République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE/CD WISSAM 2022/RE6NZ802.bmp

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités et statistique**

Par

Laouer wissam

Titre

Théorème de comparaison pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchie et leur application

Membres du Comité d'Examen :

Mansoul Brahim	**M.A.A**	U**.Ouargla**	**Président**
Saouli Mostapha abdelouahab	**M.C.B**	U**.Ouargla**	**Encadreur**
Benbrahim Radhia	**M.C.B**	U**.Ouargla**	**Examinateur**

Juin 2022

Dédicace

Je dédie ce travail à dieu merci j'ais fini ce parcours de cinq ans d'étude après un long chemin universitaire. Je tiens tout d'abord à dédié ce travail à mes chère parents.

Ma mère mon amour mes yeux le coeur qui bat en moi et la raison pour la quelle j'ai toujours eu foi Hayat tell son nom elle a épanoui ma vie.

Mon père mon bras droit mon protecteur et l'homme de ma vie vous avez envoyé ce n'est pas cinq ans mais toute une vie présent à mes côté pour avoir pue atteindre où je suis Mohamed un nom bien choisi pour un homme plein de rigeure.

Mes sœurs **kamilia** et **karawan** malgré nos débats et pleurnichement toujours présente vous avez envoyé et sans saises dernière mon dos.

Sans oublier mon frère **firas** vous avez envoyé tell un chevalier qui sauve sa soeur sans qui me donner toujours foi et sa sans une goutte de désistement.

Enfin **Nesrine** et **Sabrine** mes amies non mes sœurs merci a vous malgré nos distance nos coeur sont proches votre soutien moral était tout de ce que j'en avais besoin

Merci a tous enfin elhemdoulileh c'est avec une larme au yeux que j'écris une larme de bonheur non une fin d'un parcours mais le début d'une aventure une nouvelle page a tourné !

Remerciements

Je tiens remercier tout dabord Allah.

En second lieu, je tiens a remercier mon encadreur **Dr : Saouli Mostapha abdelouahab**.

Pour son précieux conseil et son aide.

Durant toute la période du travail, il ma en effet guidé pendant toute l'année.

Et je remercie également aux membres du Jury **Mansoul Brahim, Benbrahim Radhia**

qui ont acceptés dévaluer et de juger mon travail.

Je tiens remercie

Ma famille, notamment mes parents pour tout ce quils ont fait pour moi.

Merci a tous.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du v.a X.
EDS	Equation Différentielle Stochastique.
$EDSR$	Equation Différentielle Stochastique Rétrograde.
$EDSRR$	Equation Différentielle Stochastique Rétrograde.et Réflichié.
$\mathbb{P}$	La probabilité.
$\mathbb{P}-p.s$	La probabilité presque sûrment.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{n\times d}$	Ensemble des matrice réelles $n \times d$.
BDG	L'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy.
sup	Supérieur
inf	Inférieur
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filtré.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0;T]$ avec la mesure de $d\mathbb{P}$.
$m \otimes \mathbb{P}-p.p$	Presque par tout par rapport la mesure $m \otimes \mathbb{P}$.
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.

$\mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ $\begin{cases} \text{L'espace vectoriel formé par les processus } Y \text{ progressivement mesurable à valeur} \\ \text{dans } \mathbb{R} \text{ tel que : } \|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 := \mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty, \end{cases}$

$\mathcal{M}^2_{n\times d}\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ $\begin{cases} \text{L'espace formé par les processus } Z \text{ progressivement mesurable à valeur dans } \mathbb{R}^{k\times d} \\ \text{telle que : } \|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty, \text{ où } Z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \|Z\|^2 = trace\left(ZZ^*\right). \end{cases}$

Table des matières

Introduction général

L'équation différentielle stochastique rétrograde (**EDSR** en abrégé) ont été introduites pour la première fois en 1973 par J M Bismut [2] dans le cas linéaire lorsqu'il étudie l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal. Cinq ans aprés, (Bismut [3] en 1978) prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de **l'EDSR** de Reccarti.

En 1990 Pardoux-Peng [16] indroduire le premièr résultat pour résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde non linéaire, les deux auteur trouver un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie l'équation et qui est $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adapté c'est–dire ne dépend que de l'information connu jusqu'à l'instant t. On peut dire que les **EDSR** sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne une condition terminale.

El Karoui et al dans [9] définit un autre type l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie (**en abrégé EDSRR**) dans le cas unidimensionnel. Il s'agit de chercher un triplet de processus progressivement mesurables (Y, Z, K), où le processus K est non décroissant et continue tel que :

$$\begin{cases} Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s; \quad \forall 0 \leq t \leq T, \\ Y_t \geq S_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ \int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0, \end{cases}$$

ici, S est un processus progressivement mesurable, qui jouera le rôle d'une barrière. Le rôle du processus K ici est de pousser le processus Y vers le haut pour le maintenir au-dessus de le barrière S. La dernière condition est connue sous le nom de condition de Skorohod et garantit que le processus K agit de manière minimale, c'est-à-dire seulement lorsque le processus Y atteint le barrière inférieure S. les auteurs prouvons l'existence et l'unicité à la fois par l'argument de point fixe et par pénalisation. lis montrons que lorsque le coefficient a une forme spéciale, alors la solution de notre problème est la valeur fonction d'un problème mixte d'arrêt optimal et de contrôle stochastique optimal. Dans [15], l'auteur prouvé l'existence d'un solution minimale ou maximale par l'utilisation de la théorème de comparaison entre deux solution de **EDSRR** et la technique d'approximation.

L'objectif de ce travail est de rappeler un résultat sur le théorème de comparaison dans [9] et nous étudions l'**EDSRR** dans le cas où le générateur est continue en Y et Lipschitz en Z.

Ce mémoire est composé en trois chapitre :

Dans le premiére chapitre : On présente des notions de base sur le calcul stochastique (théori de probabilité, éspérence conditionnelle, processus stochastiques, mouvement Brownien, martingale et intégrale stochastique).

Dans le deuxiéme chapitre : On rappelle l'éxistence et l'unicité de la solution **EDS** et **EDSR** dans le cas linéaire puis dans le cas général et d'énoncer le théorème de comparaison. et nous étudions l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie dans le cas Lipschitz.

Dans le troisiéme chapitre : On donne le résultat de théorème de comparaison pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies et on présente l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie dans le cas où le générateur est continu en Y et Lipschitz en Z.

Chapitre 1

Généralités sur calcul stochastique

1.1 Théorie de probabilités

Définition 1.1 ***Tribu*** *: [14, page 1] Soit Ω un ensemble non vide, on appelle tribu (où σ-algèbre) sur Ω, une famille $\mathcal{F}$ de sous ensemble de Ω (appellés évènements) tels que :*

i) $\{\varnothing\} \in \mathcal{F}$,

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire),

iii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable).

En particulier : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Définition 1.2 ***Sous tribu*** *: [14, page 2] On dit que $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ telle que si $A \in \mathcal{G}$ alors $A \in \mathcal{F}$, $\forall$ $\mathcal{G}$ inclus dans $\mathcal{F}$.*

Définition 1.3 ***Tribu engendré*** *: [11, page 5] Soit $A \in \mathbb{P}(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par A et on note $\sigma(A)$ l'intersection de toutes les tribus qui contenant A.*

Définition 1.4 ***Tribu borélienne*** *: [11, page 3] La tribu Borélienne de $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu engendrée par les intervalles ouverts $]a, b[\,, (a > b) \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.5 ***Probabilité*** *: [14, page 2] Soit $\mathcal{F}$ un tribu sur Ω une mesure de probabilisé sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ telle que :*

– $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

– Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ disjoints $(A_n \cap A_m = \varnothing, \forall n \neq m) \Rightarrow \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Définition 1.6 ***Mesurabilité*** *: [12, page 8] Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathbb{E}, \varepsilon)$ deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \to \mathbb{E}$ est dite $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ mesurable si $\forall A \in \varepsilon : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ où :*

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | \, f(\omega) \in A\}.$$

Définition 1.7 ***Variable aléatoire*** *: [14, page 3] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire (en abrégé* ***v.a)*** *si :*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbf{B}\} = \{X \in \mathbf{B}\} \in \mathcal{F}, \qquad \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Définition 1.8 ***La loi d'un variable aléatoire*** *: [14, page 4] La loi d'une* ***v.a*** *X est l'application $\mu_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par : $\mu_X(\mathbf{B}) = \mathbb{P}(\{X \in \mathbf{B}\})$, $\qquad \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Définition 1.9 ***L'espérence :*** *L'espérence d'une* ***v.a*** *X est définie par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(x = k); & \textit{cas discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x); & \textit{cas continue} \end{cases}.$$

On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ (finie).

Définition 1.10 ***La variance :*** *La variance d'une* ***v.a*** *X est définie par :*

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} (k - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(x = k); & \textit{cas discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx; & \textit{cas continue} \end{cases}.$$

Définition 1.11 ***Probabilité conditionnelle*** *: [10, page 9] Soient A et B deux événements. La probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :*

$$\mathbb{P}(A| B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

1.2 Espérence conditionnelle

Définition 1.12 *[8, page 21] Soit X une* ***v.a*** *réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ et une sous tribu $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$. On note $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$ tout* ***v.a*** *Y satisfaisant les deux conditions :*

1) $Y \subseteq \mathcal{F}_1$, c'est à dire Y est $\mathcal{F}_1$-mesurable.

2) Pour tout $A \in \mathcal{F}_1$ on a

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}.$$

La théorème suivante présenter l'existence et unicité d'espérence conditionnelle

Théoréme 1.1 *[8, page 21] Si Z est une* ***v.a*** *reélle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nous abrégeons $\mathbb{E}(X|\sigma(Z))$ par $\mathbb{E}(X|Z)$*

1) L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$ existe.

2) L'espérance conditionnelle est unique dans le sens que si Y,Y' sont deux versions de $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$ alors $Y = Y'$.

3) On a $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X)$.

Proposition 1.1 *[8, page 23 et 24] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$.*

– **Linéairité :** Soit a et b deux canstante.

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}_1) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_1).$$

– **Croissance** : Soit X et Y deux **v.a** telle que $X \leq Y$ alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_1).$$

– Si X est $\mathcal{F}_1$-mesurable $E(X|\mathcal{F}_1) = X$.

– Si Y est $\mathcal{F}_1$-mesurable et $\mathbb{E}(|X|) \prec \infty$, $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$ alors, $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}_1) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$.

– Si X est indépendante de $\mathcal{F}_1$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X)$.

- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X)$.
- Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ et $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$.
- Inégalité de Jensen, soit φ est convexe et $\mathbb{E}(|X|)$ et $\mathbb{E}(|\varphi(X)|)$ sont finie alors $\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{F}_1)$. Par exemple et $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|) \leq \mathbb{E}(|X|)$.

1.3 Processus stochastique

Définition 1.13 ***Processus stochastique*** *: Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans $(\mathbb{E}, \varepsilon)$, appelée espaces détats généralement $(\mathbb{E}, \varepsilon) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*

Définition 1.14 *: [11, page9] : La tribu engendrée par une **v.a** X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble $\sigma(X) = \{X^{-1}(A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.*

On vérifie que $\sigma(X)$ est une tribu contenue dans $\mathcal{F}$: c'est la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.
Si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, alors une **v.a.r.** X est $\mathcal{G}$-mesurable si $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$.

Proposition 1.2 *[11, page 9] : Soit X une **v.a.r.** et Y une **v.a.r** $\sigma(X)$-mesurable. Alors il existe une fonction Borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.*

Définition 1.15 ***Filtration*** *: [17, page 2] La filtration c'est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est à dire $\forall 0 \leq s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.*

Définition 1.16 ***Espace de probabilité filtré*** *: [17, page 2] Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ un espace mesurable et soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une filtration. Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ s'appelle base stochastique ou un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.17 ***Filtration complet*** *: [17, page 2] Une filtration est $\mathbb{P}-$complète pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient tous les évènements de mesure nulle, i.e*

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0.$$

Définition 1.18 ***La filtration vérifie les condition habituelle*** *: [17, page 2] On dit qu'une filtration $\mathcal{F}$ satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite $\mathcal{F}_t = \underset{s\geq t}{\cap} \mathcal{F}_s$ et si elle est complet.*

Remarque 1.1 *On dit que alors, l'espace de probabilite filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$ satisfait et les conditions habitulelle. Si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est continue à droite et complet.*

Définition 1.19 ***Processus adapté*** *: [17, page 2] Un processus $(X_t\ )_{t\in\mathbb{T}}$ est dit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.20 ***Progressivement mesurable*** *: [17, page 3] Un processus est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t,\quad 0 \leq t \leq +\infty\}$, si $\forall t \geq 0$ l'application suivante :*

$$([0,t] \times \Omega,\ \mathcal{B}(\ [0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

$$(s,\omega) \rightarrow X_s(\omega).$$

Est mesurable.

1.4 Mouvement Brownien

1.4.1 Processus Gaussien

Définition 1.21 *[12, page 15] Un processus $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire finie de X_t est une* ***v.a*** *gaussienne $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{T}$.*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i},$$

est une variable gaussienne.

Remarque 1.2 *[6, page 22] Toute combinaison linéaire de marginales d'un processus gaussien est encore gaussienne.*

Historique : [11, page 23]

Avant d'être un objet mathématique rigoureux, le mouvement brownien a été étudié en Botanique, en Finance, et en Physique. Le botaniste R. Brown observe d'abord vers 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est alors appelé mouvement au hasard. En 1900, L. Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse de Paris dans sa thèse, met en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant $t+s$ dépend de sa position en t, et ne dépend pas de sa position avant t. Peu aprés, vers 1905, A. Einstein détermine la densité de transition du Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur. La même année, Smoluchowski d'écrit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires. La première étude mathématique rigoureuse du Brownien est faite par N. Wiener (1923), qui construit une mesure de probabilités sur l'espace des fonctions continues sous laquelle le processus canonique est un mouvement Brownien. Des recherches d'une influence considérable ont ensuite été menées par P. Lévy (1948), lequel s'est intéressé aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Ces objets ont été developpés par les potentialistes américains à la suite de J. L. Doob, puis systèmatisés par les spécialistes de la "Théorie Générale des Processus" de l'école de Strasbourg, autour de P. A. Meye.

