

# Application de la théorie de l'endommagement au comportement du béton des poutres de structure en flexion simple

T. HASSAINE DAOUADJI <sup>(1,2)</sup>, M. AIT AMEUR MEZIANE <sup>(1,2)</sup>, A. TOUNSI <sup>(2)</sup>, E.A. ADDA BEDIA <sup>(2)</sup>

(1) : Département de Génie Civil, Université Ibn Khaldoun TIARET ALGERIE

(2) : Laboratoire matériaux et hydrologie LMH, Université Djillali Liabes SIDI BEL LABES ALGERIE  
email : [daouadjitah@yahoo.fr](mailto:daouadjitah@yahoo.fr)

**R sum** : Dans le cadre d'une étude du comportement des matériaux fragiles, une étude par la théorie d'endommagement a été adoptée aux bétons pour décrire le comportement à la dégradation par microfissuration de ce matériau. Un modèle unidimensionnel écrit en fonction des déformations, identifié d'après des expériences déjà faites par Mazars et étendu au cas tridimensionnel par la définition d'une déformation équivalente. On montre après une application à la flexion des poutres en béton, comment cette théorie s'intègre dans la méthode des éléments finis avec une comparaison des résultats expérimentaux et de la simulation. Enfin une validation du modèle d'endommagement pour le béton.

**Mots cl s** : béton hydraulique, endommagement, modélisation, simulation, validation.

## 1. Introduction

Les impératifs de sécurité et d'économie imposent maintenant de prévoir par simulation numérique, l'évolution de la tenue des ouvrages en service. Cette simulation doit rendre compte des phénomènes qui peuvent compromettre la résistance des bétons telles que les déformations anélastiques non linéaires et la fissuration [1]. Le problème de la fissuration des ouvrages est suffisamment important, autant du point de vue de la sécurité que de la durabilité, pour cela on présente une étude sur le comportement élastique-endommageable du béton. Le but poursuivi est de faire un calcul prévisionnel sur des structures, partant du modèle [2] de comportement établi, on montre après une application à la flexion des poutres en béton, comment cette théorie s'intègre dans la méthode des éléments finis avec une comparaison des résultats numériques avec ceux de l'expérience.

## 2. Modélisation mécanique de l'endommagement

### 2.1. fondement de la formulation

Le type de comportement traité est essentiellement élastique - endommageable. Est donc ignorée toute manifestation de plasticité ou de viscosité, ce qui ne pourra permettre de traiter des problèmes de chargements de longue durée, le mode d'endommagement considéré est isotrope et nous ne retiendrons que les sollicitations pour laquelle existe dans au moins une direction principale "i" une extension ( $\epsilon_i > 0$ ).

### 2.2. Formulation des lois d'évolution

#### 2.2.1. Évolution de l'endommagement uni axial

Si on analyse le modèle de comportement du béton (figure 1), on peut constater la présence de deux phases distinctes: une phase avant pic, sensiblement linéaire et une autre après pic où la chute de contrainte et la chute de raideur sont importantes. Un tel comportement correspond, sur le plan physique, à un premier stade où la microfissuration n'évolue quasiment pas et à un deuxième stade où elle se développe brutalement entraînant une baisse notable de la section résistante du matériau.

Le modèle [4] qui décrit ces phénomènes est le suivant ; soit  $\epsilon_{D0}$  le seuil d'endommagement.

si  $\epsilon \leq \epsilon_{D0}$  : comportement purement élastique tel que :  $\Rightarrow \sigma = \epsilon \cdot E_0$

si  $\epsilon > \epsilon_{D0}$  : comportement élastique-endommageable :  $\Rightarrow \sigma = \epsilon \cdot E_0 (1 - D)$

soit  $\epsilon_M$  la déformation max atteinte; la loi d'évolution de  $D$  est de la forme :  $D = f(\epsilon_M)$

$$\text{si } \varepsilon_M \leq \varepsilon_{D0} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \text{si non } \varepsilon_M > \varepsilon_{D0} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{1} - \frac{A}{\exp\left[B \left(\varepsilon_M - \varepsilon_{D0}\right)\right]} - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A)}{\varepsilon_M}$$

avec :  $A_T, B_T$  : paramètres modelant la forme de la courbe au-delà du pic, nous les considérons comme caractéristiques du matériau. Les paramètres ( $\varepsilon_{D0}, A$  et  $B$ ) sont obtenus par identification sur des essais caractéristiques

