



**Ministère De L'enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique  
Université Kasdi Merbah Ouargla  
Faculté des sciences appliquées  
Département de Génie Mécanique**



**Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de  
MASTER ACADEMIQUE**

**Domaine : Sciences et Technologies.**

**Filière : Génie Mécanique.**

**Spécialité : Energétique.**

**Présenté par :**

Guemmouli Sedik

Gherairi Morad

*Thème*

**Etude Numérique de la Convection Naturelle dans une Cavité  
Carrée**

**Soutenu publiquement le :**

Devant le jury composé de :

KEBDI Zakaria

MCB

UKM. Ouargla

Président

GHEDAMSI Rebha

MCB

UKM. Ouargla

Examinatrice

Mme I.ALLOUI

MCB

UKM. Ouargla

Encadreur

**Année Universitaire 2021/2022**



## Remerciements

بادئ ذي بدء، نشكر الله تعالى على كل شيء. نود أن نعبر عن  
خالص امتناننا للدكتورة علوي ايمان من كلية العلوم التطبيقية  
جامعة قاصدي مرباح. كما نود أن نعبر عن امتناننا لأعضاء  
لجنة التحكيم الذين وافقوا على مناقشة مذكرتنا  
نود كذلك أن نشكر أساتذتنا وزملائنا وأصدقائنا وكل من ساعدنا  
في تنفيذ هذا المشروع الدراسي، من قريب أو بعيد، وطوال  
مسيرتنا الأكاديمية. أخيرًا، نود أن نعرب عن خالص شكرنا  
للعائلة وجميع من ساهم في هذا العمل من خلال تزويدنا بالدعم  
والتشجيع المستمر طوال سنوات الدراسة وأثناء عمل هذه  
المذكرة. شكرًا لكم



# Dédicace

*C'est un grand honneur de dédier cet humble travail.  
A ceux qui m'ont encouragé et soutenu moralement et  
matériellement dans les moments difficiles de ma vie  
A ma chère mère, qui me donne toujours espoir pour la vie et  
qui ne cesse de prier pour moi  
A mon très cher père  
A mes chères soeurs et frères  
A toutes mes tantes et tous mes oncles  
Pour toute ma famille élargie :  
A mes chers amis, en particulier Ben Moussa et Soufyan, que  
je remercie du fond du coeur et leur souhaite succès  
Sans aucun doute, à mes chers amis de l'Université de  
Ouargla, enfin je dédie de tout cœur à Mme : Iman Alloui.*

*G . Sedik*

## *Dédicace*

**Je dédie cet humble travail :  
à ceux qui m'ont couvert de tendresse depuis ma  
naissance.**

**Chère maman.**

**A mon cher père.**

**Mes frères et sœurs.**

**Âmes soeurs.**

**Tous mes amis.**

**A tous mes professeurs qui m'ont aidé à terminer mon  
travail, Halimi et Ben Moussa, et en particulier à mon  
cher professeur Iman Alloui.**

**A tous mes amis et collègues de l'université du niveau  
Master II.**

*Morad.G*

# Sommaire

Liste des Figures	VII
Liste des Tableaux	IX
Nomenclature	X
Introduction Générale	1

## Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

I-1) Introduction	3
I-2) Définition du milieu poreux	3
I-2-1) Exemples sur les milieux poreux	3
I-2-1-1) Milieux poreux naturels	3
I-2-1-2) Milieux poreux technique	3
I-2-1-3) Description géométrique	4
I-2-2) Classification des milieux poreux	4
I-2-2-1) Milieu poreux non consolidé	4
I-2-2-2) Milieu poreux Consolidé	5
I-3) Définition de la porosité	6
I-3-1) Types de porosité	6
I-3-1-1) La porosité efficace	6
I-3-1-2) La porosité cinématique	6
I-3-1-3) Porosité intrinsèque	6
I-3-2) Description d'un milieu poreux saturé	7
I-3-2-1) Porosité connectée et porosité occluse	7
a) Porosité connectée	7
b) Porosité occluse	7
I-4) Définition de la perméabilité	8
I-4-1) Types de perméabilité	9
I-4-1-1) Perméabilité géométrique (intrinsèque ou spécifique)	9

I-4-1-2) Perméabilité effective	9
I-4-1-3) Perméabilité équivalente	9
I-4-1-4) Perméabilité relative	9
I-4-1-5) La perméabilité relative d'après Darcy	10
I-4-1-6) La perméabilité effective d'après Darcy	10
I-5) La loi de Darcy	10
I-6) Synthèse bibliographique	11
I-7) Conclusion	18

## **Chapitre II : Modèle Physique et Formulation Mathématique**

II-1) Introduction	19
II-2) Description du problème	19
II-3) Hypothèses simplificatrices	19
II-4) L'hypothèse de Boussinesq	20
II-5) Equations générales dans un milieu poreux	20
II-5-1) Equation de continuité	21
II-5-2) Equations de quantité de mouvement : Loi de Darcy	21
II-5-3) Equation de conservation d'énergie	23
II-5-3-1) Phase solide	23
II-5-3-2) Phase fluide	23
II-5-4) Équations en formulation de fonction de courant	24
II-6) Conditions aux limites	25
II-7) Equations gouvernantes adimensionnelles	25
II-8) Conditions aux limites adimensionnelles	27
II-9) Transfert thermique et massique	27
II-9-1) Le nombre de Nusselt	27
II-10) Conclusion	27

## **Chapitre III : Solution Numérique**

III-1) Introduction	28
III-2) Méthode des volumes finis	28

III-3) Principe de la Méthode	29
III-4) Le maillage	29
III-5) Forme conservatrice des équations gouvernantes	30
III-6) Application de l'intégration sur l'équation de transport	31
III-7) Schéma d'interpolation	32
III-8) Discrétisation de l'équation de transport	33
III-9) Méthode implicite aux directions alternées	35
III-9-1) Schéma implicite en x explicite en y	36
III-9-2) Schéma explicite en x et implicite en y	36
III-9-3) Traitement des conditions aux limites	36
III-10) Résolution des équations	37
III-11) Algorithme de calcul	37
III-12) Conclusion	38
<b>Chapitre IV : Résultats et discussion</b>	
IV-1) Introduction	39
IV-2) Profils des fonctions de courant, isothermes	39
IV-2-1) Cas de perméabilité constante	39
IV-2-2) Cas de perméabilité variable	41
IV-3) Effet de la variation de la perméabilité sur les profils des vitesses	43
IV-4) Effet de la perméabilité sur les profils des températures	45
IV-5) Effet du nombre de Rayleigh sur $\psi_{ext}$	45
IV-6) Effet du nombre de Rayleigh sur les taux de transfert	46
IV-6-1) L'effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt	46
IV-7) Effet de la variation de la perméabilité sur le courant	47
IV-8) Conclusion	49
Conclusion générale	50
Références bibliographiques	52

## Liste des Figures

<b>Figure I-1</b> : Description géométrique d'un milieu poreux	4
<b>Figure I-2</b> : Milieu poreux non consolidé	5
<b>Figure I-3</b> : Milieu poreux consolidé	5
<b>Figure I-4</b> : Description d'un milieu poreux	7
<b>Figure I-5</b> : Dispositif de Darcy	11
<b>Figure II-1</b> : modèle géométrique de la cavité poreuse étudiée	19
<b>Figure III-1</b> : Représentation d'un volume de contrôle bidimensionnel	29
<b>Figure III-2</b> : prédiction de pour différents schémas en fonction du nombre de Péclet [24]	32
<b>Figure III-3</b> : forme indicielle des points P, W, E, S et N	35
<b>Figure IV-1</b> : Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour : <i>angle</i> 0 $A = 1$ $c = 0$ $Ra = 25$ $\psi = 0.535$ $Nu = 1.081$	40
<b>Figure IV-2</b> : Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour : <i>angle</i> 0 $A = 1$ $c = 0$ $Ra = 50$ $\psi = 1.914$ $Nu = 1.911$	41
<b>Figure IV-3</b> : Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour : <i>angle</i> 0 $A = 1$ $c = 2$ $Ra = 50$ $\psi = 2.095$ $Nu = 1.845$	42
<b>Figure IV-4</b> : Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour : <i>angle</i> 0 $A = 1$ $c = 4$ $Ra = 50$ $\psi = 2.574$ $Nu = 1.721$	42
<b>Figure IV-5</b> : Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour : <i>angle</i> 0 $A = 1$ $c = 8$ $Ra = 50$ $\psi = 4.403$ $Nu = 1.527$	43
<b>Figure IV-6</b> : Effet de la variation de la perméabilité sur les profils de vitesse Résultats numériques pour les valeurs de $c=0, c=4, c=8$ $Ra=25$	44



**Figure IV-7 :** Effet de la variation de la perméabilité sur les profils de vitesse. Résultats numériques pour les valeurs de  $c=0, c=4, c=8$   $Ra=50$  44

**Figure IV-8 :** Effet de la variation de la perméabilité sur les températures. Résultats numériques pour les valeurs de  $c=0, c=4, c=8, Ra=50$  45

**Figure IV-9 :** évolution de la fonction de courant en fonction du nombre de Rayleigh pour les différents cas de perméabilité. Résultats numériques pour  $c=0, 2, 4$  et  $8$  46

**Figure IV-10 :** Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour les différents cas de perméabilité. Résultats numériques 47

**Figure IV-11 :** Effet de la variation de la perméabilité sur les fonctions de courant, Résultats numériques pour les valeurs de  $c=0, c=4, c=8$   $Ra=50$  48

## **Liste des Tableaux**

<b>Tableau I-1</b> : Porosité de quelques matériaux	7
<b>Tableau I-2</b> : Perméabilité de quelques matériaux.	8
<b>Tableau III-1</b> : Spécification des coefficients des termes de diffusion, de convection et du terme source de l'équation de transport.	31

## Nomenclature

### Lettres latines

A	rapport de forme de la cavité ( $H' / L'$ )
g	accélération gravitationnelle ( $m/s^2$ )
H'	Hauteur de la cavité selon Y(m)
L'	longueur de la cavité selon X(m)
K	Perméabilité sans dimension du milieu poreux
$K'_r$	Perméabilité de référence du milieu poreux ( $m^2$ )
Nu	nombre de Nusselt
$q'$	flux constant de chaleur par unité de surface ( $W/m^2$ )
Ra	Nombre de Rayleigh
t	temps adimensionnel ( $t' \alpha / H'^2$ )
T	température adimensionnelle ( $T' - T'_0 / \Delta T'$ )
u	vitesse adimensionnelle dans la direction x
v	vitesse adimensionnelle dans la direction y
x	coordonnée cartésienne adimensionnelle
y	coordonnée cartésienne adimensionnelle
c	coefficient de la fonction exponentielle de la perméabilité
x	Axe des coordonnées adimensionnel ( $x' / H'$ )
y	Axe des coordonnées adimensionnel ( $y' / H'$ )
$t_s$	terme source

## Symboles Grecques

$\alpha$	Diffusivité thermique du fluide, $(k/\rho c_f) \text{ m}^2/\text{s}$
$\beta_T$	Coefficient d'expansion volumique thermique du fluide $K^{-1}$
$\vartheta$	viscosité cinématique du fluide, $\text{m}^2/\text{s}$
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide
$\rho c_f$	Capacité thermique de fluide
$\rho c_p$	Capacité thermique de poreux
$\mathcal{T}$	La fonction à déterminer ( $\Psi$ , ou T)
$\bar{\mathcal{T}}$	La valeur moyenne de la fonction $\mathcal{T}$
$\overline{\mathcal{T}^0}$	La fonction au temps « t »
$\overline{\mathcal{T}^1}$	La fonction au temps « t+ $\Delta t$ »
$\xi$	Critère de convergence
$\rho$	la masse volumique du fluide, $\text{Kg}/\text{m}^3$
$\Psi$	fonction de courant ( $\Psi'/\alpha$ )
$\varepsilon'$	La porosité du milieu poreux
$\phi$	coefficient de diffusion de l'équation de transport
$\lambda$	Conductivité thermique ( $\text{w}/\text{m}.\text{k}$ )
$\Delta T^*$	écart caractéristique de température

***Introduction***

***Générale***

## **Introduction Générale**

L'étude présentée dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la convection naturelle et du transfert de chaleur des écoulements, dans un milieu poreux saturé d'un liquide homogène.

Ces dernières années, les exigences de la technologie moderne ont stimulé l'intérêt pour les études d'écoulements de fluides qui impliquent l'interaction de nombreux phénomènes comme le problème de la convection naturelle dans les milieux poreux, et leurs applications sont nombreuses, tant dans la nature que dans l'industrie. Telles que la gestion des déchets nucléaires, la construction d'isolants thermiques, de centrales géothermiques, le stockage de céréales, etc., ces applications industrielles ont conduit à une augmentation rapide des recherches dans le domaine public des milieux poreux, et ont ainsi produit de nombreuses connaissances théoriques et Recherche expérimentale. Il a attiré l'attention d'industriels, d'ingénieurs et de scientifiques de diverses disciplines, telles que les mathématiques appliquées, la chimie, le génie civil, l'environnement, le génie mécanique et nucléaire, la physique géothermique, les sciences alimentaires, la médecine, etc. Ces dernières années, les exigences de la modernité de la technologie ont stimulé l'intérêt pour des études des écoulements de fluide qui impliquent l'interaction de plusieurs phénomènes tel que le problème de la convection naturelle dans les milieux poreux. Leurs applications en sont nombreuses, aussi bien dans la nature que dans l'industrie. On peut citer comme exemple les mouvements océaniques, le stockage des déchets nucléaires, les processus de séchage, les processus de la migration de l'humidité et de dessalement de l'eau de mer, l'extraction de l'énergie géothermique et ses applications importantes.

Récemment beaucoup d'articles sont parus qui concernent l'étude de la convection naturelle dans un milieu poreux où la perméabilité est prise pour être uniforme. Mais certaines études sur la perméabilité et la porosité ont confirmé que la porosité ne peut pas être considérée comme uniforme et en conséquence la perméabilité varie aussi, et son effet est important sur la vitesse de l'écoulement, sur la température et sur les taux de transfert de chaleur dans un milieu poreux. Une revue bibliographique que nous présenterons, dans les sections qui vont suivre montrera quelques travaux antérieurs qui ont contribué à en apprendre davantage sur la variation de la perméabilité.

L'étude de la convection naturelle associée Les milieux poreux se sont particulièrement développés ces dernières années du fait de leur intérêt pour la résolution de problèmes technologiques importants.

Le but de notre travail est l'étude de la convection naturelle en milieux poreux saturé par un fluide dans une cavité carrée soumise à des gradients de température verticaux. Les conditions de Newman seront appliquées aux parois verticales de la cavité et les approximations de Darcy et Boussinesq seront considérées, tandis que les autres parois sont supposée imperméables et adiabatiques, afin de décrire l'écoulement. La méthode utilisée pour résoudre les équations gouvernantes sera la méthode numérique basée sur la méthode des volumes finis.

Le contenu de ce mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons une généralité sur le milieu poreux .et revue bibliographique sur le phénomène de la convection naturelle .Le deuxième chapitre est consacré à la définition de la géométrie étudiée, et modèle physique du problème et sa modélisation mathématique par des équations différentielles. Dans le troisième chapitre, nous décrivons la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations mathématiques adimensionnelles obtenues dans le deuxième chapitre. Le quatrième chapitre est consacré à la discussion des résultats obtenus.

**Chapitre I :**

**Généralités et revue  
bibliographique**



## **I-1) Introduction**

Aussi bien de son intérêt scientifique que de son importance pour l'industrie (hydraulique, génie pétrolier, géologie, agriculture, génie civil, industrie chimique, etc.) ; l'écoulement des fluides en milieu poreux a fait l'objet d'études approfondies qui reposent essentiellement sur la loi expérimentale de Darcy. Cette loi est d'ailleurs en bon accord avec des théories récentes développées à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides et d'une interprétation statique de l'écoulement en milieu poreux. En ce qui suit on va présenter des généralités sur les milieux poreux, ainsi qu'une synthèse bibliographique montrant les travaux de recherche les plus pertinents et qui sont en relation avec notre thème étudié.

## **I-2) Définition milieu poreux :**

Un milieu poreux est une substance (matrice) solide qui contient des vides ou des cavités à travers lesquelles le liquide peut s'écouler. Ces espaces vides sont appelés pores, et ces espaces peuvent ou non être reliés les uns aux autres, et il existe de nombreux matériaux poreux dans la nature ou l'industrie [1]. Le milieu poreux est caractérisé essentiellement par deux propriétés microscopiques interconnectées, la première est la porosité et la deuxième est la perméabilité.

Ces deux paramètres sont des variables macroscopiques, c'est-à-dire estimées sur un volume compris de nombreuses entités microscopiques composant le matériau poreux.