Définition 1.22 ***Mouvement Brownien*** *: [18, page 46] On appelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un mouvement Brownien (en abrégé* ***MB****) tout pocessus stochastique* $(\mathbf{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *vérifié les conditions suivants :*

- $\mathbf{B}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ adapté.
- $\mathbf{B}_0 = 0 \quad \mathbb{P}-p.s.$
- $\mathbf{B}$ est continue $\mathbb{P}-p.s$ $i.e$ $t \to \mathbf{B}_t(\omega)$ est continue $\mathbb{P}-$ *prèsque tout* $\omega \in \Omega$.

– $\forall s \leq t$, $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

– $\forall s \leq t$, $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ est le **v.a** gaussiens : $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

Remarque 1.3 *[4, page 3]* $\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(\exp(iu(B_t - B_s)| \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\exp(iu(B_t - B_s))) = \exp(-u^2 \frac{(t-s)}{2})$.

Proposition 1.3 *[4, page 3] Soit $B = (\mathbf{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un **MB** standard.*

– *Pour tout $s > 0, \{\mathbf{B}_{t+s} - \mathbf{B}_s\}_{t \geq 0}$ est un **MB** indépendant de $\sigma\{\mathbf{B}_u, u \leq s\}$*

– *$\mathbf{B}$ est un **MB***

– *Pour tout $c > 0$. $\left\{c\mathbf{B}_{\frac{t}{c^2}}\right\}_{t \geq 0}$ est un **MB.***

– *Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = t\mathbf{B}_{\frac{1}{t}}$ est un **MB.***

1.4.2 Caractérisation de Paul-Lévy

Théoréme 1.2 *[11, page 26] Soit (X_t) un processus continue issu de 0. Alors (X_t) est un **MB** si l'une deux conditions suivantes est vérifier :*

1) Les processus (X_t) et $t \to (X_t)^2 - \mathbb{V}ar\,(X_t)$ sont des martingales.

2) Le processus $t \to \exp\left[\theta X_t - \frac{\theta^2 t}{2}\right]$ est une martingale $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

1.4.3 Variation total et variation quadratique

Définition 1.23 *[18, page 50] On définit la variation infinitésimale d'ordre p d'un processus $(X_t)_{\in[0,T]}$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ est définit par :*

$$V_T^p\left(\Pi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p.$$

Si $V_T^p\left(\Pi_n\right)$ admet la limite dans certian sens (convergence L_p,converge p.s) lorsque $\Pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i \leq n} \left|t_{i+1}^n - t_i^n\right| \to 0$, la limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous appellerons variation d'ordre p de $(X_t) sur [0, T]$. En particulier :

1) Si $p = 1$ la limite s'appellera variation totale de (X_t) sur $[0, T]$.

2) Si $p=2$ la limite s'appellera variation quadratique de (X_t) sur $[0,T]$ notée $\langle X\rangle_T$.

Remarque 1.4 *[18, page 50] Si la variation totale d'un processus existe presque surement alors elle vaut :*

$$V_T^1=\sup_{\Pi\in\mathcal{P}}\sum_{i=1}^{n}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|,\quad p.s.$$

Où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des subdivisions possible de $[0,T]$.

Variation quadratique d'un MB

Proposition 1.4 *[18, page 50] Soit B un **MB** standard existe dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on a donc $V_T^c=\langle B\rangle_T=T$. De plus, si la subdivision Π_n satisfait $\sum_{i=1}^{n}\pi_n<\infty$ on a la convergence au sens $p.s.$*

Proof. [18, page 51] La variation infinitesimale d'ordre 2 du **MB** est donnée par :

$$V_T^2\left(\Pi_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|B_{t_i^n}-B_{t_{i-1}^n}\right|^2,$$

On rappel que $X\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, alors $\mathbb{E}\left[X^2\right]=\sigma^2$ alors $Var\left[X^2\right]=4\sigma^2$, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[V_T^2\left(\Pi_n\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_i^n}-B_{t_{i-1}^n}\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(t_i^n-t_{i-1}^n\right)=T.$$

Et en notant $\pi_n=\max\left|t_{i-1}^n-t_i^n\right|$, on trouver:

$$Var\left[V_T^2\left(\Pi_n\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}Var\left[\left(B_{t_i^n}-B_{t_{i-1}^n}\right)^2\right]=2\sum_{i=1}^{n}\left(t_i^n-t_{i-1}^n\right)^2\leq 2T\pi_n\underset{\pi_n\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Donc $\left\|V_T^2\left(\Pi_n\right)-T\right\|_2=Var\left(V_T^2\left(\Pi_n\right)\right)\to 0$ quand $\pi_n\to 0$.

Pour obtenir la converge presque sûre, il faut utiliser l'inégalité de Markov qui donne pour tout ε :

$$\mathbb{P}\left[\left|V_T^2\left(\Pi_n\right)-T\right|>\varepsilon\right]\leq\frac{Var\left[V_T^2\left(\Pi_n\right)\right]}{\varepsilon}\leq\frac{2T\pi_n}{\varepsilon}.$$

Donc si $\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n<\infty$, on a pour tout ε, $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[\left|V_T^2\left(\Pi_n\right)-T\right|>\varepsilon\right]<\infty$ ce qui (par Borel-Cantelli) entraîne la convergence presque sûre de $V_T^2\left(\Pi_n\right)$ vers T. ■

1.4.4 Propriétés des trajectoires du MB

Définition 1.24 ***Fonction localement Hölderienne*** *: On dit que une fonction f est localement Hölderienne d'ordre $\alpha \in [0,1]$, si il existe $a > 0$ et $C > 0$ tellque $\forall\,(x,y) \in [0,a] \times [0,a]$*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}.$$

Théoréme 1.3 ***Propriétés des trajectoires*** *: [4, page 3] Si B un **MB,** alors p.s on a :*

1) $t \rightarrow B_t(\omega)$ n'est à variation finie sur aucun intervalle.

2) $t \rightarrow B_t(\omega)$ est localement hölderienne d'ordre α pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$.

3) $t \rightarrow B_t(\omega)$ les trajectoires du **MB** n'est dérivable en aucun point.

1.5 Martingale en temps continu

Définition 1.25 *[7, page 64] Un processs $(X)_{t\epsilon\mathbb{R}_+}$ adapté par rapport a une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon\mathbb{R}_+}$ est tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X_t \in \mathbb{L}^1$ est appelé :*

1) Une martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}\left(X_t|\,\mathcal{F}_s\right) = X_s$;

2) Une sur-martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}\left(X_t|\,\mathcal{F}_s\right) \leq X_s$;

3) Une sous-martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}\left(X_t|\,\mathcal{F}_s\right) \geq X_s$.

Proposition 1.5 *Soit $(X)_{t\epsilon\mathbb{R}_+}$ un processus ;*

1) Si $(X)_{t\epsilon\mathbb{R}_+}$ est une martingale la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}\left(X_t\right)$ est constante, telle que : $\forall t \geq 0$: $\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right).$

2) Si $(X)_{t\epsilon\mathbb{R}_+}$ est une sur-martingale la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}\left(X_t\right)$ est décroissante.

3) Si $(X)_{t\epsilon\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}\left(X_t\right)$ est croissante.

Remarque 1.5 *[4, page 3] Si B est un **MB** alors $\left\{B_t^2 - t\right\}_{t\geq 0}$ et $\left\{\exp\left\{\sigma B_t - \sigma^2 \frac{t}{2}\right\}\right\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

Théoréme 1.4 ***Inégalités maximales* :** *[4, page 3] Soit X une martingale continue à droite*

1) $\forall p \geq 1$, $\forall a > 0$, $a^p p\left(\sup_t |X_t| \geq 0\right) \leq \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$.

2) $\forall p > 1$, $\mathbb{E}\left[\sup_t |X_t|^p\right] \leq q^p \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$, $q = p(1-p)^{-1}$.

Théoréme 1.5 ***Inégalité dans*** $\mathbb{L}^p$ *: [11, page 2] Soit $p \geq 1$ et X une martingale reélle continue telle que $X_t \in \mathbb{L}^p$ pour tout $t \geq 0$ alors*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t} |X_s|^p\right] \leq q^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right].$$

Par l'inégalité de markov, on déduit de ce théorème que si $X_t \in \mathbb{L}^p$ pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\sup |X_s| > \lambda\right] &= \mathbb{P}\left[\sup |X_s|^p > \lambda^p\right], \\ &\leq \frac{q^p}{\lambda^p} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]. \end{aligned}$$

Théoréme 1.6 ***Théorème de convergence martingale* :** *[11, page 21] Soit X une martingale continue*

1) X est une martingale fermée par X_∞.

2) X est converge $p.s$ et dans $\mathbb{L}^1$vers X_∞.

3) X est uniformément intégrable.

1.6 Intégrale stochstique

Notre objectif dans cette section donné une définition pour l'intégrale stochastique par rapport au **MB** et on introduit au calcul stochastique d'Itô.

1.6.1 L'intégrale de Wiener

Définition 1.26 *[11, page 35 et 36] L'intégrale de Wiener est un integrale du type $\int_0^t X_s dB_s$ $\forall t \geq 0$, où X est une fonction déterministe par rapport un **MB** standard $(B_t)_{t \geq 0}$ tel que :*

$X \in \mathbb{L}^2 [0,T]$, *avec*

$$\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R}) = \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} \text{ tel que } \int_0^T |f(s)|^2 \, ds < \infty \right\}.$$

En remarque si $T < +\infty$, *les fonctions continues et les fonctions bornées sont contenues dans* $\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R})$ *muni par le produit scalaire,*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(s) \, g(s) ds,$$

$\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R})$ *C'est un espace de Hilbert pour au sens où toute suite de* $\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R})$ *qui soit de Cauchy pour la norme :*

$$\|f\|^2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^T f^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Converge vers un élément unique de $\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R})$.

Proposition 1.6 *[11, page 36] La propriété fondamentale des espaces de Hilbert est l'existence d'une base orthonormée dénombrable : il existe un système de fonctions* $\{f_n, \quad n \geq 0\}$ *de* $\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R})$ *tel que* $\langle f_n, f_p \rangle = 0$ *si* $n \neq p$ *et* $\langle f_n, f_p \rangle = 1$ *si* $n = p$, *et tel que tout élément* f *de* $\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R})$ *s'écrive de manière unique sous la forme*

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n f_n,$$

pour les coefficients a_n *qu'on appelle les coordonnées de* f *dans la base* $\{f_n, \quad n \geq 0\}$. *Dans le cas précis de* $\mathbb{L}^2 ([0,T], \mathbb{R})$, *la base* $\{f_n, \quad n \geq 0\}$ *peut être constituée de fonctions en escalier :*

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i 1_{]t_i^n, t_{i+1}^n]} (t).$$

Où $p_n \in \mathbb{N}$, *les* α_i *sont rééls et une suite croissante de* $[0,T]$. *On en déduit alors le lemme suivant :*

Lemme 1.1 ***Lemme Hilbertien*** *: [11, page 36] Soit $f \in \mathbb{L}^2([0,T],\mathbb{R})$. Il existe une suite de fonctions en escalier $\{f_n\}$ telle que :*

$$\|f - f_n\|_{2,T} \to 0,$$

quand $n \to +\infty$.

Cas étagée [11, page 36]

Définition 1.27 *Soit f une fonction en escalier définie par :*

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t),$$

il est trés facile de définir l'integrale de Wienner par :

$$I_T(f_n) = \int_0^T f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

Théoréme 1.7 *Soit f une fonction étagée ,alors $I_T(f_n)$ est une **v.a** gaussien $\mathbb{E}[I_T(f_n)] = 0$ et $Var(I_T(f_n)) = \int_0^T f^2(s)ds$.*

Proof.

$$\int_0^T f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On a pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ α_i est constant, $I_T(f_n)$ est linéaire, $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ est une **v.a** Gaussien sa moyenne est :

$$\mathbb{E}[I_T(f_n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0.$$

Est sa variance :

$$Var(I_T(f_n)) = Var(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 Var(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T f^2(s)ds.$$

■

Proposition 1.7 *Soit $f(t)_{t\geq 0}$ est un fonction étagé alors $I_T(f) = \int_0^T f(s)dB_s$ est une $\mathcal{F}_T^B$-martingale continue et carré intégrable.*

Proof.

1) Par la définition où ce-dessus de l'integrale $I_T(f)$ et la continuité du **MB,** $I_T(f)$ est continue.

2) $I_T(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ est $\mathcal{F}_T^B$-mesurable.

3) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^T f_u dB_u\right|\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T f_u dB_u\right)^2\right)}.$$

L'isométrie d'Itô donne :

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T f_u dBu\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T f_u^2 du\right), \tag{1.1}$$

d'un autre côté on a :

$$\int_0^T f_u^2 du = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_u^2 du = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} du.$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f_u^2 du\right) = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}\left(\alpha_i^2\right)(t_{i+1} - t_i) < +\infty. \tag{1.2}$$

Puisque $\alpha_i \in \mathbb{L}^2$, de (1.1) et (1.2) $\rightarrow \mathbb{E}\left(\left|\int_0^T f_u du\right|\right) < +\infty$.

$\Longrightarrow \int_0^T f_u dB_u$ est integrable.