La contrainte du comportement élastique-endommageable s'écrit :  $\sigma = \varepsilon_M \cdot E_0 (\mathbf{1} - \mathbf{D})$

### 2.2.2. Extension aux problèmes tridimensionnels

L'aspect tridimensionnel nécessite que  $\mathbf{D}$  soit une fonction des composantes du tenseur des déformations. Les résultats nous ont conduits à considérer que les déformations d'extension sont à l'origine de l'endommagement. On suppose donc que le pseudo-potential de dissipation ne dépend que de la partie positive des déformations, pour conserver par ailleurs un caractère simple aux formulations mathématiques, nous introduisons pour les problèmes tridimensionnels la notion de déformation équivalente définie par:

$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$  où  $\varepsilon_i$  : est la déformation principale dans la direction "i" et  $\langle \varepsilon_i \rangle_+$  traduite une extension. Cette déformation équivalente est utilisée pour traduire la participation de l'état de déformation à l'endommagement. La formulation de l'évolution de celui-ci est, pour les problèmes tridimensionnels, identique à celle présentée dans le cas unidimensionnel, il suffit de substituer à  $\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}$  [4][2]

si  $\varepsilon_M \leq \varepsilon_{D0}$  : comportement élastique tel que:  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda_0(\text{trace}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{1}) + 2 \cdot \mu_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$

si  $\varepsilon_M > \varepsilon_{D0}$  : comportement élastique-endommageable:  $\mathbf{D} = \mathbf{1} - \frac{A}{\exp\left[B \left(\bar{\varepsilon}_M - \varepsilon_{D0}\right)\right]} - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A)}{\bar{\varepsilon}_M}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \frac{A}{\exp\left[B \left(\bar{\varepsilon}_M - \varepsilon_{D0}\right)\right]} + \frac{\varepsilon_{D0}(1-A)}{\bar{\varepsilon}_M} \right] \left[ \lambda_0(\text{trace}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{1}) + 2 \cdot \mu_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right]$$

Où  $\varepsilon_M$  : la déformation équivalente maximale atteinte et ( $\lambda_0, \mu_0$ ) coefficient de Lamé. Dans cette phase, l'endommagement correspond à la seule évolution du module d'Young  $E = E_0(\mathbf{1} - \mathbf{D})$  le coefficient de Poisson reste constant, ce qui est une conséquence de l'hypothèse d'isotropie.

## 3. Programme de calcul prenant en compte l'endommagement du matériau

Il s'agit d'un calcul non linéaire des structures, le modèle de comportement non linéaire a été introduit dans un programme de calcul numérique par éléments finis [5,3].

### 3.1.1. Principe de laboration du programme de calcul

La discrétisation d'une structure par la méthode des éléments finis permet la localisation de l'endommagement. Nous limitant aux problèmes plans, les éléments utilisés sont des triangles à trois noeuds qui présentent l'avantage de posséder un champ de déformation et de contrainte constants, ce qui facilite la formulation du couplage élasticité-endommagement. L'endommagement se traduit, nous l'avons vu, par une évolution du module d'élasticité, ceci est pris en compte par une méthode à raideur variable. Un processus itératif permet de déterminer la valeur de la variable  $\mathbf{D}$ , donc du module  $\mathbf{E}$ , en fonction de l'évolution de la déformation équivalente  $\bar{\varepsilon}$ .

