Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA - U.K.M.O

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

par

Houda DRIZA

Thème :

Étude de certaines classes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec conditions multiples

---

Soutenu le 14 Juin 2022, devant le jury composé de :

Mr. AGTI Mohamed	MAA / UKMO	Président
Mr. TELLAB Brahim	MCA / UKMO	Examinateur
Mr. FOUKRACH Djamal	MCA / UHBC	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier ALLAH qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier profondément mon encadreur Dr. Foukrach D., pour la gentillesse et la patience qu'il a manifestées à mon égard. Je le remercie, aussi, pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie aussi tous les membres du jury de mon mémoire qui ont pris de leurs temps pour lire et juger ce travail ainsi que pour leur déplacement le jour de la soutenance.

Enfin, mes remerciements ne seraient pas complets sans mentionner l'ensemble de mes enseignants qui ont participé à notre formation. Qu'ils trouvent ici, l'expression de mon profond respect et de ma haute considération.

Comme je remercie aussi ma grande famille pour son soutien et pour son aide dans la préparation de ce mémoire et pour leurs encouragements.

A tous ceux qui n'ont pas été mentionnés dans cette page de remerciements mais qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de ce travail; qu'ils trouvent en cette dernière phrase l'expression de toute ma gratitude.

Résumé

Ce mémoire a pour objet l'étude de quelques classes de problèmes aux limites non linéaires pour des équations différentielles (ou intégro-différentielles) d'ordre fractionnaire. Nous utilisons les techniques de la théorie du point fixe pour traiter l'existence et l'unicité de solution de telles classes d'équations. A la fin de chaque chapitre, quelques exemples illustratifs sont également discutés.

Mots clés : Calcul fractionnaire, Équation différentielle fractionnaire, Théorie du point fixe.

Abstract

The aim of this work is to study some classes of nonlinear boundary value problems for differential (or integro-differential) equations of fractional order. We use the fixed point theory techniques to show the existence and uniqueness of solution of such classes of equations. At the end of each chapter, some illustrative examples are also discussed.

Keywords : Fractional calculus, Fractional differential equation, Fixed point theory.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة بعض أصناف المسائل ذات القيم الحدية غير الخطية للمعادلات التفاضلية (أو التكاملية التفاضلية) ذات الرتب الكسرية. فقد استندنا على نظرية النقطة الصامدة لدراسة وجود ووحدانية الحل لمثل هذه الفئات من المعادلات. أدرجنا في نهاية كل فصل، بعض الأمثلة التوضيحية.

الكلمات المفتاحية:

التحليل الكسري، المعادلات التفاضلية الكسرية، نظرية النقطة الصامدة.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire représente un outil puissant en mathématiques appliquées pour étudier une large classes de problèmes dans différents domaines de la science et de l'ingénierie, vu que les dérivés fractionnaires constituent un excellent outil pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de divers matériaux et procédés [19]. Il trouve son origine dans la question de l'extension du sens. Un exemple bien connu est l'extension du sens des nombres réels aux nombres complexes. Un autre exemple, est l'extension du sens des factorielles d'entiers aux factorielles des nombres complexes. En intégration généralisée et différenciation la question de l'extension du sens est :

Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si n est un nombre quelconque irrationnel, fractionnaire ou complexe ?

Depuis le début du calcul fractionnaire en 1695, de nombreux mathématiciens ont contribué au développement de ce sujet, dont on peut citer : L'hôpital et Leibniz (1695), Euler (1730), Laplace (1812). Ensuite en 1819, la première mention d'une dérivée d'ordre arbitraire apparaît dans un texte où Lacroix a publié un texte sur le calcul différentiel dans lequel il a montré que pour $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha > 0$,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} x^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Une grande étude du calcul fractionnaire a été faite par J. Liouville. Ensuite, B. Riemann (1847) propose une approche pour la dérivation fractionnaire. Plus tard d'autres approches ont fait leurs apparitions comme celles de Grünwald $(1867-1872)$, de Letnikov $(1868-1872)$, de Laurent (1884), de Weyl (1917), et celle de M. Caputo en 1967. Pour plus de détails, voir [21, 23, 24].

Au cours des dernières décennies, les équations différentielles, intégro-différentielles fractionnaires non linéaires (en abrégé FDEs, FIDEs) ont été l'objet de nombreuses études en raison du développement intensif de la théorie du calcul fractionnaire et de ses applications fréquentes dans les domaines scientifiques et techniques tels que l'acoustique, la théorie du contrôle, le traitement du signal, les milieux poreux, la mécanique, la physique, la chimie et de nombreuses autres disciplines scientifiques. En conséquence, le sujet des problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, voir [1, 2, 3, 14, 15, 16, 17, 19] et les références qu'ils contiennent.

Les problèmes appliqués nécessitent des définitions de dérivées fractionnaires permettant l'utilisation de conditions initiales physiquement interprétables, qui contiennent $y(0)$, $y'(0)$, etc., les mêmes exigences de conditions aux limites. La dérivée fractionnaire de *Caputo* satisfait ces exigences. D'autre part, les conditions aux limites fractionnaires, intégrales et anti-périodiques apparaissent dans de nombreuses situations et ont diverses applications dans des domaines appliqués tels que le sang problèmes d'écoulement, génie chimique, thermoélasticité, écoulement souterrain, population dynamique, etc. Pour une description détaillée de ces conditions aux limites, voir [5, 6, 8, 10, 11].

Dans ce mémoire, nous essayons de reprendre toutes les démonstrations de [4], [7] et [9] en les détaillant a fin de les rendre plus claires et abordables. De plus, une connexion entre les conditions aux limites séparées classiques [6, 25] et les conditions aux limites fractionnaires séparées est développée. Nous examinons l'existence, ainsi que les l'existence et l'unicité des solutions pour quelques problèmes aux limites non linéaires d'ordre fractionnaire en utilisant une variété des théorèmes de point fixe.

Notre travail est réparti en quatre chapitres :

▷ Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions préliminaires du caclu fractionnaire et de la théorie de point fixe, qui seront utiles dans la suite de ce travail.

▷ Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude du problème non linéaire à dérivées fractionnaires au sens de Caputo avec des conditions aux limites fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I := [0,1], \quad 1 < q \leq 2, \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1({}^cD^p x(0)) = \gamma_1, \quad 0 < p < 1, \\ \alpha_2 x(1) + \beta_2({}^cD^p x(1)) = \gamma_2. \end{cases}$$

Les résultats donnés sont basés sur le principe de contraction de Banach et une application du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

▷ Ensuite, on traite le problème aux limites pour des équations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire avec conditions intégrales suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = g(t, x(t), (Qx(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < q \leq 2, \\ \alpha x(0) + \beta x'(0) = \int_0^1 q_1(x(s))ds, \\ \alpha x(1) + \beta x'(1) = \int_0^1 q_2(x(s))ds. \end{cases}$$

où

$$(Qx)(t) \quad = \quad \int_0^1 \gamma(t,s)x(s)ds.$$

Les résultats de ce chapitre sont obetenus par l'utilisation des théorèmes de point fixe de Banach et Krasnoselskii.

▷ Dans le dernier chapitre on présente quelques résultats d'existences et d'unicité de solutions pour le problème aux limites avec conditions anti-périodiques suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = h(t, x(t)), \quad t \in [0,T], \ T > 0, \ 1 < q \leq 2, \\ x(0) = -x(T), \\ {}^cD^p x(0) = -{}^cD^p x(T), \quad 0 < p < 1. \end{cases}$$

Les résultats donnés sont basés sur les théorèmes de point fixe de Banach, de type Schauder et Schaefer et l'alternative non lineaire de Leray-Schauder. .

Enfin, on donne une petite conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques concepts nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Nous commençons d'abord par présneter les fonctions les plus importants dans la théorie du calcul fractionnaire. Ensuite, nous rappelons l'intégrale fractionnaire, puis les deux célèbres approches de la dérivée d'ordre fractionnaire (d'ordre non entier) : l'approche de *Riemann-Liouville* (1847) et celle de *Caputo* (1967). On conclut le chapitre par une section reservée aux quelques éléments de la théorie de point fixe.

1.1 Éléments du calcul fractionnaire

1.1.1 Fonctions Spéciales

Dans cette section, nous présentons la fonction *Gamma* d'*Euler* et la fonction *Bêta*, puis nous citons quelques propriétés liées à ces fonctions. Ces deux fonctions jouent un rôle très importants dans la théorie du calcul fractionnaire. Pour plus de détails voir [21, 23, 24].

Fonction Gamma

L'une des fonctions de base en mathématiques est la fonction *Gamma* présentée par *Euler* en 1729. La fonction Gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée ; elle prolonge le factoriel à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1 *La fonction Gamma* Γ *est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad (z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0).$$

La fonction Gamma satisfait quelques propriétées importantes données par le résultat suivant :

Proposition 1.1 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

2. $\Gamma(n+1) = n!$

3. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Preuve.

1. En utilisant l'intégration par partie :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt \\ &= \left[-e^{-t}t^z\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. Nous utilisons la récurrence pour montrer la deuxième propriété.

   En effet,

   Pour $n = 0$: $\quad \Gamma(1) = 1 = 0!$

   Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$ et montrons que la propriété est vraie pour l'ordre $n+1$.

   Nous utilisons la première propriété, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)! \\ &= n!. \end{aligned}$$

   Par conséquent, la propriété est démontrée.

3. En peut facilement démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

   Pour $n = 0$: $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

   Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$, c'est à dire :

$$\Gamma((n-1)+\frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \qquad \text{est vérifiée,}$$

et le montrons pour l'ordre n :

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) \\
&= (n-\frac{1}{2})\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\
&= (\frac{2n-1}{2})\frac{(2n-2))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{2n}{2n}(\frac{2n-1}{2})\frac{(2n-2))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.
\end{aligned}$$

Donc, la formule est vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$.

■

Remarque 1.1 *On peut également définir $\Gamma(x)$ à l'aide de la limite suivante :*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}.$$

Exemple 1.1 *Quelques valeurs particulières de $\Gamma(z)$*

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1}e^{-t}\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = 1.$
2. $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1.$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}\ dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}\ dt$

   Posons le changement de variable : $t = u^2$, nous obtenons

   $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}e^{-u^2}2u\ du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \sqrt{\pi}$. *(Intégrale de Gausse).*

   Ou bien, nous utilisons la propriété 3 pour $n = 0$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}.$$

4. $\Gamma(0^+) = \int_0^{+\infty} t^{-1} = +\infty.$

Fonction Bêta

Comme la fonction Gamma, la fonction Bêta est elle aussi définié par une intégrale. Cette fonction à été étudiée par *Euler* et *Legendre* (Son nom est dûe à *Jacques Binet*)

Définition 1.2 *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad (x,y \in \mathbb{R}_+^*).$$

La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 1.2 *Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ telles que $Re\ z > 0, Re\ w > 0$, on a :*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Preuve. Soit $D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{z-1}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}\ y^{w-1}dy\right)\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\ x^{z-1}\ y^{w-1}dxdy.
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} y = u - x \\ x = ut \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dy = du \Longrightarrow dxdy = dxdu \\ dx = udt \end{cases}$$

Ainsi que le domaine D' correspondante D dans les coordonnées u, x est

$$D' = \{(u,x) \mid u > 0,\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{1} e^{-u}x^{z-1}(u-x)^{w-1}dxdu\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\int_0^1 (tu)^{z-1}(u-tu)^{w-1}udt\right)du\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\int_0^1 t^{z-1}u^{z-1}u^{w-1}(1-t)^{w-1}udt\right)du\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{z+w-1}du\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt\\
&= \Gamma(z+w)B(z,w).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

■

Remarque 1.2 *La fonction Bêta est symétrique :*

$$B(x,y) = B(y,x).$$

En effet,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(y)\Gamma(x)}{\Gamma(y+x)} = B(y,x).$$

Exemple 1.2 *Quelques valeurs particulières de $B(z,w)$*

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(1)} \\ &= \pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

1.1.2 Intégration d'ordre fractionnaire

La notion d'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de l'intégration d'ordre entière. Elle se base sur la formule de Cauchy[1] qui calcule la primitive d'ordre n d'une fonction $t \longmapsto f(t)$ continue et intégrable sur l'intervale $[a,b[$, b pouvant être fini ou infini.