### **I-2-1) Exemples sur les milieux poreux :**

#### **I-2-1-1) Milieux poreux naturels :**

Dans la nature, les milieux poreux les plus exploités sont les roches et les sols. L'exploitation géologique des sous-sols nous a permis de classifier les différentes couches géologiques selon leurs perméabilités à l'écoulement des fluides. De plus, la compaction géologique peut réduire par conséquence la porosité au niveau des couches.[2]

#### **I-2-1-2) Milieux poreux techniques :**

Lors de la fabrication des bétons et des ciments, une certaine porosité est nécessaire pour permettre un séchage lent et progressif et l'obtention d'un matériau robuste. Parfois, la porosité (fine) est complétée par un réseau de fractures qui fragilise le béton. La porosité d'un béton fonctionnel est comprise entre 6% et 10%. [2]

### I-2-1-3) Description géométrique :

Les milieux poreux ont une géométrie complexe. Obtenu par des mesures tomographiques. [2]

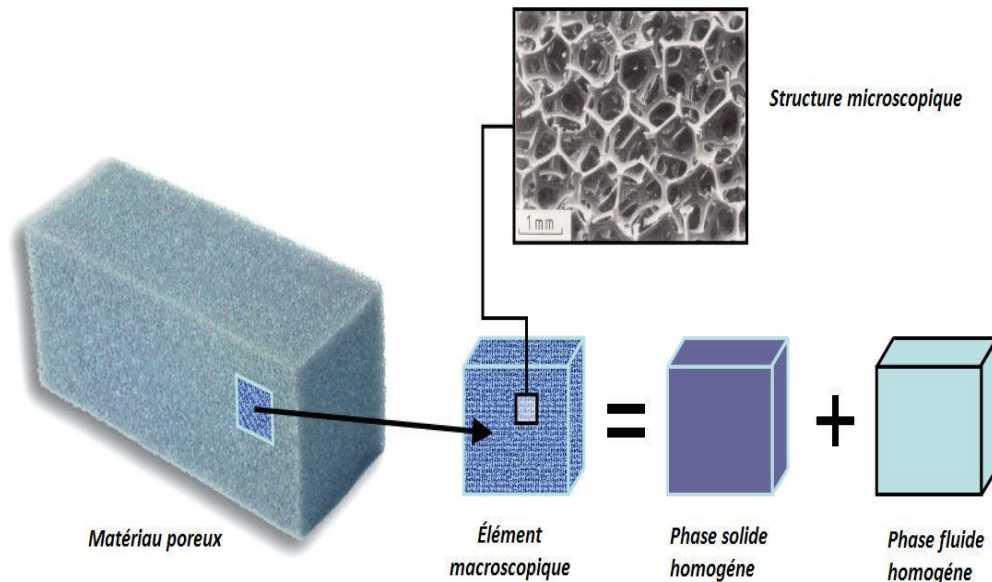


Figure I-1 : Description géométrique d'un milieu poreux

### I-2-2) Classification des milieux poreux :

Les milieux poreux sont de nature très variée, en particulier du point de vue de la structure géométrique délimitant l'espace poral. La matrice solide d'un milieu poreux peut être :

#### I-2-2-1) Milieu poreux non consolidé :

Dans ce milieu, la phase solide est composée par des grains et des fibres, prenant par exemple pour ce milieu : graviers, sables, limons, billes de verre et d'aciers et aussi autres matériaux divers. Les billes de verre sont fréquemment mises en utilisation au niveau des laboratoires de recherche pour explorer les phénomènes de transfert des milieux poreux. [3]



**Figure I-2 :** Milieu poreux non consolidé

**I-2-2-2) Milieu poreux Consolidé :**

Pour l'état consolidé, la matrice solide compacte ne peut pas se dissocier ni en grains ni en fibres, prenant l'exemple des : roches calcaires, grès, argiles, bois, poudres frittées, tissus a base organique. [3]



**Figure I-3 :** Milieu poreux consolidé

### I-3) Définition de la porosité :

La porosité représente la grandeur physique à partir de laquelle on peut évaluer la capacité d'un milieu poreux à contenir une certaine quantité du fluide. Elle se définit par le rapport de volume des vides contenus dans le matériau par volume apparent du milieu poreux solide-fluide :

$$\Phi = \frac{V_p}{V_t} \quad (I.1)$$

$V_p$  : volume des pores

$V_t$ : volume total du milieu poreux

### I-3-1) Types de porosité :

#### I-3-1-1) Porosité efficace :

Elle dépend seulement des cavités interconnectées à travers lesquelles s'effectuent l'écoulement des masses fluides, c'est le rapport du volume d'eau que peut être libérer le milieu sous l'action des seules forces de gravité au volume total de la matrice solide, soit : [4]

$$m_e = \frac{V_{eff}}{V_t} .100 \quad (I.2)$$

Où :  $V_{eff}$  représente le volume d'eau gravitaire.

$V_t$  : Le volume total

#### I-3-1-2) La porosité cinématique :

Correspond au rapport du volume des interstices réellement parcourus par l'eau en écoulement au volume total du milieu : c'est la teneur en eau mobile. [4]

#### I-3-1-3) La porosité intrinsèque :

Notée que  $m$  le volume du milieu poreux étudié, le rapport du volume des vides au volume total soit : [4]

$$m = \frac{V_v}{V_t} .100 \quad (I.3)$$

Où :  $m$  désigne la porosité

$V_v$ : Le volume des vides

$V_t$  : Le volume total

La porosité effective de quelques matériaux est présentée dans le tableau I-1.

Matériaux	Porosité
Matériau mousseux	0.98
Fibre de verre	0.88 – 0.93
Fil à tisser	0.68 – 0.76
Grains de silice	0.65
Poudre d'ardoise noire	0.57 – 0.66
Cuir	0.56 – 0.59
Catalyseur	0.45
Granulé de pierres	0.44-0.45

**Tableau I-1 :** Porosité de quelques matériaux [6]

### I-3-2) Description d'un milieu poreux saturé :

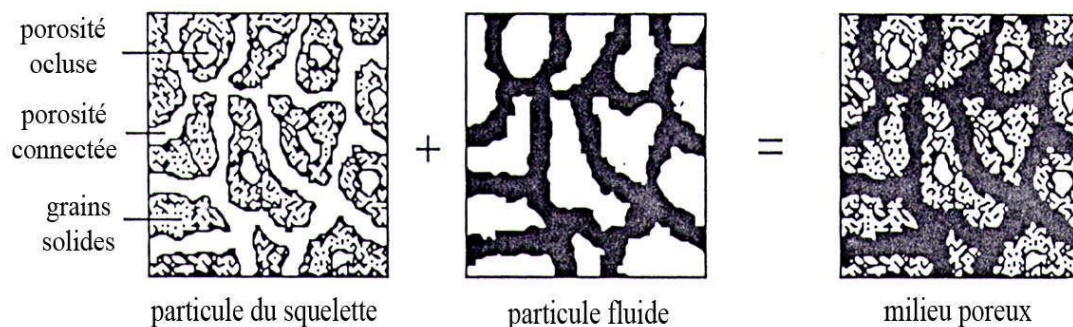
#### I-3-2-1) Porosité connectée et porosité occluse :

##### a) Porosité connectée :

Elle est définie par l'intermédiaire duquel s'effectuent les échanges masse-fluide. Les points bien définis du fluide sont reliés par défaut par un trajet intérieur à cet espace et aussi dans ce sens, on peut dire que la phase fluide saturante est continue. [5]

##### b) Porosité occluse :

Aucune filtration n'a un lieu dans le cas de la porosité occluse, cette phase est introuvable dans les sols sableux et argileux, mais elle observable dans les roches par exemple. Cette porosité est le rapport du volume non solide au volume total. [5]



**Figure I-4 :** Description d'un milieu poreux.

#### I-4) Définition de la perméabilité :

La perméabilité est introduite par la facilité avec laquelle le fluide s'écoule dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. La perméabilité notée  $K$  dépend que sur la porosité et la géométrie de la matrice solide étudié.

La relation de Kozeny – Carmen (1937), donne une estimation de la perméabilité  $K$  pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple.

$$k = \frac{d^2 \varepsilon^3}{36 C_0 (1-\varepsilon)^2} \quad (I.4)$$

Où  $d$  : désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et  $C_0$  une constante dépendant de la forme des grains ( $3.6 < C_0 < 5$ ). [6]

Le tableau I.2 représente la perméabilité de quelques matériaux poreux défini :

Matrice	Perméabilité [ $m^2$ ]
Briques	$4,8.10^{-15} - 2,2.10^{-13}$
Pierre à chaud, Dolomite	$2,0.10^{-15} - 4,5.10^{-14}$
Cuir	$9,5.10^{-14} - 1,2.10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$4,9.10^{-14} - 1,2.10^{-13}$
Fibres de verre	$2,4.10^{-11} - 5,1.10^{-11}$
Cheveux artificiels	$8,3.10^{-10} - 1,2.10^{-9}$

**Tableau I.2 :** Perméabilité de quelques matériaux. [6]

La perméabilité est une caractéristique physique qui représente la facilité qu'a un matériau à permettre le transfert de fluide au travers d'un réseau connecté. La loi de Darcy permet de relier un débit à un gradient de pression appliqué au fluide grâce à un paramètre caractéristique du milieu traversé : la perméabilité  $k$ . [2]

La loi de Darcy s'exprime par : [7]

$$k = \frac{Q \cdot \mu}{A(\Delta P / \Delta x)} \quad (I.5)$$

Avec  $Q$  le débit,  $k$  la perméabilité,  $A$  la section de l'éprouvette qui pour une éprouvette cylindrique est  $\pi R^2$  avec  $R$  le rayon de l'éprouvette,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $\Delta P / \Delta x$ , le gradient de pression.

#### **I-4-1) Types de perméabilité :**

##### **I-4-1-1) Perméabilité géométrique (intrinsèque ou spécifique) :**

Définit par le volume du fluide qui englobe complètement un milieu, et qui s'écoule par unité de temps à travers une surface sous l'effet d'un gradient de charge.

##### **I-4-1-2) Perméabilité effective :**

C'est la capacité d'un milieu à transmettre un fluide en même temps qu'un autre fluide.

##### **I-4-1-3) Perméabilité équivalente :**

Dans le cas des sols sédimentaires, les différentes couches superposées présentent des perméabilités différentes. Dans un milieu formé de  $n$  strates, chaque strate étant constituée d'un matériau supposé homogène et isotrope, le coefficient de perméabilité est donné par la formule suivante :

$$K_e = \sqrt{k_h \cdot k_v} \quad (I.6)$$

Avec :

$k_h$  : est la perméabilité horizontale effective pour l'ensemble des couches

$k_v$  : Perméabilité verticale pour l'ensemble des couches

##### **I-4-1-4) Perméabilité relative :**

Représenté aussi par le terme : Conductivité hydraulique relative  $K$  d'un fluide, Elle correspond à la vitesse d'infiltration d'un fluide dans le sol. En condition saturé elle s'exprime d'une manière générale comme suit :

$$K = \frac{k \cdot g}{\vartheta} \quad (I.7)$$

Où

$k$  : la perméabilité intrinsèque

$g$  : L'accélération de la pesanteur

$\vartheta$  : la viscosité cinématique du fluide

**I-4-1-5) La perméabilité relative d'après Darcy :**

La perméabilité relative correspond au rapport de la perméabilité effective à la perméabilité absolue

$$K_r = \frac{k_{eff}}{k} \quad (I.8)$$

Où :

$K_r$  : Perméabilité relative

$k_{eff}$  : Perméabilité effective

$k$  : Perméabilité absolue

**I-4-1-6) La perméabilité effective d'après DARCY :**

DARCY a Exprimé la propriété d'un milieu poreux d'être traversé par un fluide en présence d'un ou plusieurs autres fluides. Sa définition dépend non seulement du milieu poreux mais aussi des pourcentages respectifs des différents fluides présents dans le milieu. En effet, la présence d'un autre fluide perturbe l'écoulement de l'autre fluide. Par exemple, en présence de deux fluides a et b, la loi de DARCY permet d'écrire pour chaque fluide :

$$Q_a = -s \frac{k_a \cdot \partial p}{\mu_a \cdot \partial x} \quad (I.9)$$

$$Q_b = -s \frac{k_b \cdot \partial p}{\mu_b \cdot \partial x} \quad (I.10)$$

$K_a$  et  $K_b$  Sont les perméabilités effectives liées aux fluides  $a$  et  $b$ . Elles s'expriment en ( $m^2$ ) Ou en milieu DARCY.

**I-5) La loi de Darcy :**

L'eau souterraine s'écoule des niveaux d'énergie plus élevés vers les niveaux d'énergies plus faibles. Cette énergie est essentiellement le résultat de l'altitude et de la pression. La loi de Darcy en milieu poreux exprime la vitesse de filtration en régime permanent ou transitoire en fonction du gradient de pression et de la gravité. Pour un fluide incompressible, la loi de Darcy s'écrit sous la forme générale. [7]

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\overrightarrow{grad} p - \rho \vec{g}) \quad (I.11)$$

La loi de Darcy s'applique au milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse.



Où :

$u$ : Le vecteur vitesse de Darcy,

$k$ : La perméabilité intrinsèque du milieu,

$\mu$ : La viscosité du fluide,

$p$ : La pression,

$\rho$ : La masse volumique du fluide,

$g$  : Le vecteur de gravité.

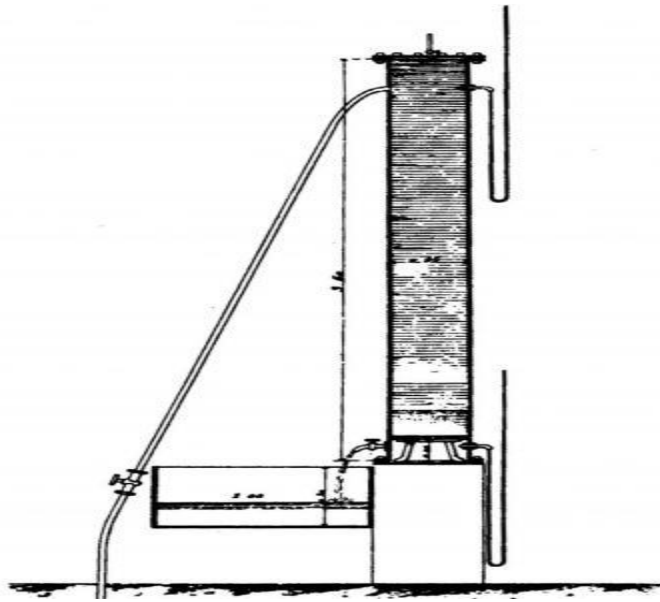


Figure I-5 : Dispositif de Darcy

## I-6) Synthèse bibliographique

L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'étude des transferts de chaleur dans une cavité carrée remplie d'un matériau poreux saturé par un fluide homogène. Dans le premier chapitre, qui est la présente introduction, nous passons en revue un article bibliographique sur les processus de transfert associés aux milieux poreux en général, et en particulier la convection à flux dirigé. Dans ce travail, nous présentons quelques exemples tirés de la littérature concernant le flux naturel de chaleur dans une cavité carrée remplie d'un matériau poreux saturé par un fluide homogène. Dans ce qui suit, nous fournissons des références de la bibliographie relatives aux phénomènes de transport dans les milieux poreux.

Une étude numérique bidimensionnelle du transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité fermée avec un chauffage localisé par le bas a été réalisée par **M. Hasnaoui, E. Bilgen, et P. Vasseur (1992) [8]** en utilisant une procédure de différences finies. La surface supérieure était refroidie à une température constante et une partie de la surface inférieure était chauffée de manière isotherme tandis que le reste de la surface inférieure et les parois verticales sont supposées adiabatiques. Les paramètres du problème étaient le rapport d'aspect de la cavité ( $A = 1$  et  $2$ ), la longueur sans dimension ( $B = 0,06$  à  $1,0$ ) et la position de la source de chaleur par rapport à la ligne de symétrie verticale de la cavité ( $e = -0,6$  à  $0,7$ ), le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh ( $Ra = 0$  à  $5 \times 10^6$ ).

Les effets des paramètres thermophysiques et géométriques sur les champs d'écoulement et de température des fluides ont été étudiés. Ils ont montré l'existence de multiples solutions en régime permanent et le comportement oscillatoire pour un ensemble donné de paramètres de contrôle. Ainsi que des solutions périodiques et non périodiques ont été obtenues en résolvant les équations Navier-Stokes et équations d'énergie, en utilisant l'approximation de Boussinesq.

**Mamou 1998 [9]** ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier analytiquement et numériquement la convection naturelle induite dans une couche poreuse verticale soumise à un flux uniforme de chaleur et de masse, ils se sont particulièrement intéressés au cas où les forces des volumes thermiques et de soluté sont opposées et de même intensité.

Ils ont calculé les nombres critiques de Rayleigh qui caractérisent analytiquement le début des mouvements convectifs en fonction des nombres de Lewis ( $Le$ ) et Darcy ( $Da$ ), et ils ont trouvé que le nombre thermique critique de Rayleigh augmente lorsque  $Da$  augmente ou lorsque  $Le$  tend vers l'unité. , il a été montré qu'une augmentation de  $Da$  entraîne une diminution de l'intensité du flux, du transfert de chaleur et de la masse, et d'autre part, une augmentation du nombre de Rayleigh entraîne une augmentation monotone de l'intensité du flux.

