الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

قسم الفيزياء

مذكرة مكملة لنيل شهادة الماستر

تخصص: فيزياء نظرية

إعداد الطالبتين: بلقاسم نزهة وشافو ريان

تحت عنوان

حل معادلة Schrödinger الكسرية لجسيم في بئر كمون لانهائي في حالة كتلة متعلقة بالموضع

نوقشت يوم: 2022/06/15 أمام لجنة المناقشة:

أ. بن الزائر هجيرة	أستاذ التعليم العالي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقش
د. بلغيثار حاج بالشراير	أستاذ محاضر أ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيس
د. زينب قريشي	أستاذة محاضرة ب	المدرسة العليا للأساتذة ورقلة	مشرف ومقرر

السنة الجامعية:

2021/2022

الإهـــــداء

إلى من كلله الله بالهّيبة والوقار ...إلى من علمني العطاء بدون انتظار... إلى من أحمل أسمه بكل افتخار أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار ....**أبي**

إلى ملاكي في الحياة .. إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان والتفاني.... إلى بسمة الحياة وسر الوجود إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب ...**أمي**

إلى من شاركوني فرحتي وأحزاني **إخوتي أخواتي صديقاتي** انتم قلوب جميلة سكنت قلبي وأنارت دربي... **زكرياء - إمام - أيوب - فردوس - أسماء - إشراق -ثويبة - إزدهار - شهرزاد - فاطمة الزهرة - ريهام - أسماء - سندس - سيليا - كلثوم ..** في نهاية مشواري أريد أن أشكركم على مواقفكم النبيلة.

إلى مكسبي في الشجاعة والتحدي إلى من أنارت بوجوده أيامي وبفضله تيسّرت صعابي، الأب الثاني **أخي الكريم** حقق الله كل أمنياته، ورزقه من واسع فضله

إلى من كان سندًا عند العثرات بسبب تقنيات البرمجيات في كل الأوقات **خطيبي** تحملت كل التقلبات والمزاجيات حفظك الله ورعاك وسدد بالخير خطاك. سهل الله أيامنا القادمة

إلى ملائكتي وبهجة عمري وحلاوة أيامي إلى جنود الخفاء إلى البراءة والطهارة أبناء اخوتي... إياد تقي الدين- جمانة- نزار- مريم- محمد- بيان- بلسم- محمد يحي

إلى زميلتي التي حملت معي مشعل هذا العمل المتواضع.... **ريان شافو**

إلى طلبة الفيزياء النظرية دفعة 2022

نزهة بلقاسم

الإهداء

الحمد لله الذي أنار لي طريقي وكان لي خير عون...

إلى أغلى ما أملك في هذه الدنيا...إلى من كانت سببا في وجودي هنا...

إلى من وضعت الجنة تحت اقدامها...

..إلى التي أنحني لها بكل إجلال وتقدير... إلى التي أرجو قد أكون نلت رضاها أمي الغالية **حياة**

إلى من أدين له بحياتي...إلى من ساندني وكان شمعة تحترق لتضيء طريقي...إلى من أكن له مشاعر التقدير والاحترام والعرفان...أسال الله ان يمده بصحة والعافية وطول العمر أبي الحنون **محمد الحبيب**

إلى من كان لهم لمسة في خطوة من خطوات نجاحي إخوتي **إرشاد . إصلاح . حذيفة . أحمد ياسين . أروى**

إلى من تزيدهم درجاتي في العلم رفعة عائلتي الكبيرة كل باسمه

إلى من رسمو معي طريقي الجميل نحو النجاح صديقاتي

إلى كل من امدني من جهده قطرة في سبيل هذا المشوار

إلى من كانت سندا لي في هذا البحث **نزهة بالقاسم**

شافوريان

الشكــر و العـرفـان

بسم الله الرحمن الرحيم

اللهم صلي وسلم على سيدنا ورسولنا محمد خير البشرية وخاتم الأنبياء والمرسلين وعلى آله وصحبه ومن اتبعه إلى يوم الدين تسليما كثيرا.

الحمد والشكر أولا وأخرا لله فاطر السموات والأرض رب كل شيء ومليكه الذي أوصلني لهذا المستوى المتقدم من العلم, الذي طالما دعوته فستجاب دعواتي واستخرته فأرشدني إلى الدرب الصحيح، الذي كان معي في كل خطوة أتقدم بها في هذا العمل، أمدني بقوة الصبر والعزيمة لتغلب على حاجز اليأس ووفقت بفضله العظيم في إتمام هذه المذكرة.

أتقدم وبكل معاني التقدير والإحترام بالشكر للأستاذة المشرفة **د. زينب قريشي** التي كانت معي وأعطتني من وقتها ورافقتني إلى أخر نقطة في إنجاز هاته المذكرة.

كما أتقدم بوافر الشكر والعرفان للأستاذ لقبوله ترؤس لجنة المناقشة **د. بلغيثار حاج بشراير** والأستاذة **أ. بن الزائر هجيرة** عضوا ممتحنا من لجنة المناقشة الشكر لمعلمتي في الإبتدائي فنيك نصيرة ولكل أساتذتي في المشوار الدراسي شكرا وبكل معنى تحمله هاته الكلمة بين طياتها لعائلتي من الكبير إلى الصغير.

وأتقدم أيضا بالشكر والعرفان لكل زملائي رفيقات دربي وعملي الشكر لكل من ساعدني ولو بمجرد السؤال عن أحوالي في إنجاز هاته المذكرة أنتم في القلب.

فهرس الموضوعات

فهرس الموضوعات

فهرس الموضوعات

المقدمة العامة

المقدمة العامة

لقد اشتهر الحساب الكسري في العقود الثلاثة الماضية شهرة كبيرة، ويعود ذلك لفضله العظيم في حل وتفسير عدة مشاكل رياضية وفيزيائية. حيث استخدم هذا الحساب في عدة مجالات منها العلوم والهندسة والرياضيات التطبيقية والاقتصاد والميكانيك الحيوية.

كما طبق أيضا في الفيزياء حيث استعمل لوصف عدة ظواهر فيزيائية في الميكانيك الكلاسيكي [1]، المادة المكثفة [2]، فيزياء البلازما [3]، الميكانيك الإحصائية [4]، و الكهرومغناطيسية [5]...إلخ.

في السنوات الأخيرة أدخل مفهوم الحساب الكسري في ميكانيك الكم وأطلق عليه الميكانيك الكمي الكسري، حيث نشرت عدة أبحاث في هذا المجال نذكر منها:

أعمال LASKIN [6] والذي كان له الأسبقية في مجال الميكانيك الكمي الكسري حيث قام بتعميم معادلة Schrödinger ودرس بعض تطبيقاتها، معادلة كلين غوردون الكسرية [7] و معادلة ديراك الكسرية [8].

تعود أصول الحساب الكسري إلى عام 1695م أين وضع جوتفريد فيلهلم ليبينيز(Gottfried wilhelm Leibniz) الرمز الشهير $\frac{d^{n}}{dx^{n}}$ إشارة إلى المشتقة النونية للدالة f وقام بإرساله إلى ماركيزدي لوبيتال(Marquis de Lopital) قصد إخباره بالرمز الجديد إلاّ أن لوبيتال رد على الرسالة بسؤال محير وجدّ وجيه ماذا لو كانت $n = 1/2$ ؟[9].

كان هذا السؤال مثيرا للاهتمام كما تمت مناقشته من قبل جميع علماء الرياضيات في ذلك الوقت، تم استخدام مناهج مختلفة لتعميم رتب الاشتقاق إلى الدرجات غير صحيحة، ومنذ ذلك الوقت ظهرت العديد من المساهمات النظرية والعملية لتوضيح أهمية الأنظمة الكسرية ما أدى مؤخرا لجذب اهتمام الباحثين في مختلف تخصصات الفيزياء، الكيمياء، الكهرباء، والأحياء...وما إلى ذلك. إشارة إلى إدخال الحساب الكسري إلى ميكانيك الكم.

نسعى في هذه المذكرة لحل معادلة شروذنغر لجسيم في بئر كمومي لانهائي، ذلك باستعمال مشتقات كسرية مختلفة. حيث سنتطرق في الفصل الأوّل إلى أساسيات الحساب الكسري والمتمثلة في بعض الدوال الخاصة وخصائصها، أيضا تعريف ببعض المشتقات والتكاملات الكسرية وصياغتها. أما في الفصل الثاني سنقوم بعرض معادلة Schrödinger ومؤثر هاملتون ثم حلها بالنسبة لجسيم في بئر كمومي لانهائي اين تكون الكتلة ثابتة ثم في حالة كتلة متعلقة بالموضع. أما في الفصل الثالث سنعرض معادلة Schrödinger الكسرية ومؤثر هاملتون الكسري ثم حلها بالنسبة لجسيم في بئر كمومي لانهائي باستعمال المشتقات المختلفة Riesz؛ Khalil و Caputo- Fabrizio أين تكون الكتلة ثابتة ثم في حالة كتلة متعلقة بالموضع.

الفصل الأول: أساسيات الحساب الكسري

الفصل الأول

I

أساسيات الحساب الكسري

I.1. الدوال الأساسية للحساب الكسري:

I.1.1. دالة غاما(Gamma) :

تعريف:

الدالة غاما من أحد الدوال الأساسية لحساب التفاضل والتكامل الكسري، وتسمى دالة غاما لأولر، وهي عاملي $n!$، حيث تعطى بدلالة التكامل من اجل $R(x) > 0$ التالي [9]:

$$\Gamma\,(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1}\,dt \tag{I.1}$$

ويعد هدا التعريف أكثر التعريفات استخداما في الوقت الحالي الا أن التعريف الأول الدي عرضه أولر كان كالتالي:

$$\Gamma = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{(1+\frac{x}{n})} \tag{I.2}$$

خواص الدالة غاما $\boldsymbol{\Gamma(x)}$ [10].[11] :

- صيغة التتابع:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad , \ \forall\, n \neq 0 \tag{I.3}$$

يمكن برهنتها كما يلي:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n}dt=[-e^{-t}t^{n}]_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt \tag{I.4}$$

ومنه

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \tag{I.5}$$

- خاصية التسلسل: اذا كان n عددا صحيحا موجبا فان:

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{I.6}$$

ويمكننا برهنتها كما يلي:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}dt=[-e^{-t}]_0^{+\infty}=1 \tag{I.7}$$

باستخدام العلاقة (I.6):

$$\Gamma(1)=1=1\times 0!$$

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1=1!$$

$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\times 1!=2!$$

$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\times 2!=3!$$

$$\Gamma(5)=4\Gamma(4)=4\times 3!=4!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!$$

- خاصية التكرار:

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n) \tag{I.8}$$

$$\Gamma(1-n)\Gamma(n)=\frac{\pi}{\sin(x)} \tag{I.9}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{2^{1-n}(n-1)!\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \tag{I.10}$$