### 3.1.2. Algorithme d'endommagement

Son but est d'adapter l'endommagement  $\mathbf{D}$  de chaque élément à l'état de sollicitation. Un tableau général permet de caractériser l'état actuel de la structure, pour chaque élément sont stockés: Le module d'élasticité [ $E = E_0(\mathbf{1} - \mathbf{D})$ ] et le seuil d'endommagement. L'algorithme d'endommagement agit, à chaque pas de

chargement, sur les paramètres  $\mathbf{E}$  et  $\varepsilon_{\mathbf{D}}$  de la façon suivante: à partir des déformations principales, on calcule pour chaque élément  $\bar{\varepsilon}$  et on compare ensuite  $\bar{\varepsilon}$  et  $\varepsilon_{\mathbf{D}}$ : { si  $\bar{\varepsilon} < \varepsilon_{\mathbf{D}} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}$  et si  $\bar{\varepsilon} > \varepsilon_{\mathbf{D}} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{f}(\bar{\varepsilon})$  }, on ajuste alors:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{1} - \mathbf{D}(\bar{\varepsilon}))$  } partant de ces nouvelles valeurs, on retouche les rigidités élémentaires et la matrice de rigidité globale est reconstruite.

### 3.1.3. Structure globale du programme

Les principaux blocs de calcul des structures endommageables par élément finis sont [3]: la construction du système linéaire qui consiste à déterminer pour chaque incrément de sollicitation la matrice de rigidité  $[\mathbf{K}^e]$  et le vecteur des forces nodales  $\{\mathbf{F}\}$  (pour le modèle utilisé, les modules dépendent de l'état de contraintes, ce qui nécessite le calcul de la matrice  $[\mathbf{C}]^e$  pour chaque étape d'itération et à chaque point d'intégration). Après la résolution du système linéaire, les déformations correspondantes sont calculées par:  $\Delta \varepsilon_i = \mathbf{B}_i \cdot \Delta \mathbf{U}_i$  et les contraintes sont déterminées à l'aide du comportement défini par le modèle:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \int_0^{\Delta \varepsilon_i} \mathbf{C}_i \cdot d\varepsilon_i; \text{ ensuite on détermine les forces résiduelles par: } \mathbf{R}_i = \int_e \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \cdot d\mathbf{x}, \text{ la résolution du}$$

système est effectuée en utilisant la méthode de Gauss avec pivot total. Les résultats obtenus permettent d'avoir toutes les informations jusqu'à rupture sur le comportement local et global ainsi la localisation et l'intensité de dégradation ( $\mathbf{D}$ ).

## 3.2 : Interprétation des résultats numériques

### 3.2.1: Module de comportement du béton

D'après l'analyse de la figure 1a, on peut constater la présence de deux phases bien distinctes: la phase avant pic; sensiblement linéaire correspond au comportement purement élastique et la phase après pic où la chute de contrainte est importante correspond au comportement élastique- endommageable.

### 3.2.2: variable d'endommagement

La courbe en figure 1b présente deux phases sur l'intervalle  $[\varepsilon \leq \varepsilon_{\mathbf{D}0} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}]$  correspond au matériau vierge alors qu'en seconde phase  $[\varepsilon > \varepsilon_{\mathbf{D}0} \text{ et } \mathbf{0} < \mathbf{D} < \mathbf{1}]$  correspond à la présence des microfissures qui engendrent une section résistante effective où la chute de contrainte et la chute de raideur sont importantes, cette phase correspond au matériau élastique – endommageable; en ce qui concerne l'endommagement critique  $\mathbf{D}_{\mathbf{CR}} = \mathbf{1}$  correspond à la rupture de l'élément de volume.

### 3.2.3: variation du module d'élasticité

La figure 1c, montrent la présence de deux phases; la première phase où le rapport  $E/E_0 = 1$  correspond au matériau élastique et la deuxième phase où la chute du rapport est importante correspond au matériau élastique-endommageable. Dans cette phase l'endommagement correspond à la seule évolution du module d'Young:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{1} - \mathbf{D})$ , ce qui est une conséquence de l'hypothèse d'isotropie.

### 3.2.4 : Comportement global et comportement local

Pour le comportement global, il s'agit des courbes efforts - déplacements (figure 1e); le déplacement considéré pour les poutres est la flèche en section centrale, on retrouve une légère courbure avant d'atteindre la charge maximale et une décroissance très rapide ensuite. Pour le comportement local, il est exprimé par les courbes efforts - déformations (figure 1d); le calcul localise la fissure au milieu de la poutre. En partie tendue, l'accroissement des déformations dans la zone de fissuration et le retrait des zones voisines est correctement décrit par le modèle.