Le problème du flux de chaleur instable à double diffusion a été pris en compte dans une étude réalisée par **Ali J. Chamkha (2002) [10]** dans le cas d'un mélange gazeux binaire dans une enceinte rectangulaire contenant un milieu poreux uniforme. Une source de chaleur ou un creux dépendant de la température est supposé dans les

limites de l'enceinte. Les gradients transversaux coopérant de chaleur et de masse ont été appliqués aux deux parois verticales opposées de la cavité tandis que les deux autres parois horizontales sont fixes et imperméables au transfert de masse. Une solution numérique a été obtenue sur la base de la méthode des différences finies. Des résultats représentatifs montrant les effets du nombre de Darcy, du rapport de flottabilité, de température et de concentration. De plus, les résultats pour les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood ont été présentés sous forme de tableau et ont été discutés pour différents valeurs des paramètres de contrôle.

**A. Bahloul a, L. Kallaa, R. Bennacer b, H. Beji b, P. Vasseur (2004) [11]** ont étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte poreuse verticale élancée. La solution analytique valable pour les écoulements stratifiés dans des enceintes avec des rapports d'aspect relativement élevés. La deuxième partie de l'étude concerne une étude numérique de l'ensemble des équations gouvernantes qui valident le modèle analytique. La comparaison entre les solutions numériques et analytiques couvre la gamme de nombres de Rayleigh thermiques  $6 \times 10^2 < R_T < 10^4$ , la plage du rapport de flottabilité  $0 < N < 10$  et la plage du nombre de Lewis  $10^{-2} < Le < 10^2$ .

**BELHI Mamdouh (2007) [12]** s'est intéressé à la simulation numérique de la convection mixte laminaire dans une cavité carrée à plusieurs entrées. La paroi verticale gauche est a été soumise à une température uniforme constante, tandis que les autres parois étaient adiabatiques. Les équations qui régissent le phénomène ont été décrites à l'aide de la formulation de "fonction de courant  $\Psi$  et de vorticité  $\omega$ ". Les champs dynamiques et thermiques ainsi que le coefficient de transfert de chaleur (nombre de Nusselt) pour les différents nombres de Richardson ont été donnés.

Le transfert de chaleur par convection naturelle a été étudié par **S. Jiracheewanun G. D. McBain S. W. Armeld M. Behnia (2008) [13]** dans des cavités rectangulaires, en considérant un sol fixe et un toit à chaleur uniforme. Une solution analytique a été obtenue dans le cas d'une longue cavité, en intégrant l'équation d'énergie dans un volume de contrôle donné. Les solutions numériques ont été obtenues pour le cas des cavités avec de facteurs de forme élevés, et pour différentes valeurs de flux de chaleur en considérant des paramètres appropriés pour l'air et l'eau. Le nombre

de Rayleigh dans la hauteur moyenne de cavité a été déterminé par la solution analytique, dans le cas d'un flux unidimensionnel des parois latérales de la cavité.

Le modèle de Darcy avec l'approximation de Boussinesq est utilisé par **Z. Alloui R. Bennacer P. Vasseur (2009) [14]** pour étudier la convection naturelle dans une couche poreuse peu profonde, à perméabilité variable, remplie d'un fluide binaire. Les deux parois horizontales de la cavité ont été soumises à des flux constants de chaleur et de soluté tandis que les deux parois verticales étaient imperméables et stationnaires. Les paramètres régissant le problème sont le nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$  le nombre de Lewis,  $Le$  le rapport de flottabilité,  $\varphi$  le rapport d'aspect de la cavité,  $A$  et la porosité normale,  $\varepsilon$ . Une analyse de stabilité linéaire a été effectuée pour le modèle de l'écoulement parallèle et le nombre critique de Rayleigh a été prédit numériquement pour le début de la bifurcation de Hopf. Les solutions numériques des équations gouvernantes complètes étaient trouvées en excellent accord.

**R. M. Nogueiraa, M. A. Martinsb, et F. Ampessanb (2011) [15]** ont fait une analyse numérique de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire chauffée sur l'un des côtés et refroidie sur le côté opposé. Les températures de la paroi chauffée et de la paroi refroidie ont été supposées constantes. L'objectif de leur étude était de déterminer les effets du rapport d'aspect et du nombre de Rayleigh sur le comportement de l'écoulement et sur le transfert de chaleur dans la cavité. Dans les simulations, le nombre de Rayleigh a considérablement influencé le profil d'écoulement et le transfert de chaleur à l'intérieur de la cavité, ainsi que l'épaisseur de la couche limite thermique. Il a également été vérifié que le nombre de Nusselt dépend fortement du rapport ( $L/D$ ) (Longueur/Hauteur), et que cette variable sans dimension augmente avec l'augmentation du ( $W/L$ ).

La convection naturelle thermosolutale dans une cavité carrée remplie d'un mélange binaire a été étudiée numériquement par **Bouguerra yasser (2014) [16]** Les parois horizontales de l'enceinte sont supposées adiabatiques et imperméables. Par contre les parois verticales ont été soumises à des températures et des concentrations constantes et différentes. Les équations couplées modélisant le phénomène physique ont été discrétisées numériquement par la méthode des volumes finis. L'algorithme

(SIMPLER) a été utilisé pour résoudre les équations algébriques. Les résultats obtenus ont concerné la structure de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse dans l'enceinte.

**S. Manar et H. Rouijaa et E.A. Semma et M. El Alami (2014) [17]** ont fait une étude numérique de la convection normale à l'intérieur d'une cavité carrée à chauffage et refroidissement variables. La cavité contenait un fluide binaire caractérisé par un nombre de Prandlt  $Pr = 0,01$  (cristal liquide). Les parois horizontales supérieure et inférieure de la cavité étudiée ont été considérées à des températures respectives chaude ( $T_c$ ) et froide ( $T_f$ ). Ces températures sont considérées uniformes et d'amplitudes variant sinusoidalement dans le temps, et oscillant autour d'une valeur moyenne constante. Les parois verticales ont été portées à la même basse température, sauf pour la région considérée comme adiabatique côté paroi froide. Les équations de Navier-Stokes et l'équation de conservation de l'énergie ont été résolues par la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus sont donnés pour  $10^3 < R < 10^5, Pr = 0,01$  avec l'amplitude des températures chaudes et froides choisie égale à 1. L'effet sur l'écoulement et sur le transfert de chaleur des fréquences de modulation des températures de séparation froide et chaude a été étudié.

**Kane, M.K., Mbow, C., Sow, M.L. and Sarr, J. (2017) [18]** ont étudié le transfert de chaleur en milieu confiné. Il s'agissait de déterminer les champs thermiques et dynamiques de la cavité en observant l'effet du nombre de Rayleigh qui dépend des caractéristiques du fluide et des températures imposées. Le comportement des couches limites en convection naturelle a été analysé le long de cette cavité carrée. Les moitiés centrales des parois verticales ont été chauffées à différentes températures. La partie active gauche était à une température plus élevée que celle de la paroi droite. Les parties inactives restantes et les parois horizontales (supérieure et inférieure) sont supposées adiabatiques. La modélisation thermique et dynamique du problème bidimensionnel a été réalisée à l'aide d'un code de calcul Fortran 90 et d'un logiciel de visualisation Para View basé sur la méthode des volumes finis. Les équations régissant ce phénomène d'écoulement instationnaire ont ainsi été résolues.

Des études numériques et analytiques sont menées par **BENMENZER Soufyane (2018) [19]** pour étudier la convection naturelle dans une cavité poreuse inclinée avec une source de chaleur volumétrique. Des flux de chaleur sont imposés sur les parois latérales pour assurer le processus de refroidissement. Des solutions numériques sont obtenues pour une large gamme de paramètres de contrôle tels que le rapport d'aspect  $A$ , le nombre de Rayleigh ( $Ra$ ), l'angle d'inclinaison  $\varphi$  et le flux de chaleur sans dimension sur le côté gauche de la couche active  $qL$ . La solution analytique est basée sur l'approximation du flux parallèle et est valable pour ( $A \gg 1$ ). Les résultats montraient une tendance asymptotique du transfert de chaleur avec le nombre de Rayleigh. Un bon accord entre le modèle analytique et la simulation numérique est obtenu dans le cas d'une cavité élançée.

Dans le travail de **BEN KHRIDLA Et BENZID (2019) [20]** la convection naturelle thermosolutale induite par des flux constants de chaleur et de masse avec l'effet Soret pour un milieu fluide a été étudiée analytiquement grâce à l'hypothèse de Boussinesq et à l'approximation de l'écoulement parallèle qui ont permis d'élaborer et de résoudre le modèle mathématique décrivant le phénomène. Les résultats analytiques décrivant le type de déclenchement (super et sous critique) et l'intensité de la convection et les transferts thermique et massique sont clairement influencés par des paramètres de contrôle à savoir : le nombre de Rayleigh thermique  $[Ra]_T$ , de l'effet Soret ( $a$ ), du nombre de Lewis ( $Le$ ), du rapport des forces volumiques ( $\varphi$ ) et du rapport des flux de masse ( $j$ ). Une bonne validation a été remarquée entre la solution analytique et celle obtenue par l'approche numérique basée sur la méthode des volumes finis.

**GHETTAS et HACINI (2019) [21]** ont étudié numériquement et analytiquement l'effet de la variation de la perméabilité sur le transfert de chaleur et de masse pour la convection naturelle dans une cavité poreuse allongée. Les deux parois horizontales de la cavité sont soumises à des flux de chaleur et de solubilité constante, alors que les deux parois verticales sont imperméables. Le modèle Darcy est pris en compte dans la formulation mathématique du problème. La variation de masse volumique est modélisée par l'approximation de Boussinesq. Les solutions numériques ont été obtenues en utilisant une méthode des volumes finies, la solution analytique a été obtenue pour une cavité allongée ( $A \gg 1$ ) en utilisant l'approximation

d'écoulement parallèle au centre de cavité étudié. Il a été constaté que l'effet de la variation de la perméabilité modifier considérablement le déclenchement de la convection qui à son tour affecte les taux de transfert de chaleur et de masse.

A travers le travail de **Ben gachouche Laid Abbassi Oussama (2020) [22]** une étude a été menée sur les effets de la perméabilité variable sur la convection naturelle dans une couche poreuse verticale à flux thermique uniforme, en supposant que la loi de variation de la perméabilité du milieu poreux est exponentielle. Les résultats numériques de la solution des équations gouvernantes ont été obtenus selon l'approche numérique basée sur les méthodes des volumes finis, en faisant varier les paramètres de contrôle, à savoir : le nombre de Rayleigh, et le rapport de forme de la cavité, le taux de transfert de chaleur en terme du nombre de Nusselt, ainsi que la fonction de courant ( $\Psi$ ) ont été déterminés.

**Fichera, Alberto et Marcoux, Manuel et Pagano, Arturo et Volpe, Rosaria (2020) [23]** ont proposé dans leur étude un modèle analytique de la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire fermée remplie par un fluide, avec des flux de chaleur imposés aux parois verticales alors que les parois horizontales étaient adiabatiques. Le modèle analytique donne une description simplifiée, de la température et champs de vitesse mais facile à manipuler. Les champs de température, de vitesse et de pression prévus sont en accord avec ceux obtenus à partir d'un modèle numérique fiable. Les nombres de Nusselt pour les solutions analytiques et numériques sont ensuite calculés et comparés, en faisant varier à la fois le rapport d'aspect de la cavité et de nombre de Rayleigh.

Le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé à perméabilité variable a été étudié analytiquement et numériquement par **D. Damene, Z. Alloui, Y. Alloui, P. Vasseur (2021) [24]** Les parois latérales de la cavité sont chauffées et refroidies par des flux de chaleur constants, tandis que les parois horizontales sont fixes. Les paramètres de contrôle sont le nombre de Rayleigh thermique,  $R$  le rapport d'aspect de la cavité,  $A$  et la constante de perméabilité variable,  $C$  Sur la base des équations de Darcy-Oberbid-Boussinesq, le problème est résolu analytiquement dans les limites d'une cavité verticale élancée peu

profonde. Une étude numérique du même phénomène, obtenue en résolvant l'ensemble du système d'équations gouvernantes, est réalisée pour évaluer la validité des résultats analytiques. La structure de l'écoulement et le transfert de chaleur ont été bien prédits par la solution analytique.

### **I-7) Conclusion :**

Dans ce chapitre, les concepts de base liés aux propriétés thermophysiques des milieux poreux, De plus, le modèle d'écoulement en milieu poreux (est un modèle de Darcy), ont été présentés, puis une synthèse des différents travaux effectués sur la convection naturelle en présence d'un milieu poreux.

Dans le chapitre prochain on va présenter le modèle physique et la formulation mathématique, du problème étudié qui sera régit par les équations gouvernantes.



**Chapitre II :**

**Modèles Physiques et  
Formulations  
Mathématiques**

## II-1) Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons des équations mathématiques basées sur la formulation aux dérivées partielles, et qui décrivent le transfert de chaleur convectif naturel dans une cavité carrée bidimensionnelle, remplissant un milieu poreux. La formulation mathématique, dans sa forme, est basée sur l'équation de continuité, et les équations du mouvement qui sont décrites par les équations de Navier et de Stokes décrite par le modèle de Darcy pour le cas d'un milieu poreux ainsi que l'équation d'énergie.

## II-2) Description du problème :

Dans ce travail, nous faisons une étude de transfert de chaleur dans les milieux poreux. Pour cela nous considérons un milieu poreux saturé par un fluide d'une cavité carrée de largeur  $L'$  et hauteur  $H'$  (figure II.1). Les parois actives horizontales de la cavité sont exposées aux effets du flux de chaleur  $q'$ , tandis que les autres parois sont supposées imperméables et adiabatiques. On établira donc les équations gouvernantes décrivant le phénomène de la convection naturelle.

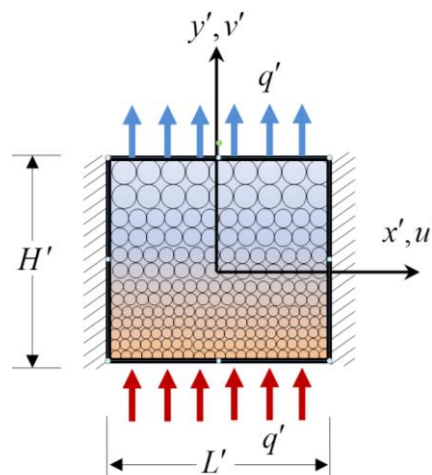


Figure II.1 : modèle géométrique de la cavité poreuse étudiée

## II-3) Hypothèses simplificatrices :

Dans la majorité des études sur la convection naturelle en milieu poreux, il existe des approximations qui sont prises en compte afin de développer une formulation simple et rapide pour traiter le modèle mathématique, ainsi nous nous appuyons sur les hypothèses suivantes :

- Le fluide est newtonien et incompressible.
- L'écoulement est bidimensionnel.
- Les sources de chaleur et de masse sont négligeables
- L'écoulement est laminaire.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable, le modèle de Darcy est appliqué.
- Les autres propriétés thermophysiques du fluide ( $\mu, \nu, k_p, C_p$ ) sont supposées constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq-Oberbeck.

#### II-4) L'hypothèse de Boussinesq :

L'hypothèse de Boussinesq est utilisée pour la simplification de l'équation d'état du fluide, la différence de densité est négligée dans le cas des fluides incompressibles car elle est considérée comme faible sauf dans le cas de la convection naturelle car elle est un facteur principal de mouvement des fluides, donc cette hypothèse suppose que la densité dans le terme des forces volumiques varie linéairement avec la température et elle est donnée par la relation suivante [19].

$$\rho = \rho_0[1 - \beta'_T(T' - T'_0)] \quad (II.1)$$

Où :

$\rho_0$ : est la masse volumique de référence de fluide à  $T'_0$ .

$T'_0$ : La température de référence.

$T'$ : Représente la température de la solution en un point donné du système.

$\beta'_T$ : représente le coefficient d'expansion volumique thermique est donnée par l'équation suivante :

$$\beta'_T = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right) \quad (II.2)$$

$\beta'_T$ : est normalement positif pour tous les fluides, sauf l'eau entre  $0C^\circ$  et  $4C^\circ$ .

#### II-5) Equations générales dans un milieu poreux

Pour étudier le phénomène de convection naturelle en milieu poreux nous avons utilisé le modèle de Darcy, qui néglige les forces d'inertie et les forces visqueuses selon **Nield & Bejan [23]**, ce modèle est valide lorsque les conditions suivantes sont satisfaites.

$$\begin{cases} \varepsilon' < 0.8 \\ Da \leq 10^{-6} \\ Re < 1 \end{cases} \quad (II.3)$$

$\varepsilon'$ : est la porosité du milieu poreux,

$Da = k/H^2$  : est le nombre de Darcy.

$Re = v_p d/\nu$  : Nombre de Reynolds.

Avec  $v_p$ : la vitesse du fluide dans le pore. et  $d$ : diamètre du pore.

$\nu = \mu/\rho$ : viscosité cinématique du fluide.

Pour résoudre le problème, les équations suivantes doivent être utilisées.