- الدالة $\Gamma(n)$ دالة متناقصة من الجل $0\le n\le 1$

- يمكن كتابة غاما (Gamma) بدلالة الدالة غير المكتملة السفلى $\gamma(x,\alpha)$ (Gamma Incomplete Inferieure) ودالة غاما المكتملة العليا$\Gamma(x,\alpha)$ (Gamma Incomplete Superieure)

بحيث:

$$\Gamma(x)=\gamma(x,\alpha)+\Gamma(x,\alpha) \tag{I.11}$$

مع العلم ان الدالتين $\Gamma(x,\alpha)$ و $\gamma(x,\alpha)$ معرفتان كالتالي:

$$\gamma(x,\alpha)=\int_0^\alpha e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad R(x)>0 \tag{I.12}$$

$$\Gamma(x,\alpha)=\int_\alpha^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad R(x)>0 \tag{I.13}$$

- يمكننا إيجاد قيم الدالة (Gamma) من اجل ($x=(0,-1,-2,-3\ldots)$ من العلاقة (I.1) بحيث:

$$\Gamma(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+x}+\varphi(x) \qquad / \qquad \varphi(x)=\int_1^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$\Gamma(x)=\varphi(x)+\frac{(-1)^0}{0!}\frac{1}{0+x}+\frac{(-1)^1}{1!}\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^2}{2!}\frac{1}{2+x}\ldots\ldots\ldots \tag{I.14}$$

هدا يعني ان قيم غاما عند الاعداد الصحيحة السالبة تؤول الى المالانهاية

$$\Gamma(-1)=\infty$$

$$\Gamma(-2)=\infty$$

$$\Gamma(-3)=\infty$$

- بعض الحالات الخاصة لدالة (Gamma):

$$\Gamma(0)=\infty$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \tag{I.15}$$

$$\Gamma(n-\frac{1}{2})=\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \tag{I.16}$$

I.1.2. دالة بيتا اولر (Beta – d Euler):

تعريف: دالة بيتا هي نوع من التكاملات Euler المعرفة لجميع الاعداد المركبة x و y وهي معرفة كما يلي [12]:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (Re(x)>0\ ,Re(y)>0) \tag{I.17}$$

خواص دالة (Beta) [13]:

- لدالة Beta بيتا عدة اشكال من التكاملات وهي:

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta \tag{I.18}$$

$$B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt \tag{I.19}$$

- دالة Beta-Euler دالة تناظرية أي:

$$B(x,y)=B(y,x) \tag{I.20}$$

- تحقق دالة Beta-Euler المعادلات التالية:

$$B(x,y)B(x+y,1-y)=\frac{\pi}{x\sin(y\pi)} \tag{I.21}$$

$$B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y) \tag{I.22}$$

$$B(x,x)=2^{1-2x}B\left(\frac{1}{2},x\right) \tag{I.23}$$

I.1.3. العلاقة بين دالة Gamma والدالة Beta–Euler:

ترتبط الدالة غاما بالدالة بيتا بواسطة:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{I.24}$$

لدينا:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = (\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx)(\int_0^{+\infty} e^{-y}e^{q-1}dy) \quad (I.25)$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x-y)}dxdy \quad (I.26)$$

نستخدم التغير المتغير التالي للإحداثيات:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = {}^{x}/(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases} \quad (I.27)$$

$$\frac{\partial(x.y)}{\partial(u.v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -vu - u(1-v) = -u \quad (I.28)$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(uv)^{p-1}(v(1-v))^{q-1}e^{-u}|-u|dudv \quad (I.29)$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv \quad (I.30)$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{p+q}du\right)\left(\int_0^1 u^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right) \quad (I.31)$$

$$= \Gamma(p+q)B(p,q) \quad (I.32)$$

$$\Rightarrow B(p.q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (I.33)$$

حيث $\Gamma(p+q) \neq 0$.

إذا كانت p, q اعداد حقيقية نتحصل على:

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (1.34)$$

2.I. التكامل الكسري:

يهدف التكامل الكسري إلى لتكامل الكسري بهدف تعميم التكامل الطبيعي.

تعريف:

من اجل $\alpha \in R^{+}$ (مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة) ومن اجل الدالة f قابلة للتكامل على المجال $[a,\infty[$ فإن تكامل الدالة f من الرتبة α يعرف كالتالي[14]:

$$I^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \tag{I.35}$$

حيث $\alpha \in R^{+}$ و $\Gamma(\alpha)$ دالة Gamma-Euler.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي $f(x)=(x-a)^{\beta}$ وبالتالي التكامل الكسري من الدرجة α للدالة f يعرف كالتالي:

$$_{a}I_{x}^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}dt \tag{I.36}$$

نقوم بتغير المتغير $t=a+(x-a)\tau$ ومنه:

$$_{a}I_{x}^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_{\alpha}^{x}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}dt \tag{I.37}$$

وفي الأخير يمكن أن نكتب:

$$_{a}I_{x}^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha) \tag{I.38}$$

3.I. المشتق الكسري

للاشتقاق الكسري عدة تعاريف رياضية ليست متطابقة من حيث النتائج ولكن متكافئة للعديد من الدوال.

من بين التعاريف المستخدمة في التطبيقات الفيزيائية نذكر منها:

1.3.I. تعريف ريمان ليوفيل (Riemann – liouville):

ويعتبر هذا التعريف أكثر المشتقات شهرة حيث أنه من أجل $\alpha \in R^{+}$ فإن مشتقة الدالة $f(x)$ من الدرجة α يعطى بالعلاقة [15]:

$$^{RL}_{\alpha}D_{X}^{\alpha}=\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left({}_{\alpha}I_{x}^{n-\alpha}f(x)\right)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \tag{I.39}$$

حيث $n-1<\alpha<n$

مثال: ايجاد المشتق الكسري للدالة

1) لدينا: $f(t)=(t-a)^{\beta}$ لما : $a\in\mathbb{R}\ ,\ \beta>-1$

$$I_{a+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau \tag{I.40}$$

باستخدام تغير المتغير $\tau=a+(t-a)s$ حيث s يتراوح بين 0 و1 نتحصل على:

$$I_{a+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1[t-a-(t-a)s]^{\alpha-1}[s(t-a)]^{\beta}(t-a)ds$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\alpha-1}ds \tag{I.41}$$

ومنه:

$$I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta} \tag{I.42}$$

لما $a=0$:

$$I_{0+}^{\alpha}t^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta} \tag{I.43}$$

2) الدال f ثابتة $f(t)=cte$:

$$I_{a+}^{\alpha}C=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}Cd\tau \tag{I.44}$$
$$=\frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \tag{I.45}$$

$$=\frac{C}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{-(t-\tau)}{\alpha}\right]_a^t \tag{I.46}$$

$$=\frac{C}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha} \tag{I.47}$$

$$=\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha} \tag{I.48}$$

ومنه:

$$I_{a+}^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha} \tag{I.49}$$

3) الدالة الأسية:

$$f(t) = \exp(kt) \tag{I.50}$$

لما $k > 0$ ، $\alpha > 0$ و $\alpha \notin \mathbb{N}$.

باستخدام الصيغة (I.48) التكاملية ل ريمان–ليوفيل مع $\alpha = -\infty$ نتحصل على:

$$I_{-\infty}^{\alpha}\exp(kt) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty} s^{\alpha-1}\exp\big(k(t-s)\big)\,ds$$

$$= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty} s^{\alpha-1}\exp(-kt)\,ds \tag{I.51}$$

من خلال تغير المتغير $x = ks$ نجد ان:

$$I_{-\alpha}^{\alpha}\exp(kt) = \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{\alpha-1}\exp(-x)\frac{dx}{k} \tag{I.52}$$

$$= k^{-\alpha}\frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)\,dx \tag{I.53}$$

$$= k^{-\alpha}\frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) \tag{I.54}$$

$$= k^{-\alpha}\exp(kt) \tag{I.55}$$

ومنه:

$$I_{-\infty}^{\alpha}\exp(kt) = k^{-\alpha}\exp(kt) \tag{I.56}$$

I.3.2. تعريف ريسز(**Riesz**):

يعرف المشتق الكسري لريسز (Riesz) كما يلي [14] [16]:

$${}^{R}D_{x}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \tag{I.57}$$

حيث $\alpha \in]0,2] - \{1\}$

يوجد شكل اخر لريسز (Riesz):

$$ {}^{R}D_{X}^{\alpha}f(x)=\Gamma(1+\alpha)\frac{\sin(\pi\alpha/2)}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^{\alpha+1}}dt \qquad (I.58)$$

حيث $\alpha\in]0,2]$

I.3.3. تعريف كابوتو (Caputo):

المشتق الكسري للرتبة α للدالة $f(x)$ المعرفة من قبل كابوتو (Caputo) كما يلي [17]:

$$ {}_{\alpha}^{C}D_{X}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \qquad (I.59)$$

بحيث $0\le n-1<\alpha<n$

مثال:

مشتق Caputo من الشكل: $f(x)=(x-a)^{\beta}$

لما $0<n-1\le n$ و $\beta>n-1$ إذن لدينا:

$$ f^{(n)}(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(t-a)^{\beta-n} \qquad (I.60)$$

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(\beta-\alpha+1)}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}dt \qquad (I.61)$$

بإجراء تغير المتغير $t=a+(x-a)\tau$ يصبح:

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta-n}d\tau \qquad (I.62)$$

$$ =\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-\alpha} \qquad (I.63)$$

I.3.4. تعريف كابوتو فابريزيو (Caputo– Fabrizio):

توجد صعوبات في التعريفات السابقة بسبب التعبير الرياضي المرهق الى حد ما والتعقيدات الناتجة في حلول المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية فاقترح كل من ميشيل كابوتو (Michele Caputo) وماورو فابريزيو (Mauro Fabrizio) تعريفا جديدا للمشتق الكسري. والذي يفترض تمثيلين مختلفين المتغير الزماني والمكاني، التمثيل الأول يعمل على متغيرات الوقت. حيث القوة الحقيقية في حلول المشتق الكسري المعتاد ستتحول الى

قوة صحيحة، مع التبسيط في الصيغ والحسابات في هذا الإطار. من المناسب استخدام تحويل لابلاس، التمثيل الثاني مرتبط بالمتغيرات المكانية، وبالتالي بالنسبة لهذا المشتق الكسري غير المحلي فمن الملائم العمل مع تحويل فوري[18-19] . وقام بتعديل تعريف كابوتو (Caputo) بتغير الحد $(x-t)^{n-\alpha-1}$ ب $exp\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(x-t)\right]$ و $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}$ ب $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ تحصلا على ما يلي:

$$ {}^{CF}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x)=\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^x esp\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(x-t)\right]f`(t)dt\,,\ t\geq 0 \tag{I.64} $$

حيث $\alpha\in[0,1]$ و $M(\alpha)$ ثابت التطبيع يعتمد على α ويعطى بالعلاقة التالية:

$$ M(\alpha)=\frac{2}{2-\alpha} \tag{I.65} $$

I.3.5. تعريف (Grünwald–Letnikov):

يستند التعريف بمعنى Grünwald-Letnikov على نهج الفروق المحدودة الكسرية حيث يكمن كل الاختلاف فيما يتعلق بالحالة بأكملها في امتداد العامل من خلال دالة Gamma-Euler. المشتق الكسري بمعنى Grünwald-Letnikov للدالة$f(t)$ محدد بالعلاقة التالية[20] [13]:

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{t-\alpha}{h}\right]}(-1)\binom{\alpha}{j}f(t-jh) \tag{I.66} $$

حيث $\left[\frac{t-\alpha}{h}\right]$ هو الجزء الصحيح، و $\binom{\alpha}{j}$ هي معاملات ذات حدين.

