جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة و تحليل عددي

من إعداد الطالبة : قـادير شمس الضـــحى

طريقة تقريبية لحل المعادلات التفاضلية-التكاملية من رتب كسرية

نوقش يوم 2022/06/08 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
عباسي حسين	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
بن الشيخ عبد الكريم	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السنة الجامعية: 2022/2021

شكر و عرفان

الحمد للَّه سبحانه و تعالى الذي تتم بنعمته الصالحات و تدوم النعمة بشكره ❤️

الحمد لله على ما باركت لي يا اللَّه في سعيي هذا ، فلك الشكر على التوفيق و لك الفضل في الأولى و الآخرة ❤️

و لقد روي عن نبيِّنا الكريم أنه قال :

" ليسَ منَّا منْ لَمْ يُجِلَّ كبيرَنا، ويرحمْ صغيرَنا ! و يعرفْ لعالِمِنَا حقَّهُ "

فمن هذا المنبر أتقدم بفائق عبارات الشكر إلى الأستاذ المشرف 💜 بن الشيخ عبد الكريم 💜 الذي كان لي مرشدا و ناصحا و موجها وجل كلمات الشكر لا توفيك حقك و كذلك أود أن أشكر الأستاذين 🌺معمري محمد و عباسي حسين 🌺 على مناقشة مذكرتي .

و كما لن أنسى أن اتقدم بخالص الشكر و التقدير لكل من أعانني في هذه المذكرة حتى بدعوة الخير و كذلك من كان سببا في تعليمي ولو حرفا إنطلاقا من أساتذتي و حتى زملائي ✨💙

إهداء

إلى الحبيب الأول سندي و مهجتي و سعادتي و صاحب الهيبة ، مصدر قوتي و بلسم الروح 😍 أبي 😍 حفظه الله و بارك بعمره و رزقني بِرّه

إلى من سهرت الليالي ، مصدر الحنان ، سلطانة زماني ، حبيبة قلبي و رفيقة دربي 🥰 أمي 🥰 حفظها الله و بارك بعمرها و رزقني برّها

إلى الأربع المؤنسات الغاليات إخوتي مودتي و بينهنّ قرّة عيني أخي ❤️

إلى من بهم أكبر و عليهم أعتمد و بوجودهم أسعد 🍒جميع أفراد عائلتي و أخص بالذكر عمتي فوزية مربيتي و عمي عمر قدوتي 🍒

إلى كل من علمني في طور الإبتدائي و المتوسط و الثانوي .. و إلى أعز أستاذ عندي ⭐ الاستاذ عليلي محمد الصالح ⭐ و تحية خاصة إلى قسم الرياضيات .

إلى الأوفياء ،الاتقياء الأنقياء صحبتي، ذوي القلوب الطيبة، حبيباتي صديقاتي، و سأقول عنهن إخوتي ،و العديد من العبارات لن توفي حقهن لأنهن فعلا نعمة الصحبة، و أخص بالذكر من ساروا معي الدرب الطويل و من عرفتهن في الجامعة و رفيقاتي في الغرفة و صحبتي بمصلى مريم العذراء و زملاء الإقامة و رفيقاتي بالمسجد الأخضر و تلاميذي بمدرسة الصراط المستقيم و كل من كانو سببا في بسمتي يوما

❤️🌍❤️

دليل الترميزات

الرمز	مدلوله
$\Gamma(n)$	الدالة غاما
$\beta(p,q)$	الدالة بيتا
I^{α}	مؤثر تكامل ريمان-ليوفيل الكسري
W^{α}	مؤثر تكامل ويل الكسري
D'	مشتق دالة
D^{n}	المشتق النوني
D_{a}^{α}	مشتق ريمان-ليوفيل الكسري
D^{α}	مشتق كابوتو الكسري $\alpha > 0$
W_{β}^{α}	مشتق ويل الكسري
$H_{n}(x)$	كثير حدود هرميت
G	الدالة المولدة
$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعية
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{Z}$	مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية
i	عدد تخيلي
$\omega(y)$	تابع الوزن
$\lceil v \rceil$	دالة السقف

قائمة الأشكال

الفهـــــــــــرس

مقدمة

لعبت المعادلات التكاملية-التفاضلية دورا هاما في العديد من الأبحاث النظرية و التطبيقية خاصة لمحاكاتها العديد من المشاكل في العلوم و الهندسة و الهندسة الطبية الحيوية و هندسة الزلازل .... .
إذا كانت الرياضيات التحليلية برهنت لبعض مسائل المعادلات التكاملية-التفاضلية وجود و وحدانية الحل تحت شروط محددة فإن البعض من المسائل لا تتوفر لنا طريقة لحساب الحل الصريح إلا في حالات معينة و تحت شروط مثالية أحيانا . لذا نلجأ الى البحث عن الحل التقريبي .
لتلك الأسباب جاءت فكرة بحثنا هذا الذي يحمل عنوان التقريب بكثيرات الحدود لحل بعض أنواع المعادلات التكاملية-التفاضلية و هدفنا توصيف طرائق عددية جديدة لمعالجة و إيجاد الحل التقريبي لبعض مسائل المعادلات التكاملية-التفاضلية و هي على التوالي في [9] طريقة المربعات الصغرى بالاعتماد على التقريب وفق أساس كثيرات الحدود المتعامدة [9]، و إعتمد أيضا Osama و Sarmad [8] استعمل التقريب بكثير حدود برنشتاين . و بكثير حدود لاغير في [3] كما قام D.Sh و Mohammed [4] استعمل التقريب بكثير حدود تشيبشيف .
الهدف من هذه المذكرة تقديم معالجة عددية باستخدام التقريب وفق أساس كثيرات حدود هرميت و طريقة المربعات الصغرى للوصول لحل تقريبي لكل من المسألتين :

◂ **المسألة 1** معادلة تفاضلية-تكاملية خطية ذات رتب كسرية التالية :

$$D^{\alpha}y(x) = g(x) + \int_0^1 k(x,t)y(t)dt, \quad 0 \leq x,t \leq 1 \tag{1}$$

مع الشروط الابتدائية :

$$y^{(j)}(0) = c_j, \quad j = 0,1,\dots n-1, \quad n-1 < \alpha \leq n, n \in N.$$

◂ **المسألة 2** جملة معادلات تفاضلية-تكاملية خطية التالية :

$$D^{\alpha}u_n(y) = \phi_n(y) + \int_0^1 k_n(y,r)\left(\sum_{k=1}^{i}\alpha_{nk}u_k(r)\right)dr, \quad n = 1,2,\dots,i; 0 \leq y,r \leq 1 \tag{2}$$

مع الشروط الابتدائية :

$$u_n^j(y_0) = u_{nj}, \quad n = 1,2,\dots,i$$

حيث D^{α} مشتق بمفهوم كابوتو.
قسمت هذه المذكرة إلى ثلاث فصول تناولت مايلي :

الفصل الأول

فصل تمهيدي بعنوان مفاهيم أساسية ، قدمنا فيه لمحة عن الحساب الكسري ، كما تطرقنا إلى نظرة على كلا المعادلات التفاضلية و التكاملية , المعادلات التفاضلية-التكاملية .

الفصل الثاني

قمنا في هذا الفصل بالتعريف بكثير حدود هرميت و خصائصه تقريب تابع وفق اساسه و تحدثنا عن طريقة المربعات الصغرى .

الفصل الأخير

وهو ما يشمل الجزء التطبيقي ، حيث قمنا بالستخدام أساس كثير حدود هرميت للوصول إلى الحل التقريبي للمسالة 1 و عن طريقة هرميت و المربعات الصغرى للمسالة 2 مع عرض لأمثلة عددية لتوضيح العمل أكثر .

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

قائمة المحتويـــــــــات

1.1 لمحة في الحساب الكسري

يتضمن هذا الفصل موضوع نال اهتمام كبير من طرف علماء الرياضيات و الفيزياء وهو موضوع الحساب الكسري و نعني به حساب المشتقة او التكامل من اية رتبة سواءا كانت عددا حقيقيا او مركبا و ليس عدد صحيح فقط و تعود بدايات هذا الموضوع الى اصطلاح العالم $Leipnitz$ للمشتقة من الرتبة n اذ تساءل $Leipnitz$ من خلال رسالة وجهها الى العالم $Hspital$ عن امكانية إيجاد مشتقة من الرتبة $\frac{1}{2}$ ، و بعدها زاد اهتمام الرياضيين بالحساب الكسري و تم تطوير الجانب النظري و التطبيقي له .