### II-5-1) Equation de continuité :

L'équation de conservation de masse, ou l'équation de continuité pour un écoulement s'écrit :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0 \quad (II.4)$$

Hypothèses :

Fluide incompressible  $\rho = cte$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0$$

Si par hypothèse le fluide est incompressible et isotherme, ces équations se réduisent à l'équation de continuité :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (II.5)$$

Avec  $u'$  et  $v'$  sont respectivement les composantes sur l'axe des  $x'$  et l'axe des  $y'$ .

### II-5-2) Equations de quantité de mouvement : Loi de Darcy

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu} (\vec{\nabla} P - \rho \vec{g}) \quad (II.6)$$

La direction  $x'$  :

$$u' = -\frac{k'}{\mu} \left( \frac{\partial P'}{\partial x'} \right) \quad (II.7)$$

**La direction  $y'$  :**

$$v' = -\frac{k'}{\mu}(\nabla P + \rho g) \quad (II.8)$$

En remplaçant l'expression (II. 1) dans l'équation(II. 8), on obtient :

$$v' = -\frac{k'}{\mu}[\nabla P + \rho_0 g(1 - \beta'_T(T' - T'_0))]$$

$$v' = -\frac{k'}{\mu} \left[ \frac{\partial P'}{\partial y'} + \rho_0 g - \rho_0 g \beta'_T(T' - T'_0) \right] \quad (II.9)$$

Où  $\mu, g$  sont respectivement la viscosité dynamique de fluide et l'accélération de la pesanteur, le terme de  $\rho_0 g$  ajouté dans l'expression de gradient de pression pour obtenir une forme de pression motrice donnée par la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y'} + \rho_0 g = \frac{\partial(P + \rho_0 g y')}{\partial y'} = \frac{\partial P'}{\partial y'} \\ P' = P + \rho_0 g y' \end{array} \right. \quad (II.10)$$

Avec le terme  $\rho_0 g y'$  qui représente la pression relative.

Après simplification, on trouve :

$$v' = -\frac{k'}{\mu} \left[ \frac{\partial P'}{\partial y'} - \rho_0 g \beta'_T(T' - T'_0) \right] \quad (II.11)$$

On a :

$$\frac{u'}{k'} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P'}{\partial x'} \quad (II.12)$$

$$\frac{v'}{k'} = -\frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial P'}{\partial y'} - \rho_0 g \beta'_T(T' - T'_0) \right] \quad (II.13)$$

Dérivation de l'expression  $u'$  par rapport à  $y'$  :

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{k'} u' \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'} \quad (II.14)$$

Dérivation de l'expression  $v'$  par rapport à  $x'$  :

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{k'} v' \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'} + \frac{1}{\mu} \rho_0 g \beta'_T \frac{\partial}{\partial x'} (T' - T'_0) \quad (II.15)$$

Après simplification, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{k'} v' \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'} + \frac{1}{\mu} \rho_0 g \beta'_T \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{1}{\mu} \rho_0 g \beta'_T \frac{\partial T'_0}{\partial x'} \quad (II.16)$$

Dans lequel :

$$T'_0 = cte \Rightarrow \frac{\partial T'_0}{\partial x'} = 0$$

En soustrayant l'expression  $v'$  de  $u'$  :

$$\frac{1}{k'} \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{1}{k'} \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'} - \frac{1}{\mu} \rho_0 g \beta'_T \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (II.17)$$

On obtient :

$$\nabla \frac{1}{k'} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) = -\frac{\rho_0 g \beta'_T}{\mu} \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (II.18)$$

La viscosité cinématique  $\vartheta$  du fluide qui est définie par :

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho_0}$$

Dans lequel  $\mu$ : est la viscosité dynamique du fluide.

$$\nabla \frac{1}{k'} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) = -\frac{g \beta'_T}{\vartheta} \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (II.19)$$

### II-5-3) Equation de conservation d'énergie :

Phase solide et phase fluide [1].

#### II-5-3-1) Phase solide :

$$(1 - \varepsilon')(\rho c)_s \frac{\partial T'}{\partial t'} = (1 - \varepsilon')k_s \nabla^2 T' \quad (II.20)$$

#### II-5-3-2) Phase fluide :

$$\varepsilon'(\rho c)_f \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho c)_f \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = \varepsilon' k_f \nabla^2 T' + q' \quad (II.21)$$

Il n'y a pas source chaleur ( $q' = 0$ )

En ajoutant les deux équations (II.20) et (II.21) terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon')(\rho c)_s \frac{\partial T'}{\partial t'} + \varepsilon'(\rho c)_f \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho c)_f \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \\ = (1 - \varepsilon')k_s \nabla^2 T' + \varepsilon' k_f \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (II.22)$$

$$\begin{aligned} \left( (1 - \varepsilon')(\rho c)_s + \varepsilon'(\rho c)_f \right) \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho c)_f \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \\ = \left( (1 - \varepsilon')k_s + \varepsilon' k_f \right) \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (II.23)$$

Dans lequel :

$$\begin{cases} ((1 - \varepsilon')(\rho c)_s + \varepsilon'(\rho c)_f) = (\rho c)_p \\ ((1 - \varepsilon')k_s + \varepsilon'k_f) = k_p \end{cases} \quad (II. 24)$$

Après simplification, on trouve

$$(\rho c)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho c)_f \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial t'} \right) = k_p \nabla^2 T' \quad (II. 25)$$

$(\rho c)_p$ : La capacité calorifique du milieu poreux.

$(\rho c)_s$ : La capacité calorifique du solide.

$(\rho c)_f$ : La capacité calorifique du fluide.

$k_f$ : est la conductivité thermique du fluide.

$k_s$ : est la conductivité thermique du solide.

$k_p$ : est la conductivité thermique du milieu poreux.

#### II-5-4) Équations en formulation de fonction de courant :

Comme notre problème est supposé bidimensionnel, il est pratique d'introduire la fonction de courant  $\Psi'$  définie comme :

$$\begin{cases} u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} , \quad v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \\ J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \quad (II. 26)$$

L'équation de continuité est automatiquement satisfaite par la fonction de courant  $\Psi'$

Prenant le rotationnel de l'équation (II. 24) et substituant l'équation (II. 26) .

$$\nabla \frac{1}{k'} \left( \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial x'} \left( -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \right) \right) = -\frac{\beta'_T g}{\vartheta} \frac{\partial T'}{\partial x'}$$

Lequel :

$$\nabla \frac{1}{k'} \left( \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial^2 y'} + \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial^2 x'} \right) = -\frac{\beta'_T g}{\vartheta} \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (II. 27)$$

On obtient alors la loi de darcy en termes de la fonction de courant  $\Psi'$  :

$$\nabla \frac{1}{k'} (\nabla^2 \Psi') = -\frac{\beta'_T g}{\vartheta} \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (II. 28)$$

En substituant l'équation (II. 26) à l'équation (II. 25) :

$$(\rho c)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho c)_f \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k_p \nabla^2 T' \quad (II. 29)$$

Dans lequel :

$$\left( \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = J(\Psi', T')$$

Et à partir de là, nous arrivons à :

$$(\rho c)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho c)_f J(\Psi', T') = k_p \nabla^2 T' \quad (II.30)$$

## II-6) Conditions aux limites :

Conditions aux limites sur les parois de la cavité sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \pm L'/2 \quad , \quad y' = \pm H'/2 \quad , \quad \Psi' = 0 \\ \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{q'}{\lambda} \quad , \quad \Psi' = 0 \end{array} \right. \quad (II.31)$$

## II-7) Equations gouvernantes adimensionnelles :

Dans tous les problèmes physiques en règle générale, le comportement du système étudié est fonction d'un certain nombre de paramètres. La mise sous forme adimensionnelle est nécessaire pour différentes raisons. Du point de vue pratique, le système physique de départ est fonction d'un grand nombre de paramètres qu'il faudra fixer lors d'une quelconque simulation numérique ou analytique. Le fait de rendre adimensionnel un problème permet de réduire considérablement le nombre de paramètres nécessaires à la résolution du système mathématique et de faire ressortir les paramètres adimensionnels caractéristiques d'une classe de problème donnée, exemple : le nombre de Reynolds, ou nombre de Rayleigh.

Les équations du problème sont rendues adimensionnelles à l'aide des grandeurs de référence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) = \left( \frac{x'}{H'}, \frac{y'}{H'} \right) \quad , \quad (u, v) = \left( \frac{u'}{\alpha/H'}, \frac{v'}{\alpha/H'} \right) \quad , \quad k = \frac{k'}{k_r} \\ t = \frac{t'}{H'^2 \sigma / \alpha} \quad , \quad T = \frac{T' - T'_0}{\Delta T^*} \quad , \quad \Psi = \frac{\Psi'}{\alpha} \\ \alpha = \frac{k_p}{(\rho c)_f} \quad , \quad \sigma = \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f} \quad , \quad \Delta T^* = \frac{q' \cdot H'}{\lambda} \end{array} \right. \quad (II.32)$$

En remplaçant les grandeurs de référence dans l'équation (II.28) :

$$\nabla \left( \frac{1}{k \cdot k'_r} \nabla^2 (\Psi \cdot \alpha) \right) = - \frac{\beta'_T g}{\vartheta} \frac{\partial (T \cdot \Delta T^* + T'_0)}{\partial (x \cdot H')} \quad (II.33)$$



Dans lequel :

$$T'_0 = cte \Rightarrow \frac{\partial T'_0}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\alpha}{H'^2 \cdot k'_r} \nabla \left( \frac{1}{k} \nabla^2 \Psi \right) = - \frac{\beta'_T g \Delta T^*}{\vartheta H'} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\nabla \left( \frac{1}{k} \nabla^2 \Psi \right) = - \frac{\beta'_T g \Delta T^* k'_r H'^2}{\vartheta H' \alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (II.34)$$

Après simplification, on trouve :

$$\nabla \left( \frac{1}{k} \nabla^2 \Psi \right) = - \frac{\beta'_T g \Delta T^* k'_r H'}{\vartheta \alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (II.35)$$

L'équation indique que le système est caractérisé par un paramètre sans dimension, le nombre de chaleur de Darcy-Rayleigh  $R_T$ .

$$R_T = \frac{\beta'_T g \Delta T^* k'_r H'}{\vartheta \alpha} \quad (II.36)$$

Et à la fin on obtient l'équation de la quantité du mouvement :

$$\nabla \left( \frac{1}{k} \nabla^2 \Psi \right) = -R_T \frac{\partial T}{\partial x} \quad (II.37)$$

En remplaçant les grandeurs de référence dans l'équation (II.30) :

$$\begin{cases} (\rho c)_f = \frac{k_p}{\alpha} \\ (\rho c)_p = \frac{\sigma k_p}{\alpha} \end{cases} \quad (II.38)$$

Dans lequel :

$\sigma$  : est le rapport de capacité thermique du fluide pour un milieu poreux

$\alpha$  : est la diffusivité thermique du fluide

$$\frac{k_p \sigma}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{T \cdot \Delta T^* + T_0}{t H'^2 \sigma / \alpha} \right) + \frac{k_p \alpha \Delta T^*}{\alpha H'^2} J(\Psi, T) = \frac{k_p \Delta T^*}{H'^2} \nabla^2 T$$

$$\frac{k_p \Delta T^*}{H'^2} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + J(\Psi, T) \right) = \frac{k_p \Delta T^*}{H'^2} \nabla^2 T \quad (II.39)$$

Et à la fin on obtient l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(\Psi, T) = \nabla^2 T \quad (II.40)$$

**II-8) Conditions aux limites adimensionnelles :**

Les conditions aux limites non dimensionnelles sur les parois de l'enceinte sont :

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} & , & \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & , & \Psi = 0 \\ y = \pm \frac{1}{2} & , & \frac{\partial T}{\partial y} = -1 & , & \Psi = 0 \end{cases} \quad (II.41)$$

**II-9) Transfert thermique :****II-9-1) Le nombre de Nusselt :**

Le taux de transfert de chaleur à l'intérieur du fluide peut être déterminé avec un nombre sans dimension, qui est le nombre de Nusselt " $Nu$ " défini par la relation suivante :

Pour une position donnée de  $x$  on trouve :

$$Nu = \frac{q' \cdot H'}{\lambda \cdot \Delta T'} = \frac{q' \cdot H'}{\lambda \cdot \Delta T^* \cdot \Delta T} \quad (II.42)$$

$$\text{avec} \quad \Delta T^* = \frac{q' \cdot H'}{\lambda}$$

Donc :

$$Nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{T\left(x, -\frac{1}{2}\right) - T\left(x, +\frac{1}{2}\right)} \quad (II.43)$$

**II-10) Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté le modèle physique de notre problème en coordonnées cartésiennes, les hypothèses simplifiées ainsi que les conditions aux limites de notre problème physique et la formulation mathématique de la convection naturelle dans un milieu poreux, où une analyse a été faite pour simplifier le problème, il ressort des coefficients de contrôle, dans le chapitre suivant nous présenterons la méthode numérique que nous utilisons pour résoudre ces équations.

**Chapitre III :**

**Solution Numérique**

### III-1) Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base régissant la convection naturelle. Ces équations forment un système d'équations différentielles partielles non linéaires couplées. Il existe différentes méthodes numériques pour la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis.

Dans ce chapitre on va exposer l'approche numérique, utilisée pour la résolution de toutes les équations régissant le problème, qui est : La méthode des volumes finis.

### III-2) Méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Intensivement employée dans la mécanique des fluides, la météorologie, l'électromagnétisme et beaucoup d'autres secteurs de technologie régis par les systèmes conservateurs qui peuvent être écrits sous la forme intégrale d'un volume de contrôle.

Dans la méthode des Volumes Finis, les termes de divergence apparaissant dans les équations aux dérivées partielles à résoudre sont traités en utilisant le théorème de la divergence. Ainsi, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes de contrôle et les flux aux interfaces sont approchés par une fonction de flux numérique.

Les méthodes de Volumes Finis sont conservatives car on impose que le flux entrant dans un volume de contrôle soit égal au flux sortant du volume adjacent. Ces méthodes sont par conséquent très bien adaptées à la résolution de lois de conservation.

De ce fait, on a choisi la méthode des volumes finis, méthode qui a été développée pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement de fluides, elle est décrite en détail dans le livre de S.V. Patankar. [24]

### III-3) Principe de la Méthode :

En utilisant cette méthode, le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous domaines élémentaires appelés volumes de contrôle. La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle. Chacun de ces derniers englobe un nœud dit nœud principal.

La méthode des volumes finis, comporte essentiellement :

- la discrétisation du domaine considéré en volumes de contrôles.
- la formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles.

Le modèle doit être stable et convergent. [25]

### III-4) Le maillage :

C'est la subdivision du domaine d'étude selon les directions des coordonnées utilisées, dans notre cas c'est les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ , en un ensemble de volume fini qui est égal à la quantité  $(\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y)$ .

Ce volume de contrôle contenant un nœud dit nœud principal, ses faces latérales (est, ouest, nord et sud) sont désignées respectivement par les lettres :  $e, w, n, s$ , et il est entouré par quatre autres volumes adjacents, leurs centres sont les points  $E, W, N, S$ .

Les quantités scalaires courant et température  $(\Psi, T)$  sont stockées au centre de ce volume, et les grandeurs vectorielles telles les composantes longitudinales et transversales de la vitesse (respectivement  $u, v$ ) sont localisées aux centres de ses faces latérales.

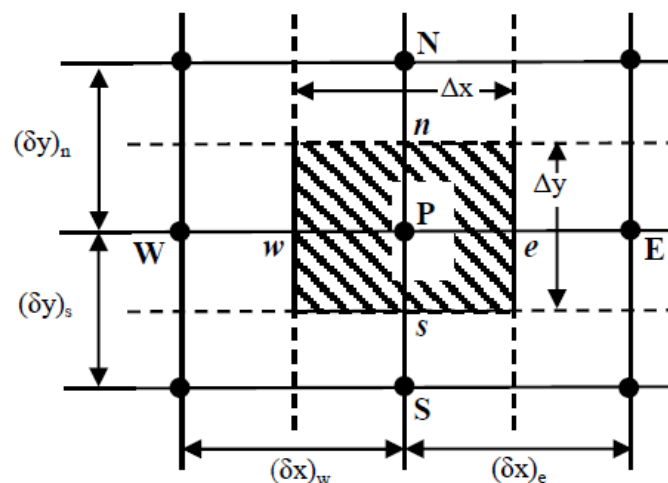


Figure (III.1) : Représentation d'un volume de contrôle bidimensionnel.

### III-5) Forme conservatrice des équations gouvernantes :

Dans la méthode des volumes finis, les intégrales de volume dans une équation aux dérivées partielles qui contiennent un terme de divergence ( $\nabla$ ) sont convertis en intégrales de surface, en utilisant le théorème de la divergence.

$$\iiint \nabla(\nabla T) dV = \iint \nabla T \cdot d\vec{S} \quad (III.1)$$

Où  $d\vec{S}$  est le vecteur normal à la surface

La méthode des volumes de contrôle est, donc, une technique de discrétisation pour la résolution des équations qui s'écrivent sous la forme conservatrice comme suit :

- **Equation de mouvement :**

$$\nabla \left( \frac{\nabla \Psi}{k} \right) = -R \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (III.2)$$

- **Équation d'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}T) = \nabla \cdot (\nabla T) \quad (III.3)$$

Les équations de conservation présentées au chapitre précédent peuvent être réduites à une seule équation générale, en coordonnées cartésiennes selon la forme :

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}}_A + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{V}\mathcal{J})}_B = \underbrace{\phi \nabla \cdot (\nabla \mathcal{J})}_C + \underbrace{t_s}_D \quad (III.4)$$

Avec :

A : Terme transitoire.

