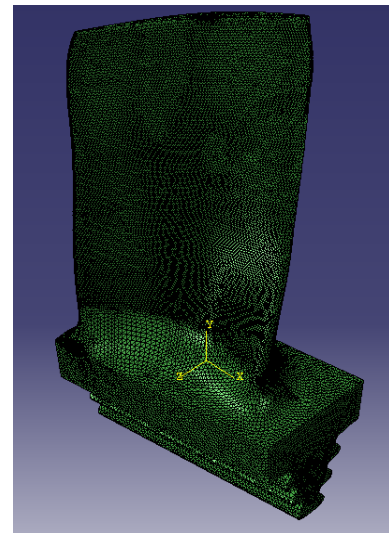


Fig.6 Maillage de l'aube (453969 Eléments Tétraédriques, 93550 Noeuds)

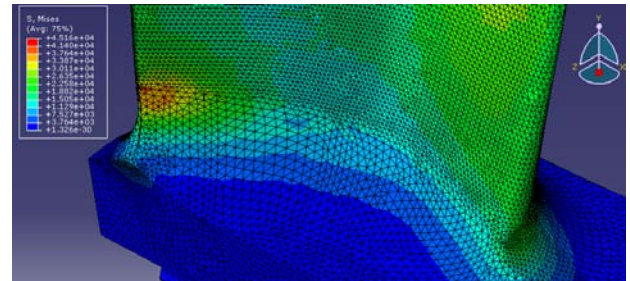


Fig.7 Contrainte de Von Mises

On a une concentration des contraintes au bord d'attaque coté droite de l'aubage a cause des forces de pression élevé, et une déformation maximale en bas de l'aubage coté fine a cause du fluage.

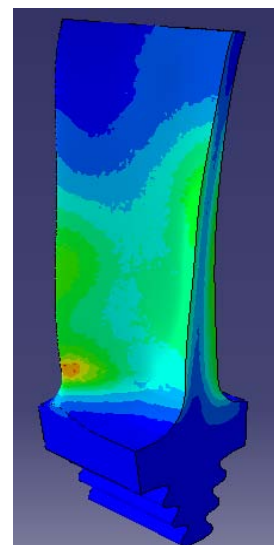


Fig.8 Contrainte principale sur la section de l'aube

Les contraintes principale sont maximale et moyenne au niveau de l'aubage coté chargement, et prennent des valeurs minimale dans l'autre coté de l'aubage.

V. CONCLUSION

Ce travail se présente comme une contribution à l'amélioration du dimensionnement géométrique des aubes de turbine, et avoir l'effet de l'endommagement de CF sur la rigidité et la fréquence propre. Dans un premier temps, la lame de turbine est modélisée comme poutre de Timoshenko tournante, Un modèle de l'endommagement dérivé de la mécanique de l'endommagement continu est employé pour capturer exactement la nature non linéaire de l'endommagement de CF, on le constate que CF cause la dégradation de rigidité pendant que la croissance de l'endommagement, le changement de la fréquence tournante peut être employé comme indicateur pour dépister la croissance de l'endommagement, et donc déterminer le seuil sur les fréquence modales au point 80% de la durée de vie de l'aube, et donc éviter la rupture catastrophique. Puis nous avons simulé une modélisation numérique de l'aube à différentes contraintes. Cette étude a permis de mettre en évidence qualitativement et quantitativement l'effet du gradient de contrainte de CF sur la durée de vie de l'aube. Nous avons effectué des comparaisons calcul - numérique au niveau du comportement et de la durée de vie à partir de modèles identifiés en isotherme. Enfin le modèle devra être appliqué et validé sous condition anisotherme et sous des charges complexes typiques des zones critiques des aubes de turbine. Une autre extension à envisager est l'expérience de la fatigue thermomécanique à des aubes perforées. Ce qui va être fait très prochainement au laboratoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Leissa, "Vibration aspects of rotating turbomachinery blades," ASME Applied Mechanics Reviews, Vol. 34, No. 5, pp. 629-635, 1981.

[2] V. Ramamurti and P. Balasubramanian, "Analysis of turbomachine blades: a review," The Shock and Vibration Digest, Vol. 16, No. 8, pp. 13-28, 1984.

[3] J. S. Rao, "Turbomachine blade vibration," The Shock and Vibration Digest, Vol. 19, No. 5, pp. 3-10, 1987.

[4] S. C. Lin, and K. M. Hsiao, "Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam," Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 2, pp. 303-322, 2001.