4) Soit $0 < s < T$ et $0 = t_0 < t_1 ... < t_n = T$ est une subdivision de l'intervalle $[0, T]$ donc

$\exists k$ tq : $s \in]t_k, t_{k+1}]$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I_T(f) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T f_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s^B \right) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left(\alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right), \\
&= \sum_{i=0}^{k^{-1}} \mathbb{E}\left(\alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) + \mathbb{E}\left(\alpha_k \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}\left(\alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right).
\end{aligned}$$

On a pour $i \leq k-1$, $t_i \leq t_{k-1} < s$ alors : α_i et $\left(B_{t_{i+1}} - B_{ti} \right)$ sont $\mathcal{F}_s^B$-mesurable.

$$\mathbb{E}\left(\alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) = \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right),$$

α_k est $\mathcal{F}_s^B$-mesurable puisque $t_k < s$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\alpha_k \left(B_{t_{k+1}} - B_k \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) &= \alpha_k \mathbb{E}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right), \\
&= \alpha_k \left(\mathbb{E}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_s \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) + \mathbb{E}\left(\left(B_s - B_{t_k} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) \right), \\
&= \alpha_k (\mathbb{E}\left(B_{t_{k+1}} - B_s \right) + (B_s - B_{t_k})).
\end{aligned}$$

Puisque : $B_{t_{k+1}} - B_s$ est indépendant avec $\mathcal{F}_s^B$ et $B_s - B_{t_k}$ est $\mathcal{F}_s^B-$mesurable. Donc :

$$\mathbb{E}\left(\alpha_k \left(B_{t_{k+1}} - B_k \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) = \alpha_k \left(B_s - B_{t_k} \right).$$

$k+1 \leq i \Rightarrow s < t_{k+1} \leq t_i$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_{t_i}^B \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right), \\
&= \mathbb{E}\left(\alpha_i \mathbb{E}\left(\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_{t_i}^B \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right), \\
&= \mathbb{E}\left(\alpha_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \middle| \mathcal{F}_s^B \right), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}^B$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I_T\left(f\right) \middle| \mathcal{F}_s^B\right) &= \sum_{i=0}^{k^-} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) + \alpha_k \left(B_s - B_{tk}\right), \\
&= \int_0^s f_u dB_u, \\
&= I_s(f).
\end{aligned}$$

Alors en déduire que :

$$I_T\left(f\right) = \int_0^T f_u dB_u.$$

Est une $\mathcal{F}_t^B$-martingale.

5) D'aprés l'isometrie d'Itô on a

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T f_u dB_u\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T f_u^2 du\right).$$

4$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\int_0^T f_u^2 du\right) < +\infty$ donc $\left(\int_0^T f_u dB_u\right)$ de carré intégrable.

de **1, 2, 3, 4** et **5** $\Rightarrow I_T\left(f\right)$ est une $\mathcal{F}_t^B$-martingale continue de carré intégrable.

■

Cas générale [11, page 37]

Pour construire $I_T\left(f\right)$ quand f est un élément quelconque de $\mathbb{L}^2\left([0,T], \mathbb{R}\right)$, on utilise l'isométrie mise en place et le lemme suivant :

Lemme 1.2 ***<u>Lemme Gaussien</u>*** *: Soit $\{X_n,\ n \geq 0\}$ une suite de variables gaussiennes $\mathcal{N}\left(\mu_n, \sigma_n\right)$convergeant vers une **v.a.** X dans $\mathbb{L}^2$ soit telle que*

$$\mathbb{E}\left[|X - X_n|^2\right] \to 0.$$

quand $n \to +\infty$. Alors, $\mu_n \to \mu$ et $\sigma_n \to \sigma$ quand $n \to +\infty$ et $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Soit maintenant $f \in \mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$ et soit, d'aprés le **Lemme1.1**, $\{f_n, n \geq 0\}$ une suite de fonctions en escalier telle que $\|f - f_n\|_{2,T} \to 0$ quand $n \uparrow +\infty$. D'aprés le paragraphe précédent on peut construire les intégrales de Wiener $I_T(f_n)$ qui sont des gaussiennes centrées qui, par isométrie forment une suite de Cauchy. L'espace $\mathbb{L}^2$ étant complet, cette suite converge vers une **v.a**. gausienne notée $I_T(f)$. Par le **Lemme 1.2**, $I_T(f) \sim \mathcal{N}(0, ||f||_{2,T}^2)$. Il reste à vérifier que la limite Y ne dépend que de f et non pas de la suite $\{f_n\}$ choisie. En particulier $I_T(f)$ n'est jamais une variable $p.s.$ positive, même quand f elle-même est toujours positive. De plus, l'application $f \to I_T(f)$ est linéaire et isométrique de $\mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, au sens où $I_T(af + bg) = aI_T(f) + bI_T(g)$ et

$$\mathbb{E}[I_T(f)I_T(g)] = \int_0^T f(s)\, g(s)\, ds.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R})$. Enfin, $I_T(f)$ est une variable gaussienne mesurable par rapport à $\sigma\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ qui vérifie pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[I_T(f)B_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(s)\, dB_s\right)\left(\int_0^T 1_{[0,t]}(s)\, dB_s\right)\right], \\ &= \int_0^T f(s)\, 1_{[0,t]}(s)\, ds = \int_0^t f(s)\, ds, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de la formule d'isométrie. Par propriété d'espace gaussien, cette formule caractérise l'intégrale stochastique : $I_T(f)$ est l'unique **v.a**. Z gaussienne mesurable par rapport à $\sigma\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[ZB_t\right] = \int_0^t f(s)\, ds, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

1.6.2 L'intégrale stochastique générale

[11, page 43] On cherche maintenant à définir la **v.a**.

$$\int_0^t f_s dB_s,$$

quand $\{f_s, \quad s \geq 0\}$ est un processus stochastique. Le caractère aléatoire de f va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener. On note $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}$ a filtration naturelle du **MB** B.

Définition 1.28 *On dit que* $\{f_t, \quad t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $\mathcal{F}_t^B$*-adapté, càglàd et si*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t f_s^2 ds\right] < \infty, \text{ pour tout } t > 0.$$

Comme dans le cas de l'intégrale de Wiener, la construction de Itô se fait par discrétisation :

Cas des processus étagés

Ce sont les processus du type

$$f_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} f_i 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t).$$

Où $p_n \in \mathbb{N}$, $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{p_n} = 0$ et $f_i \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$.pour tout $i = 0...p_n$. On voit immédiatement que f_n est un bon processus. On définit alors

$$I_t(f^n) = \int_0^t f_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} f_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right),$$

et on vérifie que pour $i \neq j$,

$$\mathbb{E}\left(f_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) f_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right) = 0,$$

et que

$$\mathbb{E}\left[I_t(f^n)\right] = 0 \text{ et } Var\left[I_t(f^n)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(f_s^n\right)^2 ds\right].$$

Cependant, on prendra garde que par le caractère aléatoire de f^n, la variable $I_t(f^n)$ n'est pas une Gaussienne en général.

Cas de processus général

Le principe est le même que pour l'intégrale de Wiener, mais les outils mathématiques sous-jacents plus compliqués que les lemmes hilbertien et gaussien du paragraphe précédent. Nous passerons les détails. Si f est un bon processus, on montre d'abord qu'il existe $\{f_n, n \geq$

$0\}$ suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |f_n(s) - f(s)|^2 \, ds\right] \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

quand $n \uparrow +\infty$, puis que pour tout $t > 0$ il existe une **v.a.** $I_t(f)$ de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\left[|I_t(f) - I_t(f^n)|^2\right] \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

quand $n \uparrow +\infty$, avec $I_t(f^n)$ défini comme au paragraphe précédent. On pose alors naturellement

$$I_t(f) = \int_0^t f_s dB_s,$$

pour tout $t \geq 0$. Par indépendance, on remarque d'abord que

$$\mathbb{E}\left[I_t(f^n)\right] = \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{E}\left[f_i\right] \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0,$$

de sorte, en passant à la limite, que

$$\mathbb{E}\left[I_t(f)\right] = 0.$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} Var\left[I_t(f)\right] &= \lim_{n\to\infty} Var\left[I_t(f^n)\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[I_t(f^n)^2\right], \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} f_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right], \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t f_s^2 ds\right]. \end{aligned}$$

1.6.3 Représentation des martingales

Théoréme 1.8 ***Martingales Browniennes*** *: [5, page 8] Soit* $\{B_t, \mathcal{F}_t; \quad 0 \leq t \leq +\infty\}$ *un* ***MB.*** *Soit* $X = \{X_t, \quad 0 \leq t \leq +\infty\}$ *une martingale Brownienne, i.e une martingale par* *rapport à la filtration du **MB** de carré intégrable et telle que $X_0 = 0$. Alors, il existe un processus $H \in \mathbb{H}^2$ tel que $\forall t \geq 0$:*

$$X_t = \int_0^t H_s dB_s.$$

De plus, $\widetilde{H}$ est un autre représentant de X, p.s :

$$\int_0^{+\infty} \left| \widetilde{H_t} - H_t \right|^2 dt = 0.$$

Remarque 1.6 *[5, page 8] D'autre part, toute martingale de carré intégrable est une intégrale stochastique par rapport à un **MB.***

1.6.4 Formules d'Itô

Définition 1.29 *[11, page 38] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus d'Itô s'écrit sous la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, K et H deux processus $\mathcal{F}$-adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité : $\int_0^T |K_s| \, ds < \infty, \quad p.s$, et $\int_0^T |H_s|^2 \, ds, \quad p.s.$

Théoréme 1.9 ***Première formule d'Itô*** *: [11, page 49] Soient X un processus d'Itô et f une fonction de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivées bornée*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f"(X_s) \, \sigma_s^2 ds.$$

Théoréme 1.10 ***Deuxième formule d'Itô*** *: [11, page 50] Soient $(t, x) \to f(t, x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à x on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) \, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \, \sigma_s^2 ds.$$

Théoréme 1.11 ***Troixième formule d'Itô*** *: [11, page 51] Soient X^1 et X^2 deux processus* *d'Itô issus de x_1 (resp de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp b^2), de coefficient de diffusion σ^1(resp σ^2) et portées respectivement par deux Browniens B^1 et B^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que b^i, σ^i sont $\left(\mathcal{F}_t^{Bi}\right)$-adaptés.*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivées bornées. On a :

$$f\left(X_t^1, X_t^2\right) = f\left(x_1, x_2\right) + \int_0^t f_1'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^1 + \int_0^t f_2'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \{f_{11}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^1\right)^2 +$$
$$2\rho f_{12}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(X_s^1, X_s^2\right)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{22}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^2\right)^2\}ds,$$

où f_i' désigne la dérivée par rapport à x_i et f_{ij}'' la déerivée seconde par rapport à x_j puis x_i, $i, j = 1, 2$.

En différentiel, la troisième formule d'Itô peut prendre une forme sommatoire :

$$df\left(X_t^1, X_t^2\right) = \sum_{i=1,2} f_i'\left(X_t^1, X_t^2\right) dX_t^i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1,2} c_{ij} f_{ij}''\left(X_t^1, X_t^2\right)\sigma_t^i\sigma_t^j\right) dt,$$

avec $c_{ij} = 1$ si $i = j$ et $c_{ij} = \rho$ si $i \neq j$.

Proposition 1.8 ***Formule intégration par partie*** **:** *[18, page 73] Soient X et Y deux processus d'Itô, on a :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds,$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t V_s dB_s + \int_0^t B_s ds.$$

Alors d'aprés la formule d'Itô multidimensionnelle (la troisième formule d'Itô) on a :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\left\langle X, Y\right\rangle_s.$$

Tel que : $\langle X, Y\rangle$ s'appele le crochet de X et Y.

Remarque 1.7 *La formule dintegration par partie est une exemple d'application de la troisième formule d'Itô.*

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques, equations différentielles stochastiques Rétrogrades et equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchie

Historique :

C'est toute une histoire avant d'accéder aux **EDS** actuelles déterminés d'une fonction déductive. En **1827**, R. Brown a examiné les particulier de Pollen, où le mouvement est irrégulier et incessant, et suspension dans l'eau appelé (mouvement brownien). En 1900 L. Bachelier a instauré la loi qui gouverne la position d'une particule, cette est la solution essentielle de l'équation de chaleur. En 1905, A. Einchtein voulait tester la théorie sinétique moléculaire de la chaleur dans les liquides.

S'a mené a une formule où a patir d'elle permettant au **MB** de calcules le nombre d'avogadro. Jean Perrin a fait une observation consernant la réalité des atomes qu'on inspiré Norber Weiner que se propose batir un modèle où lequel, les trajectoire sont continues alors, il a fait la définition de le but mathématique de ce phénomène en 1923, il a nommé (la fonction aléatoire fondamentale).

On a aussi "mouvement Brownien" qui a était nommé par Paul-Lévy c'est le processus de Weiner. Parmi les travaux liés au **MB** le travail dans langevin (en physique) et par suit Kiyocht It et Stratonovitch, notons que le mathématicien K. It a démontré sa célèbre formule dans les années 1940. Depuit ces années, des études approfondies des phénomènes aléatoires sont réalisées, elles ont permis des progrés dans le domaine de calcul stochastique et ses applications.

2.1 Equations différentielles stochastique

L'objectif des équations différentielles stochastiques est d'étudier l'évolution d'un système physique troublé par bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle courante de la forme.

$$dy_t = b(y_t)dt,$$

On ajoute de neveau pour exprimer ce bruit et déterminer sa puissance, un terme qui sera de la forme σdB_t où $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un **MB** et σ une constante, on obtient une **EDS** de la forme.

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma dB_t.$$

On généralise cette équation en permettant à σ d'appartenir de l'état de y à l'instant t :

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dB_t.$$

On peut encore généraliser cette équation en permettant à b et σ d'appartenir aussi du temps t pour avoir une **EDS** de la forme.

$$dy_t = b(t, y_t)dt + \sigma(t, y_t)dB_t.$$

Cela mène à la déffnition suivante. On note par $(M)_{d\times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $d\times n$ à coeffcients réels.