1.1.1 دوال خاصة

الدالة غاما

الدالة غاما من أحد الدوال الأساسية للحساب الكسري ، و تعرف بالشكل التالي [34]:

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx, \quad x\in\mathbb{R} \tag{1.1}$$

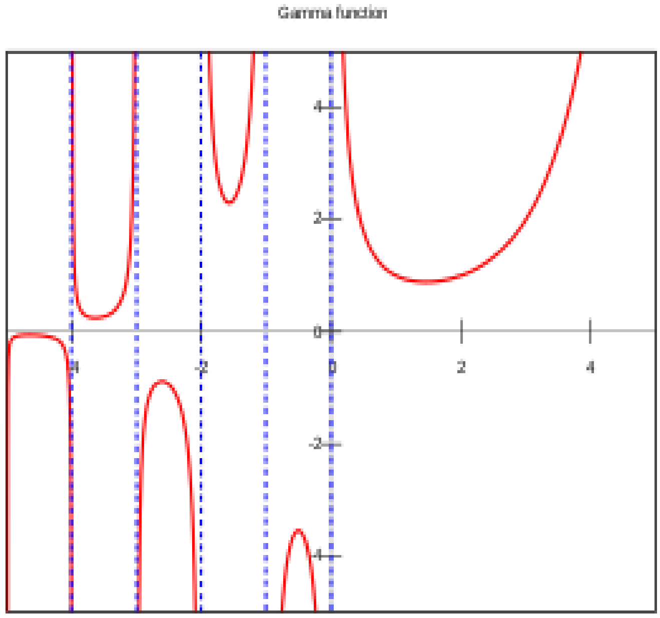
$$\Gamma(1)=1 \tag{2.1}$$

و تحقق :

1. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \ \forall x>0,$
2. $\Gamma(x+1)=x!, \ \forall x\in\mathbb{N}$
3. $\Gamma(x)=2\int_0^{\infty}\exp^{-t^2}t^{2x-1}dt$

مثلا لدينا :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{2-1}e^{-x}dx\\ &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}dx\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{-M}{e^M}-\frac{1}{e^M}+0+e^0\right)=1\end{aligned}$$



شكل 1.1: منحنى بياني للدالة غاما

الدالة بيتا

تعرف الدالة $\beta(p,q)$ والمعروفة أيضا باسم تكامل أويلر من النوع الأول،هي دالة خاصة تعطي بالعلاقة التالية[34]:

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad p>0, q>0$$

1.1.1 خواص .

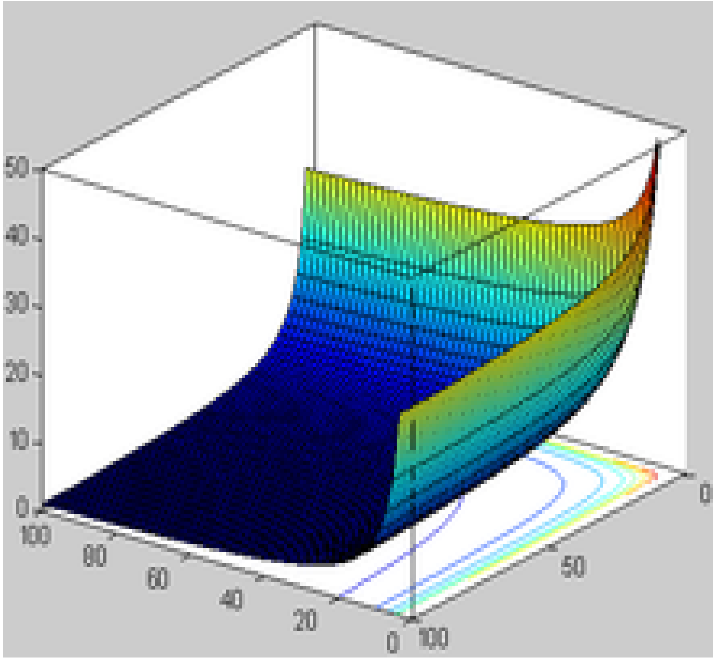
① - $\beta(x,y)=\beta(y,x)$

② - $\beta(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\, d\theta$

③ - $\beta(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$

④ - $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

⑤ - $\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y)$



شكل 2.1: رسم ثلاثي الأبعاد للدالة بيتا بقيم موجبة

2.1.1 التكامل الكسري

هناك عدة تعاريف للتكامل الكسري من الرتبة α و نأخذ من بينها التكامل التالي :

1.2.1.1 تكامل ريمان-ليوفيل

التكامل الكسري ريمان-ليوفيل وهو تعميم لتعريف التكامل الكسري إلى عدد غير صحيح α يعطى بالعلاقة التالية :

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)!}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$$

ملاحظات 1.1.1 تعاريف أخرى للتكامل الكسري :

①- تكامل ريمان الكسري : $I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)!}\int_{c}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$

②- تكامل ليوفيل الكسري : $I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)!}\int_{-\infty}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$

③- تكامل ويل الكسري : $W^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)!}\int_{t}^{\infty}(s-t)^{\alpha-1}f(s)ds$

خواص 2.1.1 .

❶ التكامل الكسري من المرتبة $\alpha = 0$ لدالة f هي الدالة نفسها : $I^{\alpha} f(t) = f(t)$

❷ $I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta} = I^{\beta} I^{\alpha}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3.1.1 الإشتقاق الكسري

تعريف 1.1.1 [?] نعرف مشتق دالة f كما يلي :

$$D' f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

و المشتق النوني لهذه الدالة:

$$D^n f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x + (n-m)h)$$

حيث $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ وتعطى العلاقة المكافئة لها بالشكل

$$D^n f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh)$$

1.3.1.1 مشتق ريمان-ليوفيل الكسري

ويعطى بالعلاقة التالية :

$$D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}$$

حيث $n = [\alpha] + 1$ و $[\alpha]$ يرمز إلى الجزء الصحيح من العدد الحقيقي α .

ملاحظة:

في حالة $a = 0$ نرمز لمشتق ريمان-ليوفيل الكسري ب D^{α}

كما أن $D^{\alpha} f(t) = D^n (I^{n-\alpha} f(t)); n = [\alpha] + 1$

2.3.1.1 مشتق كابوتو الكسري

يعطى مشتق كابوتو الكسري D^v من الرتبة v بالعلاقة التالية : [5, 22, 20]

$$D^v\phi(y) = \frac{1}{\Gamma(m-v)}\int_0^y \frac{\phi^m(r)}{(y-r)^{v-m+1}}dr, y > 0$$

حيث $m-1 < v \leq m, m \in \mathbb{N}$.
يتميز المشتق الجزئي لي كابوتو بالعملية الخطية التالية :

$$D^v(\lambda\phi(y) + \mu g(y)) = \lambda D^v\phi(y) + \mu D^v g(y)$$

حيث λ, μ ثوابت . و من أجل ثابت مشتق كابوتو لدينا : $D^vC = 0$

$$[23,\ 31,\ 33]D^v y^i = \begin{cases} 0 & , i \in \mathbf{N_0}, i < [v]; \\ \dfrac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-v)}y^{i-v} & , i \in \mathbf{N_0}, i \geq [v] \end{cases} \qquad (3.1)$$

. $N_0 = 1, 2, \ldots$

3.3.1.1 مشتق ويل الكسري

يعرَف مشتق ويل الكسري من الرتبة $\alpha > 0$ بالعلاقة التالية :

$$W^\alpha_\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}(-1)^n f^{(n)}(s)ds$$

4.3.1.1 مشتق مارشاد الكسري

يكتب مشتق مارشاد الكسري من الشكل :

$$D^\alpha f(t) = \frac{f(t)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}ds \qquad 0 < \alpha < 1$$

ملاحظة:

سنرمز للمشتق الكسري بالرمز D^α بشكل عام مع الاخد بعين الاعتبار المشتق المستخدم .
من جهة اخرى

$$I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) \quad , D^\alpha I^\alpha = f(t)$$

2.1 مقدمة في المعادلات التكاملية- التفاضلية

1.2.1 المعادلات التكاملية- التفاضلية

التداخل الحاصل في السنوات الأخيرة بين مختلف العلوم أدى الى تعقدها و تطورها بشكل رهيب جدا و بدأ العلماء بدراسة الظواهر الطبيعية سواء كانت فيزيائية ، كيميائيه، بيولوجيه أو هندسية , كان للمعادلات التكاملية بمختلف أنواعها دورا بارزاً في تفسير هذه الظواهر و إيجاد الحلول المختلفة لها سواء كانت تحليليه أو عددية. و للمعادلات التكاملية أهميتها الخاصة بين أفرع العلوم الرياضية المختلفة مثل المعادلات التفاضلية الجزئية و العادية و التحليل الدالي . و من جهة أخرى كانت المعادلات التكاملية-التفاضلية IDEs مادة أساسية في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية. ففي مطلع القرن العشرين شرع كل من العالم الإيطالي فولتيرا (V.Volterra) والعالم السويدي فريدهولم (I.Fredholm) في وضع هذه المعادلات أي المعادلات التكاملية-التفاضلية واستخدامها في دراستهما، فكان أثرهما كبيراً في تطوير المعادلات التكاملية-التفاضلية و التي كان لها دور بارز في بناء التحليل الرياضي والدالي . و بالرغم ان معظم المسائل الفيزيائية تصاغ بمعادلات تفاضلية إلا أننا يمكن إستبدال تلك المعادلات التفاضلية الى معادلات تكاملية سواءا كانت خطية أو غير خطية كي يكون حلها أكثر كفاءة و دقة و بطرق أبسط .