[5] S. Y. Lee, and J. J. Sheu, "Free vibration of an extensible rotating inclined Timoshenko beam," Journal of Sound and Vibration, Vol. 304, pp. 606-624, 2007.

[6] T. Yokoyama, "Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 30, No. 10, pp. 743-755, 1988.

[7] S. Mulmule, G. Singh, and G. V. Rao, "Flexural vibration of rotating tapered Timoshenko beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 160, No. 2, pp. 372-377, 1993.

[8] T. H. Young, T. M. Lin, "Stability of rotating pretwisted, tapered beams with randomly varying speeds," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 120, pp. 784-790, 1998.

[9] H. H. Yoo, S. H. Shin, "Vibration analysis of rotating cantilever beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, No. 5, pp. 807-828, 1998.

[10] F. S. M. Jarrar, M. N. Hamdan, "Nonlinear vibrations and buckling of a flexible rotating beam: a prescribed torque approach," Mechanism and Machine Theory, Vol. 42, pp. 919-939, 2007.

[11] C. L. Ko, "Dynamic analysis for free vibrations of rotating sandwich tapered beam," AIAA Journal, Vol. 27, No. 10, pp. 1425-1433, 1989.

[12] J. R. Banejee, H. Su, D. R. Jackson, "Free vibrations of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 298, pp. 1034-1054, 2006.

[13] M. O. Kaya, "Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method," Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vol. 78, No. 3, pp. 194-203, 2006.

[14] S. Y. Lee, Y. H. Kuo, "Exact solutions for the analysis of general elastically restrained non uniform beams," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 59(2), pp. 205-212, 1992.

[15] S. Putter, H. Manor, "Natural frequencies of radial rotating beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 56, No. 2, pp. 175-185, 1978.

[16] GALLERNEAU F. (1995). Etude et modélisation de l'endommagement d'un superalliage monocristallin revêtu pour aube de turbine. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

[17] N. Roy, R. Ganguli, Helicopter rotor blade frequency evolution with damage growth and signal processing, Journal of Sound and Vibration 283 (3-5) (2005) 821-851.

[18] R.M. Krupka, A.M. Baumanis, Bending-bending mode of rotating tapered twisted turbo machine blades including rotary inertia and shear deflection, Journal of Engineering for Industry American Society of Mechanical Engineers 91 (1965) 1017.

[19] S.S. Rao, R.S. Gupta, Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams, Journal of Sound and Vibration 242 (1) (2001) 103-124.

[20] I. Takahashi, Vibration and stability of non-uniform cracked Timoshenko beam subjected to follower force, Computers and Structures 71 (1999) 585-591.

[21] J. Hou, B.J. Wicks, R.A. Antoniou, An investigation of fatigue failures of turbine blades in a gas turbine engine by mechanical analysis, Engineering Failure Analysis 9 (2000) 201-211.

[22] A. Fatemi, L. Yangto, Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials, International Journal of Fatigue 20 (1) (1998) 9-34.

[23] D. Kujawski, F. Ellyin, A cumulative damage theory of fatigue crack initiation and propagation, International Journal of Fatigue 6 (2) (1984) 83-88.

[24] J.S. Rao, Turbine Blade Life Estimation, Nervosa Publishing House, New Delhi, 2000.

[25] K.R.Y. Simha, Fracture Mechanics for Modern Engineering Design, Universities Press, Hyderabad, 2001.

[26] J.P. Jing, Y. Sun, S.B. Xia, G.T. Feng, A continuum damage mechanics model on low cycle fatigue life assessment of steam turbine rotor, International Journal of Pressure Vessels and Piping 78 (2001) 59-64.

[27] M. Naeem, R. Singh, D. Probert, Implication of engine deterioration for a high-pressure turbine-blade's low-cycle fatigue (lcf) life-consumption, International Journal of Fatigue 21 (1999) 831-847.

[28] J. M. Cardona. Comportement et durées de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbines. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2000.

[29] Cherepanov. Mechanics of brittle fracture, McGraw-Hill International Book Company, pages 344-397, 1979

[30] J. F. Flavenot & N. Skalli. L'épaisseur de couche critique ou une nouvelle approche du calcul en fatigue des structures soumises à des sollicitations multiaxiales. Mec. Mater. Electr, vol. 397, pages 15{25, Jan-Feb 1983.

[31] FLEURY E. (1991). Endommagement du superalliage monocristallin AM1 en fatigue isotherme et anisotherme. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.