I.3.6. تعريف Khalil:

لنفترض أن $\alpha\in(n,n+1]$ ، و n قابل للتفاضل في s. حيث $s>0$.

إن المشتق الكسري للدالة w من الدرجة α بتعريف خليل يعطى بالعلاقة [21]:

$$ \frac{\partial^{\alpha}}{\partial s^{\alpha}}w^{(\alpha)}(s)=s^{([\alpha]-\alpha)}\frac{d^{[\alpha]}}{ds^{[\alpha]}}w^{(\alpha)}(s) \tag{I.67} $$

عندما يكون $[\alpha]$ هو أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي α.

I.3.7. خصائص المشتق الكسري:

a) المشتق الكسري هو عملية خطية:

$$D_X^{\alpha}\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)=\lambda D_x^{\alpha}f(x)+\mu D_X^{\alpha}g(x) \tag{I.68}$$

b) قانون (Leibniz) في الحالة العامة:

$$D_X^{\alpha}\left(f(x).g(x)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n)}(x)D^{\alpha-k}g(x)-R_n^{\alpha}\ ,\ n\geq\alpha+1 \tag{I.69}$$

حيث:

$$R_n^{\alpha}=\frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_t^x f^{(n+1)}(\xi)(t-\xi)^n d\xi \tag{I.70}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n^{\alpha}=0 \tag{I.71}$$

c) خصائص أخرى للمشتق الكسري:

✓ المشتق الكسري للتكامل الكسري من نفس الدرجة:

$$_aD_x^{\alpha}I_x^{\alpha}f(x)=f(x)\quad /R(\alpha) \tag{I.72}$$

✓ تتحقق درجات التكامل الكسري خاصية شبه المجموعة (جمع رتبة التكامل)، أي:

$$_aI_x^{\alpha}\ _aI_x^{\beta}f(x)=\ _aI_X^{\alpha+\beta}f(x) \tag{I.73}$$

✓ لا تتحقق درجات الاشتقاق الكسري(حقيقة أو معقدة) من خاصية شبه المجموعة (جمع رتبة الاشتقاق) إلا في ظل ظروف معينة:

$$_0D_x^{\alpha}\ _0D_x^{\beta}f(x)=\ _0D_x^{\alpha+\beta}f(x)\quad ,\alpha=0 \tag{I.74}$$

$$_aD_x^{n}\ _aD_x^{\alpha}f(x)=\ _AD_x^{n+\alpha}f(x)\qquad ,n\in N\ ,\alpha\in R^{+} \tag{I.75}$$

✓ عندما يكون $n\in N\ ,\ \alpha=n$ يصبح بذلك $_aD_x^{\alpha}$ نفس تعريف الاشتقاق الكلاسيكي

✓ من اجل $\alpha=0$

$$_aD_x^{0}f(x)=f(x) \tag{I.76}$$

✓ إذا كانت $f(x)$ تحليلية عند x فإن $_aD_x^{\alpha}f(x)$ تحليلية عند x.

الفصل الثاني : معادلة Schrödinger [١]

الفصل الثاني

II

حل معادلة Schrödinger

II.1. مقدمة:

ميكانيك الكم هي مجموعة من النظريات الفيزيائية المرتبطة ببعضها البعض والتي ظهرت في القرن العشرين، وذلك لتفسير الظواهر على مستوى الذرة والجسيمات دون الذرية وقد دمجت بين الخاصية الجسيمية والخاصية الموجية ليظهر مصطلح ازدواجية الموجة –الجسيم، وبهذا أصبح ميكانيك الكم المسؤول عن التفسير الفيزيائي على المستوى الذري. كما أنه أيضاً طبق على الميكانيك الكلاسيكية ولكن لا يظهر تأثيره على هذا المستوى. لذلك يمكن القول أن ميكانيك الكم هو تعميم للفيزياء الكلاسيكية لإمكانية تطبيقها على المستويين الذري والعادي.

ويعود سبب تسميته بميكانيك الكم إلى أهمّيّة الكم في بنائه (وهو مصطلح فيزيائي يستخدم لوصف أصغر كمّية من الطاقة يمكن تبادلها بين الجسيمات، ويستخدم للإشارة إلى كميات الطاقة المحددة التي تنبعث بشكل متقطع، وليس بشكل مستمر). كثيرا ما يستخدم مصطلحي فيزياء الكم والنظرية الكمية كمرادفات لميكانيك الكم.

II.2. معادلة Schrödinger المتعلقة بالزمن:

في مكانيك الكم معادلة Schrödinger عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية تصف كيفية تغير الحالة الكمية لنظام فيزيائي مع الزمن، وقد صاغها العالم الفيزيائي النمساوي Ervin Schrödinger في أواخر عام 1925 ونشرها

عام 1926. تصف هذه المعادلة حالات النظم الكمومية المعتمدة على الزمن. وتحتل هذه المعادلة أهمية خاصة في ميكانيك الكم حيث تعتبر بمثابة قانون التحريك الثاني الذي يعتبر أساسيا في الفيزياء الكلاسيكية.

حسب علاقة دي برولي فإن لكل جسيم موجة تصاحبه طولها الموجي:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \tag{II.1}$$

ومنه كمية الحركة تعطى بالعلاقة:

$$p = \hbar k \tag{II.2}$$

والطاقة الكلية لجسيم خاضع لكمون V تعطى بالعلاقة:

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 + V \tag{II.3}$$

وهنا نطرح التساؤل ماهي المعادلة التي تصف الموجة المادية وهل المعادلة الموجية الكلاسيكية صالحة لوصف الموجة المصاحبة للجسيمات؟

لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{\partial^2\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial x^2} = v^2\,\frac{\partial^2\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial t^2} \tag{II.4}$$

ويعطى حل هذه المعادلة بالعلاقة:

$$\Psi(x,t) = A\,sin(\,\omega t - kx) \tag{II.5}$$

ومنه:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2\Psi(x,t) \tag{II.6}$$

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\Psi(x,t) \tag{II.7}$$

ومن معادلة الموجة نجد: $k^2 = \omega^2/v^2$ ولكننا نعلم بان $k^2 \neq \omega^2$

وبالتالي المعادلة الموجية الكلاسيكية غير صالحة لوصف الحركة الموجية للأجسام

إذا استخدمنا:

$$\Psi(x,t) = A\,exp\,i\,(kx - \omega t) \tag{II.8}$$

ومنه

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2\Psi(x,t) \tag{II.9}$$

$$\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega\Psi(x,t) \tag{II.10}$$

وبالتالي:

$$k^2 = -\frac{1}{\Psi(x,t)}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{(II.11)}$$

$$\omega = \frac{i}{\Psi(x,t)}\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \quad \text{(II.12)}$$

وبالتعويض في المعادلة (II.3) نجد:

$$E\Psi(x.t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V\Psi(x,t) \quad \text{(II.13)}$$

وتسمى هذه الأخيرة بمعادلة Schrödinger المرتبطة بالزمن وهي المعادلة التفاضلية التي تصف الحركة الموجية للجسيمات في بعد واحد.

وتمثل هذه المعادلة، المعادلة الأساسية في ميكانيك الكم.

II.3. معادلة Schrödinger المستقلة عن الزمن:

لدينا معادلة Schrödinger المتعلقة بالزمن كالتالي:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right)\Psi(x,t) = H\,\Psi(x,t) \quad \text{(II.14)}$$

لأن $V(x)$ غير متعلق بالزمن فإنه يمكن استعمال طريقة فصل المتغيرات لحل هذه الأخيرة:

$$\Psi(x,t) = \Psi(x)f(t) \quad \text{(II.15)}$$

بالتعويض في معادلة Schrödinger نجد:

$$i\hbar\Psi(x)\frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}f(t) + V(x)\Psi(x)f(t) \quad \text{(II.16)}$$

بضرب الطرفين في: $\frac{1}{\Psi(x)f(t)}$

نتحصل على:

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi(x)}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \quad \text{(II.17)}$$

ومنه الجانب الأيسر في المعادلة يعتمد فقط على t والجانب الأيمن على x فقط، يجب أن يكون كلا الجانبين مساويًا لثابت، وهو ما سنسميه E.

وبالتالي نتحصل على جملة معادلات يمكن حل كل معادلة على حدا.

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = E \quad \text{(II.18)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi(x)}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+V(x)=E \qquad (II.19)$$

بحل المعادلة الأولى نجد:

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}=E \qquad (II.20)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{f}=-\frac{i}{\hbar}Edt \qquad (II.21)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(f)=-\frac{i}{\hbar}Et+const \qquad (II.22)$$

$$\Rightarrow \quad f=const.e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \qquad (II.23)$$

الثابت في المعادلة سيتم امتصاصه لاحقا من طرف $\Psi(x)$.

وبضرب الجانب الأيمن من المعادلة في $\Psi(x)$ تصبح:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi(x)}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+V(x)=E \qquad (II.24)$$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+V(x)\Psi(x)}_{H\Psi(x)}=E\Psi(x) \qquad (II.25)$$

لتصبح معادلة Schrödinger المستقلة عن الزمن كما يلي:

$$H\Psi(x)=E\Psi(x) \qquad (II.26)$$

4.II. مؤثر الهاملتون:

هو مؤثر يعطي الطاقة الكلية لنظام كمومي، و يكوّن طيفا لمختلف الطاقات المنفصلة الممكنة في النظام، وهو أساسي في دراسة ميكانيكا الكم وكذلك في الميكانيكا الكلاسيكية.

