République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPAR EMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER EN MATHEMATIQUES

Option**:PROBABILITES ET STATISTIQUES**

par

Bouhoreira Afaf

Titre

Equations Différentielles Stochastiques Progressives Rétrogrades

Membres du Comité d'Examnen :

Benbrahim Radhia	M.C.B	U.Ouargla	Encadreur
Saouli Mostapha Abdelouahab	M.C.B	U.Ouargla	Président
Mansoul Brahim	M.A.A	U.Ouargla	Examinateur

Juin 2022

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

FACULTÉ des SCIENCES de la MATIARE et MATHEMATIQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités et Statistiques**

Par

Bouhoreira Afaf

Titre :

Equations Différentielles Stochastiques Progressives Rétrogrades

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**BENBRAHIM Radhia**	UKMO	Encadreur
Dr.	**SAOULI Mostapha Abdelouahab**	UKMO	Président
Dr.	**MANSOUL Brahim**	UKMO	Examinateur

Juin 2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère ***Khadidja***

source de tendresse, pour tous sa sacrifices, sa amour, sa soutient sa prières tout au long de mes études,

Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon très cher Père ***Sadok***

Tu représentes pour moi le symbole de tous mes progrès, ma capillaire att eint les ranges les plus élevés .je remercier pour tes encouragements et ton aide pour continuer mes études. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

Aux cœurs purs et doux et aux âmes innocentes à mes sœurs ***Chifa*** et ***Insaf*** .

A mes chers frères ***Mohammed Elhafed*** et ***Houssam Elddine***.

À toute ma chère famille, amis et collègues, je vous dédie ce travail et le fais

Qu'Allah leur accorde longue vie et bonne sant

Afaf.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord remercier ***Dieu*** le tout puissant et miséricordieux, qui ma donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Je tiens à remercier mon encadreur, ***Dr.Ben Brahim Radhia***, pour ses conseils, son aide et les conseils qu'elle a pu me donner pour développer ce travail.

Je tiens à remercier les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon projet, et pour leur présence.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de mathématiques qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je remercier ma famille et toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques ont été introduites pour le premier fois par Kiyoshi Ito en 1946 pour étudier les trajectoires des processus de diffusion.

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades,sont apparues en 1973, par J.M. Bismut [6] dans le cas où le générateur est linéaire. Cependant le point de débart de la théorie ds EDSRS est l'article de Pardoux et Peng en 1990 [7] dans lequel le générateur est non linéaire.

On considére système gouverné par l'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x \\ dY_t = f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \ , Y_T = g(X_T) \end{cases} \tag{1}$$

Où W un mouvement brownien d–dimensionnel sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, les processus X, Y, Z prennent des valeurs dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m\times d}$ respectivement ; et b et σ, f et g sont des fonctions mesurables et bornèes.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour les systèmes gouvernés par des (EDSPR).

Le mémoire est composé en deux chapitres

Chapitre 1 : On donne quelques génératités de calcul stochastique, et déffinitions qui sont nécessaires pour la suite de ce mémoire, comme processus stochastique, filltration, mouvement Brownien, martingale, intégral d'Itô, processus d'Itô et les formules d'Itô.

Chapitre 2 : Dans le deuxième chapitre, on étude un type des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires (EDSPR) faibelement couplées, on va présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des systèmes gouvernés par des EDSPRs non linéaires, la méthode de démonstration est basée sur la méthode d'itération de Picard.