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(x)dx \qquad \text{(Primitive d'ordre 1 de } f\text{)}.$$

Une primitive seconde de f est donnée par la formule suivante :

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t \left(\int_a^v f(x)dx\right) dv.$$

Permutant l'ordre d'intégration, d'après le théorème de Fubini, on peut ramener cette intégrale double à une intégrale simple :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(t) &= \int_a^t \left(\int_x^t dv\right) f(x)dx \\ &= \int_a^t (t-x)f(x)dx \qquad \text{(Primitive d'ordre 2 de } f\text{)}. \end{aligned}$$

En générale la n-ième itération de l'opération I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I_a^n f(t) &= \int_a^{t_1} dt_1 \int_a^{t_2} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx, \quad \text{(Formule de Cauchy)}. \end{aligned}$$

La généralistation de la fonction factorielle implique la généralistation de la formule de Cauchy. En effet, d'après la propriété de la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(n) = (n-1)!$, on aura :

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx.$$

[1] Cauchy (1789-1857)

Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La formule de Cauchy a été généralisée à un ordre non entier ($\alpha \in \mathbb{R}_+$) par plusieurs chercheurs, et par conséquent l'existence de différentes définitions de l'intégarale fractionnaire ; nous citons par exemple : N.H. Abel ($1823-1826$), J. Liouville ($1832-1855$), G.F. Riemann ($1847-1876$) et H. Weyl ($1855-1955$).

La définition la plus courante est celle de *Riemann-Liouville.* Elle se fait en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma dans la formule de Cauchy. Ainsi, pour un ordre plus général, nous avons la définition suivante :

Définition 1.3 *L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in C([a,b])$, d'ordre $\alpha \geq 0$, est définie par :*

$$I^{\alpha}_{a^+}f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx, & \alpha > 0, \\ \\ f(t), & \alpha = 0. \end{cases}$$

Avant de donner quelques propriétées liées à l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, nous présentons quelques exemples :

Exemple 1.3

1. *L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction définie par $f(t) = t^u$ pour $u > -1$ est donnée par :*

$$I_0^{\alpha}t^u = I^{\alpha}t^u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}x^u dx \quad (u > -1, \alpha > 0).$$

Faisons la substitution $x = pt$, $dx = t\ dp$, *on aura :*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}t^u &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-pt)^{\alpha-1}pt^u t\ dp. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-p)^{\alpha-1}p^u t^u t\ dp. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1+u+1}\int_0^1 (1-p)^{\alpha-1}p^u\ dp. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha+u}B(u+1,\alpha). \end{aligned}$$

Nous utilisons la relation entre les deux fonctions Gamma et Bêta, on trouve

$$I^{\alpha}t^u = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(\alpha+u+1)}t^{\alpha+u}, \quad (u > -1, \alpha > 0).$$

Cas particulier : Si $\alpha = 1$ et $u = \frac{1}{2}$, on trouve

$$I^1\sqrt{t} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)}t^{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}t^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}.$$

2. *Pour $f(t) = (t-a)^\beta$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α est :*

$$I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(x-a)^\beta dx.$$

Posons le changement de variable :

$$x = a + s(t-a),$$

où $s=0$, quand $x=a$ et $s=1$, quand $x=t$ et $dx = (t-x)ds$, alors :

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-a-s(t-a))^{\alpha-1}(a+s(t-a)-a)^\beta (t-a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t ((1-s)(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^\beta (t-a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (1-s)^{\alpha-1}(t-a)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta+1}s^\beta ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\int_a^t (1-s)^{\alpha-1}s^{(\beta+1)-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta+1)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété suivante de la fonction Bêta :

$$B(\alpha,\beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},$$

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

3. *L'intégrale d'une fonction constante au sens Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :*

$$I_{a^+}^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha.$$

Proposition 1.3 *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in C([a,b])$, Alors*

1. $(I_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\beta}f)(t) = (I_{a^+}^{\beta}I_{a^+}^{\alpha}f)(t) = (I_{a^+}^{\alpha+\beta}f)(t).$
2. $\frac{d}{dt}(I_{a^+}^{\alpha}f(t)) = (I_{a^+}^{\alpha-1}f)(t).$

Preuve.

1. Soit $t \in [a,b]$, on a

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta}f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\int_a^s (s-x)^{\beta-1}f(x)dxds.$$

Comme $f \in C([a,b])$, les intégrales existent et par le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}[I^{\beta}_{a^+}f)(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}f(x)dsdx. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(x)\int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}dsdx. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable : $s = x + u(t-x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (I^{\alpha}_{a^+}I^{\beta}_{a^+}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(x)(t-x)^{\alpha+\beta-1}dx\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du. \\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(x)(t-x)^{\alpha+\beta-1}dx. \end{aligned}$$

D'après la relation suivante :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x>0, y>0),$$

on trouve :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}[I^{\beta}_{a^+}f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(x)(t-x)^{\alpha+\beta-1}dx \\ &= I^{\alpha+\beta}_{a^+}f(t). \end{aligned}$$

De même manière si on substitue α par β, on obtient :

$$I^{\beta}_{a^+}[I^{\alpha}_{a^+}f)(t)] = (I^{\alpha+\beta}_{a^+}f)(t).$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(I^{\alpha}_{a^+}f(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{d}{dt}\left((t-x)^{\alpha-1}\right)f(x)dx \\ &= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-2}f(x)dx \\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-2}f(x)dx \\ &= I^{\alpha-1}_{a^+}f(t). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4 *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $f, g \in C([a,b])$, Alors*

$$I^{\alpha}_{a^+}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda I^{\alpha}_{a^+}f(t) + \mu I^{\alpha}_{a^+}g(t).$$

Autrement dit, l'intégrale fractionnaire possède la propriété de la linéarité.

Preuve.

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}[\lambda f(t)+\mu g(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}[\lambda f(s)+\mu g(s)]ds \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= \lambda I^{\alpha} I^{\alpha}_{a^+} f(t) + \mu I^{\alpha}_{a^+} g(t). \end{aligned}$$

■

1.1.3 Dérivation d'ordre fractionnaire

La notion de dérivation d'ordre fractionnaire est aussi trop ancienne, elle généralise les concepts de la différentiation d'ordre entière. Plusieurs mathématiciens ont essayés d'enlever les ambiguïtés autour de cette notion. Nous citons à titre d'exemple : Euleur (1730), Laurent, Lagrange (1772), Liouville (1832), Riemann (1847), Grünwal (1867), Letnikov (1868), Riesz (1922), Caputo (1967), ainsi que Hilfer, Fabrizo, Atangana, Baleanu, et d'autres. Ceci justifie le nombre des définitions publiés. On va présenter respectivement les deux célèbres et anciennes approches : de *Riemann-Liouville* et celle de *Caputo.*

Dérivation fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4 *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in C^{n+1}[a,b]$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a^+} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)dx, \quad t > a, \end{aligned}$$

où $n = [\alpha]+1$ et $[\alpha]$ la partie entière de α.

Remarque 1.3 *:*

1. *Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad {}^{RL}D^{n}_{a^+} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

2. *Si $0 \le \alpha \le 1$, Alors $n = 1$, donc la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville devient :*

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_a^t (t-x)^{-\alpha} f(x)dx, \quad t > a.$$

3. *Si* $\alpha = 0$*, Alors* $n = 1$ *et par conséquent*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{0}_{a^+}f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right) I_a f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Exemple 1.4 *: La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de* $f(t) = (t-\alpha)^\beta$ *:*
Soit α *non entier et* $0 < n-1 < \alpha < n$ *et* $\beta > -1$*, alors on a :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a}(t-\alpha)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)dx \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{n-\alpha}(t-\alpha)^\beta. \end{aligned}$$

Par la formule 2 dans l'exemple 1.3, on trouve :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a}(t-\alpha)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta+n-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta+n-\alpha}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta+n-\alpha} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Utilisons les propriétés de la fonction Gamma, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a}(t-\alpha)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta+n-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Remarque 1.4

1. *Pour* $\alpha = 1$*, la dernière formule dans l'exemple précédent se réduit :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{1}_{a}(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} \\ &= \beta(t-a)^{\beta-1} \\ &= \frac{d}{dt}(t-a)^\beta. \end{aligned}$$

2. *Pour* $\beta = 1$ *dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :*

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a}1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

C'est-à-dire :

La dérivée d'ordre fractinnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est ni constante, ni nulle.

Ainsi que :

$$^{RL}D_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

La linéarité de la dérivation fractionnaire est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soient f et g deux fonction dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent , pour λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors $^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe, et on a :*

$$^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda^{RL}D_a^\alpha f(t) + \mu^{RL}D_a^\alpha g(t).$$

Preuve. Pour la démonstration on va utiliser la linéarité de l'intégrale fractionnaire et la linéarité de la dérivation classique (D^n)

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) &= D^n I_a^{n-\alpha}(\lambda f + \mu g)(t) \\ &= D^n(\lambda I_a^{n-\alpha} f(t) + \mu I_a^{n-\alpha} g(t)) \\ &= \lambda D^n I_a^{n-\alpha} f(t) + \mu D^n I_a^{n-\alpha} g(t) \\ &= \lambda \ {}^{RL}D_a^\alpha f(t) + \mu \ {}^{RL}D_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5 *Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$ avec $(n, m \in \mathbb{N})$.*

Alors,

1. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in C([a,b])$ et pour tout $x \in [a,b]$, on a l'égalité suivante :*

$$^{RL}D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x).$$

2. *Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $^{RL}D^{\beta-\alpha}f$ existe, alors*

$$^{RL}D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = \ ^{RL}D^{\beta-\alpha} f(x),$$

pour tout $x \in [a,b]$.

3. *S'il existe une fonction $T \in C([a,b])$ telle que $f = I_a^\alpha T$, alors*

$$I_a^\alpha(^{RL}D_a^\beta f)(x) = f(x),$$

pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve.

1. Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n > m$ et on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\beta}(I_a^{\alpha}f)(x) &= D^n I_a^{n-\beta}(I_a^{\alpha}f)(x) \\ &= D^n(I_a^{n-\beta+\alpha}f)(x) \\ &= D^n I^n(I_a^{\alpha-\beta}f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta}f(x), \end{aligned}$$

   pour tout $x \in [a,b]$.

2. Pour $\beta \geq \alpha > 0$, alors $m > n$ et on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\beta}(I_a^{\alpha}f)(x) &= D^m I_a^{m-\beta}(I_a^{\alpha}f)(x) \\ &= D^m I_a^{m-(\beta-\alpha)}(f)(x) \\ &= {}^{RL}D_a^{\beta-\alpha}f(x). \end{aligned}$$

3. Par la notation, on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\ ({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x) &= I_a^{\alpha}({}^{RL}D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}T(x)) \\ &= I_a^{\alpha}T(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.5

1. *La propriété de semi-groupe n'est pas toujours satistaite, i.e.*

$${}^{RL}D_a^{\alpha}\ ({}^{RL}D_a^{\beta}f)(t) \neq\ {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t) \neq {}^{RL}\ D_a^{\beta}\ ({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(t).$$

2. *Pour la composition dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire, on a*
   (a) ${}^{RL}D_a^{\alpha}\ (I_a^{\alpha}f)(x) = f(x)$
   (b) $I_a^{\alpha}\ ({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x) \neq f(x)$

Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

La deuxième dérivée présentée dans cette section est la dérivée au sens de Caputo d'ordre arbitraire $\alpha \in]n-1, n]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Elle s'obtient par une dérivation classique d'ordre n suivie d'une application de $I_a^{n-\alpha}$. Ce concept a été introduit par M. Caputo en 1967.