يعبر معامل الهاملتوني عن مجموع طاقة الحركة وطاقة الوضع للنظام، ويعطيها في الصورة:

$$H=k+V \qquad (II.27)$$

حيث k معامل طاقة الحركة و V معامل الطاقة والتي تكون دالة للمكان والزمان $V(x,t)$. ويتخذ معامل طاقة الحركة في ميكانيكا الكم نفس صورته:

$$k = \frac{p^2}{2m} \tag{II.28}$$

حيث p كمية الحركة و m الكتلة.

ثم صاغ العالم النمساوي Schrödinger مؤثر زخم الحركة على الصورة:

$$p = -i\hbar\nabla \tag{II.29}$$

وبإضافة هذا الجزء إلى مؤثر الطاقة ينتج:

$$H = -\frac{i\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x) \tag{II.30}$$

التي تسمح بتطبيق الهاملتوني على نظام تصفه دالة موجية $\Psi(x,t)$.

5.II حل معادلة Schrödinger في بئر كمون لا نهائي:

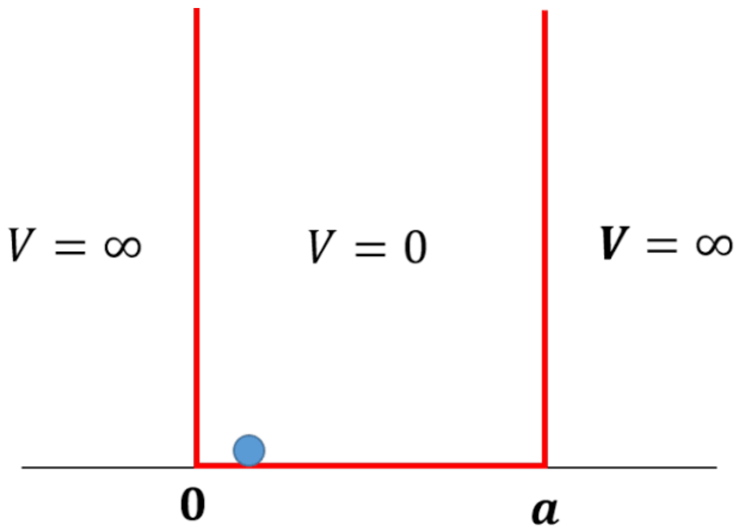
إن الهدف من هذا الجزء هو حل معادلة Schrödinger لجسيم في البئر كمون اللانهائي $V(x)$، كما هو موضح في الشكل التالي:

$$V(x)\begin{cases}0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & ailleurs\end{cases} \tag{II.31}$$

هذا يعني ان الجسيم الكمومي يقتصر على منطقة معينة بينهما $x = 0$ و $x = a$، حيث يتحرك بحرية لكن لا يمكنه المغادرة. وهذا يعني رياضيا:

$$\Psi(x) = 0 \tag{II.32}$$

لما $x \notin [0,a]$



الشكل 01: البئر الكموني اللانهائي.

بما ان الكمون لانهائي خارج جدران البئر فان احتمال تواجد الجسيم خارج البئر معدوم وعليه تكون:

$$\Psi(0)=\Psi(a)=0 \qquad \text{(II.33)}$$

المنطقة الوحيدة التي يسمح فيها بالجسيمات هي داخل البئر، حيث تتصرف مثل الجسيمات الحرة، أي أنها لا تتعرض للكمون. لذلك نحن بحاجة إلى حل معادلة Schrödinger العادية (المستقلة عن الوقت) بشروط الحدود من المعادلة (II.33).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=E\Psi(x) \qquad \text{(II.34)}$$

بوضع

$$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad \text{(II.35)}$$

تأخذ معادلة Schrödinger العادية الشكل التالي:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=-k^2\Psi(x) \qquad \text{(II.36)}$$

حيث يكون الحل العام كالاتي:

$$\Psi(x)=A\sin(kx)+B\cos(kx) \qquad \text{(II.37)}$$

هنا A و B بعض الثوابت التي لم يتم تحديدها بعد من خلال شروط الحدود، بدءا من $\Psi(0)=0$.

$$\Psi(0) = A\underbrace{\sin(0)}_{0} + B\cos(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0 \tag{II.38}$$

حسب شرط الحد الثاني $\Psi(a) = 0$، يؤدي إلى قيم منفصلة لـ k.

$$\Psi(a) = A\sin(ka) = 0 \tag{II.39}$$

$$ka = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{n\pi}{a} \tag{II.40}$$

حيث ... $n = 1.2.3$ يمكن أن يكون أي عدد طبيعي، إدخال النتيجة في المعادلة (II.35). وحلها فيما يتعلق ب E نرى أن الطاقة مكممة. مستويات الطاقة المتعددة بواسطة n نجد:

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \tag{II.41}$$

أخيرًا، يمكننا إجاد قيمة الثابت A باستخدام احتمالية تواجد جسيم:

$$\int_0^a dx|\Psi|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |A|^2\int_0^a dx\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad |A|^2 = \frac{2}{a} \tag{II.42}$$

وبالتالي الحالات المقيدة للبئر الكموني اللانهائي، التي تشكل سلبيات، ثم يتم إعطاؤها بواسطة

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{II.43}$$

بالنسبة إلى $n = 1$، نحصل على طاقة الحالة الأرضية ودالة الموجة E_1 و Ψ_1من البئر الكموني اللانهائي، وتسمى الحالات الأعلى مع$n > 1$ الحالات المثارة.

6.II. معادلة Schrödinger المستقلة عن الزمن بالنسبة لكتلة متعلقة بالموضع:

معادلة Schrödinger بالنسبة لكتلة متعلقة بالموضع والمستقلة عن الزمن تعطى بالعلاقة [22]:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left\{[m(x)]^{\mu}\frac{\partial}{\partial x}[m(x)]^{2\eta}\frac{\partial}{\partial x}[m(x)]^{\mu}\right\}\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{II.44}$$

مع العلم ان: $\eta + \mu = \frac{-1}{2}$

في الحالة العادية في البئر الكمومي اللانهائي يكون الكمون معدوما تصبح المعادلة:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left\{[m(x)]^{\mu}\frac{\partial}{\partial x}[m(x)]^{2\eta}\frac{\partial}{\partial x}[m(x)]^{\mu}\right\}\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{II.45}$$

بوضع: $m(x)=m_0x^{\lambda}$ وبتعويض $\mu=0$ و $\eta=-\frac{1}{2}$ في المعادلة أعلاه نجد:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[m_0x^{\lambda}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{II.46}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{m_0x^{\lambda}}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{II.47}$$

بتعويض $\lambda=1$ نجد:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{m_0x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{II.48}$$

بالاشتقاق نجد:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{II.49}$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m_0x^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x)-\left(\frac{\hbar^2}{2m_0x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{II.50}$$

نضرب طرفي المعادلة في $\frac{2m_0x}{\hbar^2}$ وجعلها معادلة صفرية نجد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x)-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)+\frac{2m_0x}{\hbar^2}E\Psi(x)=0 \tag{II.51}$$

نسمي $k^2=\frac{2m_0x}{\hbar^2}$ تصبح المعادلة:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x)-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)+k^2E\Psi(x)=0 \tag{II.52}$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها من الشكل التالي:

$$\Psi(x)=c_1\acute{A}i\left(\acute{k}x\right)+c_2B'i\left(\acute{k}x\right) \tag{II.53}$$

الفصل الثالث: تطبيق الحساب الكسري في معادلة Schrödinger

الفصل الثالث

III

تطبيق الحساب الكسري في معادلة Schrödinger

III.1. مقدمة:

لقد طبق الحساب الكسري في عدة مجالات في الفيزياء. وفي العقود الأخيرة أُدخل هذا المفهوم في الميكانيك الكمي. حيث سعى الباحثون إلى إعادة صياغة المعادلات الأساسية فيه مع الحفاظ على مسلماته.

في هذا الفصل سنهتم بدراسة معادلة Schrödinger الكسرية وحلها باستعمال تعريفات مختلفة للمشتق الكسري.

III.2. معادلة Schrödinger الكسرية:

III.2.1. معادلة Schrödinger الكسرية المتعلقة بالزمن:

كما لاحظنا في الفصل السابق فإن معادلة Schrödinger المتعلقة بالزمن بالنسبة لجسيم يتحرك في فضاء ثلاثي الابعاد، وتحت تأثير الجهد $V(r,t)$، تتم كتابتها من شكل:

$$H\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \tag{III.1}$$

حيث أن H هو المؤثر الهاملتون للجسيم، و$\hbar$ هو ثابت بلانك. في ميكانيك الكم القياسية إذا كان الجسيم واقع تحت تأثير كمون $V(r,t)$ وفي حالة عدم وجود مجال مغناطيسي فإن H سيأخذ الشكل التالي:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r,t) \tag{III.2}$$

حيث $\hat{p}$ و $\hat{r}$ هما مؤثرات زخم الجسيم وإحداثيات الفضاء، ويتم اعطاؤهم كما يلي:

$$\hat{r} = r \quad , \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla \tag{III.3}$$

حيث: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$

بينما في ميكانيكا الكم الكسري، يأخذ الهاملتون H الشكل التالي[23]:

$$H_\alpha = D_\alpha |\hat{p}|^\alpha + V(\hat{r}, t) \qquad 1 < \alpha \leq 2 \tag{III.4}$$

حيث D_α هو معامل يضبط الوحدات الفيزيائية ذو البعد:

$$[D_\alpha] = erg^{1-\alpha} cm^\alpha s\, e\, c^{-\alpha} \tag{III.5}$$

بتعويض المؤثرات المعرفة في المعادلة (I.3) في (I.4) نتحصل على:

$$H_\alpha = D_\alpha(-i\hbar\nabla)^\alpha + V(r,t) \tag{III.6}$$

$$= D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} + V(r,t) \tag{III.7}$$

في معادلة Schrödinger المتعلقة بالزمن لجسيم يتحرك تحت تأثير الجهد $V(r,t)$:

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) + V(r,t)\Psi(r,t) = i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(r,t) \quad ,1 < \alpha \leq 2 \tag{III.8}$$

إذا كانت حركة الجسيم تتم في بعد واحد، فإن دالة الموجة هي دالة أحادية المتغير للفضاء. في هذه الحالة، تعتمد معادلة Schrödinger للجسيم على متغير فضائي واحد فقط. ومنه يكتب الهاملتون (III.7) كما يلي:

$$H_\alpha = -D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha + V(x,t) \tag{III.9}$$

وتصبح معادلة Schrödinger المتعلقة بالزمن في بعد واحد معرفة كما يلي:

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \quad ,1 < \alpha \leq 2 \tag{III.10}$$

III.2.2. معادلة Schrödinger الكسرية غير المتعلقة بالزمن:

ولأن العديد من المشاكل في ميكانيك الكم، الكمون V ليس دالة زمنية فإنه في هذه الحالة يمكننا أن نستعمل طريقة فصل المتغيرات ونكتب دالة الموجة $\Psi(x,t)$ كجداء لدالتين مستقلتين أي:

$$\Psi(x.t) = f(t)\Psi(x) \tag{III.11}$$

نعوض المعادلة (III.11) في معادلة Schrödinger الكسرية (III.10) فنجد:

$$-D_\alpha f(t)(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x)+V(x)f(t)\Psi(x)=i\hbar\Psi(x)\frac{\partial}{\partial t}f(t)\quad ,1<\alpha\leq 2 \qquad (III.12)$$

بالقسمة على $f(t)\Psi(x)$ نجد:

$$\frac{1}{\Psi(x)}\left(-D_\alpha\hbar^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\Psi(x)+V(x)\Psi(x)\right)=i\hbar\frac{\frac{\partial}{\partial t}f(t)}{f(t)} \qquad (III.13)$$

وبما أن الجانب الأيمن من المعادلة (III.13) يعتمد فقط على الزمنt، أما الجانب الأيسر فيعتمد على الموضع x، فإن كلاهما في الواقع يساويان ثابتا جعلناه يساوي E. فيصبح لدينا معادلتين:

$$i\hbar\frac{\frac{\partial}{\partial t}f(t)}{f(t)}=E \qquad (III.14)$$

$$\frac{1}{\Psi(x)}\left(-D_\alpha\hbar^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\Psi(x)+V(x)\Psi(x)\right)=E \qquad (III.15)$$

إن حل المعادلة (III.14) هو $f(t)=\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$ وتصبح المعادلة (III.15):

$$\frac{1}{\Psi(x)}\left(-D_\alpha\hbar^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\Psi(x)+V(x)\Psi(x)\right)=E \qquad (III.16)$$

ومنه تكتب دالة الموجة من الشكل:

$$\Psi(x,t)=\Psi(x)\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right) \qquad (III.17)$$

هذا الحل ثابت لأن احتمال العثور على الجسيم عند x مستقل عن الوقت $|\Psi(x,t)|^2=|\Psi(x)|^2$.

نحصل أخيرًا على معادلة Schrödinger المستقلة عن الزمن (أو الثابتة):

$$-D_\alpha\hbar^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\Psi(x)+V(x)\Psi(x)=E\Psi(x) \qquad (III.18)$$

III.2.3. مؤثر هاملتون الكسري:

إن كسر الهاملتون المحدد في المعادلة (III.9) هو عامل مساعد ذاتي في الفراغ الممنوح بمنتج داخل:

$$\langle\emptyset,\chi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\emptyset^*(x,t)\chi(x,t) \qquad (III.19)$$

لإثبات H_α ، لاحظ أنه وفقا لتعريف مشتق Riesz الكمي المعطى في المعادلة (III.12) من الفصل الأول، فإن التكامل بالأجزاء يعطي الصيغة:

$$\langle \emptyset, (\hbar\nabla)^\alpha \chi \rangle = \langle (\hbar\nabla)^\alpha \emptyset \chi \rangle \tag{III.20}$$

متوسط الطاقة لنظام الكم الجزئي مع الهاملتون H_α هو:

$$E_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x,t) H_\alpha \Psi(X,T) = \langle \Psi, H_\alpha \Psi \rangle \tag{III.21}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار المعادلة (III.20) لدينا:

$$E_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x,t) H_\alpha \,\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(H_\alpha^+ \Psi(x,t)\right)^* \Psi ç(x,t) = E_\alpha^* \tag{III.22}$$

كنتيجة مادية، فإن طاقة النظام حقيقية. وهكذا فإن الهاملتون الكسري H_α المحدد بالمعادلة (III.9) هو عامل هيرميتي أو عامل مساعد ذاتي في الفضاء الممنوح بواسطة المنتج الداخلي المحدد في المعادلة (III.21).

$$(\emptyset, H_\alpha \chi) = (H_\alpha^+ \emptyset, \chi) \tag{III.23}$$

نلاحظ أن المعادلة (III.10) تؤدي إلى المعادلة المهمة التالية:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dt \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) = 0 \tag{III.24}$$

مما يدل على أن وظيفة الموجه تظل طبيعية.

3.III حل معادلة Schrödinger الكسرية في بئر كمون لانهائي:

نسعى في هذا الجزء الى حل معادلة Schrödinger الكسرية في بئر كمون لانهائي باستعمال تعريفات مختلفة للمشتق.

لنعتبر جسيم في بئر كمومي لانهائي (لاحظ الشكل 01 من الفصل الثاني)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & Ailleurs \end{cases} \tag{III.25}$$

بما أن جدران البئر لانهائية فإن احتمال تواجد الجسيم خارج البئر معدوم وعليه:

$$\Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_{\mathrm{III}} = 0 \tag{III.26}$$

ومما سبق وجدنا أن معادلة Schrödinger الكسرية غير المتعلقة بالزمن لهذا الجسيم تكتب من الشكل:

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x)+V(x)\Psi(x)=E\Psi(x) \qquad \text{(III.27)}$$

مع العلم أن: $E=D_\alpha|P|^\alpha$ هي الطاقة الكلية للجسيم.

وبما أن $V(x)=0$ من أجل $x\epsilon[0;a]$ فإن معادلة Schrödinger الكسرية تصبح:

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x)=E\Psi(x) \qquad \text{(III.28)}$$

نهتم في هذا الجزء بحل هذه المعادلة الأخيرة باستعمال مشتق Riesz ، fabrizo-capoto وkhalil.

III.3.1. حل معادلة Schrödinger باستعمال مشتق Riesz:

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x)=E\Psi(x) \qquad \text{(III.29)}$$

بحيث $(\hbar\nabla)^\alpha$ هي المشتق الكسري لرايسز المعرف في الفصل الأول.

بالقسمة على $D_\alpha\hbar^\alpha$ نجد:

$$\nabla^\alpha\Psi(x)=-\frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}\Psi(x) \qquad \text{(III.30)}$$

لنجعل المعادلة صفرية:

$$\nabla^\alpha\Psi(x)+\frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}\Psi(x)=0 \qquad \text{(III.31)}$$

بوضع $k^\alpha=\frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}$ تصبح المعادلة الأخيرة لها الشكل:

$$\nabla^\alpha\Psi(x)+k^\alpha\Psi(x)=0 \qquad \text{(III.32)}$$

هذه المعادلة التفاضلية (II.36) تقبل حلا عاما من الشكل:

$$\Psi(x)=A\sin(kx)+B\cos(kx) \qquad x\le a \qquad \text{(III.33)}$$

حيث A و B أعداد مركبة.

ومن أجل ايجاد الثوابت A و B نقوم بتطبيق الشروط الحدية:

$$\Psi(a)=\Psi(0)=0 \qquad \text{(III.34)}$$

$$\Psi(0) = Asin(k0) + \mathrm{B}\cos(k0) = 0 \qquad (III.35)$$

ومنه $B = 0$

وبتطبيق الشرط الثاني ووضع فيه $B = 0$

$$\Psi(a) = A\sin(ka) = 0 \qquad (III.36)$$

$$ka = n\pi \qquad (III.37)$$

$$k = \frac{n\pi}{a} \qquad (III.38)$$

والدوال الموجية:

$$\Psi(x) = A\sin\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{a}x\right) \qquad x \le a \qquad (III.39)$$

يتم تحديد الثابت A من العبارة السابقة باستخدام شرط التنظيم:

$$\int_0^{+a} |\Psi(x)|^2 = \mathrm{A}^2 \int_0^{+a} \sin^2\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{a}(x)\right) = 1 \qquad (III.40)$$

فنجد أنّ: $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$.

وأن العبارة الأخيرة للدالة الموجية المتعلقة بالزمن هي:

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{a}(x)\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{\mathrm{iE}}{\hbar}\mathrm{t}\right)} \qquad \mathrm{n} = 1,2,3 \ldots \qquad (III.41)$$

في خطوة سابقة قمنا بوضع $k^\alpha = \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha}$ الآن نقوم بمطابقة مع المعادلة (III.38) فنجد:

$$k^\alpha = \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^\alpha \qquad (III.42)$$

ومنه نستنتج أنَ عبارة الطاقة تكتب كالتالي:

$$E = D_\alpha \hbar^\alpha \left(\frac{n\pi}{a}\right)^\alpha = \frac{D_\alpha \hbar^\alpha n^\alpha \pi^\alpha}{a^\alpha} \qquad (III.43)$$

للتحقق من صحة الحل نضع $\alpha = 2$ مع $D_\alpha = \frac{1}{2m}$ فنجد نفس النتائج المحصل عليها في الفصل السابق:

$$E = \frac{D_\alpha \hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} \qquad (III.44)$$

III.2.3. حل معادلة Schrödinger باستعمال مشتق fabrizo–capoto:

مما سبق وجدنا معادلة Schrödinger غير المتعلقة بالزمن في بعد واحد داخل بئر كمون لانهائي تكتب من الشكل:

$$-D_\alpha \hbar^\alpha \nabla^\alpha \Psi = \mathrm{E}\Psi \tag{III.45}$$

$$\nabla^\alpha \Psi = -\frac{E\Psi}{D_\alpha \hbar^\alpha} \tag{III.46}$$

بوضع $\alpha = \gamma + 1$ تأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$\nabla^{\gamma+1}\Psi = -\frac{E\Psi}{D_\alpha \hbar^\alpha} \tag{III.47}$$

$$\nabla^\gamma \nabla \Psi = -\frac{E\Psi}{D_\alpha \hbar^\alpha} \tag{III.48}$$

المعادلة (III.48) يمكن إعادة كتابتها

$$\nabla^\gamma g(x) = u(x) \tag{III.49}$$

حيث أنّ:

$$g(x) = \nabla\Psi \tag{III.50}$$

$$u(x) = -\frac{E\Psi}{D_\alpha \hbar^\alpha} \tag{III.51}$$

إن حلول المعادلة التفاضلية الكسرية (III.49) تعطى بالعلاقة[24]:

$$g(x) = (1-\gamma)[u(x) - u(0)] + \gamma \int_0^x u(s)ds + g(0) \tag{III.52}$$

بالاشتقاق نجد:

$$g'(x) = (1-\gamma)u'(x) + \gamma u(x) \tag{III.53}$$

بتعويض $u(x)$:

$$\Psi''(x) = -(1-\gamma)\,\frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha}\Psi'(x) - \gamma\frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha}\Psi(x) \tag{III.54}$$

لنحل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\Psi''(x) + (1-\gamma)\, \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} \Psi'(x) + \gamma \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} \Psi(x) = 0 \qquad \text{(III.55)}$$

وبهذا نكون قد حولنا معادلة Schrödinger الكسرية إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

لحل المعادلة التفاضلية (III.55) نكتب المعادلة المميزة لها:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(III.56)}$$