Chapitre 1

Calcul stochastique

1.1 calcul stochastique

1.1.1 Variable aléatoire

[13]

Définition 1.1.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité. Une variable aléatoire réel* X *est une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Définition 1.1.2 ***(La tribu engendrée par une variable aléatoire)***
Soit X *une variable aléatoire à valeur dans* $\mathbb{R}$*, on note par* $\sigma(X)$ *la tribu engendrée par* X *définie comme la plus petite tribu sur* Ω *qui rend* X *mesurable, ce qui est equivalent à :*

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B)/B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}).$$

1.1.2 Filtrations

[8]

Définition 1.1.3 *Une filtration est une famille* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*de sous -tribus de* F*, est croissante :* $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*. Par convention,on pose* $\mathcal{F}_\infty = \vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$*(=la plus petite tribu contenant toutes les* $\mathcal{F}_t$*). On pose aussi* $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$*.*

1.1.3 Processus stochastiques

Définition 1.1.4 *[8] Soit* T *un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par* T *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille de variable aléatoire* X_t *.*

Définition 1.1.5 *[8] Un processus* X *est mesurable si l'application* $(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$ *de* $\mathbb{R} \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*.*

Définition 1.1.6 *[8] Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{F_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $t \geq 0$ *, l'application* $(s,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$ *de* $[0,t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*.*

Proposition 1.1.1 *[1] Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Définition 1.1.7

1. *Un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans un espace mesurable*(E,ε) *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* t*.*
2. *La filtration engendrée par un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est la plus petite filtration c'est-à-dire à laquelle il est adapté.On la note* $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$*, et de maniére évidente on peut la définir ainsi :* $\mathcal{F}_t^X = \cap_{s>t}\sigma(X_r : r \leq s)$ *; ici, comme d'habitude,* $\sigma(X_r : r \leq s)$ *désigne la tribu engendrée par la famille* $(X_r : r \leq s)$ *de variables aléatoires [rappelons qu'un processus est une famille d'applications mesurables, de sorte que nécessairement* $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}$ *ci-dessus, comme il convient].*

Remarque 1.1.1 *Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.*

1.1.4 Processus de Markov

Définition 1.1.8 *[9] Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$à valeur dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, et une filtration naturelle $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)$. On dit que le processus (X_t) de Markov si $\forall 0 \leq s < t$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable est bornée, on a :*

$$\mathbb{E}(f(X_t)/\mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(f(X_t)/X_s).$$

1.2 Martingale

[12]

Définition 1.2.1 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique définit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est intègrable($\mathbb{E}(\mid X_t \mid) < +\infty$) et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\forall t \geq 0$ alors :*

– *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ **est une martingale** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s \qquad \forall 0 \leq s < t,$$

– *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ **est une sur-martingale** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s \ \forall 0 \leq s < t,$$

– *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ **est une sous-martingale** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s \forall 0 \leq s < t.$$

Propriété 1.2.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus ;*

1. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est constante, telle que :

$$\forall t \geq 0 : \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0).$$

2. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sur-martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est décroissante.

3. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est croissante.

1.2.1 Temps d'arrêt

[2]

Définition 1.2.2 *Une variable aléatoire τ à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$*

Remarque 1.2.1 *On associe à un temps d'arrêt τ une tribu que l'on note $\mathcal{F}_\tau$, définite par*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

1.2.2 Mouvement brownien

[1]

Définition 1.2.3 *On appelle mouvement brownien un processus stochastique W à valeurs réelles tel que :*

1. $\mathbb{P} - p.s. t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$adapté .

2. Pour $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

3. $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$

Remarque 1.2.2 *On dit que* W *est un* $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ *–MB si* W *est un processus continu, adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ *, vérifiant :*

$$\forall u \in R,\ \forall 0 \leq s \leq t,\ \mathbb{E}(\exp iu(W_t - W_s)/\mathcal{F}_s) = \exp\{\frac{-u^2(t-s)}{2}\}.$$

Définition 1.2.4 *On appelle MB standard à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *, un vecteur* $W = (W^1, ..., W^d)$ *où les* W^i *sont des MB réels indépendants.*

Proposition 1.2.1 *Soit* W *un MB. La filtration* $\{F_t^W\}_{t\geq 0}$ *vérifie les conditions habituelles et* W *est une* $\{F_t^W\}_{t\geq 0}$*–MB.*

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô

1.3.1 L'intégrale stochastique

[1]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et soit $W = (W_t, t \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$−mouvement brownien standard