Définition 1.5 *: La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Caputo d'une fonction $f \in C^n([a,b])$ est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(t) &= I_a^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx, \quad t > a, \end{aligned}$$

avec $n = [\alpha] + 1$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Remarque 1.6

1. *Pour $\alpha = n$, on a :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad {}^cD_a^n f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = f^{(n)}(t)$$
2. *Si $0 \leq \alpha \leq 1$, Alors $n = 1$, donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :*
$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(t) &= I_a^{1-\alpha} Df(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{-\alpha} Df(x)dx, \quad t > a \end{aligned}$$
3. *Pour $\alpha = 0$, on obtient $n = 1$ et donc*
$$\begin{aligned} {}^cD_{a^+}^0 f(t) &= I_a\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Exemple 1.5

1. *La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle. En effet*
$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha C &= I_a^{n-\alpha} D^n C \\ &= I_a^{n-\alpha} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$
2. *La dérivée au sens de Caputo de $f(t) = (t-a)^\beta$:*
On sait que, pour α un entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, la dérivée classique d'ordre n de f est
$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= [\beta(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n+1)]\,(t-a)^{\beta-n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}. \end{aligned}$$

D'où

$$ {}^cD_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau. $$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on obtient :

$$ \begin{aligned} {}^cD_a^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds. \end{aligned} $$

En utilisant la définition de la fonction Bêta et ses propriétées, on trouve

$$ \begin{aligned} {}^cD_a^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} $$

Proposition 1.6 *: Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha]+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $t \in [a,b]$, on a les propriétés suivantes :*

1. *La propriété de sem-groupe est toujours vérifée, i.e.*

$$ {}^cD_a^\alpha\ ({}^cD_a^\beta f)(t) = {}^cD_a^{\alpha+\beta} f(t) = {}^cD_a^\beta\ ({}^cD_a^\alpha f)(t). $$

2. ${}^cD_a^\alpha(I_a^\alpha f)(t) = f(t)$.
3. $I_a^\alpha({}^cD_a^\alpha f(t)) \neq f(t)$. *Plus précisément on a :*

$$ I_a^\alpha({}^cD_a^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. $$

Preuve.

1. En utilisant la définition 1.5, on obtient :

$$ \begin{aligned} ({}^cD_a^\alpha\ {}^cD_a^\beta f)(t) &= \left[(I_a^{n-\alpha}D^n)(I_a^{n-\beta}D^n)f\right](t). \\ &= \left(I_a^{n-\alpha}D^nI_a^{n-\beta}D^nf\right)(t). \\ &= (I_a^{n-(\alpha+\beta)}D^nI_a^nD^nf)(t). \\ &= (I_a^{n-(\alpha+\beta)}D^n)f(t). \\ &= {}^cD_a^{\alpha+\beta}f(t). \end{aligned} $$

2. D'après la définition de ${}^cD_a^\alpha$, on trouve

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha(I_a^\alpha f)(t) &= \left[(I_a^{n-\alpha}D^n)I_a^\alpha f\right](t) \\ &= \left[I_a^{n-\alpha}D^n(I_a^n I_a^{\alpha-n})f\right](t) \\ &= I_a^{n-\alpha}D^n I_a^n I_a^{\alpha-n} f(t) \\ &= I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha-n} f(t) \\ &= I_a^0 f. \end{aligned}$$

3. D'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, on a :

$$I_a^\alpha({}^cD_a^\alpha f(t)) = (I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} D^\alpha) f(t).$$

De plus,

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} D^\alpha) f(t) &= (I_a^\alpha I_a^n I_a^{-\alpha} D^n) f(t) \\ &= I_a^n D^n f(t). \end{aligned}$$

Et comme,

$$I_a^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!},$$

on trouve :

$$I_a^\alpha({}^cD^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

■

Le théorème suivant montre que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo est linéaire.

Théorème 1.2 *: Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Caputo existent, pour λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors ${}^cD_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe , et on a :*

$$^cD_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda {}^cD_a^\alpha f(t) + \mu {}^cD_a^\alpha g(t).$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1.1. ■

Remarque 1.7 *Le lien entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée au sens de Riemann-Liouville est donné par la relation suivante :*

$$\left({}^cD_a^\alpha f\right)(x) = \left({}^{RL}D_a^\alpha f\right)(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-a}}{\Gamma(j+1-a)} f^{(j)}(a),$$

où $\alpha \in]n-1, n[$ et $f \in C^n([a,b))$.

1.2 Éléments de théorie du point fixe

Dans cette partie, nous abordons quelques outils nécessaires dans ce travail. Puis, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Banach, celui de type Schauder, Leray-Schauder et Schaefer et enfin le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

1.2.1 Quelques résultats et outils auxiliaires

On commence par donner sans démonstration deux lemmes qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

Lemme 1.1 *[23, 24] Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle fractionnaire*

$$^{C}D^{\alpha}_{0^+}u(t) \quad = \quad 0,$$

admet une solution, s'écrit sous forme :

$$u(t) = c_0 + c_1t^1 + c_2t^2... + c_{N-1}t^{N-1},$$

$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3...N$ *et* $N = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.2 *[23, 24] Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha}_{0^+}\, {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}u(t) = u(t) + c_0 + c_1t^1 + c_2t^2... + c_{N-1}t^{N-1},$$

$c_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, 3...N$ *et* $N = [\alpha] + 1$.

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application. On va définir les différentes notions utilisées dans ce manuscrit. Pour plus de détails voir [12, 13, 20].

Définition 1.6 *Une application T est dite continue, si pour tout $x \in E$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x, \epsilon)$ tel que, pour tout $y \in E$:*

$$\|y - x\|_E < \delta \Longrightarrow \|T(y) - T(x)\|_F < \epsilon.$$

Définition 1.7 *Une application T est dite uniformement continue sur $\Omega \subset E$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que quels que soit $x, y \in \Omega$ nous avons :*

$$\|y - x\|_E < \delta \Longrightarrow \|T(y) - T(x)\|_F < \epsilon.$$

Définition 1.8 *Une application continue $T : \Omega \subset E \longrightarrow F$ est dite compacte si $T(\overline{\Omega})$ est relativement compacte. Elle est dite complètement continue, si l'image de tout sous ensembe bornée M de Ω est relativement compacte.*

Définition 1.9 *Soit H un sous ensemble de $C(E, F)$. On dit que H est uniformément bornée, s'il existe $M > 0$, constante telle que*

$$||f||_\infty = \sup_x |f(x)| \leq M, \quad \forall f \in H.$$

Définition 1.10 *Soit H un sous ensemble de $C([a, b], \mathbb{R})$. On dit que H est équicontinue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in H, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Autrement dit : Si $T\lambda : E \to F, (\lambda \in \ A)$ un ensemble d'application dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$, alors $T\lambda$ est dite équicontinue sur $A \subseteq E$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall \lambda \in A, \forall x_1, x_2 \in A : \quad \|x_1 - x_2\|_E < \delta \Longrightarrow \|T\lambda(x_1) - T\lambda(x_2)\|_F < \varepsilon.$$

Théorème 1.3 (Théorème d'Ascoli-Arzelà) *[18, 20] Soit $H \subset C([a, b], \mathbb{R})$. H est relativement compact dans $C([a, b], \mathbb{R})$ (i.e, $\overline{H}$ est compact) si et seulement si :*
1. H est uniformément borné.
2. H est équicontinue.

Théorème 1.4 *Soit $T : E \to F$ une application continue. Si Ω est un ensemble compact dans E, alors $T(\Omega)$ est un ensemble compact dans F.*

1.2.2 Quelques théorèmes du point fixe

En analyse, un théorème du point fixe donne des conditions suffisantes d'existence ou d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une fonction ou une famille de fonctions. Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe. Nous présentons deux définitions nécessaires avant d'énoncer ce théorème.

Définition 1.11 *Soit T une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de T tout point $x \in E$ telle que :*

$$T(x) = x.$$

Définition 1.12 *Soit E un espace métrique. Une application $T : E \to E$ est dite Lipschitzienne si elle vérifier :*

$$\exists k > 0, \forall x, y \in E, \|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

▷ Pour $k = 1$, l'application Lipschitzienne T est dite une application contractante.

▷ Pour $0 < k < 1$, l'application Lipschitzienne T est dite strictement contractante.

Théorème 1.5 (Théorème du point fixe de Banach (1922)) *[18, 20]*
Soit E un espace métrique complet et soit $T : E \to E$ une application contractante , alors T posséde un point fixe unique, i.e.

$$\exists! x \in E \quad \textit{tel que} \quad Tx = x.$$

Le théorème du point fixe suivant est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach par Juliusz Schauder.

Théorème 1.6 (Théorème du point fixe de type Schauder (1930)) *[18, 20]*
Soient X un espace de Banach, Ω un sous-ensemble ouvert borné de X avec $\theta \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur complètement continu tel que

$$\|Tu\| \leq \|u\|, \ \forall u \in \partial\Omega.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans $\overline{\Omega}$.

On présente maintenant, une autre version du théorème de point fixe de Schauder ; l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.7 (Théorème du point fixe de Leray – Schauder) *[18, 20]*
Soit $C \in E$ (fermé et convexe), soit U un sous ensemble ouverte de C avec $0 \in U$ et $T : \overline{U} \longrightarrow C$ est un opérateur continu compacte, alors :

(1) T admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou bien

(2) il existe $u \in \partial U$ et $\lambda \in]0, 1[$ avec $u = \lambda T u$.

Le théorème du point fixe de Krasnoselskii établi en 1955, est l'un des plus important théorèmes du point fixe en analyse. (voir [4],[6]).

Théorème 1.8 (Théorème du point fixe de Krasnoselskii (1955)) *[18, 22]*
Soit Ω un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach E. T_1 et T_2 sont deux applications de Ω dans E telles que :

1. *$T_1(x) + T_2(y) \in \Omega, \quad \forall x, y \in \Omega.$*
2. *T_1 est une contraction.*
3. *T_2 est compacte et continue.*

Alors, $T_1 + T_2$ admet un point fixe dans Ω.

Autrement dit,

$$\exists x \in \Omega \quad \textit{tel que} \quad T_1(x) + T_2(x) = x.$$

Le théorème du point fixe de Schaefer est un cas particulier d'un théorème de plus grande portée découvert auparavant par Leray et Schauder. Il intervient particulièrement dans la démonstration de l'existence de solutions d'équations différentielles.

Théorème 1.9 (Théorème du point fixe de Schaefer) *[18, 20]*
Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur complètement continu.
Si l'ensemble

$$V = \{u \in X \mid \quad u = \mu T u, \quad 0 < \mu < 1\}$$

est borné, alors T admet au moins un point fixe dans X.

Chapitre 2

Étude d'une classe d'EDFs avec conditions aux limites fractionnaires

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'une classe de problèmes non linéaires d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites fractionnaires séparées de la forme :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I := [0,1], \quad 1 < q \leq 2, \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1({}^cD^p x(0)) = \gamma_1, \quad 0 < p < 1, \\ \alpha_2 x(1) + \beta_2({}^cD^p x(1)) = \gamma_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

${}^cD^q$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre q.

$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée et $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2)$ sont des nombres réels, avec $\alpha_1 \neq 0$.

2.1 Problème linéaire associé

On commence tout d'obord par définir la solution du problème posé (2.1).

Définition 2.1 *Une fonction $x \in C^2(I, \mathbb{R})$ est dite solution de* (2.1) *si elle satisfait l'équation ${}^cD^q x(t) = f(t, x(t))$, sur I et les conditions aux limites fractionnaires suivantes :*

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1({}^cD^p x(0)) = \gamma_1, \quad \alpha_2 x(1) + \beta_2({}^cD^p x(1)) = \gamma_2, \quad 0 < p < 1.$$

Dans le lemme suivant, nous déterminons la variante linéaire du problème (2.1).

Lemme 2.1 *: Pour une fonction $\sigma \in C([0,1], \mathbb{R})$, l'unique solution du problème aux limites :*

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = \sigma(t), \quad t \in [0,1], \quad 1 < q \leq 2, \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1({}^cD^p x(0)) = \gamma_1, \quad 0 < p < 1, \\ \alpha_2 x(1) + \beta_2({}^cD^p x(1)) = \gamma_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)ds - \frac{t}{v_1}\bigg(\alpha_2\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)ds + \beta_2\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}\sigma(s)ds\bigg) \\ &\quad + \frac{\alpha_1 v_2 t + \gamma_1 v_1}{\alpha_1 v_1}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où

$$v_1 = \frac{\alpha_2\Gamma(2-p)+\beta_2}{\Gamma(2-p)}, \quad v_2 = \frac{\gamma_2\alpha_1 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1}. \tag{2.4}$$

Preuve. Soient $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. En utilisant le lemme 1.2, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire dans (2.2) peut s'écrit sous forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= I^q\sigma(t) - c_0 - c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1}\sigma(s)ds - c_0 - c_1 t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En employant les propriétés suivantes :

${}^cD^p c = 0$ (c est une constante),

${}^cD^p t = t^{1-p}/\Gamma(2-p)$,

${}^cD^p I^q\sigma(t) = I^{q-p}\sigma(t)$.