تجدر الإشارة إلى أن: $c = \gamma \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha}$ و $a = 1, \; b = (1-\gamma) \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha}$

إن حل المعادلة المميزة تتعلق بإشارة المميز:

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \text{(III.57)}$$

$$\Delta = (1-\gamma)^2 \frac{\mathrm{E}^2}{{D_\alpha}^2 \hbar^{2\alpha}} - 4\gamma \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} \qquad \text{(III.58)}$$

$$= \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} \left[(1-\gamma)^2 \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} - 4\gamma \right] \qquad \text{(III.59)}$$

وبهذا نميز الحالات التالية:

حالة1: $\Delta \geq 0$

في هذه الحالة حل المعادلة (III.55) هو:

$$\Psi(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \qquad \text{(III.60)}$$

بحيث يعرف كل من r_1 و r_2 بالعلاقات التالية:

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ r_2 = -\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \qquad \text{(III.61)}$$

وبتطبيق الشروط الحدية عند جدران البئر الكموني:

- الشرط $\Psi(0) = 0$

$$\Psi(0) = Ae^{r_1 0} + Be^{r_2 0} = 0 \qquad \text{(III.62)}$$

$$A = -B \tag{III.63}$$

- الشرط $\Psi(a) = 0$

$$\Psi(a) = Ae^{r_1 a} - Ae^{r_2 a} = 0 \tag{III.64}$$

$$\Psi(a) = Ae^{-\frac{(1-\gamma)Ea}{2D_\alpha \hbar^\alpha}}\left(e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}a} - e^{\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}a}\right) = 0 \tag{III.65}$$

$$= 2Ae^{-\frac{(1-\gamma)Ea}{2D_\alpha \hbar^\alpha}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}a\right) = 0 \tag{III.66}$$

$$\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}a\right) = 0 \tag{III.67}$$

هذه المعادلة محققة إذا وفقط إذا كان: $\Delta = 0$

$$\Delta = (1-\gamma)^2 \frac{E^2}{{D_\alpha}^2 \hbar^{2\alpha}} - 4\gamma \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} = 0 \tag{III.68}$$

$$E = \frac{4\gamma}{(1-\gamma)^2} D_\alpha \hbar^\alpha \tag{III.69}$$

ومنه:

$$\Psi(x) = 2Ae^{-\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha}x} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right) \tag{III.70}$$

يتم تحديد الثابت A من العبارة السابقة باستخدام شرط التنظيم:

$$\int_0^{+a} |\Psi(x)|^2 = 4A^2 \int_0^{+a} e^{-\frac{2(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha}x} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right) = 1 \tag{III.71}$$

فنجد أنّ:

$$A = \frac{1}{4\sqrt{\int_0^{+a} e^{-\frac{2(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha}x} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right)}} \tag{III.72}$$

$$A = \left(\frac{(b^3 - 4bc)}{2e^{-ab}\left[4c^2\left(e^{ab}-1\right) - b(b\cosh(2ac) + 2\sinh(2ac)) + b^2\right]}\right)^{1/2} \tag{III.73}$$

بحيث: $b = \frac{(1-\gamma)E}{D_\alpha \hbar^\alpha}$ و $c = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \left((1-\gamma)^2 \frac{E^2}{4{D_\alpha}^2 \hbar^{2\alpha}} - \gamma \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha}\right)^{1/2}$.

حالة2: $\Delta < 0$

في هذه الحالة تعطى دالة الموجة بالعبارة:

$$\Psi(x) = e^{px}[\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)] \tag{III.74}$$

بحيث:

$$\begin{cases} r_1 = p + iq = -\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha\hbar^\alpha} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ r_2 = p - iq = -\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha\hbar^\alpha} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \tag{III.75}$$

مع العلم أن:

$$p = -\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha\hbar^\alpha} \tag{III.76}$$

$$q = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \tag{III.77}$$

بتطبيق الشروط الحدية عند الجدران اللانهائية للبئر الكمومي يكون:

1- عند $x = 0$

$$\Psi(0) = 0 \tag{III.78}$$

$$e^{p\times 0}[\alpha\cos(q\times 0) + \beta\sin(q\times 0)] = 0 \tag{III.79}$$

ومنه:

$$\alpha = 0 \tag{III.80}$$

2- عند $x = a$

$$\Psi(a) = 0 \tag{III.81}$$

$$\Psi(a) = e^{pa}[\beta\sin(qa)] = 0 \tag{III.82}$$

$$= \beta\sin(qa) = 0 \tag{III.83}$$

$$q = \frac{n\pi}{a} \tag{III.84}$$

ومنه:

$$\Psi(x) = e^{px}\left[\beta \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] \qquad \text{(III.85)}$$

ومنه الدالة الموجية هي:

$$\Psi(x) = e^{-\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha}x}\left[\beta \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] \qquad \text{(III.86)}$$

يتم تحديد الثابت β من العبارة السابقة باستخدام شرط التنظيم:

$$\int_0^{+a}|\Psi(x)|^2 = \beta^2 \int_0^{+a} e^{-\frac{2(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha}x} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}(x)\right) = 1 \qquad \text{(III.87)}$$

فنجد أنّ: $\beta = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

وأن العبارة الأخيرة للدالة الموجية المستقلة عن الزمن هي:

$$\Psi(x) = e^{-\frac{(1-\gamma)E}{2D_\alpha \hbar^\alpha}x}\left[\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] \qquad \text{(III.88)}$$

بالمطابقة بين العبارة (III.77) والعبارة (III.84) نجد:

$$q = \frac{n\pi}{a} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \qquad \text{(III.89)}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$q^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} = -\frac{\Delta}{4} \qquad \text{(III.90)}$$

$$q^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} = -(1-\gamma)^2 \frac{E^2}{4{D_\alpha}^2 \hbar^{2\alpha}} + \gamma \frac{E}{D_\alpha \hbar^\alpha} \qquad \text{(III.91)}$$

للتحقق من صحة النتيجة نقوم بتعويض $\alpha = 2$ أي $\gamma = 1$ و $D_\alpha = \frac{1}{2m}$.

من العبارة (III. 92) نجد عبارة الطاقة في الحالة القياسية:

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \qquad \text{(III.93)}$$

وهي عبارة الطاقة في الحالة العادية المذكورة سابقا في الفصل الثاني.

وبتعويض $\gamma = 1$ في دالة الموجة نجد:

$$\Psi(x) = \left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] \qquad \text{(III.94)}$$

وهو الحل المطابق لحل معادلة Schrödinger العادية كما هو موضح في الفصل السابق.

III.3.3. حل معادلة Schrödinger باستعمال تعريف Khalil الكسري:

مما سبق وجدنا أن معادلة Schrödinger الكسرية لبئر كمون لانهائي تعطى بالمعادلة:

$$-D_\alpha \hbar^\alpha \nabla^\alpha \Psi(x) = E\Psi(x) \qquad \text{(III.95)}$$

بوضع: $D_\alpha = \frac{D^{-[\alpha]+\alpha}}{(2m)^{\frac{[\alpha]}{2}}}$

حيث المقدار $D^{-[\alpha]+\alpha}$ له البعد $[D] = Length$.

ووضع: $\nabla^{(\alpha)} = x^{[2]-\alpha}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}$

تكون معادلة Schrödinger بتعريف خليل كالاتي:

$$\frac{\hbar^{[2]}D^{-[2]+\alpha}}{(2m)^{\frac{[2]}{2}}}\left(x^{[2]-\alpha}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\Psi^{[2]}(x)\right) + E^{(\alpha)}\Psi^{(\alpha)}(x) = 0 \qquad \text{(III.96)}$$

حيث $E^{(\alpha)}$ له بعد الطاقة و $\alpha \in (1,2]$.

مع العلم أن $[\alpha] = 2$ تكون المعادلة:

$$\frac{\hbar^2 D^{-2+\alpha}}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)\right) + E^{(\alpha)}\Psi(x) = 0 \qquad \text{(III.97)}$$

ويمكن كتابة هذه الأخيرة من الشكل:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE^{(\alpha)}}{\hbar^2 D^{-2+\alpha}}x^{\alpha-2}\Psi(x) = 0 \qquad \text{(III.98)}$$

بوضع: $k^2 = \frac{2mE^{(\alpha)}}{\hbar^2 D^{-2+\alpha}}$

ومنه:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+k^2x^{\alpha-2}\Psi(x)=0 \tag{III.99}$$

إن حل المعادلة اعلاه هو:

$$\Psi^{(\alpha)}(x)=(b+2)^{\frac{-1}{(b+2)}}C_1\sqrt{x}^{2b+4}\sqrt{a}\Gamma\left(\frac{b+1}{b+2}\right)J_{\frac{-1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}x^{\frac{b}{2}+1}}{b+2}\right)+(b+2)^{\frac{-1}{(b+2)}}C_2J_{\frac{-1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}x^{\frac{b}{2}+1}}{b+2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{b+2}\right) \tag{III.100}$$

حيث $b=\alpha-2$ و $a=k^2$ تصبح المعادلة كالاتي:

$$\Psi^{(\alpha)}(x)=\alpha^{\frac{-1}{\alpha}}C_1\sqrt{x}^{2\alpha}k^2\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)J_{\frac{-1}{\alpha}}\left(\frac{2kx^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha}\right)+\alpha^{\frac{-1}{\alpha}}C_2\sqrt{x}^{2\alpha}k^2J_{\frac{-1}{\alpha}}\left(\frac{2kx^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \tag{III.101}$$

حيث $J_r(\dots)$ و $J_{-r}(\dots)$ هما النوع الأول من دالة Bessel $\Gamma(\dots)$ هي دالة Gamma. نضع $r=\frac{1}{\alpha}$ ، $k^{(\alpha)}=\frac{2\sqrt{2mE}}{\alpha\hbar}D^{\frac{2-\alpha}{2}}$ و $G(x)=(k^{(\alpha)})^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{1}{2}}$.

ومنه تكون المعادلة كما يلي:

$$\Psi^{(\alpha)}(x)=G(x)[C_1^{(\alpha)}J_{-r}\left(k^{(\alpha)}x^{\frac{\alpha}{2}}\right)\Gamma(1-r)+C_2^{(\alpha)}J_r\left(k^{(\alpha)}x^{\frac{\alpha}{2}}\right)\Gamma(1+r)] \tag{III.102}$$

و يمكننا كتابة:

$$\Psi^{(\alpha)}(x)=G(x)[C_1^{(\alpha)}J_{-r}\left(k^{(\alpha)}x^{\frac{\alpha}{2}}\right)+C_2^{(\alpha)}J_r\left(k^{(\alpha)}x^{\frac{\alpha}{2}}\right)] \tag{III.103}$$

لإجاد $C_1^{(\alpha)}$ نقوم بتطبيق شروط الحدية على $x=0$ ، نجد $C_1^{(\alpha)}=0$.