B : Terme convectif.

C : Terme diffusif.

D : Terme source.

$\mathcal{J}$  La fonction à déterminer ( $\Psi, T$ ) et tous les termes de l'équation sont regroupés dans le tableau suivant :

Equation	$\mathcal{T}$	Terme Transition.	Terme Convection.	Terme diffusion.	Terme source.	$\phi$
D'énergie	T	$\frac{\partial T}{\partial t}$	$\nabla \cdot (\vec{V}T)$	$\nabla \cdot (\nabla T)$	0	1
De mouvement	$\Psi$	0	0	$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \Psi}{k} \right)$	$-R \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	1

**Tableau III-1** : Spécification des coefficients des termes de diffusion, de convection et du terme source de l'équation de transport.

### III-6) Application de l'intégration sur l'équation de transport :

En intégrant l'équation (III.4) sur un volume de contrôle, nous obtenons l'équation suivante :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V}\mathcal{T}) d\Omega = \iiint_{\Omega} \phi \nabla \cdot (\nabla \mathcal{T}) d\Omega + \iiint_{\Omega} t_s \cdot d\Omega \quad (III.5)$$

- **Terme Transitoire :**

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} d\Omega &= \iint_s \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_s^n \int_w^e \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} \cdot dx dy = \left( \frac{x_e - x_w}{\Delta x} \right) \left( \frac{y_n - y_s}{\Delta y} \right) \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{T}}_p}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \bar{\mathcal{T}}_p}{\partial t} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III.6)$$

- **Terme Convectif :**

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V}\mathcal{T}) d\Omega &= \iint_s \vec{V}\mathcal{T} \cdot d\vec{S} = \int_s^n \int_w^e \vec{V}\mathcal{T} \cdot dx dy \\ &= (u_e \mathcal{T}_e - u_w \mathcal{T}_w) \Delta y + (v_n \mathcal{T}_n - v_s \mathcal{T}_s) \Delta x \end{aligned} \quad (III.7)$$

- **Terme diffusif :**

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \phi \nabla \cdot (\nabla \mathcal{T}) d\Omega &= \iint_s \phi \cdot \nabla \mathcal{T} \cdot d\vec{S} = \int_s^n \int_w^e \phi \cdot \nabla \mathcal{T} \cdot dx dy \\ &= \left[ \left( \phi \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_e - \left( \phi \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( \phi \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_n - \left( \phi \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \end{aligned} \quad (III.8)$$

- **Terme source :**

$$\iiint_{\Omega} t_s \cdot d\Omega = \iint_s t_s \cdot d\vec{S} = \bar{t}_s \cdot \Delta x \Delta y \quad (III.9)$$

Après intégration, on regroupe les différents termes de l'équation de transport qui aura la forme suivante :

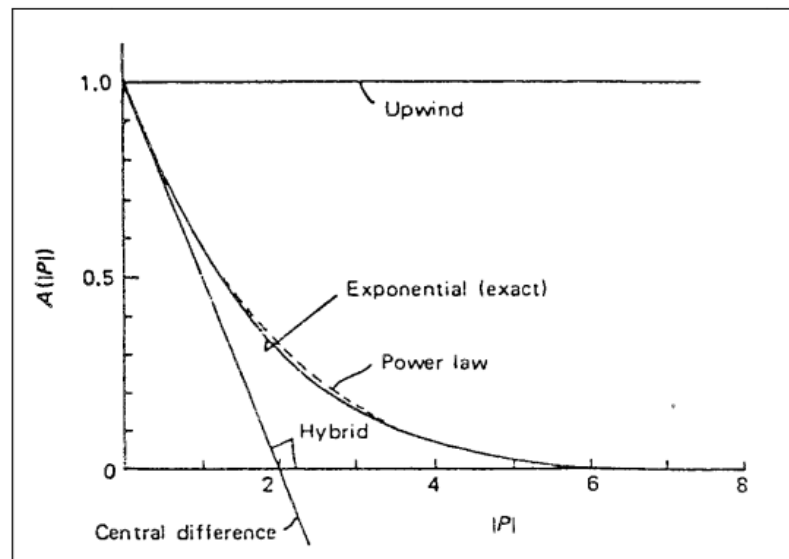
$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\mathcal{J}}_p}{\partial t} \Delta x \Delta y + [(u_e \mathcal{J}_e - u_w \mathcal{J}_w) \Delta y + (v_n \mathcal{J}_n - v_s \mathcal{J}_s) \Delta x] \\ & = \left[ \left( \phi \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right)_e - \left( \phi \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( \phi \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right)_n - \left( \phi \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right)_s \right] \Delta x + \bar{\tau}_s \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III.10)$$

### III-7) Schéma d'interpolation

Le schéma d'interpolation utilisé dans notre étude est celui aux différences centrées. On présente ici quelques schémas d'interpolation utilisés les études de convection et qui servent à déterminer la valeur de la variable dépendante. On trouve, le schéma aux des différences décentrées (Upwind Scheme), qui est moins précis que celui aux différences centrées pour les écoulements qui ne sont pas à convection dominée, un certain nombre d'auteurs ont proposé un deuxième schéma qui est une combinaison des deux schémas précédents, appelé schéma hybride (Hybrid Scheme).

Le critère de choix d'un schéma revient à déterminer un certain nombre adimensionnel qui est le nombre de Péclet, qui représente le rapport des flux de la convection à la diffusion, et vu que dans notre étude on se limite à la convection naturelle laminaire aux faibles valeurs de Reynolds, on a opté pour le schéma de différences centrées, qui utilise une procédure d'interpolation linéaire valable pour les nombres de Péclet  $|\text{Pe}| < 2$ .

On note que le schéma le schéma hybride (Hybrid Scheme) rejoint le schéma aux différences centrées pour  $|\text{Pe}| < 2$  et le schéma aux différences décentrées pour  $|\text{Pe}| > 2$ , l'inconvénient majeur de ce schéma est l'erreur introduite au voisinage de  $|\text{P}| = 2$



**Figure III-2** : prédiction de pour différents schémas en fonction du nombre de Péclet [24]



### III-8) Discrétisation de l'équation de transport :

$\bar{\mathcal{J}}$  est la valeur moyenne de la fonction  $\mathcal{J}$  dans le volume de contrôle. En utilisant les différences finies, la dérivée dans le temps est approximée par une discrétisation implicite du premier ordre, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{J}}}{\partial t} = \frac{\bar{\mathcal{J}} - \bar{\mathcal{J}}^0}{\Delta t} \quad (III. 11)$$

Avec  $\bar{\mathcal{J}}^0$  la fonction au temps «  $t$  » et  $\bar{\mathcal{J}}$  la fonction au temps «  $t+\Delta t$  » donc :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathcal{J}}}{\partial t} d\Omega = \frac{\bar{\mathcal{J}} - \bar{\mathcal{J}}^0}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y \quad (III. 12)$$

On procède de la même manière pour tous les autres termes.

- **Terme transitoire :**

$$T_{\text{transitoire}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{J}}_p}{\partial t} \Delta x \Delta y = \frac{\bar{\mathcal{J}}_p - \bar{\mathcal{J}}_p^0}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y \quad (III. 13)$$

- **Terme Convectif :**

En utilisant le schéma de différences centrées de Patankar on peut évaluer les termes de la fonction de transport autour du volume de contrôle en fonction des valeurs aux nœuds du maillage comme suit :

$$\mathcal{J}_e = \frac{\bar{\mathcal{J}}_E + \bar{\mathcal{J}}_p}{2}, \mathcal{J}_w = \frac{\bar{\mathcal{J}}_W + \bar{\mathcal{J}}_p}{2}, \mathcal{J}_s = \frac{\bar{\mathcal{J}}_S + \bar{\mathcal{J}}_p}{2}, \mathcal{J}_n = \frac{\bar{\mathcal{J}}_N + \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \quad (III. 14)$$

Les expressions (III. 14) seront introduites dans l'équation (III. 7) comme suit :

$$\begin{aligned} & \left[ u_e \left( \frac{\bar{\mathcal{J}}_E + \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \right) - u_w \left( \frac{\bar{\mathcal{J}}_W + \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \right) \right] \Delta y + \left[ v_n \left( \frac{\bar{\mathcal{J}}_N + \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \right) - v_s \left( \frac{\bar{\mathcal{J}}_S + \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \right) \right] \Delta x \\ &= \frac{u_e \bar{\mathcal{J}}_E}{2} \Delta y + \frac{u_e \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \Delta y - \frac{u_w \bar{\mathcal{J}}_W}{2} \Delta y - \frac{u_w \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \Delta y + \frac{v_n \bar{\mathcal{J}}_N}{2} \Delta x + \frac{v_n \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \Delta x - \frac{v_s \bar{\mathcal{J}}_S}{2} \Delta x - \frac{v_s \bar{\mathcal{J}}_p}{2} \Delta x \end{aligned}$$

Quelques simplifications seront nécessaires pour aboutir à l'expression finale :

$$\begin{aligned} &= \frac{u_e \bar{\mathcal{J}}_E}{2} \Delta y - \frac{u_w \bar{\mathcal{J}}_W}{2} \Delta y + \frac{u_n \bar{\mathcal{J}}_N}{2} \Delta x - \frac{u_s \bar{\mathcal{J}}_S}{2} \Delta x + \frac{\bar{\mathcal{J}}_p}{2} (u_e \Delta y - u_w \Delta y + v_n \Delta x - v_s \Delta x) \\ &= \frac{u_e \bar{\mathcal{J}}_E}{2} \Delta y - \frac{u_w \bar{\mathcal{J}}_W}{2} \Delta y + \frac{u_n \bar{\mathcal{J}}_N}{2} \Delta x - \frac{u_s \bar{\mathcal{J}}_S}{2} \Delta x + \frac{\bar{\mathcal{J}}_p}{2} [(u_e - u_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x] \\ &= \frac{u_e \bar{\mathcal{J}}_E}{2} \Delta y - \frac{u_w \bar{\mathcal{J}}_W}{2} \Delta y + \frac{u_n \bar{\mathcal{J}}_N}{2} \Delta x - \frac{u_s \bar{\mathcal{J}}_S}{2} \Delta x + \frac{\bar{\mathcal{J}}_p}{2} \cdot \Delta x \Delta y \left[ \frac{\left( \frac{u_e - u_w}{\Delta x} \right) + \left( \frac{v_n - v_s}{\Delta y} \right)}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \right] \end{aligned}$$

L'équation finale du terme convectif s'écrit sous la forme suivante

$$T_{\text{Convectif}} = \frac{1}{2} (u_e \cdot \Delta y \cdot \bar{\mathcal{T}}_E + v_n \cdot \Delta x \cdot \bar{\mathcal{T}}_N - u_w \cdot \Delta y \cdot \bar{\mathcal{T}}_W - v_s \cdot \Delta x \cdot \bar{\mathcal{T}}_S) \quad (III. 15)$$

- **Terme diffusif :**

On pose :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_e = \frac{\bar{\mathcal{T}}_E - \bar{\mathcal{T}}_p}{\Delta x}, \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_w = \frac{\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_W}{\Delta x} \\ \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_s = \frac{\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_S}{\Delta y}, \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_n = \frac{\bar{\mathcal{T}}_N - \bar{\mathcal{T}}_p}{\Delta y} \end{cases} \quad (III. 16)$$

Remplacer (III. 16) dans l'équation (III. 8) :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \phi \frac{\bar{\mathcal{T}}_E - \bar{\mathcal{T}}_p}{\Delta x} - \phi \frac{\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_W}{\Delta x} \right) \Delta y \right] + \left[ \left( \phi \frac{\bar{\mathcal{T}}_N - \bar{\mathcal{T}}_p}{\Delta y} - \phi \frac{\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_S}{\Delta y} \right) \Delta x \right] \\ & = \phi_e \frac{\bar{\mathcal{T}}_E - \bar{\mathcal{T}}_p}{\Delta x} \Delta y - \phi_w \frac{\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_W}{\Delta x} \Delta y + \phi_n \frac{\bar{\mathcal{T}}_N - \bar{\mathcal{T}}_p}{\Delta y} \Delta x - \phi_s \frac{\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_S}{\Delta y} \Delta x \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve :

$$T_{\text{diffusif}} = \frac{\phi_e \Delta y}{\Delta x} (\bar{\mathcal{T}}_E - \bar{\mathcal{T}}_p) - \frac{\phi_w \Delta y}{\Delta x} (\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_W) + \frac{\phi_n \Delta x}{\Delta y} (\bar{\mathcal{T}}_N - \bar{\mathcal{T}}_p) - \frac{\phi_s \Delta x}{\Delta y} (\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_S) \quad (III. 17)$$

- **Terme source.**

$$T_{\text{source}} = \bar{t}_s \cdot \Delta x \Delta y \quad (III. 18)$$

L'équation finale de transport après remplacement des termes transitoire, convectif, diffusif et source prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_p^0}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} (u_e \cdot \Delta y \cdot \bar{\mathcal{T}}_E + v_n \cdot \Delta x \cdot \bar{\mathcal{T}}_N - u_w \cdot \Delta y \cdot \bar{\mathcal{T}}_W - v_s \cdot \Delta x \cdot \bar{\mathcal{T}}_S) \\ & = \frac{\phi_e \Delta y}{\Delta x} (\bar{\mathcal{T}}_E - \bar{\mathcal{T}}_p) - \frac{\phi_w \Delta y}{\Delta x} (\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_W) + \frac{\phi_n \Delta x}{\Delta y} (\bar{\mathcal{T}}_N - \bar{\mathcal{T}}_p) - \frac{\phi_s \Delta x}{\Delta y} (\bar{\mathcal{T}}_p - \bar{\mathcal{T}}_S) + \bar{t}_s \cdot \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III. 19)$$

En tenant compte des résultats (III. 12)-(III. 16), l'équation (III. 4) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$a_p \bar{\mathcal{T}}_p + a_w \bar{\mathcal{T}}_w + a_e \bar{\mathcal{T}}_e + a_s \bar{\mathcal{T}}_s + a_n \bar{\mathcal{T}}_n = b \quad (III. 20)$$

Avec :

$$a_p = \frac{1}{\Delta t} + 2 \cdot \mathcal{P} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)$$

$$a_e = \frac{u_e}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\phi}{\Delta x^2}$$

$$a_w = \frac{-u_w}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\phi}{\Delta x^2}$$

$$a_n = \frac{v_n}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\phi}{\Delta x^2}$$

$$a_s = \frac{-v_s}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\phi}{\Delta x^2}$$

$$b = \bar{t}_s + \frac{\bar{\mathcal{J}}_p^0}{\Delta t}$$

Le maillage de la figure (III.3), permet d'écrire l'équation (III.20) sous la forme indicielle :

$$a_{i,j} \bar{\mathcal{J}}_{i,j} + a_{i-1,j} \bar{\mathcal{J}}_{i-1,j} + a_{i+1,j} \bar{\mathcal{J}}_{i+1,j} + a_{i,j-1} \bar{\mathcal{J}}_{i,j-1} + a_{i,j+1} \bar{\mathcal{J}}_{i,j+1} = b_{i,j} \quad (III.21)$$

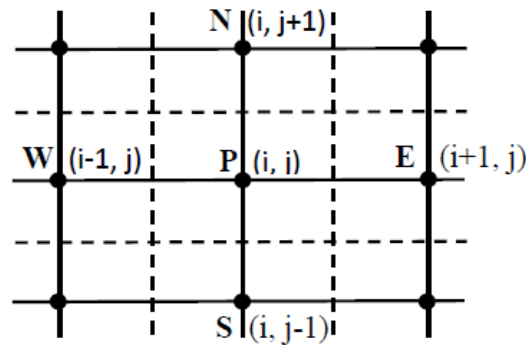


Figure (III.3) : forme indicielle des points P, W, E, S et N

### III-9) Méthode implicite aux directions alternées :

Les équations gouvernantes du problème, à savoir l'équation de conservation du mouvement et l'équation d'énergie, seront résolues par la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I) (**Alternating Direction Implicite**). Cette méthode qui est inconditionnellement stable se base sur un schéma à pas fractionnaire, aux directions alternées, implicite et explicite.

Le Pas de temps choisi dans cette méthode est divisé en deux, on considère d'abord le demi-pas ( $t+0.5\Delta t$ ) de temps intermédiaire entre  $t$  et  $t+\Delta t$ . De cette manière on aura deux systèmes matriciels tri-diagonaux dans les deux directions et pour chaque pas de temps. L'un est obtenu par la discrétisation implicite selon la direction  $x$  et explicite selon la direction  $y$ , l'autre par la discrétisation implicite selon la direction  $y$  et explicite selon la direction  $x$ .