Définition 1.3.1 *On appelle processus élémentaire* $\theta = (\theta_t)0 \leq t \leq T$ *un processus de la forme :*

$$\theta_t = \phi_0 1_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i 1_{]t_{i-1},t_i]}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T, \phi_0$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*–mesurable bornée et pour* $i = 1, ..., p, \phi_i$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*−mesurable et bornée.*

Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à W *comme étant le processus continu* $\{I(\theta)_t\}_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$I(\theta)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}),$$

si $t \in]t_k, t_{k+1}]$,

$$I(\theta)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

Notation 1.3.1 *On note* $\int_0^t \theta_s dW_s$ *pour* $I(\theta)_t$. *On obtient alors directement à l'aide de cette définition le résultat suivant*

Proposition 1.3.1 *Si* θ *est un processus élémentaire, alors* $(\int_0^t \theta_s dW_s) 0 \leq t \leq T$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$*martingale continue telle que*

$$\forall t \in [0,T], \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \theta_s dW_s\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus vaste de processus θ. *Pour la première extension, on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel* $\mathcal{M}^2$ *suivant :*

$$\mathcal{M}^2 = \left\{ (\theta_t) \}_{0\leq t\leq T},\ \textit{progressivement mesurable},\ \mathbb{E}\left[\int_0^T \theta_s^2 ds\right] < \infty \right\}$$

On désigne par $\mathcal{H}^2$ *l'espace vectoriel des martingales bornées dans* L^2 *; le sous-espace de* $\mathcal{H}^2$ *formé par les martingales qui sont continues est noté* $\mathcal{H}_c^2$. *On munit* $\mathcal{H}^2$ *de la norme définie par* $\| M \|_{\theta^2} = \mathbb{E}[| M_T |^2]^{\frac{1}{2}}$ *qui en fait un espace de Hilbert. L'inégalité de Doob montre que cette norme est équivalente à la norme* $\mathbb{E}[\sup_t | M_T |^2]^{\frac{1}{2}}$ *; par suite,* $\mathcal{H}_c^2$ *est un sous-espace fermé.* $\mathbb{H}^2$ *et* $\mathbb{H}_c^2$ *désignent les sous-espaces de* $\mathcal{H}^2$ *et* $\mathcal{H}_c^2$ *constitués des martingales nulles en* 0 *; ces deux sous-espaces sont fermés.*

Théorème 1.3.1 *Il existe une unique application linéaire* J *de* $\mathcal{M}^2$ *dans* $\mathbb{H}_c^2$ *telle que :*

– Si θ est un processus élémentaire, alors $I(\theta)$ sont indistinguables

Théorème 1.3.2 *L'unicité signifie que si* J *et* J' *sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes alors* $J(\theta)$ *et* $J'(\theta)$ *sont indistinguables.*

On note toujours $\int_0^t \theta_s dW_s$ *pour* $J(\theta)_t$.

Remarque 1.3.1 *Notons M^2 l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2$.M^2 est un espace de Hilbert. L'intégrale stochastique est alors une isométrie de M^2 dans θ_c^2.*

Proposition 1.3.2 *soit $\theta \in \mathcal{M}^2$.On a*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \theta_s dW_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right],$$

et si τ est un temps d'arrêt,

$$\int_0^\tau \theta_s dW_s = \int_0^T 1_{s\leq\tau}\theta_s dW_s, \mathbb{P}-p.s.$$

La dernière extension de l'intégrale stochastique dont nous aurons besoin consiste à relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur θ. On introduit pour cela

$$\mathcal{M}_{loc}^2 = \left\{(\theta_t)_{0\leq t\leq T}, \textit{progressivement mesurable } \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty\mathbb{P}-p.s.\right\}.$$

Proposition 1.3.3 *Il existe une unique application linéaire J' de $\mathcal{M}_{loc}^2$ dans l'ensemble des martingales locales continues telle que :*

1. Si θ est un processus élémentaire alors $J'(\theta)$ et $I(\theta)$ sont indistinguables ;
2. Si $(\theta_n)_n$ est une suite de processus de $\mathcal{M}_{loc}^2$ telle que $\int_0^T \theta_s^{n^2} ds$ tend vers 0 en probabilité alors $\sup_{0\leq t\leq T}|J'(\theta^n)_t|$ tend vers 0 en probabilité.