تعريف 1.2.1 المعادلة التفاضلية-التكاملية *(integro-differential equation)* هي معادلة تحتوي على التفاضل و التكامل، وتكون من الشكل: [38]

$$\mathsf{y}^{(n)}(x) = \mathsf{F}\Big(x, \mathsf{y}(x), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(x), \lambda \int_{\Omega} \mathsf{k}\Big(x, t, \mathsf{y}(t), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(t)\Big) dt\Big) \quad (4.1)$$

أو من الشكل: [38، 39]

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_{\Omega} \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \quad (5.1)$$

حيث:

1. $\mathsf{k}(x,t)$ دالة معلومة، تسمى نواة المعادلة التفاضلية التكاملية.
2. و Ω مجموعة جزئية مفتوحة من R.

3. $L_x(\mathsf{y}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\mathsf{y}^{(i)}(x)$ و $M_t(\mathsf{y}) = \sum_{j=0}^{m} d_j(t)\mathsf{y}^{(j)}(t)$

4. $a_i(x), d_j(x), \mathsf{g}(x)$ دوال معلومة محتواة في $L^2(\Omega)$.

و بما أن هذه المعادلة تحتوي على التفاضل فإنه من الضروري وجود الشروط الإبتدائية التالية:

$$\mathsf{y}(\alpha) = \beta_0, \quad \mathsf{y}'(\alpha) = \beta_1, \quad \mathsf{y}''(\alpha) = \beta_2, \quad \dots \quad \mathsf{y}^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

حيث $\alpha \in \Omega$ و β_i $i = 0, \dots, n-1,$ ثوابت.

2.2.1 تصنيفات IDEs

تصنف المعادلات التفاضلية التكاملية من حيث:

1. **طرفي التكامل :** [39, 38, 36] إذا كان طرفي التكامل عبارة عن ثابتين فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم وهي تأخذ الشكل التالي

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_a^b \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \qquad (6.1)$$

و إذا كان أحد أطراف التكامل عبارة عن متغير x فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفلتيرا و تكون على الشكل التالي : [38]:

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_a^x \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \qquad (7.1)$$

و إذا وجد كل من تكامل فريدهولم و تكامل فلتيرا في نفس المعادلة، فإن المعادلة التفاضلية-التكاملية لفريدهولم-فولتيرا و شكلها كما يلي : [39, 38]:

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda_1 \int_a^b \mathsf{k}_1(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \lambda_2 \int_a^x \mathsf{k}_2(x,t) M_t(\mathsf{y}) + \mathsf{g}(x) \qquad (8.1)$$

2. **رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية:** رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية هي رتبة أعلى مشتق في المعادلة.

3. **خطية أو غير خطية:** يقال عن المعادلة التفاضلية- التكاملية أنها خطية إذا كانت من الشكل (5.1)، و غير خطية إذا كانت من الشكل (4.1).

4. **من النوع الأول أو الثاني:** إذا كان الجزء التفاضلي معدوم تكون المعادلة التفاضلية التكاملية من النوع الأول [38]، أما إذا كان غير معدوم تكون المعادلة من النوع الثاني [38].

5. **متجانسة أو غير متجانسة:** إذا كانت $g(x)=0$ فإن المعادلة التفاضلية التكاملية متجانسة، أما إذا كانت $g(x)$ غير معدومة تكون المعادلة غير متجانسة.

6. **شاذة أو غير شاذة:** يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها شاذة إذا تحقق على الأقل أحد الشرطين التاليين:
   1. أحد طرفي التكامل أو كلاهما يساوي ∞.
   2. النواة غير منتهية بجوار نقطة أو أكثر من مجال التكامل.

   أما إذا لم يتحقق أي شرط من الشرطين السابقين، تكون المعادلة غير شاذة.

7. **عدد المتغيرات للدالة المجهولة:** يقال عن المعادلة التفاضلية-التكاملية أنها عادية إذا كانت الدالة المجهولة متعلقة بمتغير مستقل واحد، أما إذا كانت متعلقة بمتغيرين مستقلين أو أكثر تكون المعادلة التفاضلية التكاملية جزئية [38].

الفصل الثاني

كثيرات حدود هرميت و طريقة المربعات الصغرى

قائمة المحتويـــــــات

1.2 كثيرات حدود هرميت

تعتبر كثيرات الحدود من أبرز الدوال التي جلبت الإنتباه إليها حيث تم دراستها بشكل مفصل ولا يعتبر ذلك شئ غريب كون كثيرات الحدود هي الأبسط من ناحية التركيب ، فالعمليات عليها سهلة البرمجة و التطبيق على الحاسوب هذا بالإضافة إلى إستمرارها و وجود مشتقاتها من رتب عليا و خصائصها الأخرى . في نفس الوقت نظرية وايرستراس المعروفة أعطت زخما أخر لدراسة كثيرات الحدود .

1.1.2 تعاريف و خصائص

[34] يعرف كثير حدود هرميت على $]-\infty,+\infty[$ بالعلاقة التالية

$$H_n(u) = n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (u)^{n-2k}}{2^k k!(n-2k)!} \quad , n \in \mathbb{N}_{\not{\nu}}$$

بالمقابل لدينا :

$$u^n = n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{H_{n-2k}(u)}{2^k k!(n-2k)!} \quad , n \in \mathbb{N}_{\not{\nu}}$$

أول عشر حدود لكثير حدود هرميت

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^2 - 4x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

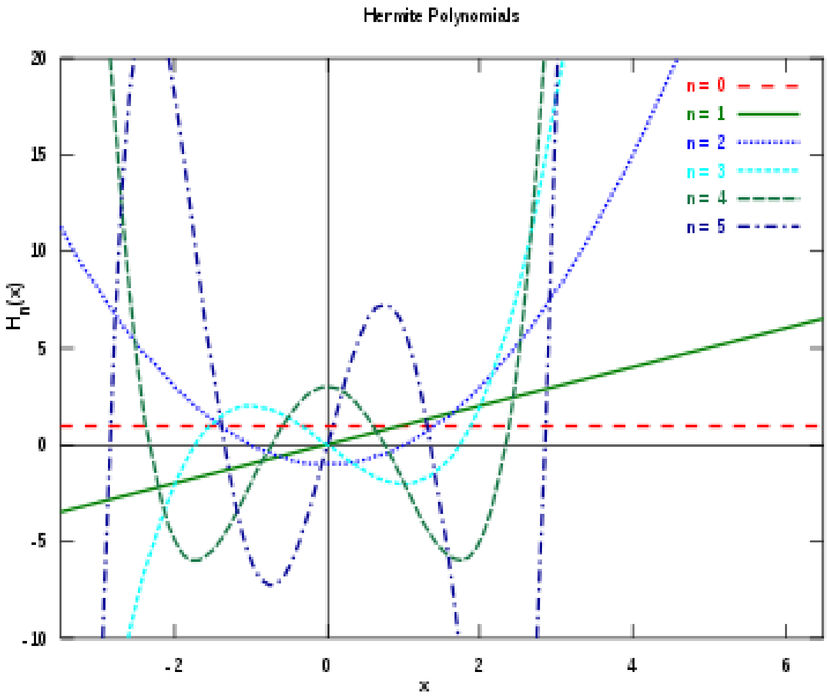
$$H_6(x) = 256x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 16880x$$

$$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1640$$

$$H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 26880x^3 + 3360x$$

$$H_{10}(x) = 1024x^{10} - 46080x^8 + 161250x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 15120$$



شكل 1.2: منحنى بياني يبين أول ست حدود هرميت

★ تعريف كثير حدود هرميت بالاعتماد على الدالة المولدة :

مبرهنة 1.1.2 [34] يتميز كثير حدود هرميت بدلالة الدالة المولدة بالعلاقة التالية :

$$G(t,x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{1.2}$$

البرهان 1.1.2 عند نشر الدالة المولدة $G(t,x)$ نجد :

$$\begin{aligned} G(t,x) &= e^{2xt-t^2} \\ &= e^{2xt} e^{-t^2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2xt)^k}{k!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^s}{s!}\right) \\ &= \sum_{k,s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2x)^k}{k!s!} t^{k+2s} \end{aligned}$$

و من أجل قيم ثابتة للمتغير s نجد أمثال t^n باختيار $k+2s=n$ أي $k=n-2s$ حيث أن $k=n-2s \geq 0$ أي $s \leq \frac{n}{2}$ إذن

$$0 \leq s \leq [\frac{n}{2}]$$

و معاملات الحد t^n هي

$$\sum_{x=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^s}{s!(n-2s)!}(2x)^{n-2s}$$

وهذا المجموع يساوي $\frac{H_n(x)}{n!}$ و منه فإن :

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^s n!}{s!(n-2s)!}(2x)^{n-2s}$$

وهي نفسها العلاقة رقم (1.2) و البرهان صحيح .