L'équation (2.5) donne

$${}^cD^p x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}\sigma(s)ds - c_1\frac{t^{1-p}}{\Gamma(2-p)}.$$

Nous tenons compte la première condition en $t=0$; $\alpha_1 x(0) + \beta_1({}^cD^p x(0)) = \gamma_1$, on a

$$\alpha_1(-c_0) + \beta_1(0) = \gamma_1, \quad \text{ce qui implique que} \quad c_0 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}.$$

Par la deuxième condition en $t=1$; $\alpha_2 x(1) + \beta_2({}^cD^p x(1)) = \gamma_2$, on obtient

$$\alpha_2\bigg(\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)ds - c_0 - c_1\bigg) + \beta_2\bigg(\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}\sigma(s)ds - \frac{c_1}{\Gamma(2-p)}\bigg) = \gamma_2,$$

En remplaçant la valeur de c_0 dans l'équation précédente, on trouve

$$-c_1\bigg(\frac{\alpha_2\Gamma(2-p)+\beta_2}{\Gamma(2-p)}\bigg) = \frac{\gamma_2\alpha_1 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1} - \alpha_2\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)ds - \beta_2\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}\sigma(s)ds.$$

Utilisons (2.4) dans l'équation ci-dessus, on aura

$$c_1 = -\frac{v_2}{v_1} + \frac{1}{v_1}\bigg(\alpha_2\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)ds - \beta_2\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}\sigma(s)ds\bigg).$$

En substituant les valeurs de c_0 et c_1 dans (2.5), on obtient (2.3). ■

2.2 Existence et unicité de la solution

Soit $I =: [0,1]$ et $\mathcal{C} = C(I,\mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{t\in I} |u(t)|.$$

$(\mathcal{C}, \|.\|)$ est un espace de Banach.

Nous transformons le problème (2.1) en un problème de point fixe.

Considérons l'opérateur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini par :

$$\begin{aligned}(Fx)(t) \quad = \quad & \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)ds - \frac{t}{v_1}\left(\alpha_2 \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(s)ds + \beta_2 \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}\sigma(s)ds\right) \\ & + \frac{\alpha_1 v_2 t + \gamma_1 v_1}{\alpha_1 v_1}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où v_1, v_2 sont données par (2.4).

Notons que x est le point fixe de l'opérateur F si seulement si x est la solution du problème aux limites (2.1).

Remarque 2.1 *D'après le lemme* 2.1, *il est clair que les points fixes de l'opérateur F sont des solutions du problème (2.1).*

Dans la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

(A_0) $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(A_1) Pour tout $t \in [0,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,$$

où $L > 0$.

Nous sommes maintenant prêt pour prouver notre premier résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.1). La preuve est basée sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses* (A_0) *et* (A_1), *le problème aux limites* (2.1) *admet une solution unique si*

$$\frac{L}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right) + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{L}{\Gamma(q-p+1)} < 1. \tag{2.7}$$

Preuve. Posons $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t,0)| = M < \infty$ et choisissons r tel que

$$r \geq \frac{\alpha M + N}{1 - L\alpha}, \tag{2.8}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right) + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q-p+1)}, \qquad N = \frac{|\alpha_1 v_2| + |\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}. \tag{2.9}$$

Considérons

$$B_r = \{x \in \mathcal{C} : \|x\| \leq r\}.$$

Étape 1 ***:*** Montrons que $F(B_r) \subset B_r$.

Pour $x \in B_r$, on a

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t)| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s))|ds + \frac{|\alpha_2 t|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s))|ds\right.\\
&\quad \left. + \frac{|\beta_2 t|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}|f(s,x(s))|ds + \frac{|\alpha_1 v_2 t + \gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}\right\}\\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|f(s,x(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|)ds\right.\\
&\quad + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|f(s,x(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|)ds\\
&\quad + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}(|f(s,x(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|)ds\\
&\quad \left. + \frac{|\alpha_1 v_2 t + \gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}\right\}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (A_1) et les propriétés de la valeur absolue et l'intégrale, implique que

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t)| &\leq (Lr + M)\sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds\right.\\
&\quad \left. + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}ds\right\} + \frac{|\alpha_1 v_2 t + \gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}\\
&\leq (Lr + M)\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q-p+1)}\right]\\
&\quad + \frac{|\alpha_1 v_2| + |\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}
\end{aligned}$$

En se servant de (2.8), (2.9) et (2.7), puis passant à la norme, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|Fx\| &\leq (Lr + M)\alpha + N\\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Par conséquent $F(B_r) \subset B_r$.

Étape 2 ***:*** Montrons que l'opérateur F est *contractant.*

En effet, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}|(Fx)(t)-(Fy)(t)| &= \sup_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\ &\quad +\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\ &\quad +\frac{|\beta_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\Big\}\end{aligned}$$

Utilisons (A_1), puis passant à la norme, nous trouvons

$$\|Fx-Fy\| \leq L\|x-y\|\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}+\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q+1)}+\frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q-p+1)}\right].$$

Comme la condition (2.7) est satisfaite, l'opérateur F est une contraction.

Ainsi, une application du théorème de point fixe de Banach, implique que l'opérateur F admet un point fixe unique x dans B_r. Par conséquent, le problème aux limite (2.1) admet une solution unique x dans B_r. ■

2.3 Existence des solutions

Dans cette section, nous examinons l'existence des solutions du problème aux limites (2.1). La preuve de notre deuxième resultat est basée sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses* (A_0), (A_1) *et supposons que :*

(A_2) *Il existe une fonction* $\mu \in C(I,\mathbb{R}^+)$ *telle que*

$$|f(t,x)| \leq \mu(t), \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in I\times\mathbb{R}.$$

Alors, le problème aux limites (2.1) *admet au moins une solution sur* I *si*

$$\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\frac{L}{\Gamma(q+1)}+\frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{L}{\Gamma(q-p+1)} < 1. \tag{2.10}$$

Preuve. Posons $\|\mu\| = \sup_{t\in[0,1]}|\mu(t)|$, et choisissons un nombre réel $\overline{r}$ tel que

$$\overline{r} \geq \|\mu\|\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}+\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q+1)}+\frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q-p+1)}+\frac{|\alpha_1 v_2|+|\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}\right], \tag{2.11}$$

Considérons

$$B_{\overline{r}} = \{x \in \mathcal{C} : \|x\| \leq \overline{r}\}.$$

Nous définissons les opérateurs F_1 et F_2 sur $B_{\overline{r}}$ par :

$$\begin{aligned}
(F_1u)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,u(s))ds, \\
(F_2u)(t) &= -\frac{t}{v_1}\left(\alpha_2 \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,u(s))ds + \beta_2 \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,u(s))ds\right) \\
&\quad + \frac{\alpha_1 v_2 t + \gamma_1 v_1}{\alpha_1 v_1}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où v_1, v_2 sont définies dans (2.4).

Remarque 2.2 *Notons que $Fu = F_1u + F_2u$ où F est l'opérateur défini par la formule (2.6).*

Étape 1 : Pour tout $x, y \in B_{\overline{r}}$, nous montrons que $F_1x + F_2y \in B_{\overline{r}}$.

Soient $x, y \in B_{\overline{r}}$. Par les mêmes démarches de démonstration du théorème 2.1 (Étape 1) et comme (4.9) est satisfaite, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|F_1x + F_2y\| &\leq \|\mu\|\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{1}{\Gamma(q-p+1)} + \frac{|\alpha_1 v_2| + |\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}\right] \\
&\leq \overline{r}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $F_1x + F_2y \in B_{\overline{r}}$.

Étape 2 : Montrons que F_2 est un opérateur *contractant.*

En effet, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
|(F_2x)(t) - (F_2y)(t)| &= \sup_{t\in[0,1]}\left\{\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds\right. \\
&\quad \left. + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds\right\}
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (A_1), puis passant à la norme, nous obtenons

$$\|F_2x - F_2y\| \leq \|x-y\|\left[\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\frac{L}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{L}{\Gamma(q-p+1)}\right].$$

Il découle de la condition (4.10) que l'opérateur F_2 est une application contractante.

Étape 3 : Montrons que F_1 est une application *continue* et *compacte.*

1. F_1 est *continue* : D'après l'hypothèse (A_0), il est claire de voir que F_1 est continue puisque f est continue.

2. F_1 est *compacte* : Pour montrer que la compacité de F_1, on utilise le théorème d'Ascoli-Arzelà. En effet,

(a) L'opérateur F_1 est *uniformément borné* sur $B_{\overline{r}}$.

Soit $x \in B_{\overline{r}}$. De la même manière, par l'hypothèse (A_2), nous trouvons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |F_1 x(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s,x(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |\mu(s)| ds \end{aligned}$$

En calculant l'intégrale, puis en passant à la norme, nous trouvons

$$\|F_1 x\| \leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(q+1)}.$$

d'où F_1 est uniformément borné.

(b) F_1 est *équicontinue*

Soient $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$ et $t_2 > 0$ et posons

$$\sup_{(t,x)\in[0,1]\times B_{\overline{r}}} |f(t,x)| = \overline{f}.$$

Par l'hypothèse (A_1), on a

$$\begin{aligned} |(F_1 x)(t_1) - (F_1 x)(t_2)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1} \right] f(s,x(s)) ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s,x(s)) ds \Bigg| \end{aligned}$$

Par un simple calcul des intégrales, nous obtenons

$$|(F_1 x)(t_1) - (F_1 x)(t_2)| \leq \frac{\overline{f}}{\Gamma(q+1)} \left| 2(t_2 - t_1)^q + t_1^q - t_2^q \right|,$$

qui est indépendant de x.

Lorsque $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tends vers zéro, et par conséquent

$$\lim_{t_1 \to t_2} |(F_1 x)(t_1) - (F_1 x)(t_2)| = 0.$$

Donc, F_1 est équicontinue.

Faisons appel au théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.3), F_1 est compacte sur $B_{\overline{r}}$.

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème de de point fixe de Krasnoselskii (Théorème 1.7), sont vérifiées. Donc la conclusion du théorème implique que l'opérateur $F_1 + F_2$ admet au moins un point fixe dans $B_{\overline{r}}$ et par conséquent, le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution définie sur $[0,1]$. ∎

Théorème 2.3 *Si (A_0) est vérifiée et*

(A_3) *Il existe une fonction $p \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ et une fonction croissante $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que*

$$|f(t,x)| \leq p(t)\psi(\|x\|),$$

pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$;

(A_4) *Il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\frac{M}{\omega} > 1, \tag{2.13}$$

où

$$\omega = \psi(M)\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right) + \frac{|\beta_2|}{|v_1|\Gamma(q-p+1)}\right]\|p\| + \frac{|\alpha_1 v_2| + |\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}.$$

Alors, le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Preuve. Soit l'opérateur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ défini dans (2.6). On va utiliser l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder (Théorème 1.5) pour monter que F admet au moins un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes :

Étape 1 : *F est continue.*

Comme f est continue (hypothèse (A_0)),donc l'application F est continue.