**III-9-1) Schéma implicite en x explicite en y :**

La discrétisation implicite de l'équation (III.21) selon la direction x et explicite selon la direction y donne l'équation suivante :

$$A_i \bar{T}_{i-1,j}^{0.5} + B_i \bar{T}_{i,j}^{0.5} + C_i \bar{T}_{i+1,j}^{0.5} = D_i \quad (III. 22)$$

Avec

$$A_i = a_{i-1,j} ; B_i = a_{i,j} ; C_i = a_{i+1,j} \text{ et } D_i = b_{i,j} - a_{i,j-1} \bar{T}_{i,j-1}^0 - a_{i,j+1} \bar{T}_{i,j+1}^0$$

$\bar{T}^0$  C'est la fonction au temps « t » et  $\bar{T}^{0.5}$  la fonction au temps « t+0.5.Δt »

Pour  $i=2, n-1$  et  $j=2, m-1$

**III-9-2) Schéma explicite en x et implicite en y :**

Dans ce cas l'équation (III.21) s'écrit sous la forme :

$$A'_j \bar{T}_{i,j-1}^{0.5} + B'_j \bar{T}_{i,j}^{0.5} + C'_j \bar{T}_{i,j+1}^{0.5} = D'_j \quad (III. 23)$$

Avec :

$$A'_j = a_{i,j-1} ; B'_j = a_{i,j} ; C'_j = a_{i,j+1} \text{ et } D'_j = b_{i,j} - a_{i-1,j} \bar{T}_{i-1,j}^{0.5} - a_{i+1,j} \bar{T}_{i+1,j}^{0.5}$$

$\bar{T}^1$  est la fonction au temps « t+Δt »

Pour  $i=2, n-1$  et  $j=2, m-1$

**III-9-3) Traitement des conditions aux limites :**

La condition aux frontières peut être écrite sous la forme généralisée suivante :

$$a \bar{T}_{1,j} + b \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{1,j} = c \quad (III. 24)$$

Où a, b et c sont des constantes.

Cette forme générale permet de retrouver deux types de conditions aux limites, la première qui est utilisée dans notre étude (conditions de Neumann), ( $a = 0, b = 1 \rightarrow$

$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{1,j} = c$ ) et la deuxième qui considère les conditions du type Dirichlet ( $a = 1, b = 0 \rightarrow$

$\bar{T}_{1,j} = c$ ), le but est de pouvoir comparer nos résultats avec ceux de la littérature, en modifiant nos conditions aux frontières.

La dérivée spatiale de la fonction  $\bar{T}$  peut-être approximée par les différences finies comme suit :

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{1,j} = \frac{\bar{T}_{2,j} - \bar{T}_{1,j}}{\Delta x} \quad (III. 25)$$

En remplaçant l'équation (III.25) dans (III.24) on retrouve la valeur de la fonction  $\bar{T}$  sur la frontière  $i=1$  en fonction de la valeur adjacent au point  $i=2$  comme suit :

$$\bar{T}_{1,j} = \frac{c \cdot \Delta x}{a \cdot \Delta x - b} - \frac{b}{a \cdot \Delta x - b} \bar{T}_{2,j} \quad (III.26)$$

En tenant compte de ce résultat, l'équation peut se réécrire pour  $i=2$  sous la forme suivante :

$$B_2 \bar{T}_{2,j} + C_2 \bar{T}_{3,j} = D_2 \quad (III.27)$$

Avec :

$$B_2 = B_2 - \frac{b}{a \cdot \Delta x} A_1, \quad D_2 = D_2 - \frac{c \cdot \Delta x}{a \cdot \Delta x + b} A_1$$

De la même façon et pour  $i=n-1$  on trouve :

$$A_{n-1} \bar{T}_{n-2,j} + B_{n-1} \bar{T}_{n-1,j} = D_{n-1} \quad (III.28)$$

Avec :

$$B_{n-1} = B_{n-1} - \frac{b}{a \cdot \Delta x + b} C_{n-1}, \quad D_{n-1} = D_{n-1} - \frac{c \cdot \Delta x}{a \cdot \Delta x + b} C_{n-1}$$

### III-10) Résolution des équations :

Un balayage suivant la direction  $y$  sur tous les points intérieurs du domaine de calcul est nécessaire pour résoudre le problème implicitement suivant  $x$ . Pour un  $j$  donné l'équation (III.21) est appliquée du point  $i=3$  jusqu'à  $i=n-2$  et avec les conditions aux limites données par les équations (III.27) et (III.28) on forme le système matriciel tri-diagonal suivant :

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & A_i & B_i & C_i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \cdot \\ \bar{T}_i \\ \cdot \\ \bar{T}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ D_i \\ \cdot \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \quad (III.29)$$

### III-11) Algorithme de calcul :

Pour chaque pas de temps, la procédure de calcul suivante est utilisée pour calculer les champs de vitesses, de températures :

1. Initialisation des champs de température, et de mouvement ou c utilisation de la solution au temps précédent.
2. Calcul de la fonction de courant
3. Calcul de  $u$  à partir de la fonction de courant
4. Calcul du champ de température
5. Répéter jusqu'à obtenir la convergence.

Ce système est résolu avec l'algorithme TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) appelé aussi algorithme de thomas. La méthode est répétée pour tous les  $j$  variant de 2 à  $m-1$ . De même manière le problème est résolu implicitement suivant  $y$ .

Le procédé itératif est lancé par la solution de l'équation d'énergie suivi par les équations de quantité de mouvement jusqu'à ce que la convergence soit réalisée. On utilise un critère basé sur l'incrément  $\xi$ , les itérations s'achèvent dès que

$$\xi = \frac{|\bar{\mathcal{J}}^{k+1} - \mathcal{J}^k|}{\max|\bar{\mathcal{J}}^k|} \leq 10^{-6} \quad (III. 30)$$

### III-12) Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode des volumes finis bien adaptée aux problèmes de conservation, les étapes suivies pour la discrétisation des équations algébriques, ainsi que la méthode de résolution du système matriciel.

Une résolution numérique bidimensionnelle des équations de quantité de mouvement et d'énergie a été réalisée pour simuler l'écoulement du liquide, le champ de température et la fonction de courant dans le milieu poreux considéré. Les résultats obtenus par ce code et leurs interprétations seront présentés dans le chapitre suivant.

**Chapitre IV :**

**Résultats et  
discussion**

### **IV-1) Introduction**

Dans ce chapitre, Nous présenterons et discuterons nos résultats de simulation numérique qui ont été obtenus à l'aide de la programmation direct d'un code de calcul en langage Fortran qui est basé sur la méthode des volumes finis.

Notre problématique porte sur l'étude du comportement dynamique et thermique d'un écoulement laminaire circulant dans une cavité carrée poreuse et affectée par le changement de perméabilité, qui est une fonction exponentielle qui varie selon l'axe vertical.

On s'intéresse aux profils des vitesses, et des températures dans des sections de la cavité, les résultats porteront sur les contours de la fonction de courant, les profils de vitesse, et de température, ainsi que les taux de transferts thermiques en termes de Nusselt.

Les paramètres de contrôle utilisés sont le Nombre de Rayleigh, et le coefficient de la variation de la perméabilité.

Les effets du nombre de Rayleigh sur l'écoulement du fluide et sur les transferts de chaleur en termes du nombre de Nusselt dans une cavité seront analysés et discutés.

### **IV-2) Profils des fonctions de courant, isothermes :**

Des simulations numériques ont été effectuées afin de déterminer l'effet de la variation de la perméabilité sur le comportement d'écoulement et sur le transfert de chaleur.

Les résultats numériques ont été obtenus (lignes de courant, isothermes) montrés respectivement sur les Figures IV.1, IV.2, IV.3 IV.4 et IV.5 pour une cavité carrée de facteur de forme  $A = 1$  et un nombre de Rayleigh variant entre  $Ra=25$  et  $Ra=50$ .

#### **IV-2-1) Cas de perméabilité constante :**

Le cas de la convection naturelle, sans variation de la perméabilité sera discuté en premier lieu. Les résultats numériques rapportés sur les Figure IV.1 et Figure IV.2. Ils sont obtenus pour ( $Ra=25$  et  $Ra=50$ ) et  $c=0$ . Ils montrent les profils de la fonction de courant et les profils des isothermes respectivement. D'après la première figure on peut conclure que pour le cas d'une perméabilité constante, et un nombre de Rayleigh



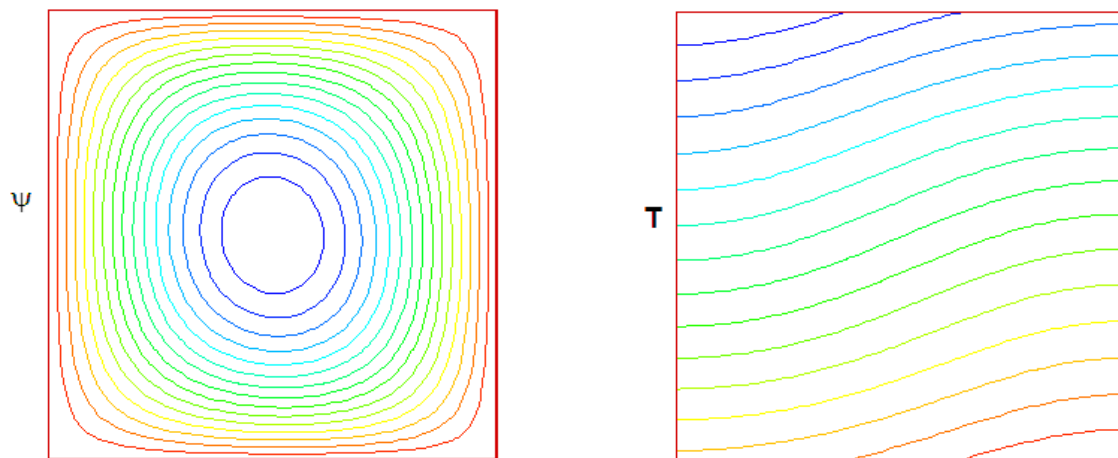
relativement faible  $Ra=25$ , la fonction de courant à la forme d'une seule cellule de convection et reflète un écoulement avec une distribution symétrique ,

cependant les profils des température indiquent qu'ils sont stratifiés de façon linéaire horizontale.

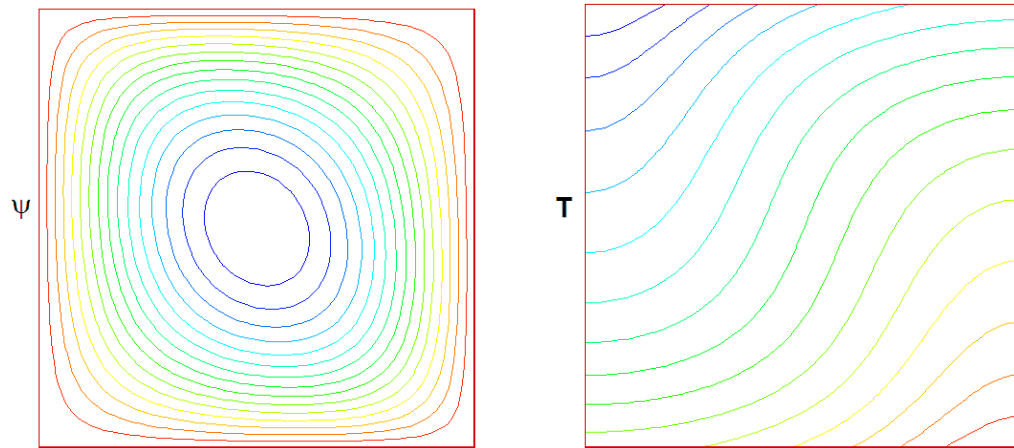
La valeur du nombre de Nusselt pour ce cas  $Nu = 1.081$ , elle n'est pas loin de la valeur de l'unité, et montre que le transfert de chaleur est proche de la conduction, et les isothermes sont presque horizontales.

Le choix des valeurs du nombre de Rayleigh pour notre étude, a été basé sur les travaux de recherche antérieurs et qui ont étudié l'effet de la perméabilité variable sur le transfert de chaleur dans une cavité poreuse avec un facteur de forme  $A \gg 1$ , on a remarqué que le cas de la cavité carrée diffère de celui d'une cavité élancée en ce qui concerne le début de déclenchement de la convection. Pour cette raison un autre résultat numérique a été effectué en augmentant le nombre de rayleigh en prenant  $Ra=50$ , les profils de fonction de courant et isothermes sont illustrés sur la figure IV-2.

D'après cette figure on remarque que les fonctions de courant ont toujours une forme unicellulaire mais qui indique la présence d'un transfert de chaleur plus puissant qui reflète la naissance de la convection au cœur de la cavité. Le nombre de Nusselt correspondant est nettement supérieur  $Nu = 1.911$ , et les isothermes pour ce cas sont stratifiées d'une façon verticale.



**Figure IV-1** : Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour :  $angle\ 0$   $A = 1$   $c = 0$   $Ra = 25$   $\psi = 0.535$   $Nu = 1.081$



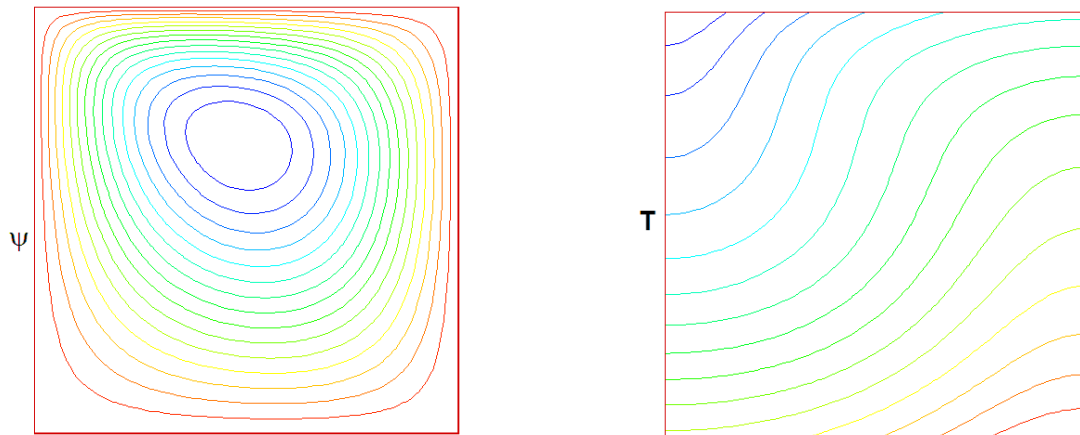
**Figure IV-2 :** Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour :  $angle\ 0$   $A = 1$   $c = 0$   $Ra = 50$   $\psi = 1.914$   $Nu = 1.911$

### V-2-2) Cas de perméabilité variable :

Le cas de la perméabilité variable a été traité avec un nombre de Rayleigh  $Ra=50$ , pour bien illustrer l'effet de variation sur les transferts de chaleur.

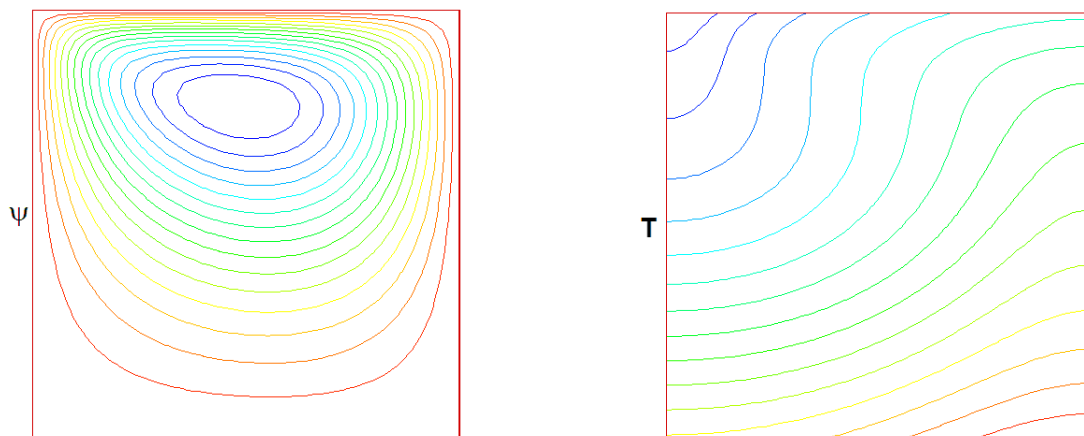
La fonction de perméabilité variable est prise selon une loi de variation exponentielle, sous la forme de  $K = e^{cy}$ . Le paramètre  $c$  prend les valeurs 2, 4 et 8.

La figure IV-3 illustre les profils de la fonction de courant et les isothermes dans le cas de  $c = 2$ . En comparant les profils de la fonction de courant avec le cas de la perméabilité constante, on remarque que la la perméabilité a une influence sur la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur, les lignes de courant sont confinées près de la paroi supérieure de la cavité, reflétant l'accélération de l'écoulement, tandis que la température est stratifiée linéairement dans la direction verticale. Les valeurs respectivement de la fonction de courant et du nombre de Nusselt sont automatiquement augmentés,  $\psi = 2.095$   $Nu = 1.845$ .