★ يمكن توليد كثير حدود هرميت بواسطة المبرهنة التالية :

مبرهنة 2.2.2 [34] يعطى كثير حدود هرميت بالعلاقة التالية :

$$H_n(x) = 2^n e^{\frac{d^2}{4dx^2}} x^n$$

البرهان 1.2.2 ولإثبات المبرهنة لدينا : $\frac{d}{2dx}e^{2tx} = te^{2tx}$

و بما أن :

$$\frac{d^n}{2^n dx^n}e^{2tx} = t^n e^{2tx}$$

و منه

$$\begin{aligned}
e^{\frac{d^2}{4dx^2}} e^{2tx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{-d^2}{dx^2})^n e^{2tx} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(\frac{d}{2dx})^{2n} e^{2tx} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} e^{2tx} \\
&= e^{2tx-t^2}
\end{aligned}$$

و هذا يحقق كما بينا في البرهان (1.2) أن

$$e^{2xt-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

وهكذا بمطابقة t^n في النشرين نجد

$$H_n(x) = 2^n e^{-\frac{d^2}{4dx^2}} x^n$$

و هذا ما يبين صح البرهان (??)

مكن إعطاء كثير حدود هرميت من خلال تكامل كوشي في التحليل العقدي كما في المبرهنة التالية :

مبرهنة 3.3.2 [34] يمكن تحديد كثير حدود هرميت من العلاقة التالية :

$$H_n(x) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+t)^n e^{-t^2} dt$$

مبرهنة 4.4.2 [34] تتميز القيم الخاصة لكثير حدود هرميت بالعلاقات التالية :

1/ $H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!$

2/ $H_{2n+1}(0) = 0$

3/ كثيرات الحدود $H_i(y)$ متعامدة بالنسبة لتابع الوزن $\omega(y) = e^{-y^2}$ [25] وفق الشرط التالي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(y) H_m(y) \omega(y) dy = \sqrt{\pi} 2^i i! \delta_{im}$$

2.1.2 تقريب التابع

1.2.1.2 تقريب تابع وفق اساس HPs

نفرض أن $H = L^2[0,1)$ فضاء هلبرتي مزود بالجداء السلمي $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ و النظيم $\|f\| = \sqrt{\langle f,g\rangle}$ و ليكن $\{H_0(x), H_1(x), ..., H_n(x)\} \subset H$ مجموعة دوال هرميت .

ليكن $\mathbf{S_n} = Span\{H_0(x), H_1(x), ..., H_n(x)\}$ و $f(x) \in L^2([0,1))$، بما أن $\mathbf{S_n}$ فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق ، فإنه يوجد أحسن تقريب $\tilde{z}$ للتابع f في $\mathbf{S_n}$ و يكون وحيد أي :

$$\forall z \in \mathbf{S_n},\ \exists!\ \tilde{z} \in \mathbf{S_n}\ :\ \|f-\tilde{z}\| \le \|f-z\| \qquad (2.2)$$

و بما أن $\tilde{z} \in S$ فإن :

$$f(x) \approx \tilde{z} = \sum_{i=0}^{n} c_i H_i(x) \tag{3.2}$$

حيث $c_i = \dfrac{\langle f, H_n \rangle_\omega}{n! 2^n \pi^{d/2}}$

2.2 طريقة المربعات الصغرى

تم نشر أول عرض واضح وموجز لطريقة المربعات الصغرى بواسطة "Legendre" عام 1805 ، بوصف التقنية كإجراء جبري لملاءمة المعادلات الخطية على البيانات

تعريف 1.2.2 لنأخذ مجموعة مكونة من m نقطة $(j = 1, 2, ..., m)$; (x_j, y_j) و التي حصلنا عليها تجريبيا و حيث أن هذه النقاط ترتبط مع بعضها بعضا بتابع $y = f(x)$.
كإعتبار أول لنشر لهذا التابع بكثير حدود من الدرجة n أصغر من m $(n<m)$.

$$Y = Y_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

نقترح لتعيين كثير الحدود هذا ، إيجاد قيم العوامل $a_i; (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ بحيث إن كثير الحدود يكون تقريبا جيدا للمعطيات $(x_j, y_j); (j = 1, 2, ..., m)$
إذا عوضنا هذه النقاط في كثير الحدود نحصل على m معادلة :

$$R_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n - y_1$$
$$R_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_1 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n - y_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_m = a_0 + a_1 x_m + a_1 x_m^2 + \ldots + a_n x_m^n - y_m$$

إن هذه المساويات ليست معدومة (لا تساوي أصفارا) لأنه ليس من الضروري أن يمر كثير الحدود بشكل دقيق من هذه النقاط ، إن الفرق بين قيمة كثير الحدود و قيمة التابع التجريبية هي

$$R_j = \sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i - y_j; \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

تسمى بالباقي و يرمز لها ب R_j .

إن مبدأ المربعات الصغرى يبنى على أساس أن أفضل تمثيل للمعطيات يكون بحيث يجعل مجموع مربعات البواقي أصغريا . لهذا سنعرف التابع :

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \ldots + R_m^2$$

ولنجعل هذا التابع اصغريا . هذا يعني أن نعدم المشتقات الجزئية ، أي :

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 2\left\{R_1\frac{\partial R_1}{\partial a_0} + R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_0} + \ldots + R_m\frac{\partial R_m}{\partial a_0}\right\} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 2\left\{R_1\frac{\partial R_1}{\partial a_1} + R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_1} + \ldots + R_m\frac{\partial R_m}{\partial a_1}\right\} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_n} = 2\left\{R_1\frac{\partial R_1}{\partial a_n} + R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_n} + \ldots + R_m\frac{\partial R_m}{\partial a_n}\right\} = 0$$

من الممكن إختصار كتابة العلاقات السابقة بالشكل :

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{i=0}^{n}(a_i x_j^i - y_j)^2; (j = 1, 2, \ldots, m)$$

و لكن بالإشتقاق لدينا :

$$\frac{\partial R_f}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0}(a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2 + \ldots + a_nx_j^n) - y_j = 1$$
$$\frac{\partial R_f}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1}(a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2 + \ldots + a_nx_j^n) - y_j = x_j$$
$$\frac{\partial R_f}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2}(a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2 + \ldots + a_nx_j^n) - y_j = x_j^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial R_f}{\partial a_n} = \frac{\partial}{\partial a_n}(a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2 + \ldots + a_nx_j^n) - y_j = x_j^n$$

من أجل $(j = 1, 2, \ldots, m)$ وبالتالي فإن جملة المعادلات تصبح بالشكل التالي :

$$R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_m = 0$$
$$x_1R_1 + x_2R_2 + \ldots + x_mR_m = 0$$
$$x_1^2R_1 + x_2^2R_2 + \ldots + x_m^2R_m = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^nR_1 + x_2^nR_2 + \ldots + x_m^nR_m = 0$$

بتعويض قيمة R_j و بجمع ال$(n+1)$ عامل $a_i; (i=0,1,2,\ldots,n)$ المجهولة فنحصل على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
ma_0+\sum_{j=1}^{m}x_ja_1+\sum_{j=1}^{m}x_j^2a_2+\ldots+\sum_{j=1}^{m}x_j^na_n-\sum_{j=1}^{m}y_j=0\\
\sum_{j=1}^{m}x_ja_0+\sum_{j=1}^{m}x_j^2a_1+\sum_{j=1}^{m}x_j^3a_2+\ldots+\sum_{j=1}^{m}x_j^{n+1}a_n-\sum_{j=1}^{m}x_jy_j=0\\
\sum_{j=1}^{m}x_j^2a_0+\sum_{j=1}^{m}x_j^3a_1+\sum_{j=1}^{m}x_j^4a_2+\ldots+\sum_{j=1}^{m}x_j^{n+2}a_n-\sum_{j=1}^{m}x_j^2y_j=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum_{j=1}^{m}x_j^na_0+\sum_{j=1}^{m}x_j^{n+1}a_1+\sum_{j=1}^{m}x_j^{n+2}a_2+\ldots+\sum_{j=1}^{m}x_j^{2n}a_n-\sum_{j=1}^{m}x_j^ny_j=0
\end{aligned}\tag{4.2}$$

حيث أن الجمع كله يتم من 1 إلى m أي ان :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}x_j^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_m^3\\
\sum_{j=1}^{m}x_j^2y_j=x_1^2y_1+x_2^2y_2+x_3^2y_3+\ldots+x_m^2y_m
\end{aligned}$$

تعريف 2.2.2 تسمى العلاقات (4.2) بإسم المعادلات الناظمية أو العادية .
إن كل هذه المجاميع تعرف مجموعة من$(n+1)$ معادلة خطية ب$(n+1)$ مجهول $a_i; (i=0,1,2\ldots,n)$ وحلها يعطي قيمة العوامل $a_i; (i=0,1,2\ldots,n)$ وهي تحدد كثير الحدود .

$$y=a_0+a_1x+a_1x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

إن مبدأ المربعات الصغرى ليس مقتصرا في الواقع على كثيرات الحدود ، إن التابع المرغوب التقريب به يمكن أن يأخذ أي شكل معروف طالما يمكن حل المعادلات الناظمية التي نحصل عليها ، وهذا يكون أسهل بالطبع عندما تكون المعادلات الناظمية خطية .