Étape 2 : *F transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans $C(I,\mathbb{R})$.*

Soient $r > 0$ un nombre réel, et

$$B_r = \{x \in C(I,\mathbb{R}) : \|x\| \leq r\},$$

un ensemble borné dans $C(I,\mathbb{R})$. Soit $x \in B_r$, alors

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(s)\psi(\|x\|)ds + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(s)\psi(\|x\|)ds \\
&\quad + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} p(s)\psi(\|x\|)ds + \frac{|\alpha_1 v_2 + \gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|} \\
&\leq \psi(\|x\|)\left[\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(s)ds + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} p(s)ds\right. \\
&\quad \left. + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\int_0^1 \frac{(1-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} p(s)ds\right] + \frac{|\alpha_1 v_2| + |\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|} \\
&\leq \psi(\|x\|)\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right) + \frac{|\beta_2|}{|v_1|\Gamma(q-p+1)}\right]\|p\| \\
&\quad + \frac{|\alpha_1|v_2 + |\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}.
\end{aligned}$$

Passant à la norme, nous obtenons

$$\|Fx\| \leq \psi(r)\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right) + \frac{|\beta_2|}{|v_1|\Gamma(q-p+1)}\right]\|p\| + \frac{|\alpha_1 v_2 + \gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}. \tag{2.14}$$

Étape 3 : *F transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinues dans* $C(I,\mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, B_r un ensemble borné de $C(I,\mathbb{R})$ définie dans l'étape 2, et soit $x \in B_r$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\big|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)\big| &= \bigg|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}f(s,x(s))ds \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}f(s,x(s))ds\bigg| + \frac{|v_2|}{|v_1|}|t_2-t_1| \\
&\leq \bigg|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}\big[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\big]\psi(r)p(s)ds\bigg| \\
&\quad +\bigg|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\psi(r)p(s)ds\bigg| + \frac{|v_2|}{|v_1|}|t_2-t_1|.
\end{aligned}$$

Comme le second membre ne dépend pas de x, alors pour $t_1 \to t_2$, on va avoir

$$\big|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)\big| \longrightarrow 0.$$

Donc $F(B_r)$ est équicontinue.

En combinant les étapes $1, 2$ et 3 et en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà, nous déduisons que F est complètement continue.

Étape 4 : *Montrons que la deuxième condition du l'alternative non linéaire de Leray-Schauder n'est pas vraie.*

Autrement dit, montrons qu'il n'existe pas $x \in \partial U$ tel que

$$x = \lambda\ Fx,$$

pour certains $\lambda \in]0,1[$.

Soient x une solution et $\lambda \in [0,1]$. Grâce à l'hypothèse $(A4)$, il existe $M > 0$ tel que $\|x\| \neq M$.

Posons

$$U = \{x \in C(I,\mathbb{R}) : \quad \|x\| < M+1\},$$

et supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \partial U$, telle que $x = \lambda\ Fx$; pour certains $0 < \lambda < 1$.

Alors, en utilisant les mêmes calculs pour montrer que F est borné (Étape 2), nous obtenons pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |\lambda(Fx)(t)| \\
&\leq \psi(\|x\|)\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right) + \frac{|\beta_2|}{|v_1|\Gamma(q-p+1)}\right]\|p\| + \frac{|\alpha_1 v_2| + |\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\frac{\|x\|}{\omega_x} \leq 1,$$

où
$$\omega_x = \psi(\|x\|)\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right)+\frac{|\beta_2|}{|v_1|\Gamma(q-p+1)}\right]\|p\|+\frac{|\alpha_1 v_2|+|\gamma_1 v_1|}{|\alpha_1 v_1|},$$
Comme ψ est croissante, l'inégalité précédente est une contradiction avec l'inégalité (2.13). Cela signifie que la deuxième condition du théorème de point fixe de Leray-Schauder n'est pas satisfaite.

Notons que $F : \overline{U} \longrightarrow C(I,\mathbb{R})$ est continue et compacte.

En conséquence de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder (Théorème 1.7), l'opérateur F admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (2.1). ■

Dans le cas particulier quand $p(t) = 1$ et $\psi(x) = K|x| + N$, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2.1 *: Soit $f : [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe*
$$0 \leq k < \frac{1}{\rho},$$
où
$$\rho = \frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right)+\frac{|\beta_2|}{|v_1|\Gamma(q-p+1)},$$
et $N_1 > 0$ telles que
$$|f(t,x)| \leq k|x(t)| + N_1,$$
pour tout $(t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$. Alors, le problème aux limites d'ordre fractionnaire (2.1) *admet au moins une solution sur* $[0,1]$.

2.4 Cas particuler

Dans ce paragraphe, nous signalons qu'on peut obtenir des résultats analogues de notre chapitre pour problème aux limites suivant [25]
$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{0+}u(t) = f(t,u(t)), \quad 0<t<1 \\ u(0)+u'(0)=0, \\ u(1)+u'(1)=0, \end{cases}$$
où $1 < \alpha \leq 2$ un nombre réel, et ${}^cD^{\alpha}_{0+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, et $f : [0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ est une fonction continue.

2.5 Applications

Dans cette section, nous donnons quelques applications pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Application 1

Considérons le problème aux limite associé à l'équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^cD^{3/2}x(t) = \frac{1}{(t+2)^2}\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}, \quad t \in [0,1], \\ x(0) + \beta_1\big({}^cD^{1/2}x(0)\big) = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}x(1) + \frac{1}{3}\big({}^cD^{1/2}x(1)\big) = 2. \end{cases} \tag{2.15}$$

Dans ce cas, on a $q = 3/2$, $p = 1/2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, $\beta_2 = 1/3$, $\gamma_1 = 1/2$, $\gamma_2 = 2$, β_1 est arbitraire, et

$$f(t,x) = \frac{1}{(t+2)^2}\ \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}.$$

On peut facilement vérifie que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|.$$

donc, (A_1) est satisfaite avec $L = 1/4$, $v_1 = 1/2 + 2/3\sqrt{\pi}$, $v_2 = 7/4$ et

$$\frac{L}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{|\alpha_2|}{|v_1|}\right) + \frac{|\beta_2|}{|v_1|}\frac{L}{\Gamma(q-p+1)} = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} + \frac{2+\sqrt{\pi}}{2(3\sqrt{\pi}+4)} \simeq 0.390505 < 1. \tag{2.16}$$

Donc, toutes les conditions du théorème 2.1 sont vérifiées, Alors,le problème aux limite (2.15) admet une solution unique sur $[0,1]$.

Application 2

Considérons le problème aux limite fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{3/2}x(t) = \frac{1}{(6\pi)}\sin(2\pi x) + \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}, \quad t \in [0,1], \\ x(0) + \beta_1\big({}^cD^{1/2}x(0)\big) = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}x(1) + \frac{1}{3}\big({}^cD^{1/2}x(1)\big) = 2. \end{cases} \tag{2.17}$$

Donc, $q = 3/2$, $p = 1/2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, $\beta_2 = 1/3$, $\gamma_1 = 1/2$, $\gamma_2 = 2$, β_1 est arbitraire, et

$$|f(t,x)| = \left|\frac{1}{(6\pi)}\sin(2\pi x) + \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\right| \leq \frac{1}{3}|x(t)| + 1.$$

Clairement $N_1 = 1$ et

$$k = \frac{1}{3} < \frac{1}{\rho} = 0.640196.$$

Donc, toutes les conditions du corollaire 2.1 sont satisfaites, et par conséquent le problème (2.17) admet au moins une solution.

Chapitre 3

Étude d'une classe d'EIDFs avec conditions aux limites intégrales

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites non linéaire d'une classe d'équations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire (EIDFs) avec des conditions aux limites intégrales :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = g(t, x(t), (Qx(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < q \leq 2, \\ \alpha x(0) + \beta x'(0) = \int_0^1 q_1(x(s))ds, \\ \alpha x(1) + \beta x'(1) = \int_0^1 q_2(x(s))ds, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

${}^cD^q$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre q,

$g : [0,1] \times X \times X \to X$,

Pour $\gamma : [0,1] \times [0,1] \to [0,\infty)$,

$$(Qx)(t) = \int_0^1 \gamma(t,s)x(s)ds, \tag{3.2}$$

$q_1, q_2 : X \to X$ et $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ sont des nombres réels.

Dans ce cas, on a

$(X, \|.\|)$ est un espace de Banach.

On note aussi par $I =: [0,1]$ et $\mathcal{C} = C(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$, muni de la norme de sup :

$$\|u\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \in I} |u(t)|.$$

$(\mathcal{C}, \|.\|_{\mathcal{C}})$ est un espace de Banach.

3.1 Résultat d'équivalence

Avant de présenter les résultats principaux, nous présentons la définition de solution de notre problème (2.1) suivi d'un lemme utile :

Définition 3.1 *Une fonction $x \in C^2(I,\mathbb{R})$ est dite solution de* (2.1) *si elle satisfait l'équation ${}^cD^q x(t) = g(t, x(t), (Qx(t))$, sur I où Q est donnée par (3.2) et les conditions aux limites intégrales suivantes :*

$$\alpha x(0) + \beta x'(0) = \int_0^1 q_1(x(s))ds \qquad et \qquad \alpha x(1) + \beta x'(1) = \int_0^1 q_2(x(s))ds.$$

Pour montrer l'existence des solutions du problème (2.1) nous avons besoin d'un résultat auxiliaire qui montre l'équivalence entre notre problème (3.1) et une équation intégrale.

Lemme 3.1 *Soient $\eta_1, \eta_2, h \in C([0,1],\mathbb{R})$. L'unique solution du problème aux limites :*

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = h(t), \quad 0 < t < 1,\ 1 < q \leq 2, \\ \alpha x(0) + \beta x'(0) = \int_0^1 \eta_1(s)ds, \\ \alpha x(1) + \beta x'(1) = \int_0^1 \eta_2(s)ds, \end{cases} \tag{3.3}$$

est donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds + \frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha(1-t)+\beta)\int_0^1 \eta_1(s)ds + (\beta+\alpha t)\int_0^1 \eta_2(s)ds\right], \tag{3.4}$$

où $G(t,s)$ est une fonction de Green donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\alpha(t-s)^{q-1}+(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}, \quad s \leq t, \\ \frac{(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}, \quad t \leq s. \end{cases} \tag{3.5}$$

Preuve. : Soient $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. En utilisant les lemmes 1.1 et 1.2, la solution générale du problème (3.1) peut s'écrit sous forme :

$$x(t) = I^q h(t) - c_0 - c_1 t = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(t)ds - c_0 - c_1 t. \tag{3.6}$$

Grâce aux propriétés suivantes

${}^cD^q I^q x(t) = x(t), \quad I^q I^p x(t) = I^{q+p} x(t)$ pour $q, p > 0$ et $x \in L(0,1)$,

nous obtenons

$$x'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} h(t)ds - c_1. \tag{3.7}$$

En tenant compte les conditions aux limites dans (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\alpha^2}\left[\beta\int_0^1 \eta_2(s)ds - (\beta+\alpha)\int_0^1 \eta_1(s)ds\right] - \frac{\beta}{\alpha\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1}h(s)ds \\ &\quad -\frac{\beta^2}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\int_0^1 (1-s)^{q-2}h(s)ds, \\ c_1 &= \frac{1}{\alpha}\left[\int_0^1 \eta_1(s)ds - \int_0^1 \eta_2(s)ds\right] + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1}h(s)ds \\ &\quad +\frac{\beta}{\alpha\Gamma(q-1)}\int_0^1 (1-s)^{q-2}h(s)ds. \end{aligned}$$

Nous substitions les valeurs de c_0 et c_1 dans la formule (3.6), alors nous obtenons l'unique solution de (3.3) est :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \left[\frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta-\alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\right]h(s)ds \\ &\quad +\int_t^1 \left[\frac{(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\right]h(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha(1-t)+\beta)\int_0^1 \eta_1(s)ds + (\beta+\alpha t)\int_0^1 \eta_2(s)ds\right]. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire x sous forme

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds + \frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha(1-t)+\beta)\int_0^1 \eta_1(s)ds + (\beta+\alpha t)\int_0^1 \eta_2(s)ds\right],$$

oú $G(t,s)$ est donnée par (3.5). ■

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 3.1 *: Soit $g : [0,1]\times X\times X \to X$ une fonction continue et transforme les ensembles bornés de $[0,1]\times X\times X$ en ensembles relativement compacts de X, $\gamma : [0,1]\times[0,1] \to [0,\infty)$ est une fonction continue avec $\gamma_0 = \max\{\gamma(t,s) : (t,s)\in[0,1]\times[0,1]\}$, et $q_1, q_1 : X \to X$ sont des fonctions continues. De plus, il existe des constantes positives $L_1, \overline{L}_1, L_2, L_3, M_2, M_3$ telles que :*

(H_1) *Pour tout $t\in[0,1]$ et $x, y \in X$,*

$$\|g(t,x,(Qx)) - g(t,y,(Qy))\| \leq L_1\|x-y\| + \overline{L}_1\|Qx-Qy\|.$$

(H_2) *Pour tout $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned} \|q_1(x)-q_1(y)\| &\leq L_2\|x-y\| \\ \|q_2(x)-q_2(y)\| &\leq L_3\|x-y\| \end{aligned}$$

avec $\|q_1\| \leq M_2$, $\|q_2\| \leq M_3$.