Définition 2.1 *[4] Soit T un nombre réel strictement positif. On considère deux fonctions $b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ et $\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^{n\times d}-$mesurable. On se donne aussi une* ***v.a*** *x qui est de carée integrable et indépendante de* ***MB.*** *Nous essayons de résoudre une équation défférentielle stochastique (en abrégé* ***EDS****).*

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t,X_t\right)dt + \sigma\left(t,X_t\right)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Définition 2.2 *[4] Une solution forte de l'****EDS*** (2.1) *est X un processus continue tel que :*

- *X_t est mesurable et adapté à la filtration $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$.*
- *$\int_0^t\left(\left|b\left(r,X_r\right)\right| + \left|\sigma\left(r,X_r\right)\right|^2\right)dr<\infty,\quad \forall t\in[0,T],\quad \mathbb{P}-p.s.$*
- *$X_t = x+\int_0^t b\left(r,X_r\right)dr+\int_0^t\sigma\left(r,X_r\right)dB_r,\quad \forall t\in[0,T],\quad \mathbb{P}-p.s.$*

2.1.1 Existence et unicité de solution

Théoréme 2.1 *[4] On suppose que les fonctions b et σ satisfont les deux conditions suivantes il existe un constant k telle que pour tout $t\in[0,T]$, x, y dans $\mathbb{R}^n$.*

- *Condition de Lipshitz en espace uniforme en temps.*

$$\left|b\left(t,x\right)-b\left(t,y\right)\right| + \left\|\sigma\left(t,x\right)-\sigma\left(t,y\right)\right\|\leq k\left|x-y\right|.$$

- *Condition de croissance linéaire :*

$$\left|b\left(t,x\right)\right| - \left\|\sigma\left(t,x\right)\right\|\leq k\left(1+\left|x\right|\right).$$

- *Pour tout $x\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T]$*

$$\mathbb{E}\left(\left|x\right|^2\right)<\infty.$$

*Alors pour tout $t>0$, l'****EDS*** (2.1) *admet une unique solution dans l'intervalle $[0,t]$.*

Proof. [4] Consiste à utiliser la méthode **itérative de Picard**. Une démonstration s'appuyant sur un argument de **point fixe** est également possible. Pour $X \in \mathcal{S}^2$, posons pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Psi(X)_t = x + \int_0^t b(r, X_r)\,dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)\,dB_r.$$

Le processus Ψ est bien définie et est continu si $X \in \mathcal{S}_c^2$.

Soient X et Y deux élément de $\mathcal{S}_c^2$, comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$|\Psi(X)_t - \Psi(Y)_t|^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (b(r, X_r) - \int_0^t b(r, Y_r))dr \right|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (\sigma(r, X_r) - \int_0^t \sigma(r, Y_r))dB_r \right|^2.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(X)_t - \Psi(Y)_t|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (b(r, X_r) - \int_0^t b(r, Y_r))dr \right|^2 + \sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (\sigma(r, X_r) - \int_0^t \sigma(r, Y_r))dB_r \right|^2\right]. \end{aligned}$$

En utilise les proprieté d'intégrale stochastique alors on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(X)_t - \Psi(Y)_t|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (b(r, X_r) - \int_0^t b(r, Y_r))dr \right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \left| \int_0^t (\sigma(r, X_r) - \int_0^t \sigma(r, Y_r))dB_r \right|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\left| \int_0^u (b(r, X_r) - \int_0^u b(r, Y_r))dr \right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[4\left(\left| \int_0^u (\sigma(r, X_r) - \int_0^u \sigma(r, Y_r))dr \right|\right)^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\left| \int_0^u (b(r, X_r) - \int_0^u b(r, Y_r))dr \right|^2\right] + 8\mathbb{E}\left[\left\| \int_0^u (\sigma(r, X_r) - \int_0^u \sigma(r, Y_r))dr \right\|^2\right]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Psi(X)_t - \Psi(Y)_t|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}T\left[\left| \int_0^u (b(r, X_r) - \int_0^u b(r, Y_r))dr \right|^2\right] + 8\mathbb{E}\left[\left\| \int_0^u (\sigma(r, X_r) - \int_0^u \sigma(r, Y_r))dr \right\|^2\right]. \end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X\right)_t-\Psi\left(Y\right)_t\right|^2\right]&\leq 2\mathbb{E}T\left[\int_0^u K^2\left|X_r-Y_r\right|dr\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\left|X_r-Y_r\right|dr\right]\\&\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^u\left|X_r-Y_r\right|dr\right].\end{aligned}\tag{2.2}$$

De plus, notant 0 le processus nul on a comme $(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$,

$$\left|\Psi\left(0\right)_t\right|^2\leq 3x^2+3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b\left(r,0\right)dr\right|^2+3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma\left(r,0\right)dB_r\right|^2.$$

On utilise l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Psi\left(0\right)_t\right|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[x\right]^2+K^2T^2+4K^2T\right).\tag{2.3}$$

Les estimations (2.2) et (2.3) montrent alors que le processus $\Psi\left(X\right)\in\mathcal{S}_c^2$, dès que $X\in\mathcal{S}_c^2$. On définit alors par récurrence une suite de processus de $\mathcal{S}_c^2$ en posant

$$X_0=0,\text{et }X^{n+1}=\Psi(X^n),\text{pour }n\geq 0.$$

On obtient très facilement à l'aide de la formule (2.2), pour tout $n\geq 0$, on pose $C=2K^2(T+4)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right].$$

Ce qui signifie que, avec D le majorant de l'inégalité (2.3)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière de l'inegalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^1}\leq\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{D}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}<\infty.$$

Alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \sup\limits_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s$ et donc, $\mathbb{P}-p.s$ X^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X continue. De plus, $X \in \mathcal{S}_c^2$. On vérifier que X est la solution de l'**EDS** (2.1) en passant à la limite dans la définition $X^{n+1} = \Psi(X^n)$.

Si X et Y sont deux solution de l'**EDS** (2.1) dans $\mathcal{S}_c^2$ alors $X = \Psi(X)$ et $Y = \Psi(Y)$. L'inégalité (2.2) donne alors, pour tout $u \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |X_t - Y_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq r} |X_t - Y_t|^2\right] dr,$$

et le lemme de Gronwall montre que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |X_t - Y_t|^2\right] = 0.$$

Ce qui prouve que X et Y sont indistinguables.

Pour montrer l'unicité des solutions de (2.1) au sens de la définition 2, nous devons montrer que toute solution appartient à $\mathcal{S}_c^2$ c'est à dire, comme toute solution est continue par définition, appartient à $\mathcal{S}^2$.

Pour cela, considérons le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \in [0,T], \quad |X_t| > n\}$ avec la convention $\inf\{\varnothing\} = +\infty$. Si $u \in [0,t]$, on a

$$|X_{u\wedge\tau_n}|^2 \leq 3\left(|x|^2 + \sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} b\left(r, X_r\right) dr\right|^2 + \sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma\left(r, X_r\right) dB_r\right|^2\right).$$

Il vient alors,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} |b(r,X_r)|\, dr\right)^2\right] + 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma(r,X_r)\|^2\, dr\right)\right]\right),$$

et utilisant la croissance linéaire de b et σ on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 2K^2T^2 + 8K^2T + \left(2K^2T + 8K^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq r\wedge\tau} |X_u|^2\right]\right).$$

On obtient, en appliquant le lemme de Gronwall, à la fonction $t \to \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right]$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 2K^2T^2 + 8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T + 8K^2\right)T\right\},$$

et le lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 2K^2T^2 + 8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T + 8K^2\right)T\right\}.$$

Ceci implique l'unicité des solutions de l'**EDS** (2.1). ■

2.2 Equation defférentielle stochastique rétrograde

2.2.1 EDSR linéaire

Définition 2.3 *[4] Dans ce partie nous étudions le cas particulier des **EDSR** linéaire pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.*

On suppose que $k = 1$ ce qui implique que $Y \in \mathbb{R}$ et Z une matrice de taille $1 \times d$ (vecteur ligne de dimension d).

Proposition 2.1 *[4] Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\epsilon[0,T]}$ deux processus bornés à valeurs dans $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\right)$, progressiveme mesurable et borné et soit $\left\{(c_t)_{t\epsilon[0,T]}\right\} \in M^2(\mathbb{R})$ et ξ une **v.a**, $\mathcal{F}_t$-mesurable, de carré integrable, à valeurs réelles.*

L'**EDSR** linéaire

$$\begin{cases} dY_t = \left(a_rY_r + b_rZ_r + c_r\right)dt - Z_tdB_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Admet une unique solution :

$$\forall t \in [0,T], \quad Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}(\ \xi\Gamma_T + \int_t^T c_r\Gamma_r dr \bigg| \mathcal{F}_t),$$

avec, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = \exp\left\{\int_0^T b_r.dB_r - \frac{1}{2}\int_0^T |b_r|^2 \, dr + \int_0^T a_r dr\right\}.$$

Proof. [4] Il faut remarquer d'abord que le processus Γ vérifie :

$$\begin{cases} d\Gamma_t = \Gamma_t \left(a_t dt + b_t.dB_t\right), \\ \Gamma_0 = 1. \end{cases}$$

D'autre part, comme b est borné, l'inégalité de Doob et Γ appartient à $\mathcal{S}^2$. De plus, les hypothèses de cette proposition assurent l'existence et l'unicité d'une sollution (Y, Z) à l'**EDSR** linéaire. Il suffit de poser $f(t, y, z) = a_t y + b_t z + c_t$ et vérifier que (**A**) est satisfaite Y appartient à $\mathcal{S}^2$.

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\left\langle \Gamma, Y\right\rangle_t, \\ &= -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + \Gamma_t Y_t b_t.dB_t. \end{aligned}$$

Ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $c \in M^2$ et Γ, Y sont dans $\mathcal{S}^2$.

Par suit,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = \mathbb{E}\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Ce qui donne la formule annoncée. ■

Remarque 2.1 *Notons que si $\xi \geq 0$ et si $c_t \geq 0$ alors la solution de l'**EDSR** linéaire vérifie $Y_t \geq 0$.*

2.2.2 EDSR dans le cas non linéaire

Théoréme 2.2 ***Théorème de comparaison*** *: [4, page 23] Cette théorème permet de comparer les sollution de deux **EDSR** dans $\mathbb{R}$ dès que l'on sait comparer les condition terminales* *et les générateurs.*

Supposons que $k = 1$ et que $(\xi, f), (\xi', f')$ vérifient l'hypotèse **(A)**. On note (Y, Z) et (Y', Z') les sollution des **EDSR** correspendantes. On suppose également que $\xi \leq \xi'$ $\mathbb{P} - p.s$ et $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p$ (m mesure de Lebesgue). Alors $Y_t \leq Y'_t$, $0 \leq t \leq T$ $\mathbb{P} - p.s.$

Si de plus,$Y_0 = Y'_0$, alors $Y_t = Y'_t$, $0 \leq t \leq T$ $\mathbb{P} - p.s.$et $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$ En particulier si $P(\xi \leq \xi') > 0$ où $f(t, Y_t, Z_t) < f'(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de $m \otimes \mathbb{P}$ mesure strictement positive,alors $Y_0 < Y'_0$.

EDSR dans le cas non linéaire

[4] On consédère sur un espace de probabilités filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ une **v.a** ξ-mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), \quad \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

En l'imposont à tout t, Y_t ne dépend pas du futur après t, c'est à dire que le processus Y est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple $f \equiv 0$. Un candidat naturel est $Y_T = \xi$, ξ ne convient pas sinon déterministe. La meilleure approximation comme dans $\mathbb{L}^2$-adapté est le martingale $Y_t = E(\xi | \mathcal{F}_t)$. Si on utilise le filtrage naturel du **MB**, le théorème de représentation des martingales Browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E(\xi | \mathcal{F}_t) = E(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s.$$

Ce qui implique $\quad Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s$,

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dB_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

On voit donc que dans le cas le plus simple une seconde inconnue le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté. Par conséquent, en tant que seconde variable apparaît, pour un maximumn de généralité nous permettons à f de dépendre du processus Z, ainsi l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = -f(t, Y_t, Z_t) - Z_t dB_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Où encore en utilisant la formulation intégrale rétrograde faisant apparatre la condition terminale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.4}$$

La fonction f s'appelle le générateur de **EDSR** et ξ la condition terminale, l'inconnu d'une telle équation est le couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$.

Définition 2.4 *[4] Une solution de l'**EDSR** est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1) Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement.

2) $\int_0^T \left\{|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\right\} dr < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s.$

3) $Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mathbb{P} - p.s.$

2.2.3 Le cas Lipschitz

Le résultat de Pardoux-Peng [16]

C'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les **EDSR** dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

(A) il existe $\lambda > 0$ telle que $\mathbb{P} - p.s.$

– Condition de Lipschitz en (y, z) :

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda(|y - y'| + \|z - z'\|).$$

– Condition d'integrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\varepsilon|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|\right] < \infty.$$

Commençons par le cas simple où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{\ 0\leq t\leq T}$ dans $M^2(R^k)$ et on veut trouver une solution de l'**EDSR**.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r)\, dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.5}$$

Lemme 2.1 *Soient $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t)$ et $f(r) \in M^2(R^k)$. L'équation différentielle stochastique rétrograde (2.5) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Proof. **L'existence** : Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $z \in M^2$ si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement

$$Y_t = E(\xi + \int_t^T \mathcal{F}_r dr \Big| \mathcal{F}_t),$$

Y est donc dé ni à l'aide de cette formule et il reste à trouver Z. $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ est de carré intégrable et $(\int_0^T \mathcal{F}_r dr)_{t\in[0,T]}$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, car il est progressif.

$$Y_t = E(\xi + \int_0^T \mathcal{F}_r dr \Big| \mathcal{F}_t) - \int_0^t \mathcal{F}_r dr = M_t - \int_0^t \mathcal{F}_r dr.$$

M_t est une martingale de carré integrable. D'après la théorème de représentation des martingale il existe un processus prévisible Z carré integrable $(Z \in M^2)$ telle que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t \mathcal{F}_r dr = E(M_0) + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t \mathcal{F}_r dr,$$

(Y,Z) ainsi construit est une solution de l'**EDSR** puisque comme $Y_T = \xi$.