الفصل الثالث

حل معادلات تفاضلية–تكاملية بالتقريب بواسطة هرميت

قائمة المحتويـــــــات

في هذا القسم نعمل على الوصول إلى الحل التقريبي للمعادلة للمسألة الاولى التفااضلية-التكاملية الخطية من رتب كسرية و المسأة الثانية جملة معالات تفاضلية - تكاملية كسرية (1) ، (2) وذلك باستخدام أساس كثير حدود هرميت في الأولى ، أما بالنسبة للثانية فسنستعمل طريقة المربعات الصغرى بمساعدة كثير حدود هرميت .

$$[?]D^{\alpha}y(x) = g(x) + \int_0^1 k(x,t)y(t)dt \quad ,0 \leq x,t \leq 1 \qquad (1.3)$$

مرفقة بالشروط الإبتدائية :

$$y^{(j)}(0) = c_j, j = 0, 1, \ldots n-1, \qquad n-1 < \alpha \leq n \quad ,n \in N \; [?]$$

$$[?]D^{\alpha}u_n(y) = \phi_n(y) + \int_0^1 k_n(y,r)(\sum_{k=1}^{i} \alpha_{nk}u_k(r))dr \qquad 0 \leq y,r \leq 1 \quad (2.3)$$

مرفقة بالشروط الإبتدائية :

$$u_n^j(y_0) \quad ,n = 1, 2, \ldots, i \; [?]$$

حيث $D^{\alpha}u_n(y)$ يشير إلى مشتق كابوتو الكسري ل $u_n(y)$.

و r متغير حقيقي في المجال $[0,1]$ و $u_n(y)$ هي المجهول الذي نبحث عنه .

1.3 المسألة 01 معادلة تفاضلية-تكاملية كسرية خطية

أول مانبدأ به نأخد التكامل الكسري لطرفي المعادلة (1.3) نجد

$$J^{\alpha}D^{\alpha}y(x) = J^{\alpha}g(x) + J^{\alpha}(\int_0^1 k(x,t)y(t)dt)$$

و بالتالي

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0^+)\frac{x^k}{k!} + J^{\alpha}g(x) + J^{\alpha}(\int_0^1 k(x,t)y(t)dt) \qquad (3.3)$$

بتقريب $y(x)$ وفق أساس كثير حدود هرميت نحصل على :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i H_n(x) \qquad (4.3)$$

و بتعويض (4.3) في (3.3) نجد [32]

$$\sum_{i=0}^{n} a_i H_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0^+)\frac{x^k}{k!} + J^\alpha g(x) + J^\alpha(\int_0^1 k(x,t)\sum_{i=0}^{n} a_i H_n(t)dt)$$

ومنه

$$\sum_{i=0}^{n} a_i H_n(x) - J^\alpha(\sum_{i=0}^{n} a_i \Psi(x)dt) = \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0^+)\frac{x^k}{k!} + J^\alpha g(x)$$

حيث [32]

$$\Psi(x) = \int_0^1 k(x,t)H_n(t)dt$$

من جهة أخرى لدينا

$$\sum_{i=0}^{n} a_i[H_n(x) - J^\alpha \Psi(x)] = \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0^+)\frac{x^k}{k!} + J^\alpha g(x) \tag{5.3}$$

نضع $x = x_j, j = 0,\ldots,n$ في المعادلة (5.3) نحصل على جملة معادلات جبرية بمجاهيل

$$a_i \quad ,(i = 0,1,2,\ldots,n)$$

بحل هده الجملة نجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية التكاملية (1.3).

نصع الخطأ المطلق على النحو التالي :

$$Absoluteerror = |y(x) - y_m(x)|, 0 \leq x \leq 1$$

2.3 المسألة 02 جملة معادلات تفاضلية-تكاملية كسرية

نقوم بتقريب وفق اساس حدود هيرميت للمجهول $u_n(y)$ كما يلي

$$u_n(y) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^n H_j(y), \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{6.3}$$

حيث $H_j(y)$ تعبر عن كثيرات حدود هرميت و $\alpha_j^n, n = 1,2,\ldots,i$ معاملات التحليل .

و بالتعويض (6.3) في (2.3) نجد : [17]

$$D^\alpha \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^n H_j(y) = \phi_n(y) + \int_0^1 k_n(y,r)(\sum_{k=1}^{i} \alpha_{nk}[\sum_{j=0}^{m} \alpha_j^n H_j(r)])dr.$$

و من ثم نعرف باقي المعادلة بالعلاقة :

$$R_n(y,\alpha_0^n,\alpha_1^n,\ldots\ldots,\alpha_m^n)=D^\alpha\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^nH_j(y)-\phi_n(y)-\int_0^1k_n(y,r)\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_{nk}\Big[\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^nH_j(r)\Big]\Big)dr.$$

و نسمي مجموع مربعات البواقي بالرمز :

$$S_n(\alpha_0^n,\alpha_1^n,\ldots\ldots,\alpha_m^n)=\int_0^1[R_n(y,\alpha_0^n,\alpha_1^n,\ldots\ldots,\alpha_m^n)]^2w(y)dy.$$

حيث $w(y)$ تعبر عن تابع الوزن الموجب و المحدد في المجال [0,1] .

في هذا العمل سنأخذ $w(y)=1$ حيث :

$$S_n(\alpha_0^n,\alpha_1^n,\ldots\ldots,\alpha_m^n)=\int_0^1\Bigg\{\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^nD^\alpha H_j(y)-\int_0^1k_n(y,r)\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_{nk}\Big[\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^nH_j(r)\Big]\Big)dr-\phi_n($$

و الأن سنشرع في البحث عن قيم $\alpha_j^n, j=(0,1,2,\ldots,m)$ و التي تعتبر أقل من S_n وهذا ما يكافئ البحث عن الحل التقريبي لهذه لمعادلة .

أقل قيمة هي S_n يتم الحصول عليها عن طريق : [17]

$$\frac{\partial S_n}{\partial\alpha_j^n}=0,\qquad j=0,1,\ldots,m$$

كذلك

$$\int_0^1\Bigg\{\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^nD^\alpha H_j(y)-\int_0^1k_n(y,r)\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_{nk}\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^nH_j(r)\Big]dr-\phi_n(y)\Bigg\}$$
$$\times\Bigg\{D^\alpha H_j(y)-\int_0^1k_n(y,r)\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_{nk}\sum_{j=0}^{m}\alpha_nH_j(r)\Big]dr\Bigg\}dy=0$$

من خلال المعادلة أعلاه من أجل $j=0,1,\ldots,i$ يمكننا الحصول على $(i+1)$ من جملة المعادلات الخطية ذات $(i+1)$ من المعاملات α_j^n المجهولة .

يمكن نمذجة هذا الجملة بالستخدام المصفوفات و ذلك على النحو التالي :

$$A=\begin{pmatrix}\int_0^1 R_n(y,\alpha_0^n)h_0^n dy & \int_0^1 R_n(y,\alpha_1^n)h_0^n dy\cdots & \int_0^1 R_i(y,\alpha_i^n)h_0^n dy\\ \int_0^1 R_n(y,\alpha_0^n)h_1^n dy & \int_0^1 R_n(y,\alpha_1^n)h_1^n dy\cdots & \int_0^1 R_n(y,\alpha_i^n)h_1^n dy\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \int_0^1 R_n(y,\alpha_0^n)h_i^n dy & \int_0^1 R_n(y,\alpha_1^n)h_i^n dy\cdots & \int_0^1 R_n(y,\alpha_i^n)h_i^n dy\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\int_0^1 \phi_n(y)h_0^n dy\\ \int_0^1 \phi_n(y)h_1^n dy\\ \vdots\\ \int_0^1 \phi_n(y)h_i^n dy\end{pmatrix}$$

حيث :

$$R_n(y,\alpha_j^n)=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^n D^\alpha H_j(y)-\int_0^1 k_n(y,r)\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_{nk}\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^n H_j(r)\Big]dr.$$

و كذلك

$$h_j^n=D^\alpha H_j(y)-\int_0^1 k_n(y,r)\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_{nk}\sum_{j=0}^{m}H_j(r)\Big]dr,\qquad j=0,1,\dots,m\qquad n=1,2,\dots,i$$

فبحل الجملة أعلاه سنحصل على قيم المعاملات المجهولة و الحل التقريبي للمعادلة (2.3) .