وعليه تصبح المعادلة (III.103) كما يلي:

$$\Psi^{(\alpha)}(x)=C_2^{(\alpha)}G(x)J_r(k^{(\alpha)}x^{\frac{\alpha}{2}}) \tag{III.104}$$

ولتحديد قيمة الثابت $C_2^{(\alpha)}$ من شرط التنظيم:

$$\int_0^a\left|\Psi^{(\alpha)}(x)\right|^2=\left(C_2^{(\alpha)}\right)^2\int_0^a G(x)J_r\left(k^{(\alpha)}x^{\frac{\alpha}{2}}\right)=1 \tag{III.105}$$

نتحصل على:

$$C_2^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\alpha}(k_n^{(\alpha)})^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^{k^{(\alpha)}L^2} \left[(X_n^{(\alpha)})^{\frac{4}{\alpha}-1} \left(J_r\left(X_n^{(\alpha)}\right)\right)^2 \right] dX_n^{(\alpha)}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\Gamma(1+r)}{2^{-\frac{1}{\alpha}}\left(k^{(\alpha)}\right)^{\frac{2}{\alpha}} a^3 \sqrt{\frac{\blacksquare}{2} F_3\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha},\frac{3}{\alpha}\right);\left(1+\frac{1}{\alpha},1+\frac{2}{\alpha},1+\frac{3}{\alpha}\right);-k^{(\alpha)2}a^{\alpha}\right)}} \quad \text{(III.106)}$$

حيث $X_n^{(\alpha)} = k^{(\alpha)} x^{\frac{\alpha}{2}}$.

شرط الحدود على $x = a$ هو $\Psi^{(\alpha)}(a) = 0$، وبالتالي نجد:

$$J_r\left(k_n^{(\alpha)} a^{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0 \quad \text{(III.107)}$$

$X_n^{(\alpha)} = k_n^{(\alpha)} a^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt[2]{2m\varepsilon_n^{(\alpha)}}}{\alpha\hbar} D^{\frac{2-\alpha}{2}} a^{\frac{\alpha}{2}}$ هي اصفار دالة Bessel ($n = 0,1,2 \ldots$).

أخيرًا يمكن أن يتغير المعادلة (III.104) إلى النموذج التالي:

$$\Psi_n^{(\alpha=1)}(x) = C_2^{n,(\alpha)} G_n(X) J_r\left(k_n^{(\alpha)} a^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{(III.108)}$$

يمكننا الحصول على قيم الطاقة المقابلة لها $E_n^{(\alpha)}$ ، من المعادلة التالية:

$$k_n^{(\alpha)} = \frac{X_n^{(\alpha)}}{a^{\frac{\alpha}{2}} D^{\frac{2-\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt[2]{2mE_n^{(\alpha)}}}{\alpha\hbar} \quad \text{(III.109)}$$

ومنه نتحصل على بعد الطاقة التالي:

$$E_n^{(\alpha)} = \frac{\alpha\hbar X_n^{(\alpha)}}{8ma^{\frac{\alpha}{2}} D^{\frac{2-\alpha}{2}}} \quad \text{(III.110)}$$

ولدينا شرط ($n = 0,1,2 \ldots$) $k_n^{(\alpha=2)} a = n\pi$ و $E^{(\alpha=2)} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

يمكن التحقق من أن $E_n^{(\alpha)}$ لديها طاقة عند تعويض $\left[X_n^{(\alpha)}\right] = 1$، $[D] = a$ و $[\alpha] = 1$ تصبح:

$$E_n^{(\alpha)} = \frac{\hbar}{8ma} \quad \text{(III.111)}$$

للتحقق من صحة الحل نضع $\alpha = 2$ فنجد نفس النتائج المحصل عليها في الفصل السابق:

III.3.4. حل معادلة Schrödinger الكسرية لجسيم مع كتلة تعتمد على الموضع في IPW:

جذبت الكتلة المعتمدة على الموضع (PDM) اهتمامًا كبيرًا في السنوات الأخيرة بسبب تطبيقاتها في فيزياء الجسيمات والنووية وأشباه الموصلات والمادة المكثفة [25]. لأنه في بعض المشاكل، نحصل على الحل التقريبي فقط، يمكننا استخدام تقنيات كسور لتقريب النتائج التجريبية. في هذا القسم، نحاول الحصول على معادلة Schrödinger لجسيم PDM في IPW.

بالنسبة لجسيم مع الكتلة المعتمدة على الموضع في بئر كمون لانهائي في بعد واحد و $V(x)=0$.

وبدءا من المعادلة (I.66)، يمكننا الكتابة:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\Psi^{\alpha}(x)=x^{([\alpha]-\alpha)}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\Psi^{\alpha}(x) \tag{I.66}$$

لذلك، يمكن كتابة الشكل الكسري لمعادلة فون روز [26] وكروز [27-28] على النحو التالي:

$$\frac{-\hbar^{2[\alpha]}D^{-2[\alpha]+2\alpha}}{2^{[\alpha]}}\left\{[m(x)]^{\mu}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}[m(x)]^{2\eta}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}[m(x)]^{\mu}\right\}\Psi^{\alpha}(x)=E^{\alpha}\Psi^{\alpha}(x) \tag{III.112}$$

حسب المعادلة (I.66) وبالنسبة لمعادلة Schrödinger العادية عند $\alpha=1$ يجب ان نختار $\alpha\in(0,1]$.

- **الحالة 1:** بتعويض $\mu=0$ ، $\eta=\frac{-1}{2}$ و $\alpha\in(0,1]$.

$$\frac{-\hbar^{2[\alpha]}D^{-2[\alpha]+2\alpha}}{2^{[\alpha]}}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}m(x)^{-1}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{III.113}$$

نسمي $A=\frac{-\hbar^{2[\alpha]}D^{-2[\alpha]+2\alpha}}{2^{[\alpha]}}$ تصبح:

$$\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}m(x)^{-1}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\Psi(x)=\frac{E}{A}\Psi(x) \tag{III.114}$$

$$\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\frac{x^{1-\alpha}}{m(x)}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\Psi(x)=\frac{E}{A}\Psi(x) \tag{III.115}$$

نضع $g(x)=\frac{x^{1-\alpha}}{m(x)}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\Psi(x)$

$$x^{1-\alpha}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}g(x)=\frac{E}{A}\Psi(x) \tag{III.116}$$

نختار $m(x)=m_0x^{\lambda}$ نجد:

$$x^{1-\alpha}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\frac{x^{1-\alpha}}{m_0 x^{\lambda}}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\Psi(x)=\frac{E}{A}\Psi(x) \qquad \text{(III.117)}$$

$$\frac{x^{1-\alpha}}{m_0}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}x^{1-\alpha-\lambda}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\Psi(x)=\frac{E}{A}\Psi(x) \qquad \text{(III.118)}$$

$$x^{1-\alpha}(1-\alpha-\lambda)x^{-\alpha-\lambda}\frac{d}{dx}\Psi(x)+x^{1-\alpha-\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{Em_0}{A}\Psi(x) \qquad \text{(III.119)}$$

ومنه يكون حل المعادلة (III.112) كما يلي:

$$x^{2-2\alpha-\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+(1-\alpha-\lambda)x^{1-2\alpha-\lambda}\frac{d}{dx}\Psi(x)+\frac{Em_0}{A}\Psi(x)=0 \qquad \text{(III.120)}$$

إن حل المعادلة أعلاه متعلق بقيم α و λ لذلك سنهتم بدراسة بعض الحالات:

- لما $\alpha = 1$ و $\lambda = 1$ نجد:

$$x^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)-x^{-2}\frac{d}{dx}\Psi(x)+\frac{Em_0}{A}\Psi(x)=0 \qquad \text{(III.121)}$$

نسمي: $k^2=\frac{Em_0}{A}=\frac{2m_0E}{\hbar^2 D^{-2+\alpha}}$ فتتصبح لدينا:

$$x^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)-x^{-2}\frac{d}{dx}\Psi(x)+k^2\Psi(x)=0 \qquad \text{(III.122)}$$

حل هذه المعادلة التفاضلية (III.122) من الشكل:

$$\Psi(x)=C_1\acute{A}i(\acute{k}x)+C_2B'i(\acute{k}x) \qquad \text{(III.123)}$$

حيث $\acute{A}i(\dots)$ و $B'i(\dots)$ مشتقات من النوع الأول والثاني من دالة Ariy.

- لما $\alpha = \frac{1}{2}$ ، $\lambda = 1$ ، تصبح المعادلة (III.120) كما يلي:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\Psi(x)+k^2\Psi(x)=0 \qquad \text{(III.124)}$$

حلها يعطى من الشكل:

$$\Psi(x)=x^{3/4}\left\{C_1J_{3/4}(kx)+C_2Y_{3/4}(kx)\right\} \qquad \text{(III.125)}$$

حيث $k=\frac{\sqrt{2m_0DE}}{\hbar}$ و $J\dots(\dots)$ و $Y\dots(\dots)$ هما النوعان الأول والثاني من دوال Bessel على التوالي.

يمكن الحصول على المعاملات C_1 و C_2 ومستويات الطاقة E عن طريق تطبيق الشروط الحدية للدالة.

$$\Psi_n^{(\alpha=1/2)}(0)=0 \quad \rightarrow \quad C_2^{n,\alpha}=0 \tag{III.126}$$

بالتعريف $y_n^{(\alpha)}(x)=k_n^{(\alpha)}x^{3/4}$ و $C_1^{n,\alpha}=\frac{C_1^{n,\alpha=1/2}}{\left(k_n^{(\alpha)}\right)^{3/4}}$ لدينا:

$$\Psi_n^{(\alpha=1/2)}(x)=C'^{n,\alpha}_1\left(y_n^{(\alpha)}(x)\right)^{\frac{3}{4}}J_{3/4}\left(y_n^{(\alpha)}(x)\right) \tag{III.127}$$

$\Psi_n^{(\alpha=1/2)}(a)=0$ هي اصفار دالة Bessel

يمكن العثور على مستويات الطاقة من خلال أصفار دالة Bessel.

$$E_n^{(\alpha)}=\frac{\hbar^2\left(y_n^{(\alpha=1/2)}\right)^2}{2Dm_0a^{3/2}} \tag{III.128}$$

$y_n^{(\alpha=\frac{1}{2})}$ هي اصفار دالة Bessel $J_{\frac{3}{4}}\left(y_n^{(\alpha)}\right)$

- لما $\alpha=\frac{1}{4}$ و $\lambda=1$ في هذه الحالة تصبح المعادلة (III.120) كالاتي:

$$\sqrt{x}\,\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)-\frac{1}{4\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\Psi(x)+k^2\Psi(x)=0 \tag{III.129}$$