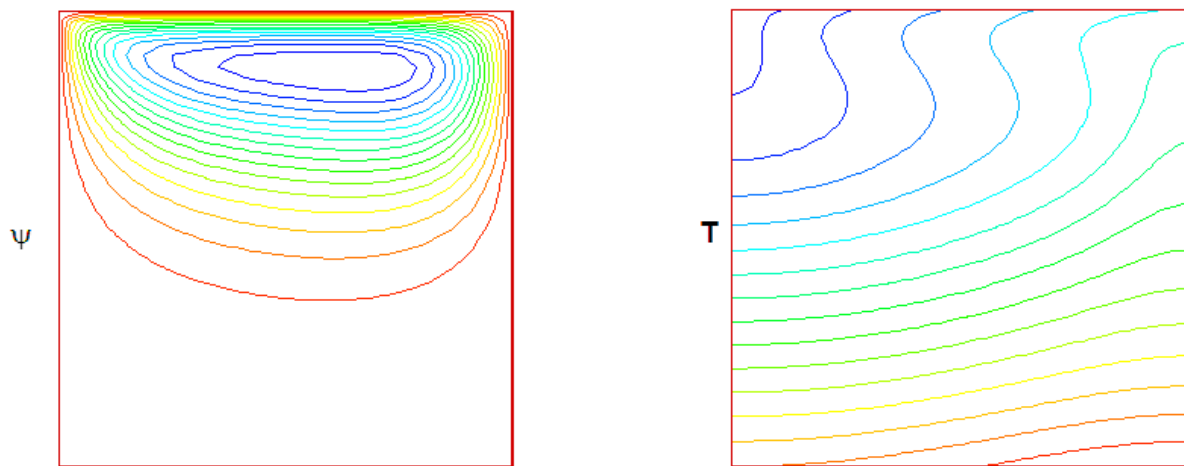


**Figure IV-3 :** Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour : *angle* 0  $A = 1$   $c = 2$   $Ra = 50$   $\psi = 2.095$   $Nu = 1.845$

Dans les figures IV-4 et IV-5, sont reportés les résultats numériques pour un paramètre de perméabilité plus grand,  $c=4$  et  $c=8$ . Il est clair que la perméabilité a une forte influence sur la structure d'écoulement et le sur le transfert de chaleur, et que les lignes de courant sont confinées près de la paroi supérieure de la cavité, ce qui traduit l'accélération de l'écoulement. Alors que pour les isothermes les lignes sont de plus en plus déformées de gauche à droite.



**Figure IV-4 :** Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour : *angle* 0  $A = 1$   $c = 4$   $Ra = 50$   $\psi = 2.574$   $Nu = 1.721$



**Figure IV-5** : Effet du paramètre de perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes pour :  $angle\ 0$   $A = 1$   $c = 8$   $Ra = 50$   $\psi = 4.403$   $Nu = 1.527$

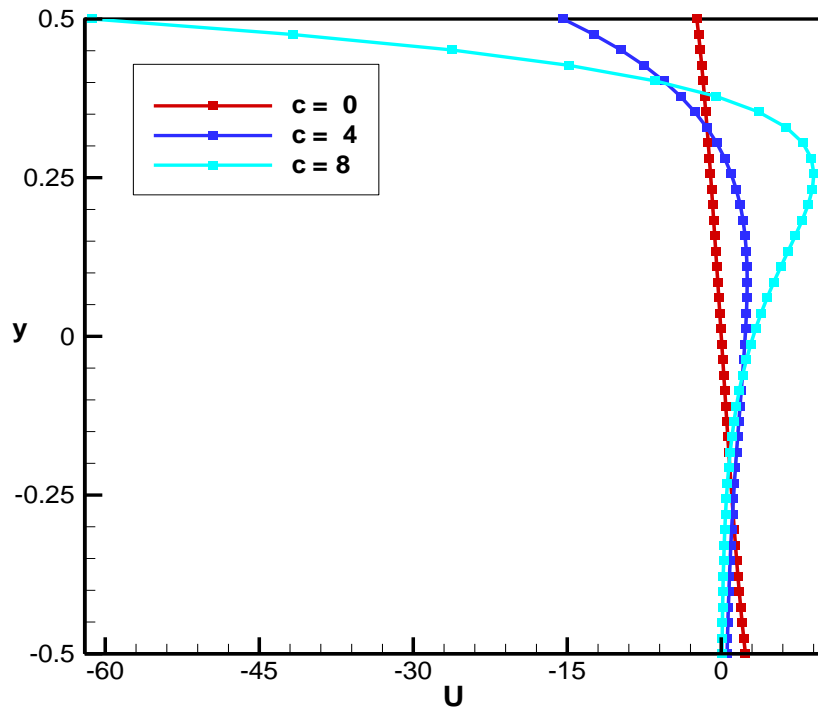
### IV-3) Effet de la variation de la perméabilité sur les profils des vitesses :

La Figure IV.6 et IV-7 montrent la distribution de la vitesse en fonction de  $y$  sous l'influence du changement de la perméabilité en terme du paramètre  $c$  ( $c = 0, 4$  et  $8$ ), les courbes ont été tracées pour deux nombres de Rayleigh respectivement  $Ra=25$  et  $Ra=50$ .

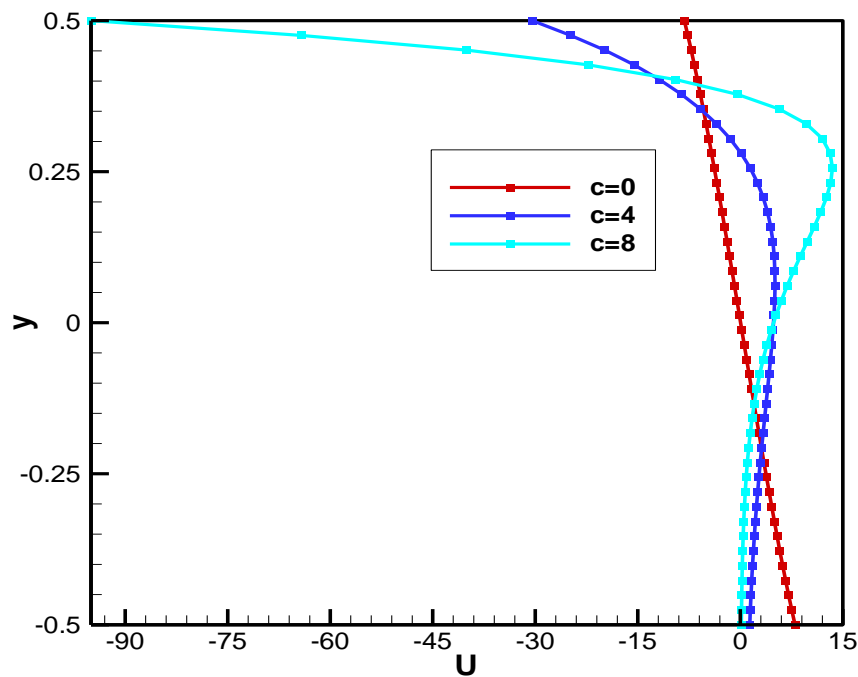
Les courbes correspondantes à une perméabilité constante  $c=0$ , indique que le profil de la vitesse varie linéairement en fonction de  $y$  et est symétrique par rapport au centre de la cavité, où la vitesse s'annule.

Lorsque la perméabilité augmente, son influence sur le profil de vitesse est accentuée, et on voit d'après les courbes que le profil de vitesse varie linéairement en fonction de  $c$  et  $y$ , et que la vitesse est relativement faible dans la moitié inférieure de la cavité, puis augmente fortement vers la paroi supérieure.

Selon la loi exponentielle étudiée  $K = e^{cy}$ , qui considère que la perméabilité est une variable dans notre étude, il est clair que la perméabilité dans la partie supérieure de la cavité augmente considérablement, Il en résulte une vitesse d'écoulement accrue près de la paroi latérale supérieure, tandis que le flux devient stagnant près de la paroi inférieure et ceci est valable pour les deux valeurs du nombre de Rayleigh.



**Figure IV-6 :** Effet de la variation de la perméabilité sur les profils de vitesse Résultats numériques pour les valeurs de  $c=0$ ,  $c=4$ ,  $c=8$   $Ra=25$

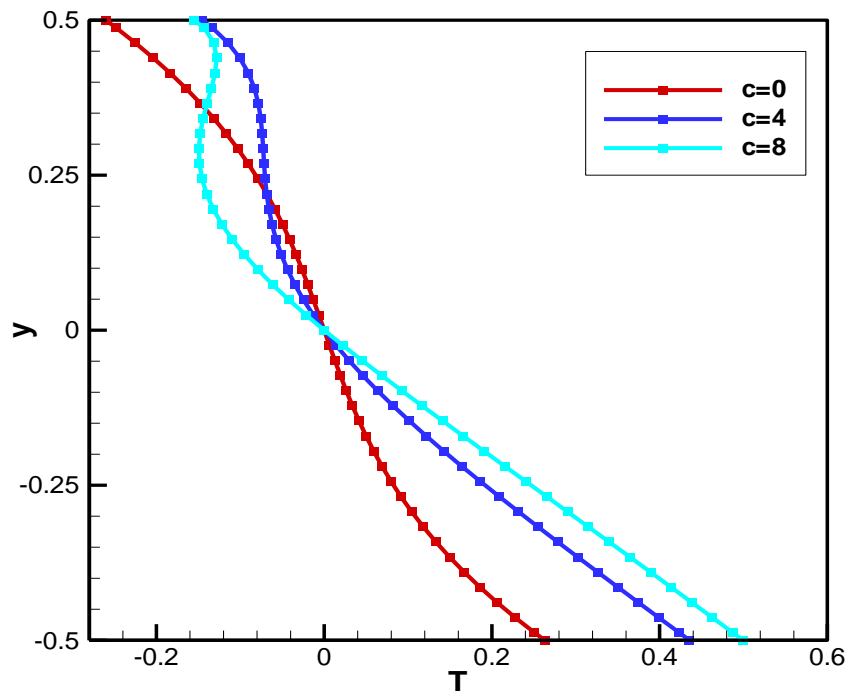


**Figure IV-7 :** Effet de la variation de la perméabilité sur les profils de vitesse. Résultats numériques pour les valeurs de  $c=0$ ,  $c=4$ ,  $c=8$   $Ra=50$

#### IV-4) Effet de la perméabilité sur les profils des températures :

La figure IV-8 illustre l'influence du coefficient de perméabilité  $c$  sur la distribution de la température, ce graphique a été tracé pour,  $Ra=50$  et différentes valeurs du paramètre  $c$  ( $c = 0, 4$  et  $8$ ).

La courbe indique que la température prend des valeurs relativement élevées à la paroi inférieure, puis descend progressivement à zéro au centre de la cavité, puis augmente progressivement jusqu'à atteindre des valeurs inférieures à celles de la paroi inférieure. Lorsque  $C = 2, C=4$  la courbe est asymétrique, et cela est dû à l'effet de la différence de la perméabilité en augmentant le coefficient  $c$ , Par contre, lorsque  $c = 0$ , la courbe est symétrique par rapport au centre de la cavité en raison de l'homogénéisation de perméabilité.



**Figure IV-8 :** Effet de la variation de la perméabilité sur les températures. Résultats numériques pour les valeurs de  $c=0, c=4, c=8, Ra=50$

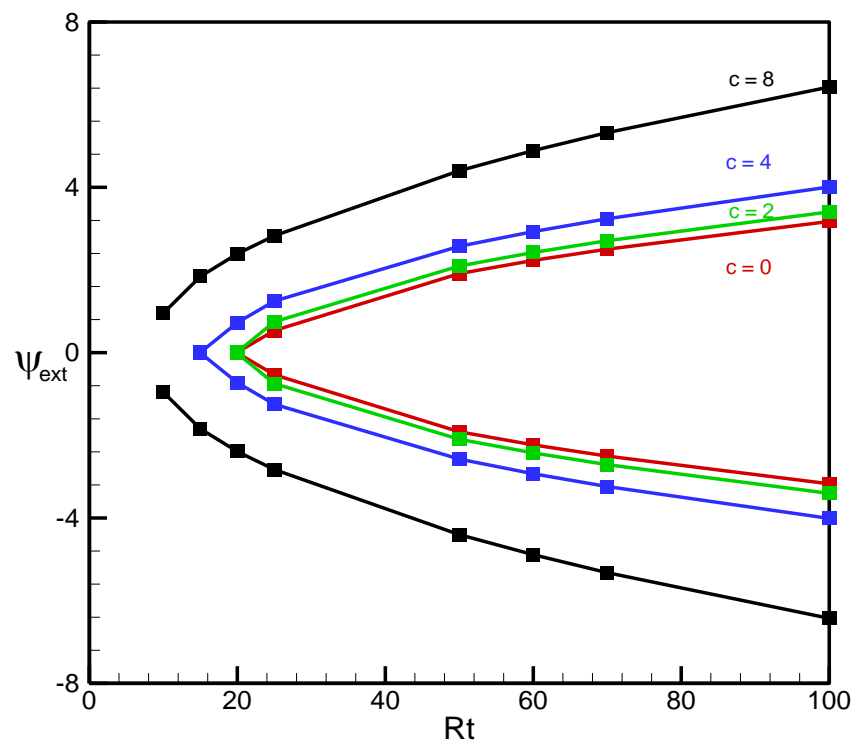
#### IV-5) Effet du nombre de Rayleigh sur $\psi_{ext}$ :

La courbe de la figure IV-9 indique l'évolution de la fonction de courant en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs du paramètre  $c$ . Le déclenchement de la convection a été observé respectivement pour les nombres de Rayleigh critiques suivants :  $Ra=20$  pour  $c=0$ ,  $Ra=15$  pour  $c=2$ ,  $Ra=10$  pour  $c=4$  et  $Ra=7$  pour  $c=8$ .

Ces résultats ont été comparés aux travaux de la littérature, pour le cas d'une cavité élancée de facteur de forme  $A=4$ , et on remarque que pour la cavité carrée le déclenchement de la convection se fait à des valeurs du nombre de Rayleigh plus élevées et ceci respectivement pour les mêmes valeurs du paramètre  $c$  de la perméabilité.

Les résultats indiquent aussi une augmentation de l'intensité de la fonction du courant avec l'accroissement de rayleigh qui joue le rôle moteur dans l'intensification de la convection à l'intérieur de la cavité.

L'effet de la variation de perméabilité est tel que en augmentant ce coefficient, l'intensité de l'écoulement se trouve augmentée et le seuil de déclenchement de la convection se fait bien plus tôt.



**Figure IV-9 :** évolution de la fonction de courant en fonction du nombre de Rayleigh pour les différents cas de perméabilité. Résultats numériques pour  $c=0, 2, 4$  et  $8$

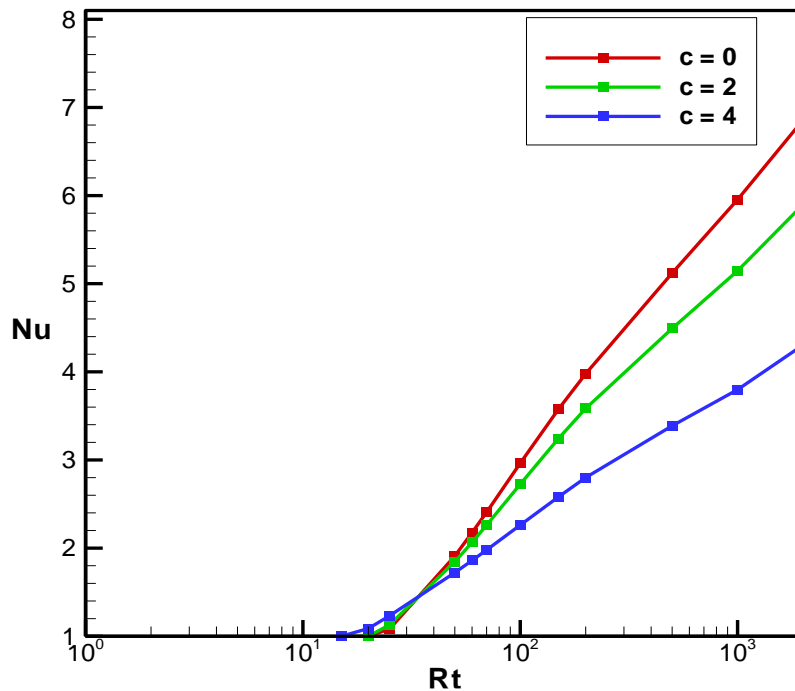
#### IV-6) Effet du nombre de Rayleigh sur les taux de transfert :

##### IV-6-1) L'effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt :

La courbe de la figure IV-10 indique l'évolution du nombre de Nu en fonction du nombre de Rayleigh  $Ra$  et pour différentes valeurs de  $c$ .