3.3 التطبيق العددي

مثال 1.3.3 [32] لدينا المعادلة التفاضلية-التكاملية التالية :

$$D^{\frac{1}{2}}y(x)=\frac{\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}+\frac{x}{12}+\int_0^1 xty(t)dt\qquad ,0\le x\le 1\qquad (7.3)$$

مرفق بالشرط الإبتدائي : $y(0)=0$

بحيث الحل الدقيق هو : $y(x) = x^2 - x$

. نأخذ التكامل الكسري للمعادلة (7.3) نحصل على :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0^+)\frac{x^k}{k!} + j^\alpha \left\{ \frac{\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{12} + \int_0^1 xty(t)dt \right\} \qquad (8.3)$$

نضع ما يلي :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i H_i(x) \qquad (9.3)$$

و بتعويض (9.3) في المعادلة (8.3) نجد :

$$\sum_{i=0}^{2} a_i H_i(x) = j^\alpha \left\{ \frac{\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{12} + \int_0^1 xt\left[\sum_{i=0}^{2} a_i H_i(t)\right]dt \right\} \qquad (10.3)$$

بعد تبسيط المعادلة (10.3) نحصل على :

$$a_0\left[1 - \frac{x^{1+\alpha}}{2\Gamma(2+\alpha)}\right] + a_1\left[2x - \frac{2x^{1+\alpha}}{3\Gamma(2+\alpha)}\right] + a_2[4x^2 - 2] = \frac{8\Gamma(2.5)x^{1.5+\alpha}}{3\sqrt{\pi}\Gamma(2.5+\alpha)} - \frac{2\Gamma(1.5)x^{0.5+\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1.5+\alpha)} + \frac{\ }{12\Gamma} \qquad (11.3)$$

بأخذ $\alpha = 0.5$ نجد :

$$a_0\left[1 - \frac{1.5}{2\Gamma(2.5)}\right] + a_1\left[2x - \frac{2x^{1.5}}{3\Gamma(2.5)}\right] + a_2[4x^2 - 2] = \frac{8\Gamma(2.5)x^2}{3\sqrt{\pi}\Gamma(3)} - \frac{2\Gamma(1.5)x}{\sqrt{\pi}\Gamma(2)} + \frac{x^{1.5}}{12\Gamma(2.5)} \qquad (12.3)$$

و بتعويض x في المعادلة (12.3) ب $x = 0.3, x = 0.2, x = 0.1$ على التوالي نجد :

$$(0.9881058)a_0 + (0.1841411)a_1 + (-1.96)a_2 = -0.0880176$$
$$(0.9663582)a_0 + (0.3551443)a_1 + (-1.84)a_2 = -0.1543930$$
$$(0.9381961)a_0 + (0.5175948)a_1 + (-1.64)a_2 = -0.1996994$$

بعد حل المعادلة نحصل على :

$$a_0 = 0.4999971; a_1 = -0.4999994; a_2 = 0.2499986$$

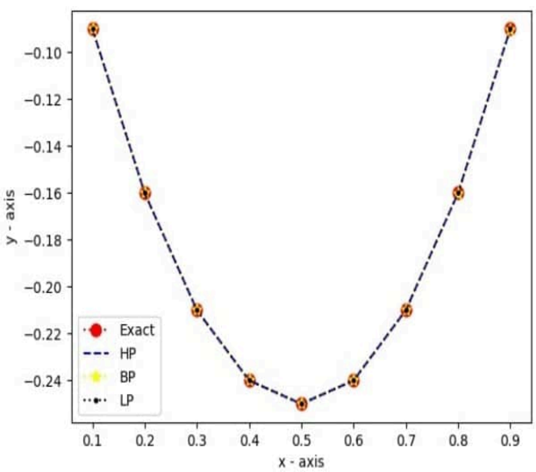
و بتعويض هذه القيم في المعادلة (9.3) نحصل على الحل التقريبي للمعادلة (7.3) . كما يلي هو

$$y(x) = 0.4999971 - 0.4999994(2x) + 0.2499986(4x^2 - 2)$$

الجدول التالي مقارنة بين الحل التقريبي عندما يكون $\alpha = 1/2$ مع الحل الدقيق

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي $HP(n=2)$	الحل التقريبي $BP(n=3)$	الحل التقريبي $LP(n=3)$	الخطأ HP	الخطأ BP	الخطأ LP
0.1	−0.09	−0.09	−0.0900005	−0.0900001	0	0.0000005	0.0000001
0.2	−0.16	−0.1600001	−0.1600017	−0.1600002	0.0000001	0.0000017	0.0000002
0.3	−0.21	−0.2100002	−0.2100033	−0.2100004	0.0000002	0.0000033	0.0000004
0.4	−0.24	−0.2400005	−0.2400066	−0.2400008	0.0000005	0.0000066	0.0000008
0.5	−0.25	−0.2500009	−0.250013	−0.2500001	0.0000009	0.000013	0.0000001
0.6	−0.24	−0.2400014	−0.240024	−0.2400019	0.0000014	0.000024	0.0000019
0.7	−0.21	−0.2100020	−0.2100409	−0.2100027	0.000002	0.0000409	0.00000027
0.8	−0.16	−0.1600027	−0.160065	−0.1600036	0.0000027	0.000065	0.0000036
0.9	−0.09	−0.0900036	−0.0900977	−0.0900046	0.0000036	0.0000977	0.0000046

جدول 1.3: مقارنة بين الحل الدقيق و التقريبي للمثال 1



شكل 1.3: مقارنة بين الحل التقريبي و الحل الدقيق

مثال 2.3.3 [32] لدينا المعادلة التفاضلية-التكاملية التالية :

$$D^{\frac{5}{6}}y(x) = \frac{-3}{91}\frac{x^{1/6}\Gamma(5/6)(-91+216x^2)}{\pi} + (5-2e)x + \int_0^1 xe^t y(t)dt \qquad ,0 \le x \le 1 \tag{13.3}$$

مرفق بالشرط الإبتدائي : $y(0) = 0$

مع الحل الدقيق وهو $y(x) = x - x^3$ بعد الحساب و التبسيط تحصلنا على الحل التقريبي وهو

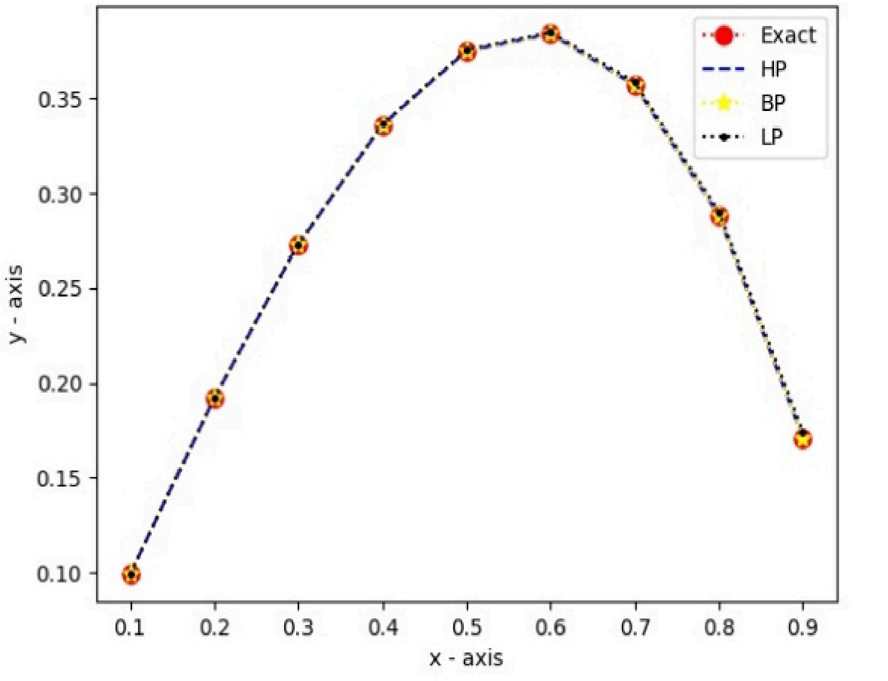
$$y(x) = 0.0000037 - 0.2500073(2x) + 0.0000018(4x^2 - 2) - 0.125001(8x^3 - 2x)$$

يبين الجدول الموالي مقارنة بين الحل التقريبي و الحل الدقيق :

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي $HP(n=3)$	الحل التقريبي $BP(n=3)$	الحل التقريبي $LP(n=3)$	الخطأ HP	الخطأ BP	الخطأ LP
0.1	0.099	0.0989999	0.0990208	0.0990209	0.0000001	0.0000208	0.0000209
0.2	0.192	0.1919998	0.192092	0.192091	0.0000002	0.000092	0.000091
0.3	0.273	0.2729998	0.2731545	0.2731555	0.0000002	0.0001545	0.0001555
0.4	0.336	0.3359997	0.3360001	0.3362648	0.0000003	0.0000001	0.0002648
0.5	0.375	0.3749996	0.3750002	0.3754694	0.0000004	0.0000002	0.000694
0.6	0.384	0.3839994	0.3840003	0.3848197	0.0000006	0.0000003	0.0008197
0.7	0.357	0.3569991	0.3570005	0.3583661	0.0000009	0.0000005	0.0013661
0.8	0.288	0.2879985	0.2880008	0.2901592	0.0000015	0.0000008	0.0021592
0.9	0.171	0.1709978	0.1710011	0.1742493	0.0000022	0.0000011	0.0032493