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t \mathcal{F}_r dr - (M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T \mathcal{F}_r dr), \\ &= \int_t^T \mathcal{F}_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, \end{aligned}$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T \mathcal{F}_r dr - \int_t^T Z_r dB_r.$$

<u>L'unicité</u> : Supposons que (Y, Z) et (Y', Z') sont deux solutions. Soient $\widehat{Y}_. = Y_. - Y'_.$, $\widehat{Z}_. = Z_. - Z'_.$ alors :

$$\widehat{Y}_t = \int_t^T \widehat{Z}_. dB_r, \qquad t \in [0, T].$$

Nous allons prouvés que $\widehat{Y}_. = \widehat{Z}_. = 0 \quad dt \times d\,\mathbb{P} - p.s.$

En effet, premièrement écrivons :

$$\widehat{Y}_. = \int_0^T \widehat{Z}_. dB_r - \widehat{Y}_. = \int_0^t \widehat{Z}_. dB_r, \qquad t \in [0, T].$$

On applique l'inégalité martingale de Doob, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right].$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\widehat{Y}_t\right|^2\right] &\leq 4\mathbb{E}\left[|Y_T|^2\right]. \\ &\leq 2\int_0^T \widehat{Z}_r dr \leq \infty.\end{aligned}$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $f(Y_t) = \left|\widehat{Y}_t\right|$ de t à T et on note que : $\widehat{Y}_T = \xi - \xi = 0$.

On a :

$$0 = \left|\widehat{Y}_t\right|^2 + 2\int_t^T \widehat{Y}_r d\widehat{Y}_r + \int_0^T \left|\widehat{Z}_r\right|^2 dr.$$

Où

$$\widehat{Y}_r d\widehat{Y}_r = -\widehat{Y}_r \widehat{Z}_r dB_r.$$

Donc

$$\left|\widehat{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left|\widehat{Z}_r\right|^2 dr = 2\int_t^T \widehat{Y}_r \widehat{Z}_r dB_r.$$

Soit $N_t = \int_t^T \widehat{Y}_r \widehat{Z}_r dB_r$ alors $\forall t \geq 0$ le processus avariation quadratique ;

$$\langle N \rangle_t = \int_0^t \left| \widehat{Y}_r \widehat{Z}_r \right|^2 dr, \qquad t \in [0, T].$$

On utilisant l'estimation (2.2) et linégalité de Cauchy Schwarz :

$$|\langle M, N \rangle_t| \leq \sqrt{\langle M \rangle_t} \sqrt{\langle N \rangle_t}, \qquad t \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\langle N \rangle_t| = |\langle N, N \rangle_t| &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left| \widehat{Y}_r \widehat{Z}_r \right|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\widehat{Y}_t\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widehat{Z}_r\right|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}} \leq \infty. \end{aligned}$$

■

Théoréme 2.3 ***Pardoux-Peng 1990*** *: [16] Sous l'hypothèse (**A**), l'**EDSR** (2.4) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Proof. [4] Pour montrer ce théorème on utilise un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 avec un application ω de B^2 dans lui-méme de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de **EDSR** (2.4) si et seulement si c'est une point fixé de ω on a $(Y, Z) = \omega(u, v)$ pour tous (u, v) élément de B^2 comme étant la solution de **EDSR**.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, u_r, v_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

On remarque cette **EDSR** possédé une unique solution qui est dans B^2, par conséquence $\mathcal{F}_r = f(r, u_r, v_r)$ ce processus appartient à M^2 puis que, f étant Lipschitzienne.

$$|\mathcal{F}_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda |u_r| + \lambda \|v_r\|.$$

Ces trois derniers processus sont carré intégrable alors (Y, Z) est une solution unique telle que

$Z \in M^2$, $(Y,Z) \in B^2$ l'intégralité de Z est obtenue par construction et d'après la prposition le processus Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$, (u,v) et (u',v') sont deux élément de B^2 et $(Y,Z) = \omega(u,v)$, $(Y',Z') = \omega(u',v')$, notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$ il est claire que $y_t = 0$ et

$$dy_t = -\{f(t,u_t,v_t) - f(t,u'_t,v'_t)\}dt + z_r dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$

$$d\left(e^{\alpha t}|y_t|^2\right) = \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t}y_t.\left\{f(t,u_t,v_t) - f(t,u'_t,v'_t)\right\}dt + 2e^{\alpha t}y_t.z_t dB_t + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr = & \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2y_r.\{\{f(t,u_t,v_t) - f(t,u'_t,v'_t)\}dr \\ & - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r, \end{aligned}$$

et comme f est Lipschitzienne il vient notant U,V pour $u-u'$ et $v-v'$ respectivement

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dr \leq & \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha|y_r|^2 + 2\lambda|y_r||U_r| + 2\lambda|y_r|\|V_r\|\right)dr \\ & - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$ donc

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_t\|^2 dr \leq & \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}\right)|y_t|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dB_r \\ & + \varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2\right)dr, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$ et trouvez

$$R_\varepsilon = \varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2\right)dr.$$

$$\forall t \in [0,T], \quad e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|z_t\right\|^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r. \tag{2.6}$$

D'après (2.6) la martingale locale $\left\{\int_0^t e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque $(Y,Y') \in \mathcal{S}_c^2$ et $(Z,Z') \in M^2$. On obtient facilement $t = 0$.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.7}$$

Revenant à l'inégalité (2.6) l'intégralité **BDG** fournit avec C universelle.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(e^{\alpha t}\left|y_r\right|^2\left\|z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right], \\ &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}\left|y_t\right|\left(\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}$$

et puis,comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq E\left[R_\epsilon\right] + \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \frac{C^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right],$$

Prenant en considération l'inégalité (2.7).

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right] = (3 + C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right].$$

Par suite

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right] \leq \varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|V_r\right\|^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3 + C^2\right)(1 \vee T) = \frac{1}{2}$, de sorte que l'application ω est alors une contraction stricte de β^2 dans lui-mème si on le munit de la norme.

$$\left\|(u,v)\right\|_\alpha = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\left\|v_r\right\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette norme est équivalente a la norme usuelle pour $\alpha = 0$.

Finalement, l'application $\omega(t)$ possédé unique point fixe, ce que assure l'existence et l'unicité d'un solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde dans $\mathbf{B}^2$ notons que dans le cas ou ε et f sont déterministes alors Z et nul et Y est la solution de l'équation différentielle. ■

Le rôle de Z

[4] Nous allons voir que le **rôle de** Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dB_r$ est de **rendre le processus** Y **adapté.**

Proposition 2.2 *[4] Soit τ un temps d'arrêt majoré par T et (Y, Z) la sollution de l'**EDSR** (2.4). On suppose l'hypothèse (**A**) que ξ est $\mathcal{F}_t$-mesurable que $f(t, y, z) = 0$ dès que, $t \geq \tau$ alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$.*

Proof. [4] Soit $t \in [0, T]$ on a $\mathbb{P} - p.s$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r.$$

Si $t = \tau$ et $f(r, Y_r, Z_r) = 0$ soient à présent $t \geq \tau$ alors

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_\tau^T Z_r dB_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r.$$

On a alors

$$Y_\tau = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_\tau) = \xi.$$

Et par suit

$$\int_\tau^T Z_r dB_r = 0.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_r dB_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr\right] = 0.$$

Et $Z_r 1 = 0$. Si $t \geq \tau$, $Y_t = Y_\tau$ puisque par l'hypothèse

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_\tau^t Z_r dB_r = Y_t.$$

De même si ξ et f sont déterministes, alors la même démonstration preuve que $Z = 0$ et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0), \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

■

2.3 Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchie dans le cas Lipschitz

Définition 2.5 *[13, page18] Une solution d'une **EDSR** réfléchie est un triplet* (Y, Z, K)

– Avec $Y \in S^2$ et $Z \in M^2$ dans les mêmes espaces que pour une **EDSR** classique.

– Et K un processus continu croissant partant de 0.

– Vérifiant une équation

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt - (K_T - K_t) + Z_t dB_t, & \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

– Et une contrainte.

$$Y_t \geq S_t \text{ et } \int_t^T (Y_s - S_s)\, dK_s = 0.$$

2.3.1 Existence et l'unicité de solution pour EDSRR par la méthode de pénalization

[9] Dans cette section on suppose que le constant c change de un ligne à un autre.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\{(Y_t^n, Z_t^n), \quad 0 \leq t \leq T\}$ est l'unique paire de processus $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ satisfant

$$\mathbb{E} \int_0^T |Z_t^n|^2 \, dt < \infty,$$

et d'aprés le théorème de Pardoux-Peng 1990 [16].

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds + n \int_t^T (Y_s^n - S_s)^- \, ds - \int_t^T Z_s^n dB_s, \tag{2.8}$$

avec ξ et f satisfait les hypothèse suivante :

H1) $\xi \in \mathbb{L}^2$.

H2) f est une fonction telque $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\forall (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, f(\cdot, y, z) \in \mathbb{H}^2$.

H3) Pour certains $K > 0$ et tout $y, \, y' \in \mathbb{R}, \, z, \, z' \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq K(|y - y'| + |z - z'|), \ p.s.$$

H4) $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$, qui est un processus continu à valeur réelle progressivement mesurable satisfaisant.$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left(S_l^+\right)^2\right) < \infty$.

On définit

$$K_t^n = n \int_0^T (Y_s^n - S_s)^- \, ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{avec } X^- = \max(0, -X).$$

D'aprés la théorie **EDSR** sans barrière [16] on obtient $\forall n$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n|^2\right) < \infty.$$

Maintenant on donne une estimation a priorie de la suite (Y^n, Z^n, K^n) : D'aprés la formule d'Itô on obtient

$$f(Y_t) = (Y_t)^2 = \xi^2 + 2\int_t^T Y_s dY_s + \int_t^T d\langle Y, Y\rangle_s.$$

$$(Y_t^n)^2 = \xi^2+2\int_t^T Y_s^n\left(f\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)\right)ds+2n\int_t^T Y_s^n\left(Y_s^n-S_s\right)^- ds+2\int_t^T Y_s^n Z_s^n dB_s-\int_t^T \left|Z_s^n\right|^2 ds.$$

Par passage à l'espérence mathémathéque, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|Y_t^n\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T \left|Z_s^n\right|^2 ds\\
&=\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+2\mathbb{E}\int_t^T f(s,Y_s^n,Z_s^n)Y_s^n ds+2\mathbb{E}\int_t^T Y_s^n dK_s^n,\\
&\leq \mathbb{E}\left|\xi\right|^2+2\mathbb{E}\int_t^T \left(f(s,0,0)+K\left|Y_s^n\right|+K\left|Z_s^n\right|\right)\left|Y_s^n\right| ds+2\mathbb{E}\int_t^T S_s dK_s^n,\\
&\leq c(1+\mathbb{E}\int_t^T \left|Y_s^n\right|^2 ds)+\frac{1}{3}\mathbb{E}\int_t^T \left|Z_s^n\right|^2 ds+\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right]+\alpha\mathbb{E}\left[(K_T^n-K_t^n)^2\right],
\end{aligned}$$

d'aprés l'équation (2.8), on trouver :

$$K_T^n-K_t^n = Y_t^n-\xi-\int_t^T f(s,Y_s^n,Z_s^n)ds+\int_t^T Z_s^n dB_s.$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[(K_T^n-K_t^n)^2\right]\leq c\left\{\mathbb{E}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\xi^2\right)+1+\int_t^T \left(\left|Y_s^n\right|^2+\left|Z_s^n\right|^2\right)ds\right\}.$$

On choisie $\alpha=\frac{1}{3c}$, on obtient

$$\frac{2}{3}\mathbb{E}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right)+\frac{1}{3}\mathbb{E}\int_t^T \left|Z_s^n\right|^2 ds\leq c\left(1+\mathbb{E}\int_t^T \left|Y_s^n\right|^2 ds\right).$$

D'aprés du lemme de Gronwall on obtient

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\int_0^T \left|Z_t^n\right|^2 dt+\mathbb{E}\left[(K_T^n)^2\right]\leq c,\quad n\in\mathbb{N}.$$

En utilisant un autre fois l'équation (2.8) et l'inégalité **B-D-G,** on déduire que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n\right|^2+\int_0^T \left|Z_t^n\right|^2 dt+(K_T^n)^2\right)\leq c,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.9}$$

On note que si on définit

$$f_n(t,y,z) = f(t,y,z) + n(y - S_t)^-,$$

$$f_n(t,y,z) \leq f_{n+1}(t,y,z),$$

il résulte de la **Théorème 2.2** que $Y_t^n \leq Y_t^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T$, $p.s.$ Alors

$$Y_t^n \uparrow Y_t, \qquad 0 \leq t \leq T, p.s.$$

et de (2.9) et lemme de Fatou on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2\right) \leq c.$$

Par utilisant de Théoème de convergence dominée on obtient que :

$$\mathbb{E}\int_0^T (Y_t - Y_t^n)^2\, dt \to 0, \quad p.s\ n \to \infty. \tag{2.10}$$

Maintenant par la formule d'Itô appliqué sur le semimartingale $|Y_t^n - Y_t^p|^2$. $\forall n \geq p$

$$\begin{aligned}
&|Y_t^n - Y_t^p|^2 + \int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\, ds \\
&= 2\int_t^T [f(Y_s^n, Z_s^n) - f(Y_s^p, Z_s^p)](Y_s^n - Y_s^p)\, ds \\
&+ 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p)\, d(K_s^n - K_s^p) \\
&- 2\int_t^T (Y_s^n - Y_s^p)(Z_s^n - Z_s^p)\, dB_s.
\end{aligned}$$

Par passage à l'espérence mathémathéque, on obtient

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)+E\int_t^T\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2 ds\\
&=2\mathbb{E}\int_t^T\left[f\left(Y_s^n,Z_s^n\right)-f\left(Y_s^p,Z_s^p\right)\right]\left(Y_s^n-Y_s^p\right)ds+2\mathbb{E}\int_t^T\left(Y_s^n-Y_s^p\right)d\left(K_s^n-K_s^p\right),\\
&\leq 2K\mathbb{E}\int_t^T\left(\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2+\left|Y_s^n-Y_s^p\right|\times\left|Z_s^n-Z_s^p\right|\right)ds+2\mathbb{E}\int_t^T\left(Y_s^n-S_s\right)^- dK_s^p\\
&+2\mathbb{E}\int_t^T\left(Y_s^p-S_s\right)^- dK_s^n.
\end{aligned}
$$

Par laquelle on déduit l'existence d'un constant c tel que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2 ds \leq c\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2 ds+2\mathbb{E}\int_t^T\left(Y_s^n-S_s\right)^- dK_s^p\\
+2\mathbb{E}\int_t^T\left(Y_s^p-S_s\right)^- dK_s^n.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Admenttons un instant la lemme suivante.