Donc, le problème aux limites (3.1) *admet une solution unique à condition de*

$$(L_1 + \gamma_0 \overline{L}_1)\left[\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right] + \frac{\beta + \alpha}{\alpha^2}(L_2 + L_3) < 1, \tag{3.8}$$

avec

$$L_1 + \gamma_0 \overline{L}_1 \leq \frac{1}{2}\left[\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right]^{-1}. \tag{3.9}$$

Preuve. Définissons l'opérateur $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ par :

$$\begin{aligned}
(Gx)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} g(s, x(s), (Qx)(s)) ds \\
&+ \int_0^1 \left[\frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\right] g(s, x(s), (Qx)(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha(1-t) + \beta) \int_0^1 q_1(x(s)) ds + (\beta + \alpha t) \int_0^1 q_2(x(s)) ds\right], \quad t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Notons que, d'après le lemme précédent, les points fixe de l'opérateur G sont des solutions de notre problème (3.1).

Posons $\sup_{t \in I} |g(t, 0, 0)| = M_1$ (d'après les hypothèses sur g, M_1 existe).

Choisissons

$$r \geq 2\left[M_1\left(\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2}(M_2 + M_3)\right], \tag{3.10}$$

et considérons

$$B_r = \{x \in \mathcal{C} : \quad \|x\| \leq r\}.$$

La démostration s'appuit sur l'application de théorème de contraction de Banach (Théorème 1.5). On procède donc en deux étapes :

Étape 1 **:** Montrons que $G(B_r) \subset B_r$.

En effet, pour $x \in B_r$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Gx)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |g(s, x(s), (Qx)(s)| ds \\
&+ \int_0^1 |\beta - \alpha t| \left[\frac{(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-2)}\right] |g(s, x(s), (Qx)(s))| ds \\
&+ \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2}(M_2 + M_3) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \big[|g(s, x(s), (Qx)(s)) - g(s,0,0)| + |g(s,0,0)|\big] ds \\
&+ \int_0^1 |\beta - \alpha t| \left[\frac{(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\right] \\
&\times \big[|g(s, x(s), (Qx)(s)) - g(s,0,0)| + |g(s,0,0)|\big] ds \\
&+ \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2}(M_2 + M_3).
\end{aligned}$$

Utilisons l'hypothèse (H_1), les propriétés des intégrales et (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
|(Gx)(t)| &\leq ((L_1+\gamma_0\overline{L}_1)r+M_1)\Big[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds \\
&\quad + \int_0^1 |\beta-\alpha t|\Big(\frac{(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)}+\frac{\beta(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\Big)ds\Big]+\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(M_2+M_3) \\
&= ((L_1+\gamma_0\overline{L}_1)r+M_1)\Big[\frac{t^q}{\Gamma(q+1)}+|\beta-\alpha t|\Big(\frac{1}{\alpha\Gamma(q+1)}+\frac{\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\Big)\Big] \\
&\quad +\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(M_2+M_3) \\
&\leq ((L_1+\gamma_0\overline{L}_1)\Big[\frac{2\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)}+\frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\Big]r+M_1\Big[\frac{2\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)}+\frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\Big] \\
&\quad +\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(M_2+M_3) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Passant à la norme, nous obtenons

$$\|Gx\| \leq r.$$

***Étape 2* :** Montrons que l'opérateur G est une *contraction*.

Pour $x, y \in \mathcal{C}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|(Gx)(t)-(Gy)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|g(s,x(s),(Qx)(s)-g(s,y(s),(Qy)(s)|ds \\
&\quad +\int_0^1 |\beta-\alpha t|\Big[\frac{(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)}+\frac{\beta(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\Big] \\
&\quad \times|g(s,x(s),(Qx)(s))-g(s,y(s),(Qy)(s)|ds \\
&\quad +\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}\Big[\int_0^1 |q_1(x(s))-q_1(y(s))|ds+\int_0^1 |q_2(x(s))-q_2(y(s))|ds\Big]
\end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses (H_1) et (H_2), nous avons

$$\begin{aligned}
|(Gx)(t)-(Gy)(t)| &\leq (L_1+\gamma_0\overline{L}_1)\Big[\frac{t^q}{\Gamma(q+1)}+|\beta-\alpha t|\Big(\frac{1}{\alpha\Gamma(q+1)}+\frac{\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\Big)\Big]\|x-y\|_{\mathcal{C}} \\
&\quad +\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(L_2+L_3)\|x-y\|_{\mathcal{C}} \\
&\leq \Big[(L_1+Q_0\overline{L}_1)\Big[\frac{2\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)}+\frac{(\beta^2+\alpha\beta)}{\alpha^2\Gamma(q)}\Big]+\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(L_2+L_3)\Big]\|x-y\|_{\mathcal{C}} \\
&\leq \rho\|x-y\|_{\mathcal{C}},
\end{aligned}$$

Passant à la norme, on trouve

$$\|(Gx)-(Gy)\| \leq \rho\|x-y\|_{\mathcal{C}},$$

où

$$\rho = (L_1 + Q_0\overline{L}_1)\left[\frac{2\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{(\beta^2+\alpha\beta)}{\alpha^2\Gamma(q)}\right] + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(L_2+L_3),$$

qui ne dépend que des paramètres impliqué dans le problème.

D'après (3.8) et (3.9), nous concluons que $\rho < 1$, et par conséquent, l'opérateur G est une contraction.

Donc, par le principe de contraction de Banach, l'opérateur G à un point fixe unique qui est la solution de notre problème (3.1).

■

3.3 Résultat d'existence

Théorème 3.2 *: Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2)*, avec g vérifie*

$$|g(t, x(t), (Qx)(t))| \leq \mu(t),$$

pour tout $(t, x, Qx) \in [0,1] \times X \times X$*, où* $\mu \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ *et*

$$(L_1 + \gamma_0\overline{L}_1)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right) + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(L_2+L_3) < 1. \tag{3.11}$$

ALors, le problème aux limites (3.1) *admet au moins une solution sur* $[0,1]$.

Preuve. La démonstration de ce résultat est basée sur le théorème de point fixe de Krasnoselskii (Théorème 1.8).

Fixons,

$$r \geq \|\mu\|_{L^1}\left[\frac{2\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right] + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(M_2+M_3), \tag{3.12}$$

et considérons l'ensemble

$$B_r = \{x \in C : \|x\| \leq r\}.$$

On définit respectivement les opérateurs Φ et Ψ sur B_r par

$$\begin{aligned}
(\Phi x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} g(s, x(s), (Qx)(s))ds \\
(\Psi x)(t) &= \int_0^1 \left[\frac{(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta-\alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}\right] g(s, x(s), (Qx)(s))ds \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha(1-t)+\beta)\int_0^1 q_1(x(s))ds + (\beta+\alpha t)\int_0^1 q_2(x(s))ds\right].
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 2.2 et afin d'appliquer le théorème de point fixe de Krasnoselskii, on passera par 3 étapes

Étape 1 **:** Montrons que $\Phi x + \Psi y \in B_r$.

Pour $x, y \in B_r$, par les mêmes arguments que précédement et tenant compte (3.12), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\Phi x + \Psi y\| &\leq \|\mu\|_{L^1}\left[\frac{2\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right] + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(M_2+M_3)\\ &\leq r.\end{aligned}$$

Donc, $\Phi x + \Psi y \in B_r$.

Étape 2 **:** Ψ est une contraction

Il découle de l'hypothèse (H_1) et (H_2) et (3.11) que Ψ est une application contractante, i.e

$$\|\Psi x - \Psi y\| \leq \lambda\|x-y\|,$$

où

$$\lambda =: (L_1 + \gamma_0\overline{L}_1)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right) + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}(L_2+L_3) < 1.$$

Étape 3 **:** Montrons que Φ est une application *continue* et *compacte.*

- ▷ La continuité de g implique que l'opérateur Φ est *continue.*
- ▷ Ensuite, par un simple calcul, nous obtenons que Φ est *uniformément borné* sur B_r.

  En utilisant (H_2), on trouve

$$\begin{aligned}|\Phi x(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|g(s,x(s),(Qx)(s))|ds\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|\mu(s)|ds.\end{aligned}$$

  Calculant l'intégrale, puis passant à la norme de sup, nous obtenons

$$\|\Phi x\| \leq \frac{\|\mu\|_{L^1}}{\Gamma(q+1)}.$$

- ▷ Φ est *équicontinue.*

  Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, B_r l'ensemble borné de $C(I,\mathbb{R})$ définie dans la deuxième étape, et $x \in B_r$. De plus, d'après l'hypothèse (H_1), nous définissons

$$\sup_{(t,x,Qx)\in\Omega}\left|g(s,x(s),(Qx)(s))\right| = g_{\max}, \qquad \Omega = [0,1]\times B_r \times B_r,$$

et par conséquent on a

$$\begin{aligned}|(\Phi x)(t_1)-(\Phi x)(t_2)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]g(s,x(s),(Qx)(s))ds\right.\\ &\left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\big]g(s,x(s),(Qx)(s))ds\right|\\ &\le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]\left|g(s,x(s),(Qx)(s))\right|ds\\ &+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\big]\left|g(s,x(s),(Qx)(s))\right|ds\end{aligned}$$

En calculant les deux intégrales, puis en passant à la norme, on trouve

$$|(\Phi x)(t_1)-(\Phi x)(t_2)| \;\le\; \frac{g_{\max}}{\Gamma(q+1)}|2(t_2-t_1)^q+t_1^q-t_2^q|.$$

Le côté droit de l'inégalité ci-dessus est indépendant de x, et lorsque $t_1\to t_2$, ce côté tends vers zéro. ceci implique :

$$|(\Phi x)(t_1)-(\Phi x)(t_2)|\longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t_1\to t_2,$$

et donc, Φ est équicontinue.

Donc Φ est relativement compact sur B_r. D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzelà, l'application Φ est compacte sur B_r.

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 2.5 sont satisfaites et la colclusion du théorème 2.5 implique que le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution définie sur I. ■

3.4 Exemple

L'exemple suivant illustre le résultat du théorème 3.1. Considérons le problème aux limites associé à l'EIDFs suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^qx(t)=\frac{1}{(t+7)^2}\frac{|x(t)|}{|x(t)|+1}+\int_0^t\frac{e^{-(s-t)}}{49}x(s)ds, & t\in[0,1], 1<q\le 2,\\ x(0)+x'(0)=\int_0^1\frac{|x(s)|}{5+|x(s)|}ds,\\ x(1)+x'(1)=\int_0^1\frac{|x(s)|}{7+|x(s)|}ds.\end{cases}\tag{3.13}$$

Dans ce cas, on a,

$$f(t,x)=(1/(t+7)^2)(|x(t)|/(1+|x(t)|)),\qquad \gamma(t,s)=e^{-(s-t)}/49,$$

$$q_1(x)=|x(t)|/(5+|x(t)|),\qquad q_2(x)=|x(t)|/(7+|x(t)|),\qquad \alpha=1,\qquad \beta=1.$$

On peut facilment déduire que

$$\|g(t,x,Qx)-g(t,y,Qy)\| \leq (1/49)\|x-y\|+\|Qx-Qy\|,$$

$$\|q_1(x)-q_1(y)\| \leq (1/5)\|x-y\|,$$

$$\|q_2(x)-q_2(y)\| \leq (1/7)\|x-y\|,$$

donc, (H_1) et (H_2) sont satisfaites avec

$$L_1 = 1/49, \quad \overline{L}_1 = 1, \quad \gamma_0 = ((e-1)/49)L_2 = 1/5, \quad L_3 = 1/7.$$

De plus,

$$(L_1+\gamma_0\overline{L}_1)\left[\frac{\beta+2\alpha}{\alpha\Gamma(q+1)}+\frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right]+\frac{\beta+\alpha}{\alpha^2}(L_2+L_3) = \frac{e}{49}\left(\frac{3}{\Gamma(q+1)}+\frac{2}{\Gamma(q)}\right) < \frac{11}{35} < 1.$$

En conséquence, toutes les hypothése du théorème 3.1 sont satisfaites, puis le probléme aux limites (3.13) a une solution unique sur $[0,1]$.