جدول 2.3: مقرنة بين الحل التقريبي و الحل الدقيق للمثال 2

كما تبين الصورة الموالية مقارنة بين الحل التقريبي و الحل الدقيق :



شكل 2.3: مقارنة بين الحل التقريبي و الحل الدقيق

مثال 3.3.3 [33] لدينا جملة المعادلات التفاضلية-التكاملية التالية :

$$D^{\frac{3}{4}}u_1(y) = -\frac{1}{20} - \frac{y}{12} + \frac{4y^{\frac{1}{4}}(15-23x^2)}{15\Gamma(\frac{1}{4})} + \int_0^1 (y+r)[u_1(r)+u_2(r)]dr \tag{14.3}$$

$$D^{\frac{3}{4}}u_2(y) = \frac{5y^3}{6} + \frac{9y^{\frac{4}{3}}}{2\Gamma(\frac{1}{3})} + \int_0^1 \sqrt{yr^2}[u_1(r)-u_2(r)]dr$$

مع الشروط الإبتدائية $u_1(0)=0, u_2(0)=0$ و الحل الدقيق :

$$u_1(y) = y - y^3 \qquad\qquad u_2(y) = y^2 - y$$

نفرض ان حل تقريبي ل $u(y)$ بوضع $m=3$:

$$\begin{aligned} u_1(y) &= \sum_{i=0}^{3} c_i H_i(y), \quad u_1(r) = \sum_{i=0}^{3} c_i H_i(r) \\ u_2(y) &= \sum_{i=0}^{3} a_i H_i(y), \quad u_2(r) = \sum_{i=0}^{3} a_i H_i(r) \end{aligned} \tag{15.3}$$

حيث $H_i(y)$ كثير حدود هرميت و a_i, c_i ثوابت .

ثانيا بتعويض (15.3) في (14.3) نحصل على :

(16.3)

$$D^{\frac{3}{4}}\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(y) = -\frac{1}{20} - \frac{y}{12} + \frac{4y^{\frac{1}{4}}(15-23x^2)}{15\Gamma(\frac{1}{4})} + \int_0^1 (y+r)[\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(r) + \sum_{i=0}^{3} a_iH_i(r)]dr,$$

$$D^{\frac{3}{4}}\sum_{i=0}^{3} a_iH_i(y) = \frac{5y^3}{6} + \frac{9y^{\frac{4}{3}}}{2\Gamma(\frac{1}{3})} + \int_0^1 \sqrt{yr^2}[\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(r) - \sum_{i=0}^{3} a_iH_i(r)]dr$$

و من ثم نعرف المعادلة المتبقية على النحو التالي :

(17.3)

$$R(y, c_0, c_1, \ldots, c_i) = D^{\frac{3}{4}}\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(y) + \frac{1}{20} + \frac{y}{12} - \frac{4y^{\frac{1}{4}}(15-23x^2)}{15\Gamma(\frac{1}{4})} - \int_0^1 (y+r)[\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(r)$$

$$R(y, a_0, a_1, \ldots, a_i) = D^{\frac{3}{4}}\sum_{i=0}^{3} a_iH_i(y) - \frac{5y^3}{6} - \frac{9y^{\frac{4}{3}}}{2\Gamma(\frac{1}{3})} - \int_0^1 \sqrt{yr^2}[\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(r) - \sum_{i=0}^{3} a_iH_i(r)]$$

وبتعويض $H_i(y)$ ، $H_i(r)$ و (3.1) في هذه المعادلة (17.3) نحصل على :

$$\begin{aligned} S(y, c_0, c_1, \ldots, c_i) &= \int_0^1 [R(y, c_0, c_1, \ldots, c_i)]^2\omega(y)dy \\ S(y, a_0, a_1, \ldots, a_i) &= \int_0^1 [R(y, a_0, a_1, \ldots, a_i)]^2\omega(y)dy \end{aligned} \qquad (18.3)$$

حيث $\omega(y)$ هي دالة الوزن الموجبة و المعرفة على المجال [0,1] .

للتبسيط سنضع $\omega(y) = 1$ و منه نجد :

$$S(y, c_0, c_1, \ldots, c_i) =$$

$$\int_0^1 \left\{ D^{\frac{3}{4}}\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(y) + \frac{1}{20} + \frac{y}{12} - \frac{4y^{\frac{1}{4}}(15-23x^2)}{15\Gamma(\frac{1}{4})} - \int_0^1 (y+r)[\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(r) + \sum_{i=0}^{3} a_iH_i(r)]dr \right.$$

$$S(y, a_0, a_1, \ldots, a_i) =$$

$$\left\{ D^{\frac{3}{4}}\sum_{i=0}^{3} a_iH_i(y) - \frac{5y^3}{6} - \frac{9y^{\frac{4}{3}}}{2\Gamma(\frac{1}{3})} - \int_0^1 \sqrt{yr^2}[\sum_{i=0}^{3} c_iH_i(r) - \sum_{i=0}^{3} a_iH_i(r)]dr \right\}^2 dy$$

أقل قيم ل S نحصل عليها من خلال :

$$\frac{\partial S}{\partial a_i}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial c_i}=0, \quad i=0,1,2 \tag{19.3}$$

بالشروط الإبتدائية التالية : $u_1(0)=0, u_2(0)=0$
و لدينا من خلال المعادلة

$$H_i(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{i}{2}}2^{\frac{i}{2}}(n-1)! & ,(\text{زوجي } i)\\ 0 & ,(\text{فردي } i)\end{cases}$$

نحصل على :

$$c_0-2c_2=0, \quad a_0-2a_2=0 \tag{20.3}$$

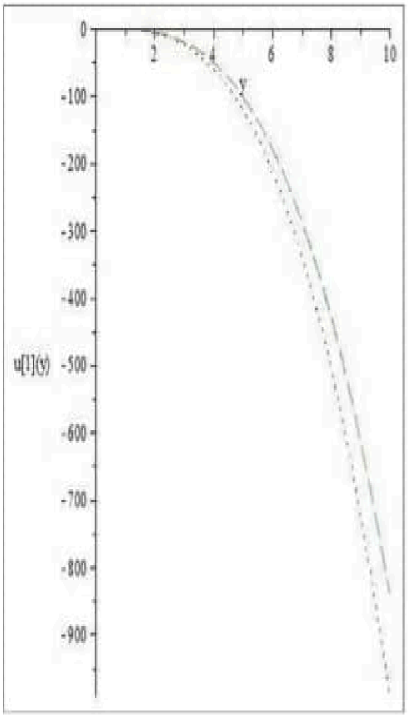
فبحل (19.3) و (20.3) نجد الثوابت على النحو التالي :

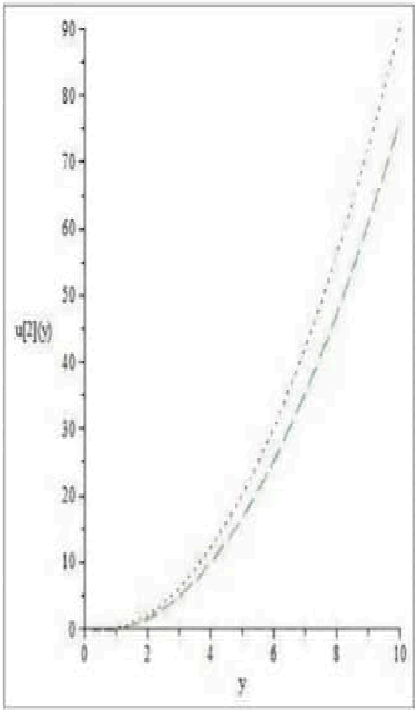
$$a_3=-2.0099, \quad a_2=6.7336, \quad a_1=-15.9927, a_0=13.4673$$
$$c_3=-0.7457, \quad c_2=2.4002, \quad c_1=-0.5108, c_0=4.8004$$

و بتعويض هذه القيم في (15.3) نحصل على :

$$u_1(y)=7.9268y+9.6008y^2-5.9656y^3+\dots$$
$$u_2(y)=-7.8666y+26.9344y^2-16.0792y^3+\dots$$

و هكذا نكون قد طبقنا طريقة المربعات الصغرى بمساعدة كثير حدود هرميت $H_j(y)$ ، $j=0,1,\dots,3$ ، في جملة المعادلات التفاضلية-التكاملية الخطية . النتائج العددية مبينة في الصورة المرفقة بالمثال ، و استعملنا نظام المعادلات الخطية مع معاملات مجهولة [7].