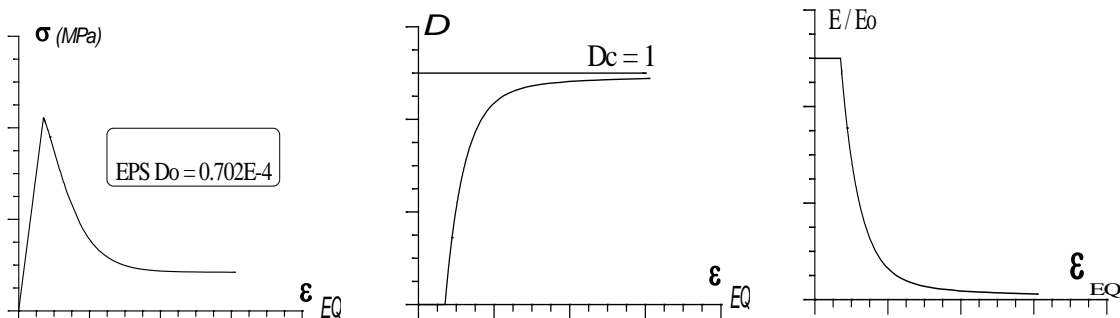


figure 1a

figure 1b

figure 1c

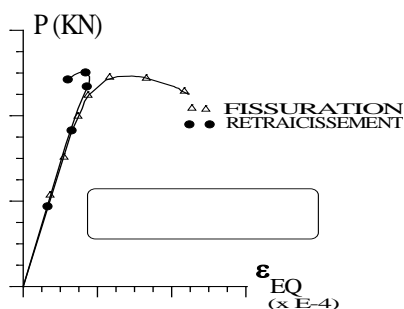


figure 1d

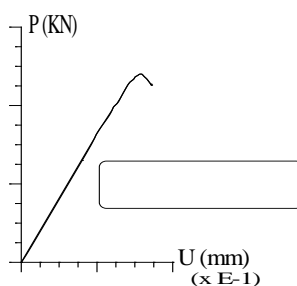


figure 1e

figure 1: Essai de flexion trois Points poutre 160x22x15, 1a: Modèle de comportement du béton; 1b: Variable d'endommagement ; 1c: Variation du module d'élasticité; 1d: Comportement local ; 1e: Comportement global

#### 4. Comparaison : r sultats num ri ues r sultats exp rimentaux

##### 4.1. Description num ri ue du comportement

Les calculs en flexion à partir du modèle analytique nous ont montré que la description locale du comportement pouvait être faite pour un essai donné par ajustement du seuil d'endommagement  $\epsilon_{D0}$ . Les paramètres  $A = 0,8$ ;  $B = 2.10^4$  conservent d'un essai à l'autre leurs valeurs. Il nous a paru intéressant pour montrer les possibilités de la technique de calcul par éléments finis de comparer les résultats expérimentaux et les résultats numériques après ajustement du paramètre  $\epsilon_{D0}$  ainsi, on élimine l'influence de la dispersion des résultats issus de l'expérimentation.  $\epsilon_{D0}$  a été choisi de façon à ce que, pour une structure donnée, le calcul conduise à la même charge maximale que l'expérience ( l'endommagement pré-pic est négligeable devant l'endommagement après pic).

##### 4.2. Analyse m cani ue de l endommagement

**4.2.1 : flexion trois points** : la comparaison concerne une poutre de dimension: 15x22x160 en flexion trois points (figures 2a et 2b), sa charge de rupture est de 9,60 kN expérimentalement et 9,34 kN numériquement, le seuil d'endommagement correspondant au calcul par éléments finis est  $\epsilon_{D0} = 7,24.10^{-5}$ . En partie tendue, on peut noter dans la zone de fissuration pour la courbe expérimentale, une propagation des microfissures en deux phases. Celle-ci correspond à la formation puis à l'arrêt d'une première fissure qui a nécessité une augmentation de charge pour que la rupture se produise. Le modèle de calcul rend compte d'un endommagement continu dans la mesure où il suit correctement les points expérimentaux lors de la rupture dans cette zone. Par contre, le phénomène de retrait dans la zone voisine de la fissure est correctement décrit. Pour le comportement global (figure 2c) le calcul s'accorde bien avec l'expérience.