Lemme 2.2 *[9]*

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\left(Y_t^n-S_t\right)^-\right|^2\right)\to 0,\qquad p.s\ n\to\infty.
$$

Maintenant on peut conclure effectivement de l'estimation (2.9) et ***Lemme 2.2*** *que*

$$
\mathbb{E}\int_0^T\left(Y_t^n-S_t\right)^- dK_t^p+\mathbb{E}\int_t^T\left(Y_t^p-S_t\right)^- dK_t^n\to 0,\quad p.s\ n,p\to\infty,
\tag{2.12}
$$

donc de (2.10) et (2.11) :

$$
\mathbb{E}\int_0^T\left(\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2+\left|Z_t^n-Z_t^p\right|^2\right)dt\to 0,\quad p.s\ n,p\to\infty.
\tag{2.13}
$$

Cependant,

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2 \leq 2\int_t^T\left|f\left(Y_s^n,Z_s^n\right)-f\left(Y_s^p,Z_s^p\right)\right|\times\left(Y_s^n-Y_s^p\right)ds+2\int_0^T\left(Y_s^n-S_s\right)^- dK_s^p\\
-2\int_0^T\left(Y_s^p-S_s\right)^- dK_s^n+2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T\left(Y_s^n-Y_s^p\right)\left(Z_s^n-Z_s^p\right)dB_s\right|,
\end{aligned}
$$

et de l'inégalité ***BDG***

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right) &\leq c\mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_t^n - Y_t^p|^2 + |Z_t^n - Z_t^p|^2\right) ds \\ &+ 2\mathbb{E}\int_0^T (Y_t^n - S_t)^- \, dK_t^p + \mathbb{E}\int_0^T (Y_t^p - S_t)^- \, dK_t^n \\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right) + c\mathbb{E}\int_0^T |Z_t^n - Z_t^p|^2 \, ds.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Alors $\mathbb{E}\left(\sup_t |Y_t^n - Y_t^p|^2\right) \to 0$, *p.s* n *et* $p \to \infty$, *et le résultat de (2.8),*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t^p|^2\right) \to 0 \quad p.s\ n, p \to \infty.$$

Par conséuent l'existence un pair (Z, K) *de processus progressivement mesurable avec les valeurs dans* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ *tel que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_t - Z_t^n|^2 \, dt + \sup_{0\leq t\leq T}|K_t - K_t^n|^2\right) \to 0.$$

p.s $n \to \infty$, *et* $Z \in \mathbb{H}^2$, *en particulier* $\mathbb{E}\int_0^T |Z_t|^2 \, dt \prec \infty$. *Reste a vérifié* $\{K_t\}$ *est continue et croissante,* $K_0 = 0$ *et* $\int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t = 0$.

Clairement $\{K_t\}$ est croissant. Par ailleur, on a juste vu que (Y^n, K^n) tend vers (Y, K) uniformément dans t dans la probabilité. Alors la mesure dK^n tend vers dK en probabilité faible donc d'apés Saisho alors

$$\int_0^T (Y_t^n - S_t) \, dK_t^n \to \int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t,$$

en probabilité, *p.s* $n \to \infty$. On déduit par le même méthode est la **Lemme 2.2** que

$$\int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t \geq 0.$$

De l'autre part :

$$\int_0^T (Y_t^n - S_t) \, dK_t^n \leq 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0, \qquad p.s.$$

Et on prouve que (Y, Z, K) résout l'**EDSRR.** Finalement nous passons à la preuve.

Proof. [9] de **Lemme 2.2 :** Depuis $Y_t^n \geq Y_t^0$, on peut sans perte de généralité remplacer S_t par $S_t \cup Y_t^0$; qu'est, nous pouvons supposons que $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T} S_t^2\right) < \infty$ nous voulons d'abord comparer $p.s.$ Y_t et S_t pour tout $t \in [0, T]$, alors que nous ne savons pas encore que Y est $p.s$ continu. Du théorème de comparaison pour **EDSR,** nous avons cette $p.s$ $Y_t^n \geq \widetilde{Y_t^n}$, $0 \leq t \leq T$, $n \in \mathbb{N}$, où $\left\{\left(\widetilde{Y_t^n}, \widetilde{Z_t^n}\right),\ 0 \leq t \leq T\right\}$ est l'unique solution de l'**EDSR**

$$\widetilde{Y_t^n} = \xi + \int_t^T f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds + n \int_t^T \left(S_s - \widetilde{Y_s^n}\right) ds - \int_t^T \widetilde{Z_s^n} dB_s.$$

Soit v est un temps d'arrêt tel que $0 \leq v \leq T$. Alors

$$\widetilde{Y_v^n} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_v}\left[e^{-n(T-v)}\xi + \int_v^T e^{-n(s-v)} f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds + n \int_v^T e^{-n(s-v)} S_s ds\right].$$

Il est claire de montre que

$$e^{-n(T-v)}\xi + n \int_v^T e^{-n(s-v)} S_s ds \to \xi 1_{\{v=T\}} + S_v 1_{\{v \prec T\}},$$

$p.s$ et dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et l'expectation conditionelle converge aussi.en $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Par ailleurs,

$$\left|\int_v^T e^{-n(s-v)} f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\int_0^T f^2\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

alors $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_v} \int_v^T e^{-n(s-v)} f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds \to 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, $p.s$ $n \to \infty$.

Par conséquence $\widetilde{Y_v^n} \to \xi 1_{\{v=T\}} + S_v 1_{\{v \prec T\}}$ dans la moyenne quadratique et $Y_v \geq S_v$ $p.s.$ Depuis ceci et la théorème de section (Voir Dallacherie et Meyer [9]), il s'ensuite que

$$Y_t \geq S_t, \qquad 0 \leq t \leq T,\ p.s.$$

Ainsi $\left(Y_t^n - S_t\right)^- \downarrow 0$, $0 \leq t \leq T$, $p.s$, et par la théorème de Donis la convergence est uniform dans t. Le résultat est finalement suivi d'une convergence dominée, puisque

$$(Y_t^n - S_t)^- \leq \left(S_t - Y_t^0\right)^+.$$

■

Théoréme 2.4 *[9] Sous les hypothése $(H1) - (H4)$ on a que le systéme suivante*

v) $Z \in \mathbb{H}^2$, en particulier $\mathbb{E} \int_0^T |Z_t|^2 \, dt < \infty$;

v') $Y \in \mathcal{S}^2$ et $K_T \in \mathbb{L}^2$;

vi) $\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt - (K_T - K_t) + Z_t dB_t, & \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases}$

vii) $Y_t \geq S_t, \qquad 0 \leq t \leq T$;

viii) $\{K_t\}$ est continue et croissante, $K_0 = 0$ et $\int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t = 0$.

admet une solution unique (Y, Z, K).

Proof. [9] On note $\mathcal{S}$ l'espace progressivement mesurable $\{(Y_t, Z_t) \, ; 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ satisfont **v)** et **vii).** Nous définissons l'application Φ de $\mathcal{S}$ dans lui même comme suit. Donné $(U, V) \in \Phi$, $(Y, Z) = \Phi(U, V)$ est unique l'élément de $\mathcal{S}$ telle que, si l'on définit le processus

$$K_t = Y_t - Y_0 - \int_0^t f(s, U_s, V_s) ds + \int_0^t Z_s dB_s, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

Alors le triple (Y, Z, K) résout le problème de rétrograde réfléchie associé à $f(s) = f(s, U_s, V_s)$. D'autres part, le paire (Y, Z) est l'unique solution du même problème de rétrograde réfléchie. Soit (U', V') un autre élément de $\mathcal{S}$, et de définir $(Y', Z') = \Phi(U', V')$

$$\overline{U} = U - U', \quad \overline{V} = V - V', \quad \overline{Y} = Y - Y', \quad \overline{Z} = Z - Z'.$$

On utilise meme arguments dans la preuve pour toute $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}
& e^{\beta t}\mathbb{E}\left(\overline{Y}_t^2\right) + \mathbb{E}\int_t^T e^{\beta s}\left[\beta\overline{Y}_s^2 + \left|\overline{Z}_s\right|^2\right] ds, \\
& = 2\mathbb{E}\int_t^T e^{\beta s}\overline{Y}_s\left[f(s,U_s,V_s) - f(s,U'_s,V'_s)\right] ds, \\
& \leq 4K^2\mathbb{E}\int_t^T e^{\beta s}\overline{Y}_s^2 ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T e^{\beta s}\left[\overline{U}_s^2 + \left|\overline{V}_s\right|^2\right] ds.
\end{aligned}$$

Donc si on choisit $\beta = 4K^2 + 1$, on déduit

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta t}\left[\overline{Y}_t^2 + \left|\overline{Z}_t\right|^2\right] dt \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta t}\left[\overline{U}_t^2 + \left|\overline{V}_t\right|^2\right] dt.$$

Par conséquent, l'application Φ est une contraction stricte sur $\mathcal{S}$ équipé de la norme

$$\|(Y,Z)\|_\beta = \left(\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta t}\left(Y_t^2 + |Z_t|^2\right) dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et il a un point fixe unique, qui est la solution unique de l'**EDSRR**. ■

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchie avec un générateur continue

3.1 Théorème de comparaison

Dans cette section , nous considérons que les équation différentielles stochastique rétrograde réfléchie (en abrégé **EDSRR)** unidimensionnel, c'est-dire que $k = 1$. On considère les deux **EDSRR** suivantes :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \forall 0 \leq t \leq T, \tag{3.1}$$

$$Y'_t = \xi' + \int_t^T f'(s, Y'_s, Z'_s)ds + K'_T - K'_t - \int_t^T Z'_s dB_s, \qquad \forall 0 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

où les coefficients des **EDSRR** (3.1) et (3.2) satisfaisons les conditions suivantes :
Supposond qu'il existe deux paires de processus (Y, Z) et (Y', Z') satisfaisons les **EDSRR**

(3.1) et (3.2), respectivement et supposons de plus que :

$$\begin{cases} f(s,y,z) \leq f'(s,y,z), \qquad p.s, \forall\,(t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ \xi \leq \xi', \qquad p.s. \end{cases}$$

Alors nous avons le théorème de comparaison suivant :

Théoréme 3.1 *[9] Soit (ξ, f, S) et (ξ', f', S') deux ensembles de données chacun satisfaisant à tout les hypothèses* ***(i), (ii), (iii)*** *et* ***(iv)*** *à l'exception du fait que la condition de Lipschitz* ***(iii)*** *pourrait être satisfaite par f où f' seulement, supposons en plus ce qui suit :*

i) $\xi \leq \xi', \quad p.s,$

ii) $f(t,y,z) \leq f'(t,y,z)dt \otimes d\mathbb{P}\ p.s, \quad \forall\,(y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,$

iii) $S_t \leq S'_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad p.s.$

Soit (Y,Z,K) la solution de **EDSRR** avec les donées (ξ, f, S) et (Y', Z', K') une solution de **EDSRR** avec les données (ξ', f', S') alors à

$$Y_t \leq Y'_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad p.s.$$

Proof. [9] En applique la formule d'Itô à $\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2$ et en prenant l'attente on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T 1_{\{Y_S > Y'_S\}} \left|Z_s - Z'_s\right|^2 ds \\ &\leq 2\mathbb{E}\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left[f\left(s, Y_s, Z_s\right) - f'\left(s, Y'_s, Z'_s\right)\right] ds \\ &+ 2\mathbb{E}\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left(dK_s - dK'_s\right). \end{aligned}$$

Puisque $\{Y_t > Y'_t\}$, $S'_t \geq S_t$, on a

$$\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left(dK_s - dK'_s\right) = -\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ dK'_s \leq 0.$$

On suppose maintenant que la condition Lipschitz dans l'énonce s'applique à f alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T 1_{\{Y_S > Y'_S\}} \left|Z_s - Z'_s\right|^2 ds \\
&\leq 2\mathbb{E}\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left[f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y'_s, Z'_s)\right] ds, \\
&\leq 2K\mathbb{E}\int_t^T (Y_s - Y'_s)^+ \left(|Y_s - Y'_s| + |Z_s - Z'_s|\right) ds, \\
&\leq \mathbb{E}\int_t^T 1_{\{Y_S > Y'_S\}} \left|Z_s - Z'_s\right|^2 ds + \overline{K}\mathbb{E}\int_t^T \left|(Y_s - Y'_s)^+\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}\left|(Y_t - Y'_t)^+\right|^2 \leq \overline{K}E\int_t^T \left|(Y_s - Y'_s)^+\right|^2 ds.$$

D'aprés, lemme de Gronwall

$$(Y_t - Y'_t)^+ = 0, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

On remarque que les notion de **EDSRR** et de **EDS** réfléchie classique sont similarité. Cependant, on donne une proposition et une preuve montrant la principale différence entre les deux notions : au moins en cas d'obstacle régulier, l'augmentation est absolement continue.