شكل 3.3: مقارنة بين الحل التقريبي و الحل الدقيق

خاتمة

خلال دراستنا هذه ظهرت لنا أهمية كثيرات الحدود في حل المشاكل التي قد تصادف المشتغلين في مجال الرياضيات والفيزياء وغيرهما من العلوم التطبيقية. لمسنا كذلك من خلال هذه الدراسة أن استعمال كثيرات الحدود في التطبيقات (في التطبيقات الرياضية والفيزيائية) يكون إما باستعمالها هي في حد ذاتها أي عباراتها الرياضية أواستخدام خواصها وهذا مما يدل ويجعل أن شبه التجريد والجفاف والافتقاد للتطبيق الذي ينسب إلى الرياضيات أمر نسبي، فالعلاقة إذن بين الرياضيات والعلوم الأخرى وطيدة ومتينة. كما بيناه في هذه المذكرة ببناء طريقة عددية تسمح لنا بإيجاد حل تقريبي للمعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتب الكسرية ، حيث اعتمدنا في هذه المذكرة على استخدام أساس كثير حدود هرميت لحل هذه المعادلات و من ثم تحويلها إلى جملة معادلات جبرية يسهل حلها مع عرض امثلة عددية تبين كفاءة هده الطرق . و ختاما فإن أصبت فيما كتبت فبفضل الذي بيده المصير، و إن أسأت فمن نقصي و مما بي من تقصير، فكل ابن آدم خطاء نَسّاء، والكمال لخالق الأرض و السماء، ومن له العزة و الكبرياء، هذا و الله أعلم، و صلى الله على سيدنا محمد و على آله و صحبه و سلم، و الحمد لله رب العالمين .

الملخص

يهدف هذا البحث الى تقديم معالجات عددية لبعض اتواع المعادلات التفاضلية - التكاملية من رتب كسرية الخطية و جمل معادلات تفاضلية تكاملية كسرية إعتمدنا في تلك التقنيات العددية على تقريب الحلول باستعمال كثيرات حدود هرميت و طريقة المربعات الصغرى . أمكن تحويل تلك المسائل إلى جمل معادلات جبرية سهلة البرمجة و الحل و من خلال تطبيقات عددية أثبتت تلك الطرائق كفاءة عالية في ايجاد حلول تقريبية و دقيقة مع عرض و تحليل لطرق عالجت الموضوع سابقا.

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية-تكاملية كسرية, حدود هرميت , طريقة المربعات الصغرى.

Abstract

The objective of this work is to find numerically the solution of some linear fractional integro□diferential equations and system of fractional integro□diferential equations . For the approximation of the solutions we have used Hermite polynomials, and least square method . tool converts these problems to systems of algebraic equations whose solutions are simple and easy to compute. Numerical applications have proven the effectiveness of these methods to find approximate and precise solutions.

Key words: fractional integro□diferential equations, Hermite polynomials,least square method

Résumé

L'objectif de cette thèse est de fournir des traitements numériques pour quelques types d'équations intégro-différentielles fractionnaires linéaires et système d'équations intégro-différentielles . Pour l'approximation des solutions, nous avons utilisé les polynômes de Hermite , et méthode moindres carre a permis de transformer ces problèmes à des systèmes d'équations algébriques dont la résolution est simple. Des applications numériques ont prouvé l'efficacité de ces méthodes utilisées pour trouver des solutions approximatives et précises.

Mots clés: Équations intégro-différentielles fractionnaires, polynômes de Hermite ,méthode moindres carre

المراجع العلمية

[1] A.M.S. Mahdy, R.T. Shwayyea ,Numerical solution of fractional integro-differential equations by least squares method and shifted Laguerre polynomials pseudo-spectral method, Int.J. Sci. Eng. Res. 7(4)(2016), 1589-1596.

[2] A.M.S. Mahdy, E.M.H. Mohamed, G.M.A. Marai, Numerical solution of fractional integro-differential equations by least squares method and shifted Chebyshev polynomials of the third kind method, Theor. Math. Appl. 6(4)(2016), 87-101.

[3] A. Das¸cio˘glu, D.V. Bayram,Solving Fractional Fredholm Integro-Differential Equations by Laguerre Polynomials, Sains Malays. 48(1)(2019), 251-257.

[4] D.Sh. Mohammed,Numerical solution of Fractional Integro-differential equations by least squares method and shifted chebyshev polynomial, Math. Probl. Eng. 2014(2014), 431965.

[5] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, Calif, USA 198, (1999).

[6] J.A. Nanware, P.M. Goud, T.L. Holambe,Solution of Fractional Integro-differential equations by Bernstein Polynomials, Malaya. J. Mat. 1 (2020), 581-586 .

[7] K. Oldham, J. Spanier, The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, Elsevier. (1974).

[8] O.H. Mohammed, S.A.Altaie,Approximate solution of Fractional Integro-Differential equations by using Bernstein polynomials, Eng. Technol. J. 30(8)(2012), 1362-1373.

[9] T. Oyedepo, O.A. Taiwo, Numerical Studies for Solving Linear Fractional Integro-differential Equations Based on Constructed Orthogonal Polynomials, ATBU J. Sci. Technol. Educ. 7(1)(2019), 1-13.

[10] R. Herrmann,Fractional Calculus:An Introduction for Physicists, World Scientific, Singapore, (2014).

[11] T. Oyedepo, O.A. Taiwo, A.F. Adebisi, C.Y. Ishola, O.E. Faniyi, Least Squares Method and Homotopy Perturbation Method for Solving Fractional Integro-Differential Equations, Pac. J. Sci. Technol. 20(1) (2019), 86-95.

[12] W.W. Bell,Special functions for Scientists and Engineers, London D. Van Norstrand Company, (1968).

[13] R.K. Saeed , H.M. Sdeq , Aust. J. Basic Appl. Sci. 4 (4) (2010) 633–638 .

[14] S.Irandoust-Pakchin ,S. Abdi-Mazraeh ,Int.J.Adv. Math. Sci. 1(3)(2013) 139–144 .

[15] M.H.Saleh ,D.S. Mohamed , M.H.Ahmed ,M.K.Marjan , Int.J.Comput. Appl. 121(24)(2015) 9–19 .

[16] Y.Yang ,Y.Chen ,Y.Huang ,J.Korean Math.Soc. 51(1)(2014)203–224 .

[17] D.S. Mohammed , Math. Probl. Eng. 2014 (2014) 5 431965 . A.M.S.Mahdy , R.T.Shwayyea , Int.J.Sci.Eng. Res.7 (4)(2016) 1589–1596 .

[18] A.M.S.Mahdy ,R.T. Shwayyea , Int.J.Sci.Eng.Res. 7(4)(2016) 1589–1596 .

[19] A.M.S.Mahdy ,E.M. Mohamed , J.Abstract Comput. Math. 1(2016)24–32 .

[20] A.M.A.El-Sayed , S.M. Salman , J.Fract.Calc.Appl. 4 (2)(2013)251–259 .

[21] R.P.Agarwal , A.M.El-Sayed ,S.M. Salman ,Adv. Differ. Equ.2013(1)(2013)320 .

[22] A.A. Elsadany , A.E. Matouk ,J. Appl.Math.Comput. 49(1–2)(2015)269–283 .

[23] I.Podlubny, Fractional Differential Equations, 25, Academic Press, New York, 1999 .

[24] D. Funaro , Polynomial Approximation of Differential Equations, Springer-Verlag, 1992 .

[25] L.C.Andrews,Appl. Opt. 25(1986) 3096 .

[26] M.M. Khader , E.M. Solouma , J. Comput. Theor. Nanosci. 12 (11) (2015) 4579–4583 .

[27] M. Bagherpoorfard, F.A.Ghassabzade ,J. Appl. Math. Phys. 1(05)(2013) 58 .

[28] Z.B. Kalateh ,S Ahmadi ,A.Aminataei ,J. linear topol. algeb 2 (2)(2013) 91–103 .

[29] S.H. Brill ,Int.J.Diff. Equ.Appl 4(2002) 141–155 .

[30] B.Bialecki,SIAM J. Numer.Anal.30(2) (1993) 425–434 .

[31] Y.A.Amer,A.M.S. Mahdy,E.S.M.Youssef, CMC 54 (2)(2018)161–180 .

[32] J.A. Nanware1,PARAMESHWARI M. GOUD2,T.L. HOLAMBE3,Numerical Solution Of fractional integro-differential equations using Hermite Polynomials.

[33] A.M.S. Mahdy,Numerical studies for solving fractional integro-differential equations,Journal of Ocean Engineering and Science 3(2018) 127–132 .

[34] أحمد علي عمر الواكشي، الجمع و الحدوديات المتعامدة في الفضاءات الخطية L^p -رسالة الدكتوراء في التحليل الرياضي .

[35] نيرمين محمود الرفاعي ، مسائل القيم الحدية للمعادلات اللاخطية ذات التفاضلات الكسرية-رسالة الماجستير في الرياضيات من جامعة دمشق .

[36] صلاح علي مبخوت ، المعادلات التفاضلية-جامعة دمار اليمن .

[37] نصر الدين عيد ،التحليل العددي - منشورات جامعة حلب كلية العلوم .

[38] مفاهيم أولية-المعادلات التكاملية ، جامعة حماة سورية 2014.

[39] حسن مصطفى العويضي ، المعادلات التفاضلية-جامعة الأزهر - كلية التربية للبنات (الرياض).