**4.2.2 : flexion quatre points:** la comparaison a été effectuée sur une poutre de dimension: 15x22x160 en flexion quatre points (figure 3a et 3b), sa charge de rupture est de 15,3 KN expérimentalement et 15,39 KN numériquement, le seuil d'endommagement correspondant au calcul est  $\epsilon_{D0} = 6,40.10^{-5}$ . En partie tendue, l'accroissement rapide des déformations dans la zone de fissuration et le retrait des zones voisines est correctement décrit par le modèle, alors qu'en partie comprimée, la courbe  $\sigma = f(\epsilon)$  est peu affectée par l'endommagement. En ce qui concerne le comportement global (figure 3c), si l'on ignore la partie de la courbe expérimentale correspondant à la mise en place de la poutre, la concordance est bonne et l'on retrouve par le calcul une légère courbure avant d'atteindre la charge maximale et ensuite une décroissance très rapide.

### 4.3. validation du modèle

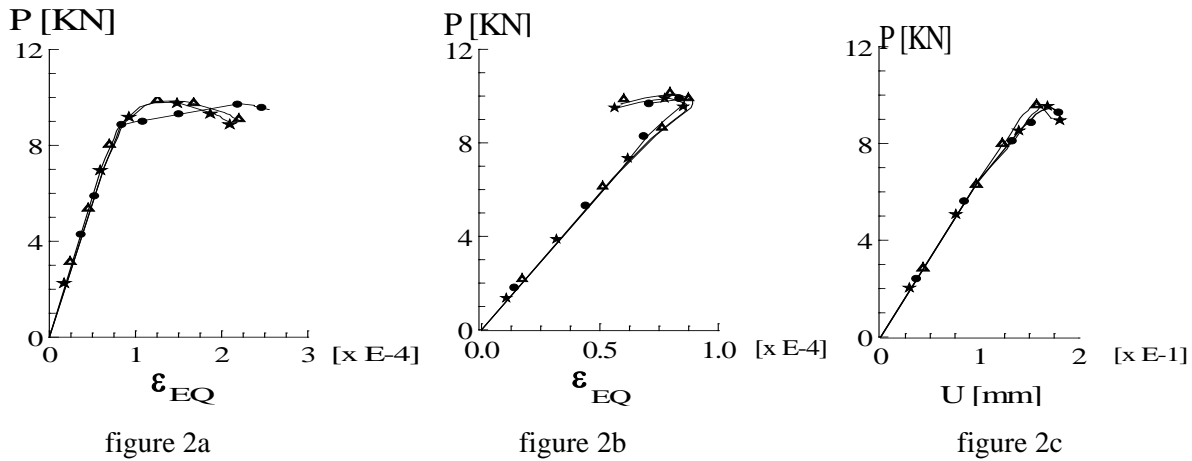


figure 2: Comparaison : résultats numériques – résultats expérimentaux pour un essai de flexion trois points, poutre 160x22x15