1.3.2 Processus d'Itô

[10]

Définition 1.3.2 *Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(W_t)_{t\geq 0}un(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$ mouvement brownien. On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$*

à valeur réelle tel que :

$$\forall 0 \leq s \leq t, X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s,$$

la forme differentielle équivalente :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Avec

1. X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.
2. $(b_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et s'applle la coefficient de derivé et

$$\int_0^T \mid b_s \mid ds < +\infty, \mathbb{P} - p.s.$$

3. $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et s'applle la coefficient de diffusionet et

$$\int_0^T \mid \sigma_s \mid^2 ds < +\infty, \mathbb{P} - p.s.$$

1.3.3 Variation quadratique

[2]

Définition 1.3.3 *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *On définit la* α*-variation de* f *par*

$$var(f, \alpha) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_{\{t_k\}:\rho(\{t_k\}) \leq \varepsilon} \sum_k |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^\alpha$$

ou' $\rho(\{t_k\}) = \max_{1 \leq k \leq \rho} |t_k - t_{k-1}|$ *est le pas de la subdivision de* $[0,1]$ *et le* sup *est pris sur l'ensemble de ces subdivisions.*

pour $\alpha = 1$,*on parle de la variation. On dit que* f *est à variations bornées si var* $(f, 1) < +\infty$ *Pour* $\alpha = 2$, *on parle de la variation quadratique.*

Remarque 1.3.2 *Pour une fonction* f *de classe* C^1, *la variation quadratique tend vers* 0 *sur tout intervalle* $[0, t]$, *en effet, avec une partition* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = t$, *on a avec le théorème des accroissements finis :*

$$V_f(t_0, t_1, ..., t_p) := \sum_{j=1}^{p} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 = \sum_{j=1}^{p} (f'(t_i^*) - (t_i - t_{i-1}))^2$$
$$\leq \delta \|f'\|_\infty^2 \sum_{j=1}^{p} |t_i - t_{i-1}| = \delta \|f'\|_\infty^2 t$$

où $t_i^* \in]t_i, t_{i+1}]$ *est donné par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction dérivable* f.

Définition 1.3.4 *Soitent* X_t *et* Y_t*des processus d'Itô definie par*

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \quad et \quad dY_t = b'_t dt + \sigma'_t dW_t.$$

Alors, les variation quadratiques sur $[0, t]$ *sont donnée par*

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds \quad et \quad \langle Y, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s'^2 ds,$$

et la covariation quadratique entre X_t *et* Y_t *est donnée par :*

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds,$$

1.4 Formule d'Itô

[10]

Théorème 1.4.1 *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$*un processus d'Itô, telque :*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

et f *une fonction deux foix continûement différentiabl* $f \in C^2$*, alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s,$$

Théorème 1.4.2 *Si* $(t, x) \to f(t, x)$ *est une fonction deux fois continûement différentiable en* x *et une fois continûement différentiable en* t *, ces dérivées étant continus en* (t, x), $f \in C^{1,2}$*,on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(s, X_s)d\langle X, X\rangle_s.$$

Intégration par parties

La formule d'integration par parties décrite dans le résultat suivant est une conséquence de la formule d'Itô multidimensionnelle.

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s,$$

Proposition 1.4.1 *Soient* X_t*et* Y_t *des processus d'Itô, nous avons*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dW_s,$$

alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

1.5 Quelques inégalités et théorèmes

Théorème 1.5.1 *[1](Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG))* *Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} \mid X_t \mid^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}].$$

Remarque 1.5.1 *[1] En particulier,si $T > 0$,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}].$$

Lemme 1.5.1 *[11] (Lemme de Gronwall) Si f est une fonction continue, telle que pour tout*

$$\forall t \geq 0, \qquad f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)ds, \textit{avec } b \geq 0,$$

alors

$$f(t) \leq a(1 + \exp(bt)).$$

Lemme 1.5.2 *[5] (Lemme de Borel Cantelli) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événement*

1. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 0$$

ou de manière équivalente

$$\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} \textit{ est fini p.s.}$$

2. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et si les événements A_n sont indépendants, alors*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 1$$

ou de manière équivalente

$$\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} \text{ est infini p.s.}$$

Théorème 1.5.2 *[12] **(Inégalités de Doob)** Soient (X_n) une sous-martingale et $m \in \mathbb{N}$. On note $X_n^+ = \varphi(X_n)$ où φ est la fonction convexe non décroissante $\varphi(x) = x \vee 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\lambda \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq m} X_k \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(X_m 1_{\max_{0 \leq k \leq m} X_k \geq \lambda}\right) \leq \mathbb{E}\left(X_m^+\right)$$

Théorème 1.5.3 *[4]**(Inégalité de Tchebychev)***

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$et qui admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $V(X)$. Alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Théorème 1.5.4 *[3] **(Théorème de Fubini)***

Soit f une fonction réelle ou complexe sur $X \times Y$ qui soit $\mu \otimes \nu$ intégrable. Alors pour -presque tous les $y \in Y$ respectivement pour -presque tous les $x \in X$, les fonctions $f(., y)$ et $f(x, .)$ sont $\mu-$ intégrables et $\nu-$intégrables. Les fonctions

$$y \longmapsto \int f(., y)\, d\mu \quad et \quad x \longmapsto \int f(x, .)\, d\nu$$

convenablement dénies sont alors $\nu-$intégrables respectivement $\mu-$intégrables, et on a

$$\int f d\mu \otimes \nu = \int \left(\int f(x, y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x, y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

Théorème 1.5.5 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** En se plaçant sur $E = C([a, b], \mathbb{R})$*

(avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*) muni du produit scalaire* $(f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$*, on obtient :*

$$\forall (f,g) \in \left(C\left([a,b],\mathbb{R}\right)\right)^2, \left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2dt}.\sqrt{\int_a^b g(t)^2dt}$$

Chapitre 2

Equations différentielles Stochastiques Progréssives Rétrogrades

2.1 Equations différentielles Stochastiques Progréssives Rétrogrades

2.1.1 Formulation du problème et Hypothèses

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et un mouvement brownien d-dimensionnel standard $W = \{W_t : t \geq 0\}$,et soit $(\mathcal{F}_t)$ la filtration engendré par W (c'est-à-dire$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_t : 0 \leqq s \leqq t\}$).

Nous considérons l'équations différentielle Stochastique progréssive rétrograde suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ dY_t = f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0 = x \qquad , Y_T = g(X_T) \end{cases} \tag{2.1}$$

telle que les processus X, Y, Z prennent des valeurs dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m\times d}$ respectivement ; et b et σ, f et g sont des fonctions mesurables boréliennes

$$b : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d},$$
$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^m,$$
$$g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

* $S^2(\mathbb{R}^k)$:est l'espace vectoriel formé des processus Y progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :$\| Y \|_{s^2}^2 := \mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T} \mid Y_t \mid^2] < \infty$, et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.
* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: est l'espace vectoriel formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\| Z \|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E}[\int_0^T \| Z_t \|^2 \, dt] < \infty$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \| z \|^2 = trace(zz^*), M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

Les espaces S^2,S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

Dans tout ce chapiter, nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Hypothéses :

On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $x, x_1, y, y_1, z, z_1 \in \mathbb{R}^{2n+2m+2m\times d}$.