حلها من الشكل:

$$\Psi(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{5/6}C_1k^{5/6}x^{5/8}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)J_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{4}{3}kx^{3/4}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^{5/6}C_2k^{5/6}x^{5/8}\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)J_{\frac{5}{6}}\left(\frac{4}{3}kx^{3/4}\right) \tag{III.130}$$

$$\Psi_n^{(\alpha=1/4)}(0)=0 \quad \rightarrow \quad C_1^{n,\alpha}=0 \tag{III.131}$$

حيث الطاقة

$$E_n^{(\alpha)}=\frac{9\hbar^2\left(y_n^{(\alpha=1/4)}\right)^2}{32D^{3/2}m_0a^3} \tag{III.132}$$

$y_n^{(\alpha=\frac{1}{4})}$ هي اصفار دالة Bessel $J_{\frac{5}{6}}\left(y_n^{(\alpha)}\right)$

- لما $\alpha=\frac{4}{5}$ و $\lambda=1$ في هذه الحالة تصبح المعادلة (III.120) كالاتي:

$$x^{\frac{-3}{5}}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)-\frac{4}{5}x^{\frac{-8}{5}}\frac{d}{dx}\Psi(x)+k^2\Psi(x)=0 \tag{III.133}$$

حل هذه المعادلة من الشكل:

$$\Psi(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^{\frac{9}{13}} C_1 k^{\frac{9}{13}} x^{\frac{9}{10}} \Gamma\left(\frac{4}{13}\right) J_{-\frac{9}{13}}\left(\frac{10}{13} k x^{\frac{13}{10}}\right) + \left(\frac{5}{13}\right)^{\frac{9}{13}} C_2 k^{\frac{9}{13}} x^{\frac{9}{10}} \Gamma\left(\frac{22}{13}\right) J_{\frac{9}{13}}\left(\frac{10}{13} k x^{\frac{13}{10}}\right) \qquad \text{(III.134)}$$

تعطى الطاقة كما يلي:

$$E_n^{(\alpha)} = \frac{169\hbar^2\left(y_n^{(\alpha=4/5)}\right)^2}{100 D^{2/5} m_0 a^{26/10}} \qquad \text{(III.134)}$$

الخاتمة العـــــــــــــــــــــــامة

الخاتمة العامة:

قمنا في هذه المذكرة لتطبيق الحساب الكسري في مكانيك الكم والذي هو عبارة عن تعميم لمكانيك الكم الأساسي اكتشفه laskin . هدفنا هو حل معادلة شرودنغر الكسرية لجسيم في بئر كمون لا نهائي لما تكون الكتلة متعلقة بالموضع، وإيجاد عبارة الدالة الموجية وكدا عبارة الطاقة ذلك باستعمال مشتق Khalil.

بدأنا في الفصل الأول من المذكرة بدراسة بعض المفاهيم الأساسية للحساب الكسري والمتمثلة في دوال خاصة ومشتقات كسرية مختلفة. بعد ذلك تطرقنا لمعادلة Schrödinger المتعلقة بالزمن وغير المتعلقة بالزمن، وحل هاته الأخيرة لجسيم في بئر كمون لا نهائي الكتلة ثابتة ثم كتلة متغيرة.

اختتاما بدراسة معادلة Schrödinger الكسرية المستقلة عن الزمن لجسيم في علبة كمومية وحلها باستعمال المشتقات الكسرية المختلفة Riesz، Caputo- Fabrizio و Khalil حينما تكون الكتلة ثابتة، بعد ذلك حلها أين تكون الكتلة متعلقة بالموضع باستعمال مشتق Khalil.

المراجـــع

قائمة المراجع

[1] Hilfer, R. (Ed.). (2000). Applications of fractional calculus in physics. World scientific.

[2] Tarasov, V. E., & Zaslavsky, G. M. (2006). Fractional dynamics of coupled oscillators withlong-range interaction. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 16(2), 023110.

[3] Tarasov, V. E. (2005). Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles.Physics of plasmas, 12(8), 082106.

[4] Korichi, Z., & Meftah, T. (2016). Etude de systèmes statistiques dans diverses dimensionsd’espace basée sur une mécanique quantique fractionnaire (Doctoral dissertation).

[5] Gómez-Aguilar, J. F., Escobar-Jiménez, R. F., López-López, M. G., & Alvarado-Martínez,V. M. (2016). Atangana-Baleanu fractional derivative applied to electromagnetic waves indielectric media. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 30(15), 1937-1952.

[6] Laskin, N. (2000). Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals. Physics Letters A,268(4-6), 298-305.

[7] Golmankhaneh, A. K., Golmankhaneh, A. K., & Baleanu, D. (2011). On nonlinear fractional Klein–Gordon equation. Signal Processing, 91(3), 446-451.

[8] Raspini, A. (2000). Dirac equation with fractional derivatives of order 2/3. FIZIKA B-ZAGREB-, 9(2), 49-54.

[9] K.S.MILLER and B.ROSS,An.Introduction to the fractional calculs and Fractional Differantial Equations,JOHN WILEY & SONS,INC

[10] Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives,fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.Elsevier.9.

[11] Bouzenna,F.,& Meftah, T. (2020).Etude de la condensation de Bose-Einstein g´en´eralis´ee dans diverses dimensions d’espace bas´ee sur une m´ecanique quantique fractionnaire(Doctoraldissertation).

[12] S.Das ,(2008),Functional Fractional Calculus for System Identification andcontrol , Springer – velrlag Berlin

[13] I.Podlubny,Fractional differential equations,Academic Press,NewYork,London,Uk,1999 .

[14] I.S.GradshteyTabn and I.M.Ryzhik,Table of Integrals ,Series, andProducts,7th edition,2007,Edited by A.Jeffrey and D.Zwillinger .AcademicPress,New York.

[15] A.A.Kilbos,Srisvastava,H.M.Trujillo,J.J.(2006).theory and applications offractional differentialequations.Elsevier,North_Holland.

[16] A.A.Kilbas,Srisvastava,H.M.Trujillo,J.J.(2006).Theory and application of fractional differential equation.Elsevier,North_Holland.

[17] K.B.Olldham,Spanier,J,(1974),the fractional calculus:theory and Applicationsof Differentiation and Integration to Arbitrary Order,Academic press,Inc.

[18] M.Caputo and M.Fabrizio: A new definition of fractional derivative withoutsingular kernel ,progr.fract. differ. Appl 1 (2015), 1-13.

[19] J.Losada and J.J.Nieto:Properties of a new fractional derivative withoutsingular kernel,progr.fract.Differ. Appl 1 (2015),87-92.

[20] K.B. Oldham and J. Spanier. The Fractional Calculus. Academic Press, New York, 1974.

[21] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, “A new definition of fractionalderivative”, Journal of Computational and Applied Mathematics 264, 65–70 (2014).

[22] B. G. da Costa, E. P. Borges, “A position-dependent mass harmonic oscillator and deformed space”, Journal of mathematical physics 59, 042101 (2018).

[23] N. Laskin: Fractional quantum mechanics and L´evy path integrals, Physics Letters A 268 (2000), 298-305.

[24] J. Losada and J. J. Nieto: Properties of a new fractional derivative without singular kernel, Progr. Fract. Differ. Appl 1 (2015), 87-92

[25] A. N. Ikot, O. A. Awoga, A. D. Antia, H. Hassanabadi, and E. Maghsoodi, “Approximate Solutions of D-Dimensional Klein-Gordon Equation with modified Hylleraas Potential”, FewBody Systems, Volume 54 Issue 11 (Pages: 2041-2051) 2013.

[26] Oldwig von Roos, “Position-dependent effective masses in semiconductor theory”, PHYSICAL REVIEW B VOLUME 27, NUMBER 12 (1983).

[27] S. Cruz y Cruz, J. Negro, L.M. Nieto, “Classical and quantum position-dependent mass harmonic oscillators”, Physics Letters A, 369 (2007) 400–406.

[28] O. Mustafa, S. H. Mazharimousavi, “A singular position-dependent mass particle in an infinite potential well”, Physics Letters A, 373 (2009) 325–327.

ملخـــص

في هذا العمل ركزنا دراستنا على حل معادلة شرودنغر الكسرية لجسيم في بئر كمون لانهائي. حيث قمنا بتحويل معادلة شرودنغر الكسرية من معادلة تفاضلية من رتبة اشتقاق كسري α إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، أولا بدأنا بتقديم لمحة مختصرة عن الحساب الكسري من خلال تقديم بعض مناهج الإشتقاق المعروفة، ثم قمنا بتقديم معادلة شرودنغر العادية، وحلها في الحالة الأساسية $(m = const)$ ثم حلها في حالة كتلة متعلقة بالموضع $(m = m(x))$

ثانيا تقديم معادلة شرودنغر الكسرية ثم حلها في حين الكتلة ثابتة ذلك بإستعمال المشتقات الكسرية التالية:(Rises، fabrizo- capoto و khalil.). اختتاما بحلها أين تكون الكتلة متعلقة بالموضع بإستعمال مشتق (khalil).

كلمات مفتاحية: الحساب الكسري، معادلة شرودنغر، بئر كمون لانهائى، كتلة متعلقة بالموضع.

Résumé

Dans ce travail, nous concentrons sur la résolution de l'équation fractionnaire de shrodinger pour une particule dans un puits de potentiel infini. Nous avons converti l'équation de schrod fractionnaire d' une équation différentielle de dégré .. de la dérivation fractionnaire en une équation différentielle du deuxiéme dégré, d' abord nous commence par les préncipe de calcul fractionnaire et quelques méthodes de dérivation, puis nous présenté l'équation de shrodinger et sa solution de cas $(m = const)$ après de cas $(m = m(x))$

Dexièmment, présentez l'équation fractionnaire de shrodinger. Puis utilisant les dérivées fractionnaires suivantes(**Rises** ،**fabrizo-capoto**و **khalil**) pour sa solutions quant la masse constante. En fin, en utilisant la dérivé fractionnaire de (**khalil**) que la masse varier avec la position.

Mots clés: Arithmétique fractionnaire, équation de , puits de potentielinfini, masse liée à la position

Abstract

In this work we foncus on soluing the fractional Schrödinger equation for a particule an infinite potential well. Where we have converted the Schrödinger equation from a differential equation of the order of fractional derivation α to a second-order differential equation, first we start by providing a brief overview of the fractional arithmetic by presenting some well-Known methods of derivation then we presented the ordinary Schrödinger equation and its solution in the base case $(m = const)$ and then solve it in the case $(m = m(x))$ of a position-related mass.

Secondly, present the fractional Schrödinger equation and then solve it while the mass is constant using the folloing frational derivatives (Rises, fabrizo-capoto and Khalil). Finally, solve for where the mass is relative to the position using Khalil's derivative.

Key words: fractional Arithmétic, équation , puits de infinite potential well, position-relatedmass