Chapitre 4

Étude d'une classe d'EDFs avec conditions anti-périodiques

Dans ce chapitre, nous utilisons la théorie du point fixe pour obtenir l'existence ou l'existence et l'unicité des solutions pour une large classe d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec des conditions anti-périodiques. Quelques exemples sont donnés pour illustrer les résultats obtenus.

Plus précisément, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites associé à une classe d'équations différentielles fractionnaires avec conditions anti-périodiques suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = h(t, x(t)), \quad t \in [0,T],\ T > 0,\ 1 < q \leq 2, \\ x(0) = -x(T), \quad 0 < p < 1, \\ {}^cD^p x(0) = -{}^cD^p x(T), \end{cases} \tag{4.1}$$

où

${}^cD^q$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre q, et

$h : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

Dans ce chapitre, on note par $\mathcal{C} = C([0,T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ muni de la norme défini par

$$\|u\| = \sup_{t \in [0,T]} |u(t)|.$$

4.1 Équation intégrale associée

Lemme 4.1 *: Pour tout $y \in C([0,T],\mathbb{R})$, la solution unique du problème aux limites d'ordre fractionnaire*

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = y(t), \quad 0 < t < T, \ 1 < q \leq 2, \\ x(0) = -x(T), , \\ {}^cD^p x(0) = -{}^cD^p x(T), \quad 0 < p < 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)y(s)ds,$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green, définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-1} - \frac{1}{2}(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{\Gamma(2-p)(T-2t)(T-s)^{q-p-1}}{2T^{1-p}\ \Gamma(q-p)}, & s \leq t, \\ -\frac{(T-s)^{q-1}}{2\Gamma(q)} + \frac{\Gamma(2-p)(T-2t)(T-s)^{q-p-1}}{2T^{1-p}\ \Gamma(q-p)}, & t \leq s. \end{cases} \tag{4.3}$$

Preuve. Pour certaines constantes $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ et $1 < q \leq 2$, on sait que d'après le lemme 1.1 et 1.2, la solution générale de l'équation ${}^cD^q x(t) = y(t)$ peut s'écrit sous forme suivante

$$\begin{aligned} x(t) &= I^q y(t) - c_0 - c_1 t \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} y(s)ds - c_0 - c_1 t. \end{aligned}$$

Nous utilisons quelques propriétés du calcul fractionnaire ;

$${}^cD^p C = 0 \quad (C \text{ est une constante}), \qquad {}^cD^p t = \frac{t^{1-p}}{\Gamma(2-p)}, \qquad {}^cD^p I^q y(t) = I^{q-p} y(t),$$

Par l'application de ${}^cD^q$ à l'équation précédente, nous obtenons

$${}^cD^p x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} y(s)ds - c_1 \frac{t^{1-p}}{\Gamma(2-p)}.$$

Les conditions aux limites du prolème (4.2), implique que

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\Gamma(q)} \int_0^T (T-s)^{q-1} y(s)ds - \frac{T^p \Gamma(2-p)}{2} \int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} y(s)ds, \\ c_1 &= \frac{\Gamma(2-p)}{T^{1-p}} \int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} y(s)ds. \end{aligned}$$

Donc, l'unique solution de (4.2) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} y(s)ds - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} y(s)ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(2-p)(T-2t)}{2T^{1-p}} \int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} y(s)ds, \end{aligned}$$

qui, en termes de fonction de Green, peut s'écrit sous forme

$$x(t) = \int_0^t G(t,s)y(s)ds,$$

où $G(t,s)$ est donnée par (4.3). ■

Remarque 4.1 *Grâce au lemme* 4.1*, on aura l'équivalence suivant :*

Le problème aux limites d'ordre fractionnaire (4.2) admet une solution $x \in \mathcal{C}$ si est seulement si l'opérateur $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, définie par :

$$\begin{aligned} Hx(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s,x(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s,x(s))ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(2-p)(T-2t)}{2T^{1-p}} \int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} h(s,x(s))ds, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{4.4}$$

admet un point fixe $x \in \mathcal{C}$.

On note que l'opérateur H peut s'écrit, en termes de fonction de Green, par la formule suivante :

$$Hx(t) = \int_0^t G(t,s)h(s,x(s))ds,$$

où $G(t,s)$ est la fonction donnée par (4.3).

4.2 Un résultat d'existence et d'unicité

Définissons l'opérateur $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, par la formule (4.4).

Remarquons que le problème aux limites (4.1) admet une solution si et seulement si l'opérateur H admet un point fixe. Donc, pour chercher l'existence ou l'existence et l'unicité de solution de notre problème (4.1), on cherche l'existence des points fixes de l'opérateur associé à notre problème H, en utilisant la théorie de point fixe.

Théorème 4.1 *: Soit $h : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et vérifie la condition*

$$|h(t,x) - h(t,y)| \le L|x-y|, \ \forall t \in [0,T], \ x, y \in \mathbb{R},$$

avec

$$L \le \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(q-p+1)}{T^q\big(3\Gamma(q-p+1) + \Gamma(q+1)\Gamma(2-p)\big)}.$$

Alors, le problème aux limites anti-pèriodique (4.1) *admet une solution unique.*

Preuve. La démostration de ce résultat est basée sur le théorème de point fixe de Banach. Pour cela, on doit passer par deux étapes :

Posons $\sup\limits_{t\in[0,T]} |h(t,0)| = M < \infty$, choisissons

$$r \geq \frac{MT^q\big(3\Gamma(q-p+1)+\Gamma(q+1)\Gamma(2-p)\big)}{\Gamma(q+1)\Gamma(q-p+1)},$$

et considérons l'ensemble

$$B_r = \{x \in \mathcal{C}, \quad \|x\| \leq r\}.$$

Étape 1 : Montrons que $H(B_r) \subset B_r$.

Pour $x \in B_r$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|h(s,x(s))|ds + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|h(s,x(s))|ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}|T-2t|\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}|h(s,x(s))|ds \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|h(s,x(s))-h(s,0)|+|h(s,0)|)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|h(s,x(s))-h(s,0)|+|h(s,0)|)ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}|T-2t|\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}(|h(s,x(s))-h(s,0)|+|h(s,0)|)ds.
\end{aligned}$$

Utilisant l'hypothèse sur h et calculant les intégrales, nous trouvons

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t)| &\leq (Lr+M)\Bigg[\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}|T-2t|\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}ds\Bigg] \\
&\leq (Lr+M)\left[\frac{T^q\big(3\Gamma(q-p-1)+\Gamma(q+1)\Gamma(2-p)\big)}{2\Gamma(q+1)\Gamma(q-p-1)}\right] \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

En prenant le maximum de $|(Hx)(t)|$ sur l'intervalle $[0,T]$, on obtient

$$\|Hx\| \leq r.$$

Donc, $H(B_r) \subset B_r$.

Étape 2 : Montrons que H est une contraction.

Pour $x, y \in \mathcal{C}$ et pour chaque $t \in [0,T]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t)-(Hy)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|h(s,x(s))-h(s,y(s))|ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|h(s,x(s))-h(s,y(s))|ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}|T-2t|\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}|h(s,x(s))-h(s,y(s))|ds
\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse sur la fonction h et le calcul des intégrales, on obtient

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t)-(Hy)(t)| &\leq L\|x-y\|\bigg[\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds+\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds \\
&\quad +\frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}|T-2t|\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}ds\bigg] \\
&\leq \|x-y\|\left[\frac{LT^q\big(3\Gamma(q-p-1)+\Gamma(q+1)\Gamma(2-p)\big)}{2\Gamma(q+1)\Gamma(q-p-1)}\right] \\
&\leq \lambda\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Passant à la norme, nous trouvons

$$\|Hx-Hy\| \;\leq\; \lambda\|x-y\|.$$

où

$$\lambda=\frac{LT^q\big(3\Gamma(q-p+1)+\Gamma(q+1)\Gamma(2-p)\big)}{2\Gamma(q+1)\Gamma(q-p+1)},$$

qui ne dépend que des paramétres impliqués dans notre problème.

D'après l'hypothèse du théorème, on peut voir que

$$\lambda<1,$$

donc H est une contraction.

Ainsi, la conclusion du théorème suit par le principe de contraction de Banach (le théorème du point fixe de Banach). ■

4.3 Quelques résultats d'existence

Théorème 4.2 *: Supposons qu'il existe une constante positive L_1 telle que*

$$|h(t,x)|\leq L_1, \quad \textit{pour } \ t\in[0,T],\ x\in\mathcal{C}.$$

Alors, le problème (4.1) *admet au moins une solution.*

Preuve. Afin d'applique le théorème de point fixe de Schaefer (Théorème 1.9), on doit passer par quelques étapes :

- Nous montrons, dans un premier temps, que l'opérateur H est complétement continu.

  Clairement, la continuité de l'opérateur H suit de la continuité de h.

  H est uniformément borné. En effet,

Soit $\Omega \subset \mathcal{C}$ être borné. Alors,

$$\begin{aligned}|(Hx)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|h(s,x(s))|ds + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|h(s,x(s))|ds \\ &+\frac{\Gamma(2-p)(T-2t)}{2T^{1-p}}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}|h(s,x(s))|ds.\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse $|h(t,x)| \leq L_1$, on a :

$$\begin{aligned}|(Hx)(t)| &\leq L_1\bigg[\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds \\ &+\frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}|T-2t|\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}ds\bigg] \\ &\leq \frac{L_1T^q[3\Gamma(q-p+1)+\Gamma(q+1)\Gamma(2-p)]}{2\Gamma(q+1)\Gamma(q-p+1)} = L_2.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|Hx\| \leq L_2$.

H est équicontinue.

Remarquons que,

$$\begin{aligned}|(Hx)'(t)| &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|h(s,x(s))|ds + \frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}|h(s,x(s))|ds \\ &\leq L_1\bigg[\int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}ds + \frac{\Gamma(2-p)}{T^{1-p}}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)}ds\bigg] \\ &\leq \frac{L_1T^{q-1}[\Gamma(q-p+1)+\Gamma(q)\Gamma(2-p)]}{\Gamma(q)\Gamma(q-p+1)} = L_3.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $t_1, t_2 \in [0,T]$, on a :

$$|(Hx)(t_2)-(Hx)(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |(Hx)'(s)|ds \leq L_3(t_2-t_1).$$

Le côté droit de l'inégalité précédente ne dépend pas de x, et lorsque $t_1 \to t_2$, on trouve

$$|(Hx)(t_2)-(Hx)(t_1)| \longrightarrow 0.$$

Ceci implique que H est un opérateur équicontinu sur $[0,T]$.

Ainsi, d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzelà, l'opérateur $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est complétement continu.

- Ensuite, on considère l'ensemble

$$V = \{x \in \mathcal{C} \mid \quad x = \mu Hx, \quad 0 < \mu < 1\},$$

et montre que l'ensemble V est borné.

Soit $x \in V$; alors $x = \mu Hx,\ 0 < \mu < 1$. pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s,x(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s,x(s))ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(2-p)(T-2t)}{2T^{1-p}} \int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} h(s,x(s))ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \mu|(Hx)(t)| \\ &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |h(s,x(s))|ds + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |h(s,x(s))|ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(2-p)(T-2t)}{2T^{1-p}} \int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} |h(s,x(s))|ds \\ &\leq L_1\left[\int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds + \frac{\Gamma(2-p)}{2T^{1-p}}|T-2t| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} ds\right] \\ &\leq \max_{t\in[0,T]}\left\{\frac{2|t^q|+T^q}{2\Gamma(q+1)} + \frac{\Gamma(2-p)|T-2t|T^{q-1}}{2\Gamma(q-p+1)}\right\} L_1 = M_1. \end{aligned}$$

Donc, $\|x\| \leq M_1$ pour tout $t \in [0,T]$. D'où, l'ensemble V est borné.

Ainsi, d'après la conclusion du théorème 1.9, l'opérateur H admet au moins un point fixe, ce qui implique que (4.1) admet au moins une solution. ■

Théorème 4.3 *: Soit*

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(t,x)}{x} = 0.$$

Alors, le problème (4.1) *admet au moins une solution.*

Preuve. La preuve est basée sur le théorème de point fixe de type Schauder (théorème 1.6).

Comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(t,x)}{x} = 0,$$

alors, il existe donc une constante $r > 0$ telle que $|h(t,x)| \leq \delta|x|$ pour $0 < |x| < r$, où $\delta > 0$.

Posons

$$\max_{t\in[0,T]}\left\{\frac{2|t^q|+T^q}{2\Gamma(q+1)} + \frac{\Gamma(2-p)|T-2t|T^{q-1}}{2\Gamma(q-p+1)}\right\}\delta \ \leq\ 1. \tag{4.5}$$

On définit

$$\Omega_1 = \{x \in \mathcal{C} : \quad \|x\| < r\},$$

et prenons $x \in \mathcal{C}$ tel que $\|x\| = r$, c'est-à-dire $x \in \partial\Omega$.

D'une façon analogue, on peut montrer que H est complètement continue et

$$|Hx(t)| \leq \max_{t\in[0,T]}\left\{\frac{2|t^q|+T^q}{2\Gamma(q+1)} + \frac{\Gamma(2-p)|T-2t|T^{q-1}}{2\Gamma(q-p+1)}\right\}\delta\|x\|.$$

En tenant compte de la condition (4.5), nous obtenons

$$\|Hx\| \leq \|x\|, \qquad x \in \partial\Omega.$$

Par conséquent, d'aprés le théorème 1.6, l'opérateur H admet au moins un point fixe, ce qui implique à son tour que le problème (4.1) admet au moins une solution. ■

4.4 Problèmes particuliers

Dans ce paragraphe, nous signalons qu'on peut conclures des résultats d'existence et d'unicité similaires pour certains cas particulers de notre problème aux limites (4.1) engendrés par d'autres conditions aux limites.

- Pour $p = 1$, la solution du *problème aux limites anti-périodique classique*

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = h(t, x(t)), \quad 0 < t < T,\ 1 < q \leq 2, \\ x(0) = -x(T), \\ x'(0) = -x'(T), \end{cases}$$

est donnée par [5]

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s, x(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s, x(s))ds \\ &\quad + \frac{1}{4}(T-2t)\int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} h(s, x(s))ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

D'autre part, quand $p \to 1^-$ on remarque que la solution du problème (4.1) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s, x(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s, x(s))ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(2-p)(T-2t)}{2T^{1-p}}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-p-1}}{\Gamma(q-p)} h(s, x(s))ds, \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ne se réduit pas à (4.6). En fait, les troisièmes termes des solutions (4.6) et (4.7) différent d'un facteur miltiplicatif de $1/2$ dans la limite $p \to 1^-$.

Par conséquant, les conditions aux limites fractionnaires de (4.1) conduisent à une nouvelle classe des problèmes.

- Lorsque le phénomène d'anti-périodicité se produit en un point intermédiaire $\eta \in (0, T)$, *le problème aux limites fractionnaires anti-périodiques de type paramétrique* prend la forme

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = h(t, x(t)), \quad t \in [0, T],\ T > 0,\ 1 < q \leq 2, \\ x(0) = -x(\eta), \\ x'(0) = -x'(\eta), \end{cases} \tag{4.8}$$

dont la solution est

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s,x(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} h(s,x(s))ds \\ &+\frac{1}{4}(\eta-2t)\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} h(s,x(s))ds, \end{aligned}$$

qui s'étend évidemment à (4.6) lorsque la limite $\eta \to T^-$.

On peut obtenir des résultats similaires aux théorèmes 5.3 et 5.4 pour le problème aux limites (4.8), en employant les arguments utilisés pour le problème aux limites (4.1). Cependant, nous formulerons le résultat d'existence et d'unicité pour le problème (4.8).

Théorème 4.4 *: Soit* $h : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et vérifie la condition*

$$|h(t,x) - h(t,y)| \leq L|x-y|, \quad \forall t \in [0,T],\ x,y \in \mathbb{R},$$

avec

$$L \leq \frac{\Gamma(q+1)}{[T^q + \frac{(2+q)\eta^q}{4}]}.$$

Alors, le problème aux limites anti-périodique (4.8) *admet une solution unique.*

Preuve. Nous omettons la preuve car elle est basée sur des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du théorème 4.1. ■

- Pour $q = 2$, les résultats d'existence et d'unicité des solutions pour un problème aux limites associé à une *équation différentielle odinaire du second ordre* avec des conditions anti-périodiques de type fractionnaire

$$\begin{cases} x''(t) = h(t,x(t)), \quad 0 < t < T, \\ x(0) = -x(T), \\ {}^cD^p(0) = -{}^cD^p(T),\ 0 < p \leq 1, \end{cases}$$

sont inclus dans les résultats de ce chapitre.

4.5 Exemples illustratifs

Dans cette section, nous présentons quelques exemples illustratifs afin d'assurer l'utilité des résultats obtenus.

Exemple 1

Considérons le problème aux limites fractionnaire anti-périodique suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{2}}x(t) = \frac{1}{(t+3)^3}\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}, & t \in [0,2], \\ x(0) = -x(2), \\ {}^cD^{\frac{3}{4}}x(0) = -{}^cD^{\frac{3}{4}}x(2), \end{cases} \tag{4.9}$$

où $q = 3/2,\ p = 3/4$ et $T = 2$.

Clairement, $L = \frac{1}{27}$ comme

$$|h(t,x) - h(t,y)| \leq \frac{1}{27}\|x - y\|.$$

De plus,

$$\frac{LT^q\big(3\Gamma(q-p+1) + \Gamma(q+1)\Gamma(2-p)\big)}{\Gamma(q+1)\Gamma(q-p+1)} = 0.339723783 < 1.$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites. Par conséquent, le problème aux limites fractionnaire (4.9) admet une solution unique définie sur $[0,2]$.

Exemple 2

Considérons le problème aux limites fractionnaire anti-périodique suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^qx(t) = \frac{e^{-\cos^2 x(t)}[1\ +\ 5\cos 2t+\ 4\ln(4+\ 3\sin^2 x(t))]}{2+\ \sin x(t)}, & 0 < t < 1, \\ x(0) = -x(1), \quad 1 < p < 1, \\ {}^cD^px(0) = -{}^cD^px(1), \end{cases} \tag{4.10}$$

où $1 < q \leq 2$, $T = 1$ et

$$h(t,x) \quad = \quad \frac{e^{-\cos^2 x(t)}[1\ +\ 5\cos 2t +\ 4\ln(4+\ 3\sin^2 x(t))]}{2+\ \sin x(t)}.$$

Clairement l'hypothèse du théorème 4.2 est vérifiée. En effet,

$$|h(t,x)| \quad \leq \quad \frac{1[6 + 4\ln(7)]}{2} = 3 + 2\ln 7 = L_1,$$

et par conséquent, la conclution du théorème 4.2 s'applique à problème aux limites fractionnaires anti-périodiques (4.10).

Exemple 3

Considérons le problème aux limites d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = (9 + \ x^3(t))^{\frac{1}{2}} + 2(t+1)(x - \sin x(t)) - 3, \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = -x(1), \quad 0 < p < 1, \\ {}^cD^p x(0) = -{}^cD^p x(1), \end{cases} \tag{4.11}$$

où $1 < q \leq 2$, $T = 1$ et

$$h(t,x) = (9 + \ x^3(t))^{\frac{1}{2}} + 2(t+1)(x - \sin x(t)) - 3.$$

On peut facilement vérifier que toutes les hypothèses du théorème 4.3 sont vérifiées.

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(t,x)}{x} \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{(9 + \ x^3(t))^{\frac{1}{2}} + 2(t+1)(x - \sin x(t)) - 3}{x} = 0$$

Par conséquent, la conclusion du théorème 4.3 implique que le problème (4.11) admet au moins une solution.

Conclusion et perspective

Dans ce mémoire, nous avons présenté une contribution aux équations différentielles aux dérivées fractionnaires, à savoir les problèmes aux limites non linéaires d'ordre fractionnaire.

En effet, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes d'équations différentielles fractionnaires, avec des conditions aux limites non séparées d'ordre fractionnaire.

Nous avons aussi abordé d'autres problèmes aux limtes associés aux équations intégro-différentielles d'ordre non entier avec conditions intégrales non séparées. De plus, nous avons examiner l'existence et l'unicité des solutions pour d'autres classes de problèmes aux limites avec conditions périodiques. Nous avons aussi signaler quelques cas particuliers de ce type de problème.

Les résultats donnés dans ce travail sont basés sur deux grands axes, à savoir le caclul fractionnaire et la théorie du point fixe.

En espérant au futur qu'on pourra étudier les problèmes précédents mais avec d'autres sens de dérivées ou dans des espaces de dimension infinie. Ainsi que d'autres types de problèmes aux limites associés aux équations différéntielles (et/ou systèmes différéntiels) fractionnaires non linéaires.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra and G M. N'Guérékata, *Advanced Fractional Differential and Integral Equations,* Nova Science Publishers, New York, 2014.

[2] S. Abbas, M. Benchohra and G M. N'Guérékata, *Topics in Fractional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 2012.

[3] B. Ahmad, *Existence of solutions for fractional differential equations of order* $q \in (2,3]$ *with anti-periodic boundary conditions*, J. Appl. Math. Comput. 34 (2010) 385–391.

[4] B. Ahmad and J. J. Nieto, *Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions,* Boundary Value Problems, vol. 2009, Article ID 708576, 11 pages.

[5] B. Ahmad, J.J. Nieto, *Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems involving fractional differential equations via Leray-Schauder degree theory*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 35 (2010) 295–304.

[6] B. Ahmad, J.J. Nieto, *Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems involving fractional differential equations via Leray.Schauder degree theory*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 35 (2010) 295–304.

[7] B. Ahmad and S. K. Ntouyas, *A note on fractional differential equations with fractional separated boundary conditions*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 818703.

[8] B. Ahmad, A. Alsaedi, and B. S. Alghamdi, *Analytic approximation of solutions of the forced Duffing equation with integral boundary conditions,* Nonlinear Analysis : Real World Applications, vol. 9, no. 4 (2008), 1727–1740.

[9] B. Ahmad, J.J. Nieto and A. Alsaedi, *Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with non-separated type integral boundary conditions*, Acta. Math. Sci. 31 (6) (2011) 2122–2130.

[10] B. Ahmad, V. Otero-Espinar, *Existence of solutions for fractional differential inclusions with anti-periodic boundary conditions*, Bound. Value Probl. (2009) Art. ID 625347, 11 pp.

[11] C. Ahn and C. Rim, *Boundary flows in general coset theories.* J. Phys. A 32 (1999), 2509–2525.

[12] S. Djebali, *Problèmes aux limites associés aux E.D.O. du second ordre*, E.N.S. Kouba 2007.

[13] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, Springer 2004.

[14] D. Foukrach, T. Moussaoui and S. K. Ntouyas, *Boundary value problems for a class of fractional differential equations depending on first derivative.* Commun. Math. Anal. 15 (2) (2013), 15–28.

[15] D. Foukrach, T. Moussaoui and S. K. Ntouyas, *Existence results for a three-point BVP and a coupled system of nonlinear fractional differential equations depending on first derivative,* Commun. Appl. Nonlinear Anal. 20 (2) (2013), 91–106.

[16] D. Foukrach, T. Moussaoui and S. K. Ntouyas, *Existence of positive solutions for semi-positone fractional boundary value problems,* Journal of Fractional Calculus and Applications, **5**, No. 1 (2014), 85–96.

[17] D. Foukrach, T. Moussaoui and S. K. Ntouyas, *Existence and uniqueness results for a class of BVPs for nonlinear fractional differential equations.* Georgian Math. J. 22 (1) (2015) 45–55.

[18] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[19] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics,* World Scientific, Singapore, 2000.

[20] D. O'Regan, Y.J. Cho and Y.Q. Chen, *Topological Degree Theory and Applications*, Vol. 10 Chapman & Hall / CRC, 2006.

[21] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[22] A. Krasnoselskii, *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, vol. **10**, pp. 123–127, 1955.

[23] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1993.

[24] I. Podlubny, *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[25] S. Zhang, *Positive Solutions for Boundary-Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006 (2006), No. 36, pp. 1-12.