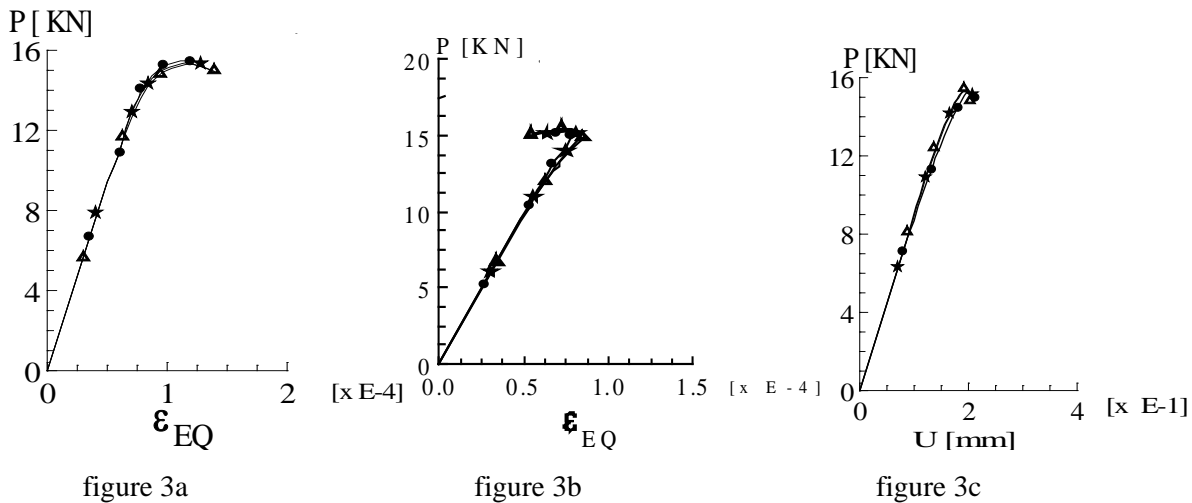


figure 3: Comparaison : résultats numériques – résultats expérimentaux pour un essai de flexion quatre points, poutre 160x22x15

Légende :  $\Delta\Delta$  Calcul M.E.F.    ●● Expérience    \*\* Validation

Afin de tester la validité de notre modèle, nous avons rassemblé les résultats en figures (2a; 2b; 2c; 3a; 3b; 3c). Les comparaisons calculs - expériences effectuées ont montré que les valeurs des paramètres **A** et **B** utilisées permettaient une description correcte du comportement des structures étudiées. Ce point confirme la validité de la méthode employée pour leur identification. En ce qui concerne le seuil d'endommagement  $\varepsilon_{D0}$ , on détermine pour chaque structure et suivant le type de sollicitation  $\varepsilon_{D0}$  correspondant. La comparaison des résultats expérimentaux et des comportements calculés sous les différentes sollicitations étudiées, indique pour chaque essai des allures identiques. Dans les limites de validité de ce modèle, on peut conclure à une bonne concordance entre les résultats expérimentaux de Mazars et les résultats numériques obtenus dans ce travail.

## 5. Conclusion

L'objectif visé dans notre étude était la modélisation de la microfissuration du béton sous sollicitations mécaniques. Deux points fondamentaux peuvent être dégagés de cette étude: la dégradation par microfissuration du béton constitue l'aspect essentiel de son comportement mécanique et la mécanique de l'endommagement permet une modélisation fine de ces phénomènes, et qui permet un suivi continu de la microfissuration du matériau le long de son chargement. Dans notre travail, on a vu qu'elle s'adapte très bien aux calculs par éléments finis et montre que l'utilisation de la notion d'endommagement isotrope conduit à des résultats satisfaisants aussi bien dans la description des comportements locaux que dans celle du comportement global. La simulation des essais a montré une bonne concordance des résultats numériques obtenus dans ce travail avec ceux des résultats expérimentaux de Mazars. Ceci nous a amené à étudier l'influence de la variable interne  $D$  qui permet le suivi de ce qui se passe réellement au niveau du comportement du matériau utilisé.

## Bibliographie

- [1] LEMAITRE J., CHABOCHEJ.L. " Mécanique des matériaux solides" Dunod 1988 Paris
- [2] LEMAITRE J., MAZARS J. " Modélisation du comportement et de la rupture du béton" 4<sup>e</sup> Symposium Franco-Polonais de mécanique. Marseille 1980
- [3] HASSAINE DAOUADJI T. " Modélisation du comportement des bétons par la théorie d'endommagement sous différentes sollicitations" Thèse de magister Tiaret 1999
- [4] MAZARS J. "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure" Thèse doctorat Paris 6 1984
- [5] BATOZ J.L. DHATT G. "Modélisation des structures par élément finis. Poutres et Plaques" volume 2, Hermes Paris 1990