■

3.2 Equation différentielles stochastiques rétrogrades réfléchie dans le cas où générateur continue

3.2.1 Formulation

[15] Soit $\{B_t, \quad 0 \leq t \leq T\}$ un **MB** standard **d-**dimensionnel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .Soit $\{\mathcal{F}_t, \quad 0 \leq t \leq T\}$ la filtration naturelle de $\{B_t\}$, où $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls de $\mathcal{F}$ définissons :

- une valeur terminale $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$,

- un coefficient f qui est une fonction :

$$f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}.$$

telle que :

i) $\forall (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $(\omega, t) \to f(\omega, t, y, z)$ est $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable,

ii) Pour t, ω fixé: $f(\omega, t, ., .)$ est continue,

iii) Soit f une croissance linéaire c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall t, \omega, y, z$

$$|f(t, \omega, y, z)| \leq K(1 + |y| + |z|).$$

· Un obstacle $\{S_t, \quad 0 \leq t \leq T\}$, qui est un processus continu et $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable d'une valeur réelle satisfaisante

iv) $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \left(S_t^-\right)^2\right) < \infty.$

On suppose toujours que $S_T \leq \xi$ $p.s$, et on note par $\mathbb{P}$ la tribu prévisible (σ-algèbre). On considère $\mathbb{H}^2\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d, X \in \mathbb{P}, \|X\|^2 = \mathbb{E}\int_0^T |X_s|^2 ds < \infty\right\}$. Est notre résultat principal.

Théoréme 3.2 *[15] Soit (ξ, f, S) est un triple satisfaisant les hypothèses ci-dessus, en particulier **(i),(iv)** il existe $\{(Y_t, Z_t, K_t), \quad 0 \leq t \leq T\}$ un triple solution $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurable de **EDSRR** :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, \omega, Y_s, Z_s) ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s; \quad \forall 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

Tel que :

v) $\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^2 + |Z_t|^2\right) dt < \infty,$

vi) $Y_t \geq S_t, \quad 0 \leq t \leq T,$

vii) $\{K_t, \quad 0 \leq t \leq T\}$ est un processus croissant et continu, $K_0 = 0$

$$\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0. \tag{3.4}$$

3.2.2 Lemme d'approximation

Pour prouver **le théorème**, on a besoin d'un résultat important qui donne une approximation des fonctions continues par une suite des fonctions de Lipschitz (Voir [15]).

Lemme 3.1 *[15] Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue avec une croissance linéaire, c'est-à-dire qu'il existe un constant $K < \infty$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $|f(x)| \leq K(1 + |x|)$. Puis la suite de fonction $f_n(x) = \inf_{y \in \mathbb{Q}^p} \{f(y) + n|x - y|\}$ est bien défini pour $n \geq K$ et satisfait :*

a) Croissance linéaire : $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ f_n(x) \leq K(1 + |x|)$,

b) Monotonie : $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ f_n(x) \nearrow$,

c) Condition de Lipschitz : $\forall x, y \in \mathbb{R}^p, |f_n(x) - f_n(y)| \leq n|x - y|$,

d) Convergence forte : si $x_n \to x$ p.s $n \to \infty$, ensuite $f_n(x_n) \to f(x)$ $p.s$ $n \to \infty$.

Proof. a) Il est facile de vérifier que, grâce à l'hypothese de croissance linéaire de f alors f_n est bien défini pour $n \geq K$. Aussi il suit aussi que $f_n \leq f$ encore une fois, à partire de la condition de croissance linéaire de f, on obtient

$$\begin{aligned}
f_n(x) &\geq \inf_{y \in \mathbb{Q}^P} \{-K - K|y| + K|x - y|\} = \inf_{y \in \mathbb{Q}^P} \{-K - K|y| + K|x| + K|y|\} \\
&= \inf_{y \in \mathbb{Q}^P} \{-K + K|x|\} \\
&= \inf_{y \in \mathbb{Q}^P} \{-K(1 + |x|)\} \\
&= -K(1 + |x|).
\end{aligned}$$

b) Monotonie : soit $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{Q}^p$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On a

$$f(y) + n|x - y| \leq f(y) + (n + 1)|x - y|.$$

Donc

$$\inf_{y\in\mathbb{Q}^p}\{f(y)+n|x-y|\}\leq\inf_{y\in\mathbb{Q}^p}f(y)+(n+1)|x-y|.$$

C'est à dire

$$f_n(x)\leq f_{n+1}(x).$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^p$ fixé $f_n(x)$ est croissante.

Pour **c)**

$$\begin{aligned}
f_n(x) &\geq f(y_\epsilon)+n|x-y_\epsilon|-\epsilon\\
&\geq f(y_\epsilon)+n|y-y_\epsilon|+n|x-y_\epsilon|-n|y-y_\epsilon|-\epsilon\\
&\geq f(y_\epsilon)+n|y-y_\epsilon|+n|x|-n|y_\epsilon|-n|y|+n|y_\epsilon|-\epsilon\\
&\geq f(y_\epsilon)+n|y-y_\epsilon|-n|x-y|-\epsilon\\
&\geq f(y_\epsilon)+n|y|-n|y_\epsilon|-n|x|+n|y|\\
&\geq f_n(y)-n|x-y|-\epsilon.
\end{aligned}$$

A cet effet, en interchangeant les roles de x et y, et depuis ϵ est aribitraire on en déduit que

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leq n|x-y|.$$

Afin de prouver **d)** ; considérer $x_n\to x$ prondre pour chaque n, $y_n\in\mathbb{Q}^P$ alors

$$f_n(x)\geq f_n(x_n)\geq f(y_n)+n|x_n-y_n|-\frac{1}{n}.$$

Puisque $(f(x_n))$ est borné et f a une croissance linéaire, on en déduit que (y_n) est borné, tout comme $(f(y_n))$.par conséquent

$$\limsup_n(n|y_n-x_n|)<\infty.$$

Et en particulier $y_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, en outre

$$f(x_n) \geq f_n(x_n) \geq (y_n) - \frac{1}{n},$$

d'ou le resultat demandé. ■

3.2.3 Existence d'une solution minimal

[15] Envisager, pour (t,ω) fixé, par **Lemme 3.1** f la suite $f_n(t,\omega,y,z)$ associé alors, f_n est un $\mathbb{P}\otimes\mathbb{R}^{d+1}$ fonction mesurable par conséquent une fonction Lipschitz. De plus, comme $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{T,}, \mathbb{P})$ et $\{S_t, \quad 0 \leq t \leq T\}$ satisfait (**iv**) dans El Karoui et al 1996 ,il y a un triple unique $\{(Y_t^n, Z_t^n, K_t^n), \quad 0 \leq t \leq T\}$ de $\mathcal{F}_t$-processus progressivement mesurable prenant des valeurs dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement, et satisfaisant.

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_n(s,\omega,Y_s^n,Z_s^n)\,ds + K_T^n - K_t^n - \int_t^T Z_s^n dB_s; \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.5}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_t^n|^2 + |Z_t^n|^2\right) dt < \infty, \tag{3.6}$$

$$Y_t^n \geq S_t^n, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.7}$$

$\{K_t^n, \quad 0 \leq t \leq T\}$ est un continu et croissant en t processus $K_0^n = 0$, et

$$\int_0^T (Y_t^n - S_t)\,dK_t^n = 0. \tag{3.8}$$

On utilisant le théorème de comparaison de **EDSRR** dans El Karoui et al [9] on obtient que :

$$\forall n \geq m \geq K, \quad Y^n \geq Y^m, \quad dt \otimes d\mathbb{P}-p.s. \tag{3.9}$$

L'idée de la preuve du **théorème** est d'établir que la limite de la suite (Y^n, Z^n, K^n) est la solution d'**EDSRR (3.3)** à des paramètres (f, ξ, S).

On donne d'abord des estimations uniformes en n a priori sur la séquence (Y^n, Z^n, K^n) de solution d'**EDSRR (3.5)**.

Lemme 3.2 *[15] Il existe un constant C selon uniquement $K, T, \mathbb{E}(\xi^2)$, tel que*

$$\forall n \geq K, \quad \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n|^2 + \int_0^T |Z_s^n|^2\, ds + (K_T^n)^2\right) \leq C.$$

Proof. [15] Ici et dans la suite, $C \geq 0$ désigne un constant réelle, dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. D'après la formule d'Itô appliquée à la semi-martingale $(Y_t^n)^2$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}(Y_t^n)^2 + \int_t^T |Z_s^n|^2\, ds &= \xi^2 + 2\int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds + 2\int_t^T Y_s^n dK_s^n - 2\int_t^T Y_s^n Z_s^n dB_s, \\ &= \xi^2 + 2\int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, Y_s^n ds + 2\int_t^T S_s dK_s^n - 2\int_t^T Y_s^n Z_s^n dB_s.\end{aligned}$$

Où on utilisant l'identité $\int_0^T (Y_t^n - S_t)\, dK_t^n = 0$. Prenant l'attente des deux côtés de l'équation ci-dessus, et en utilisant le fait que $\int_0^T Y_s^n Z_s^n dB_s$ est uniformément intégrable, on déduit

$$\mathbb{E}|Y_t^n|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n|^2\, ds = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}\int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, Y_s^n ds + 2\mathbb{E}\int_t^T S_s dK_s^n.$$

On a cela pour chaque α, en utilisant la propriété de croissance linéaire uniforme de f_n, et l'inégalité élémentaire : $2ab \leq \frac{\alpha^2}{\beta} + \beta b^2, \quad \forall \beta > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y_t^n|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n|^2\, ds &\leq c\left(1 + \mathbb{E}\int_t^T |Y_s^n|^2\, ds\right) + \frac{1}{3}\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n|^2\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_s^+\right)^2\right) + \alpha\mathbb{E}\left((K_T^n - K_t^n)^2\right).\end{aligned}$$

Maintenant de (3.5), $\quad K_T^n - K_t^n = Y_t^n - \xi - \int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds + \int_t^T Z_s^n dB_s$.

$$\mathbb{E}\left((K_T^n - K_t^n)^2\right) \leq C\left(\mathbb{E}(Y_t^n)^2 + \mathbb{E}\xi^2 + 1 + \mathbb{E}\int_t^T \left((Y_s^n)^2 + |Z_s^n|^2\, ds\right)\right). \tag{3.10}$$

En choisissant $\alpha = \frac{1}{3}C$, on obtient

$$\frac{2}{3}\mathbb{E}\left(Y_t^n\right)^2 + \frac{1}{3}\mathbb{E}\int_t^T \left|Z_s^n\right|^2 ds \leq C\left(1 + \mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^n\right)^2 ds\right).$$

$$\mathbb{E}\left(Y_t^n\right)^2 \leq C\left(1 + \mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^n\right)^2 ds\right). \tag{3.11}$$

Il découle ensuite de la lemme de Gronwall que : $\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left|Y_t^n\right|^2 \leq C$ et de (3.4) et la dernière inégalité qui

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|Z_s^n\right|^2 ds \leq C, \quad \mathbb{E}\left(K_T^n\right)^2 \leq C.$$

Le résultat de **Lemma 3.2** découle ensuite de l'équation (3.5), des estimations ci-dessus et de l'inégalité **BDG**.

Maintenant, on a de (3.9) et le résultat de **Lemma 3.2** respectivement,

$$Y_t^n \leq Y_t^{n+1}, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Et

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right) \leq C.$$

Par conséquent

$$Y_t^n \nearrow Y_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Et de la lemme de Fatou, on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n\right|^2\right) \leq C.$$

Il suit ensuite le théorème de convergence dominé que

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|Y_t - Y_t^n\right|^2 dt \to 0. \tag{3.12}$$

Comme $n \to \infty$.

Maintenant, on devrait prouver que la suite des processus Z^n convergent en $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \geq p \geq n_0 \geq K$, de la formule d'Itô pour $t = 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|Y_0^n - Y_0^p\right|^2 + \mathbb{E}\int_0^T \left|Z_t^n - Z_t^p\right|^2 dt = 2\mathbb{E}\int_0^T &\left(Y_t^n - Y_t^p\right)\left(f_n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) - f_p\left(t, Y_t^p, Z_t^p\right)\right) dt \\ &+ 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^n - Y_t^p\right)\left(dK_t^n - dK_t^p\right).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour tous n, $Y_t^n \geq S_t, \quad 0 \leq t \leq T$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|Y_0^n - Y_0^p\right|^2 + \mathbb{E}\int_0^T \left|Z_t^n - Z_t^p\right|^2 dt = 2\mathbb{E}\int_0^T &\left(Y_t^n - Y_t^p\right)\left(f_n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) - f_p\left(t, Y_t^p, Z_t^p\right)\right) dt \\ &+ 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^n - Y_t^p\right) dK_t^n + 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^p - Y_t^n\right) dK_t^p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \left|Z_t^n - Z_t^p\right|^2 dt \leq 2\mathbb{E}\int_0^T &\left(Y_t^n - S_t\right) dK_t^n + 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^p - S_t\right) dK_t^p \\ &+ 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^n - Y_t^p\right)\left(f_n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) - f_p\left(t, Y_t^p, Z_t^p\right)\right) dt.\end{aligned}$$

De l'identité $\int_0^T \left(Y_t^n - S_t\right) dK_t^n = 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \left|Z_t^n - Z_t^p\right|^2 dt &\leq 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^n - Y_t^p\right)\left(f_n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) - f_p\left(t, Y_t^p, Z_t^p\right)\right) dt \\ &\leq 2\left(\mathbb{E}\int_0^T \left|Y_t^n - Y_t^p\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\int_0^T \left|f_n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) - f_p\left(t, Y_t^p, Z_t^p\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la condition de croissance linéaire uniforme sur la suit (f_n) et le fait que $\|(Y^n, Z^n)\|$ est borné, on obtient l'existence d'un constant C dépendant seulement de $K, T, \mathbb{E}\varepsilon^2$ et $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right)$ tel que

$$\forall n, p \geq n_0, \quad \left\|Z^n - Z^p\right\| \leq C\left\|Y^n - Y^p\right\|^{\frac{1}{2}}.$$

Ensuite de (3.12), (Z^n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, et il existe un processus $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable Z tel que $Z^n \to Z$ dans $\mathbb{H}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, comme $n \to \infty$. ainsi,

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_t^n - Y_t^p|^2 + |Z_t^n - Z_t^p|^2\right) dt \to 0. \tag{3.13}$$

Tel que $n, p \to \infty$.