On conclut que le nombre de Nusselt augmente en augmentant le nombre de Ra, l'effet de l'augmentation du paramètre  $c$  de la perméabilité influe sur le transfert de chaleur de telle sorte qu'en augmentant  $c$  le nombre de Nusselt se trouve diminué pour une même valeur de Rayleigh, c'est-à-dire que l'effet de l'augmentation de la perméabilité tend à diminuer le taux de transfert de chaleur.

Les courbes montrent que le nombre de Nusselt débute avec des valeurs égales à l'unité, correspondant au régime de conduction pure puis augmente considérablement avec le nombre de Rayleigh indiquant le régime convectif.



**Figure IV-10 :** Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour les différents cas de perméabilité. Résultats numériques

#### IV-7) Effet de la variation de la perméabilité sur le courant :

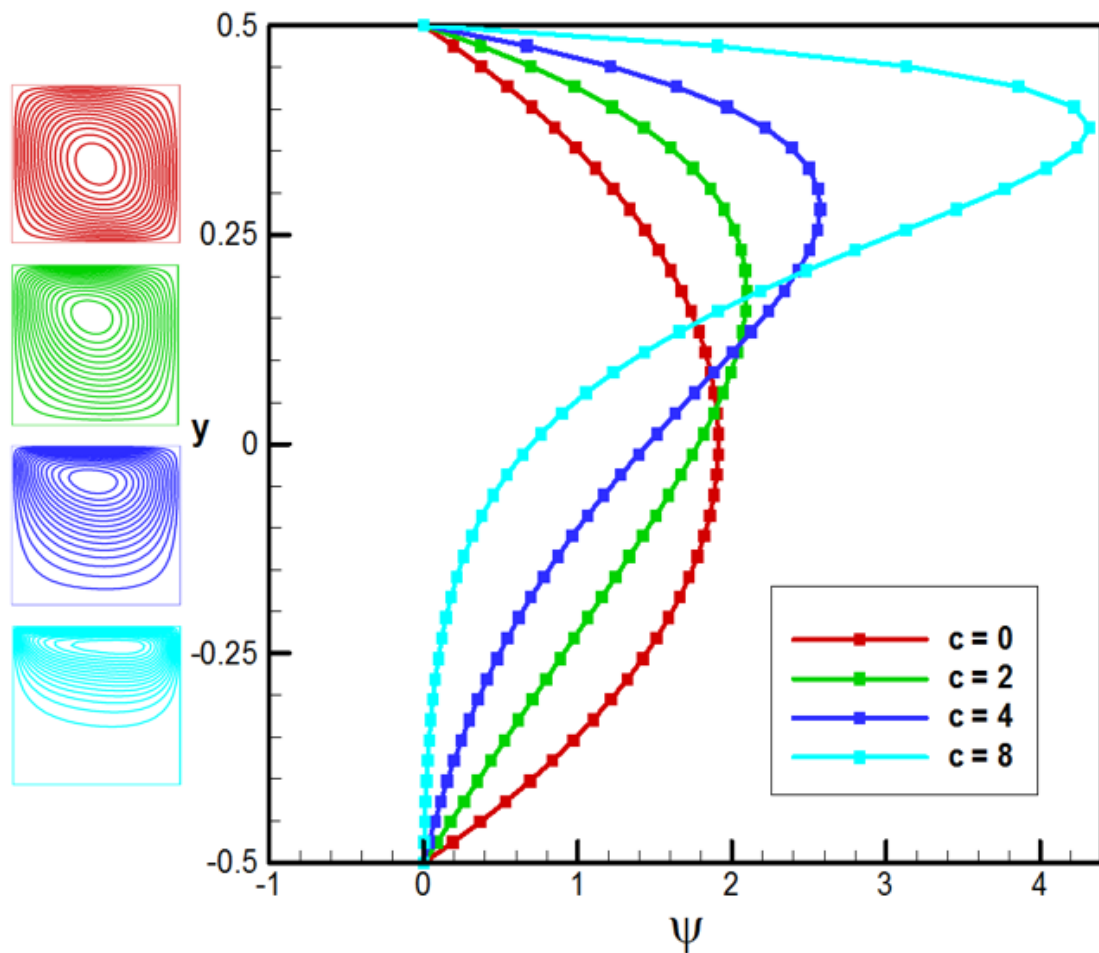
La courbe de la figure IV-11 indique l'évolution des valeurs de la fonction de courant en fonction de  $y$  et du paramètre  $c$  pour une valeur de Rayleigh  $Ra=50$ .

Pour toutes les valeurs du paramètre  $c$  l'intensité de l'écoulement s'anule aux extrémités de la cavité conséquence des conditions aux limites imposées dans cette étude. Elle s'intensifie au centre de la cavité pour le cas de  $c=0$ , puis diminue symétriquement. Pour les valeurs de  $c$  différentes de 0, l'intensité de l'écoulement présente une courbe asymétrique et atteint un maximum qui s'approche de la paroi supérieure avec l'augmentation de la valeur de  $c$ .



Pour les valeurs respectives de  $c=2, 4,$  et  $8$  la fonction de courant atteint son maximum aux valeurs respectives de  $y$  suivantes :  $0.18, 0.28, 0.37$ .

On remarque que dans la partie inférieure de la cavité, l'écoulement dans la est quasiment stagnant, la cellule de convection est confinée progressivement dans la partie supérieure de la cavité.



**Figure IV-11** : Effet de la variation de la perméabilité sur les fonctions de courant. Résultats numériques pour les valeurs de  $c=0, c=4, c=8$   $Ra=50$

**IV-8) Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de la simulation numérique de la convection naturelle au sein d'une cavité poreuse carrée de perméabilité variable. Nous avons pu prédire à travers l'étude les profils des fonctions de courant, des températures, des profils de vitesses, et du transfert de chaleur en termes du nombre de Nusselt.

Les courbes montrent que la variation de la perméabilité a un effet significatif sur sur chacun de (structure de l'écoulement, vitesse ,température et nombre de Nusselt) à l'intérieur de la cavité.

## Conclusion générale

Dans le présent travail, on a fait une étude de la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide dans une cavité carrée, soumise à des gradients de température verticaux. Les conditions de Newman ont été appliquées aux parois horizontales de la cavité et les approximations de Darcy et Boussinesq ont été considérées. La perméabilité du milieu poreux a été considérée variable selon l'axe vertical avec une loi exponentielle.

Le problème physique a été modélisé mathématiquement par les équations de conservation de mouvement et de conservation de l'énergie. Après que les hypothèses simplificatrices ont été prises en considération, on a ressorti les paramètres de contrôle à savoir : Le nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T$ ), et le coefficient de perméabilité ( $c$ ).

On s'est intéressé à l'étude de l'influence de la variation de la perméabilité sur la fonction de courant, les profils de vitesses, les profils de températures, et sur le transfert de chaleur en termes du nombre de Nusselt, en fonction du nombre de Rayleigh qui a été pris dans une large gamme.

La résolution des équations gouvernantes a été obtenue numériquement en utilisant la méthode des volumes finis très adaptée aux problèmes de conservation. Le système matriciel obtenu après discrétisation a été résolu moyennant la méthode des directions alternées et l'algorithme de thomas a permis de trouver les solutions en utilisant un programme élaboré en langage Fortran.

On a pu tirer les conclusions suivantes :

Après plusieurs tests numériques, on a pu déterminer le seuil de déclenchement de la convection pour différentes valeurs du paramètre de la perméabilité  $c$ , et les résultats ont été comparés au cas de la perméabilité constante. On peut conclure que l'augmentation de la perméabilité accélère le déclenchement de la convection.

Le nombre de Nusselt débute sa variation avec une valeur égale à l'unité traduisant le transfert de chaleur par conduction, et ceci pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh, la convection une fois déclenchée, le Nusselt augmente considérablement avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Par contre l'influence de la variation de la perméabilité sur le nombre de Nusselt est telle qu'en augmentant le paramètre  $c$ , le taux de transfert de chaleur se trouve diminué.

Les profils de vitesses, indiquent que les conditions aux limites imposées dans cette étude ont influencé l'allure des courbes, ainsi que la perméabilité variable. On signale des vitesses faibles dans la moitié basse de la cavité, tandis que dans la partie supérieure, les vitesses augmentent indiquant un taux de transfert de chaleur élevé.

Les températures varient au sein de la cavité en débutant par des valeurs élevées, s'annulant au centre pour diminuer dans la partie supérieure de la cavité. L'influence de la variation de la perméabilité sur les profils des températures est telle qu'en augmentant le paramètre  $c$ , les températures augmentent en bas et diminuent en haut.

Et enfin la fonction de courant qui est affectée directement par les conditions de Neumann en s'annulant aux deux parois horizontales, passant par point un de valeur maximale qui dépend de la perméabilité. Le cas de la perméabilité constante, présente une allure symétrique, les cas de perméabilité variable indiquent que la valeur maximale de la fonction de courant se déplace vers le haut de la cavité avec l'augmentation du paramètre  $c$  de la fonction exponentielle.

Pour enrichir cette étude, on recommande pour les travaux de recherche futurs de considérer d'autres lois de variation de la perméabilité, de considérer d'autres géométries de la cavité, et de faire des simulations en 3D.

## Références

- [1] **Ghettas Mohammed Ali et Hacini Bilal** :« l'effet de la variation de perméabilité sur les profils de vitesse, de température et de concentration», Mémoire de Master. Université kasdi merbah Ouargla, (2019).
- [2]. **Benyamina Leila Chirhane** « écoulement dans les milieux poreux en régime transitoire», Mémoire de Magistère. Université aboubekr belkaid tlemcen.
- [3] **Alloui Smail**, « Modélisation et simulation à base de méthodes numériques alternatives des déplacements diphasiques en milieu poreux», Mémoire de Magister, Université M'hamed Bougara boumerdes , (2012).
- [4] **Ndiaga SOW** « Modélisation des écoulements en milieu poreux non saturé : Application à la recharge naturelle des nappes», projet de fin d'études. Université cheikh anta diop de dakar (2005).
- [ 5] **kazi Tani Hychem Abdesslem**, «étude du transport en suspension dans un milieu poreux au lboratoire», Mémoire de magister ,université aboubakr belkaïd – tlemcen,(2011).
- [6] **Ramdane Younsi**. « Simulation Numérique du transfert de Chaleur et de masse en Milieux Fluides et Poreux». Thèse de doctoral, Université Des sciences et de la Technologie Houari Boumediene, (2002).
- [7] **Hussein Hoteit** : « Simulation d'écoulements et de transports de polluants en milieu poreux : Application à la modélisation de la sûreté des dépôts de déchets radioactifs» , Thèse de doctorat, université de Rennes1, (2002).
- [8] **M. Hasnaoui, E. Bilgen, et P. Vasseur**, «Natural Convection Heat Transfer in Rectangular Cavities Partially Heated from Below »JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER Vol. 6, No. 2, April-June (1992).
- [9] **Mohamed Mamou**. «Convection Thermosolutale Dans des Milieux Fluide et Poreux Confinés». Thèse de doctoral, Ecole Polytechnique de Montréal, (1998).
- [10] **Ali J. Chamkha** ,« Double-Diffusive Convection In A Porous Enclosure With Cooperating Temperature And Concentration Gradients And Heat Generation Or Absorption Effects», Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology. (2002).

- [11] **A. Bahloul a, L. Kallaa, R. Bennacer b, H. Beji b, P. Vasseur**, «Natural convection in a vertical porous slot heated from below and with horizontal concentration gradients» , International Journal of Thermal Sciences 43 P 653–663. (2004).
- [12] **Belhi Mamdouh**, «Etude Numérique de la Convection Naturelle dans une Cavité Ayant Plusieurs Entrées». Mémoire de magister universite mentouri de constantine. (2007).
- [13] **Jiracheewanun G. D. McBain S. W. Armeld M. Behnia**, «Natural convection in the cavity with the di\_erentially heated isoux boundaries » , ANZIAM J. 48 (CTAC2006) pp.C977{C990, (2008).
- [14] **Z. Alloui, R. Bennacer, P. Vasseur**, «Variable permeability effect on convection in binary mixtures saturating a porous layer», Heat Mass Transfer 45 :1117–1127. (2009).
- [15] **Bouguerra Yasser**, «simulation numérique de la convection naturelle thermosolutale avec effet soret» mémoire de master, université kasdi merbah ouargla,(2014).
- [16] **S. Manar et H. Rouijaa et E.A. Semma et M. El Alami**, «Etude numérique de la convection naturelle au sein d'une cavité carrée avec chauffage et refroidissement variables», Revue des Energies Renouvelables Vol. 17 N°2 P 323 – 334. (2014).
- [17] **Kane, M.K., Mbow, C., Sow, M.L. and Sarr, J.** «A Study on Natural Convection of Air in a Square Cavity with Partially Thermally Active Side Walls». Open Journal of Fluid Dynamics, 7, 623-641. (2017).
- [18] **BENMENZER Soufyane**, «Etude phénoménologique de la convection dans plusieurs situations», Thèse de Doctorat, Université de Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd, (2018).
- [19] **Ben khridla Hicham et Benzid Mohammed Cherif**, «etude analytique de la convection naturelle thermosolutale dans un milieu fluide», mémoire de master, université kasdi merbah de ouargla, (2019).
- [20] **Ben Gachouche Laid et Abbassi Oussama**, «effets de perméabilité variable sur la convection naturelle dans une couche poeruse verticale avec flux de chaleur uniforme», mémoire de master, université kasdi merbah de ouargla, (2020).

- [21] **Alberto Fichera, Manuel Marcoux, Arturo Pagano and Rosaria Volpe**, «An Analytical Model for Natural Convection in a Rectangular Enclosure with Differentially Heated Vertical Walls » *Energies*, 13 (12). 3220. ISSN 1996-1073.
- [22] **D. Damene , Z. Alloui ,Y. Alloui , P. Vasseur** , « Variable Permeability Effects on Natural Convection in a Vertical Porous Layer with Uniform Heat Flux from the Side» ,*Transport in porous Media* (2021) .137 p.287-306.
- [23] **Nield D A., Bejan A.**, « Convection in porous media». Third edition, Springer, (2006).
- [24] **S. Patankar**, « Numerical Heat Transfer and Fluid Flow», Hemisphere, Washington, DC. (1980) .
- [25] **Begar Amor**, «étude de la convection naturelle dans une cavité comportant des sources de chaleur». Mémoire de magistère, université de Batna, (2007).

## Résumé

A travers ce travail, on a fait une étude sur les effets de la perméabilité variable sur la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide, en supposant que la perméabilité est variable selon une loi exponentielle. La cavité étudiée est de forme carrée et elle est soumise aux conditions de Neumann aux parois horizontales, tandis que les parois verticales, sont adiabatiques et imperméables. L'approximation de Boussinesq ainsi que la loi de Darcy ont été prises en considération dans cette étude. Les équations régissant le problème ont été résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les paramètres de contrôle considérés sont le nombre de Rayleigh  $Ra_T$  et le coefficient de la loi exponentielle de la perméabilité. Les résultats ont concerné les lignes de courant  $\Psi$ , les profils de vitesse  $u$ , et de température  $T$ , ainsi que le taux de transfert de chaleur en termes du nombre de Nusselt  $Nu$ .

**Mots clefs :** Transfert de chaleur, milieux poreux, perméabilité variable, convection naturelle, modèle de Darcy, volumes finis.

## Abstract

Through this work, we made a study on the effects of variable permeability on natural convection in a porous medium saturated by a fluid, assuming that the permeability is variable according to an exponential law. The studied cavity is square in shape and is subject to Neumann conditions with horizontal walls, while the vertical walls are adiabatic and impermeable. The Boussinesq approximation as well as Darcy's law were taken into consideration in this study. The equations governing the problem were solved numerically by the finite volume method. The control parameters considered are the Rayleigh number  $Ra$ , and the coefficient of the exponential law of permeability  $c$ . The results concerned the streamlines  $\Psi$ , the velocity  $u$  and temperature  $T$  profiles, as well as the heat transfer rate in terms of the Nusselt number  $Nu$ .

**Key words:** Heat transfer, porous media, variable permeability, natural convection, Darcy model, finite volumes.

## المخلص

من خلال هذا العمل، قمنا بدراسة تأثير النفاذية المتغيرة على الحمل الحراري الطبيعي في وسط مسامي مشبع بمائع، على افتراض أن النفاذية متغيرة وفقاً لقانون أسّي. التجويف المدروس مربع الشكل ويخضع لظروف نيومان بالجدران الأفقية، بينما الجدران الجانبية غير نفاذة. تم أخذ تقريب Boussinesq وكذلك قانون دارسي في الاعتبار في هذه الدراسة. تم حل المعادلات التي تحكم المسألة عددياً بطريقة الحجم المحدود. معاملات التحكم التي تم أخذها في الاعتبار هي رقم رايلي  $Ra$  ومعامل القانون الأسّي للنفاذية  $c$ . تتعلق النتائج بخطوط الانسيابية والسرعة ودرجة الحرارة، بالإضافة إلى معدل نقل الحرارة المعروف بـ  $Nusselt$ .

**كلمات مفتاحية:** انتقال الحرارة، الوسط المسامي، نفاذية متغيرة، الحمل الحراري، نموذج دارسي، الحجم المحدود