Maintenant, on prouve que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n - Y_t^p|^2\right) \to 0.$$

En tant que $n, p \to \infty$.D'aprés, la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}|Y_t^n - Y_t^p|^2 + \int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\, ds = 2\int_t^T & \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(f_n\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) - f_p\left(s, Y_s^p, Z_s^p\right)\right) ds \\ &+ 2\int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(dK_s^n - dK_s^p\right) \\ &- 2\int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(Z_s^n - Z_s^p\right) dB_s.\end{aligned}$$

De la preuve ci-dessus, on a

$$\forall n \geq p, \qquad \int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(dK_s^n - dK_s^p\right) \leq 0.$$

Ensuit

$$\begin{aligned}|Y_t^n - Y_t^p|^2 \leq 2\int_t^T & \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(f_n\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) - f_p\left(s, Y_s^p, Z_s^p\right)\right) ds \\ &- 2\int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(Z_s^n - Z_s^p\right) dB_s.\end{aligned}$$

Dont on déduit

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)\leq 2\left(\mathbb{E}\int_0^T\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\mathbb{E}\int_0^T\left(f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)-f_p\left(s,Y_s^p,Z_s^p\right)\right)^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T\left(Y_s^n-Y_s^p\right)\left(Z_s^n-Z_s^p\right)dB_s\right|\right).$$

En utilisant à nouveau la condition de croissance linéaire uniforme sur la suit (f_n) et le fait que $\|(Y_n,Z_n)\|$ est borné, on déduit

$$\left(\mathbb{E}\int_0^T\left|f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)-f_p\left(s,Y_s^p,Z_s^p\right)\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\leq C. \tag{3.14}$$

Ensuite, de l'inégalité **BDG**, on obtient

$$2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T\left(Y_s^n-Y_s^p\right)\left(Z_s^n-Z_s^p\right)dB_s\right|\right)\leq 2C\mathbb{E}\left(\int_0^T\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq 2C\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t^p\right|\left(\int_0^T\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)$$
$$+C\mathbb{E}\int_0^T\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2ds.$$

Par conséquent, de (3.14) et l'inégalité ci-dessus

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)\leq C\left(\mathbb{E}\left(\int_0^T\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)$$
$$+C\mathbb{E}\int_0^T\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2ds.$$

Et donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)\leq C\left(\left(\mathbb{E}\left(\int_0^T\left|Y_t^n-Y_t^p\right|^2\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}+\mathbb{E}\int_0^T\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2ds\right).$$

Ensuite, de (3.13), on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right) \to 0. \tag{3.15}$$

Comme $n, p \to \infty$, dont on déduit que $\mathbb{P}-p.s$, Y^n converge uniformément dans t à Y et que Y est un processus continu. ■

Maintenant, selon (3.5), on a pour tous $n, p \geq n_0 \geq K$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t^p|^2\right) &\leq \mathbb{E}\left|Y_t^n - Y_t^p\right|^2 + \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n - Y_t^p|^2\right) \\ &+ C\mathbb{E}\int_0^T \left|f_n\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) - f_p\left(s, Y_s^p, Z_s^p\right)\right|^2 ds \\ &+ \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T \left(Z_s^n - Z_s^p\right) dB_s\right|^2\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

On devient , montrer que la suit des processus $\left(f_n\left(., Y^n, Z^n\right)\right)_n$ converge vers $f\left(., Y, Z\right)$ dans $\mathbb{H}^2\left(\mathbb{R}\right)$. Ceci est déduit d'aprés les faits suivants :

- Y^n converge vers Y dans $\mathbb{H}^2\left(\mathbb{R}\right)$ et $dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$
- Depuis $Z^n \to Z$ dans $\mathbb{H}^2\left(\mathbb{R}\right)$, il existe un processus Z' dans $\mathbb{H}^2\left(\mathbb{R}\right)$ et une sous-suite $\left(Z^n\right)_{n\geq 0}$ telle que $\forall n$, $|Z^n| \leq Z'$, $Z^n \to Z, dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$

Par conséquent, de (**a**) et (**d**) de **Lemma 3.1** on obtient pour $p.s$ tous ω,

$$f_n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) \to f\left(t, Y_t, Z_t\right), \quad dt - p.s.$$

Comme $n \to \infty$ et

$$\left|f_n\left(t, Y_t^n, Z_t^n\right)\right| \leq K\left(1 + |Y_t| + |Y_t^{n_0}| + Z_t'\right).$$

Ainsi, il suit par le théorème de convergence dominée que

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|f_n\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(t, Y_s, Z_s\right)\right|^2 ds \to 0. \tag{3.17}$$

Quand $n \to \infty$. Maintenant, par l'inégalités de **BDG** inégalité et (3.15) (3.17) on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t^p|^2\right) \to 0.$$

Comme $n, p \to \infty$. Par conséquent, il existe un processus K-progressivement mesurable avec une valeur en $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t|^2\right) \to 0. \tag{3.18}$$

Quand $n \to \infty$ et ensuite $\{K_t, \quad 0 \leq t \leq T\}$ est clairement croissante avec $K_0 = 0$ et un processus continu.

Enfin, en prenant des limites dans l'**EDSRR (3.5)** on obtient que le triple $\{(Y_t, Z_t, K_t)\,,\ 0 \leq t \leq T\}$ est une solution d'**EDSRR (3.3).** Maintenant, afin de terminer la preuve du **théorème** , il reste à vérifier (**v**), (**vi**) et (3.4). De **Lemma 3.2**, on a

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_t^n|^2 + |Z_t^n|^2\right) dt \leq C.$$

En prenant des limites dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right) dt \leq C.$$

D'autre côté, on a

$$\forall n \geq K, \qquad Y_t^n \geq S_t, \qquad t \in [0, T]\,.$$

Prendre des limites que on a clairement (**vi**)

De (3.15) et (3.18) et le résultat de Saisho [19, (1987)] on a

$$\int_0^T (Y_t^n - S_t)\, dK_t^n \to \int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t.$$

$\mathbb{P} - p.s$ comme $n \to \infty$. Utilisation de l'identité $\int_0^T (Y_t^n - S_t)\, dK_t^n = 0$ on obtient $\int_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0$. La preuve du **théorème** est complète.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons discuté le résultat d'existence de solution pour l'équations différentielles stochastiques rétrogrades avec un barrière continue (en abrégé **EDSRR**).
Premièrement, nous avons étudié le résultat d'existence et d'unicité de solution pour **EDSRR** avec l'hypothèse Lipschitz.
Enfin, nous avons établi les résultats d'existence pour **EDSR** réfléchies dans le cas où le générateur et continu en y et lipschitz en z par la technique d'approximation et aussi nous étudions le principe de comparaison entre deux solutions **EDSRR**.

Bibliographie

[1] Berglund, N. (2013). Martingales et calcul stochastique. arXiv preprint arXiv :1312.7799.

[2] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2), 384-404.

[3] Bismut, J. M. (1978). An approximation method in optimal stochastic control. SIAM Journal on Control and Optimization, 16(1), 122-130.

[4] Briand, P. (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Mars.

[5] Brownien, M. (2003). intégrale stochastique, Séminaire des Doctorants, Bordeaux. Mars, 26.

[6] Breton, J. C. (2006). Processus gaussiens. Université de La Rochelle (version de décembre 2006).

[7] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[8] Dellacherie, C., & Meyer, P. A. (2011). Probabilities and potential, c : potential theory for discrete and continuous semigroups. Elsevier.

[9] El Karoui, N., Kapoudjian, C., Pardoux, E., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's. the Annals of Probability, 25(2), 702-737.

[10] Elie, R. (2004). Rappels de probabilités.

[11] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[12] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[13] Hibon, H. (2018). Équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratiques et réfléchies (Doctoral dissertation, Rennes 1).

[14] Lévêque, O. (2005). Cours de probabilités et calcul stochastique (No. LECTURE).

[15] Matoussi, A. (1997). Reflected solutions of backward stochastic differential equations with continuous coefficient. Statistics & probability letters, 34(4), 347-354.

[16] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.

[17] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[18] Romuald, E. L. I. E., & KHARROUBI, I. (2006). Calcul Stochastique Appliquéa la Finance. polycopié disponible sur http ://www. ceremade. dauphine. fr/elie/elie.

[19] Saisho, Y. (1987). Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. Probability Theory and Related Fields, 74(3), 455-477.

Annexe : Quelques outils matématique

Théoréme 3.3 ***Mesure de Lebesgue*** *: Il existe une unique mesure λ sur $\mathbb{R}$,muni de sa triibu borélien, appelée la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, telle que :*

$$\lambda\left(]a,b[\right) = b-a, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a<b.$$

Théoréme 3.4 ***Point fixe de Banach :*** *Soit N un espace métrique complet et $f : N \to N$ une contraction.*

Alors f a un unique point fixe a :

$$f(a) = a.$$

Théoréme 3.5 ***Lemme de Gronwall*** *: Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fontion continue telle que, pour tout t,*

$$f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)\,ds, \quad a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors

$$f(t) \leq a\exp(bt).$$

Théoréme 3.6 ***Inégalités BDG*** *:.Soit $p>0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

En particulier, si $T > 0$,

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Lemme 3.3 ***Lemme de fatou*** *: Pour toute suite (f_n) dans $\mathbb{L}^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$*

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} f_n \middle| \mathcal{G}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f_n | \mathcal{G}\right).$$

Théoréme 3.7 ***Théorème de convergence dominée*** *: Si $(f_n)_{n\in N}$ converge p.s vers f et si pour tout n $|f_n| \leq Y$ p.s avec $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_n) = \mathbb{E}(f), \qquad p.s \text{ et au sens de } \mathbb{L}^1.$$

Théoréme 3.8 ***Espace de Banach :*** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 3.1 ***Suite de Cauchy :*** *On dit qu'une suite de réels est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \text{ et } m \geq N) \Rightarrow (|u_n - u_m| \leq \varepsilon).$$

Cette proposition peut se comprendre comme

$$\lim_{m,n\to\infty} |u_n - u_m| = 0.$$

Lemme 3.4 ***Lemme de Saisho*** *: Soit $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de variation continues et bornées de $[0,1]$ à $\mathbb{R}^d$, telle que :*

i) $\sup_n var(k^n) \leq C < +\infty$.

ii) $\lim_{n\to\infty} k^n = k$ uniformément sur $[0,1]$.

iii) Soit $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions càdlàg de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}^d$, telle que $\lim_{n\to\infty} f^n = f$ uniformément sur $[0,1]$.

Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle f^n(s), dk^n(s)\rangle = \int_0^t \langle f(s), dk(s)\rangle .$$

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس فئة من المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية مع وجود حاجز مستمر في الجزء الأول، تتمثل مساهمتنا في وجود حلا وحيدا عندما يكون المعامل يتميز بشرط لبشير مع العلم أن مربع الحالة النهائية قابل للتكامل بنفس الروح ولكن بتقنيات مختلفة، نثبت نتائج جديدة لوجود حلول المعادلات التفاضلية العشوائية في اتجاه آخر و المتمثل في وجود حلاً أعظميا أو أدنى للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية مع وجود حاجز مستمر عندما يكون معامل المعادلة مستمرًا وله نمو خطي و هذا كتطبيق لنظرية المقارنة و باستعمال خواص التقارب

الجمل المفتاحية :المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية. المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية مع حاجز مستمر؛ المعادلات التفاضلية الجزئية العشوائية، نظرية المقارنة

Abstract

In this thesis, we study the stochastic backward differential equation with a continuous barrier. In the first part, our contribution is to prove the existence and uniqueness of solution when the generator verifies the Lipchitz condition, knowing that the terminal condition is square integrable.

In the same spirit, but with different techniques, we prove the existence of solutions for backward stochastic differential equations with a barrier with the equation coefficient is continuous and has a linear growth by using comparison theory and approximation properties.

Key words: Stochastic differential equations; stochastic backward differential equations with a continuous barrier; maximal solution, comparison theorem.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l’équation différentielle stochastique rétrograde avec une barrière continue. Dans la première partie, notre contribution est preuve l’existence et unicité d’solution lorsque le générateur vérifier la condition de Lipchitz, sachant que la condition terminal est de carré intégrable.

Dans le même esprit, mais avec des techniques différentes, nous prouvons l’existence de solutions pour équations différentielles stochastique rétrograde avec une barrière avec le coefficient d'équation est continu et a une croissance linéaire par utilisation de la théorie de la comparaison et les propriétés d’approximation.

Phrases clés : Équations différentielles stochastiques ; Équations différentielles stochastiques rétrogrades avec une barrière continue ; solution maximal, théorème de comparaison .