(H1) Condition de lipschitz :

$$| b(t,x) - b(t,x_1) | + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,x_1)\| \leq K \left(| x - x_1 |\right),$$

$$\|f(t,x,y,z) - f(t,x_1,y_1,z_1)\| \leq K \left(| x - x_1 | + | y - y_1 | + \|z - z_1\|\right),$$

$$| g(x_1) - g(x_2) | \leq K \left(| x_1 - x_2 |\right).$$

(H2) Croissance linéaire :

$$| b(t,x) | + \|\sigma(t,x)\| \leq K \ (1 + | x |),$$

et

$$|f(t,x,y,z)| \leq K \left(1 + | x | + | y | + | z |\right).$$

(H3) :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(s,x,0,0)|^2 \, ds\right] < +\infty. \ \text{ et } \ \mathbb{E}\left[|x|^2\right] < +\infty.$$

2.1.2 Théorème d'existance et d'unicité

Théorème 2.1.1 *Si les Hypothèses* ***(H1)*** *et* ***(H2), (H3)*** *sont vérifiées, alors l'EDSPR (2.1) possède une unique solution adaptée* (X,Y,Z).

Proof. 1- L'existence : Nous construisons la solution par la méthode d'itération de Picard. En définissant la suite $(X^n, Y^n, Z^n)_{n \in N}$ telle que $X_t^0 = x$, $Y^0 = Z^0 = 0$ et $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ est la solution del'EDSPR suivant :

$$\begin{cases} X_t^{n+1} = x + \int_0^t b(s, X_s^n) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dW_s, \\ Y_t^{n+1} = g(X_T^n) + \int_t^T f(s, X_s^n, Y_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^T Z_s^{n+1} dW_s \end{cases} \tag{2.2}$$

Et telles que les intégrales stochastique sont bien définies car il clair par récurrence que pour chaque n, X_t^{n+1} et continu et adapté, donc le processus $\sigma(s, X_s^n)$ l'est aussi.

– On montre premiérement, l'existance de solution de l'EDS dans (2.1), pour $t \in [0, T]$,vérifiant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une costante C_n telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n. \tag{2.3}$$

Pour $n = 0$, on a $\mathbb{E}\left[|X_t^0|^2\right] = \mathbb{E}\left[|x|^2\right] \leq C$ (car $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] \leq +\infty$),
on suppose que $\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n$ et on montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq C_{n+1}.$$

On a :

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 = \left|x + \int_0^t b(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dW_s\right|^2.$$

Comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, alors on a :

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + \left(\int_0^t |b(s, X_s^n)|\, ds\right)^2 + \left(\int_0^t \|\sigma(s, X_s^n)\|\, dW_s\right)^2\right).$$

Par passage à l'espérance , on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |b(s, X_s^n)|\, ds\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\sigma(s, X_s^n)\|\, dW_s\right)^2\right]\right) \tag{2.4}$$

D'apres le théorème de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b(s, X_s^n)ds\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t ds\right)\left(\int_0^t |b(s, X_s^n)|^2\, ds\right)\right]$$

On utilise la croissance linéaire de la fonction b,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b(s,X_s^n)ds\right)^2\right] \leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t K^2(1+\mid X_s^n\mid^2)ds\right] \tag{2.5}$$
$$\leq TK^2\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right]\right)ds$$

D'autre part, on appliquant l'isométre d'Itô, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^n)dW_s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\sigma(s,X_s^n)\|^2\,ds\right]$$

Par la croissance linéaire de la fonction σ, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^n)dW_s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K^2(1+\mid X_s^n\mid^2)\right)ds\right] \tag{2.6}$$
$$\leq \int_0^t K^2(1+\mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right])ds.$$

Remplaçant (2.5) et (2.6) dans (2.4), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+TK^2\left[\int_0^t(1+\mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right])ds\right]+K^2\int_0^t 1+\mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right])ds\right)$$
$$\leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+3T^2K^2+3TK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right]ds+3K^2T+3K^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right]ds.$$

Posons $C=\sup\left(3TK^2,3K^2\right)$ et comme $\mathbb{E}\left[|x|^2\right]<+\infty$ alors $M=3\mathbb{E}\left[\mid x\mid^2\right]+3TK^2(1+T)$

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq M+C\left(\int_0^t \mathbb{E}\left[\mid X_s^n\mid^2\right]ds\right)$$
$$\leq C_{n+1}$$

Cela va permettre majorer par récurrence

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right].$$

on a :

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \big(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\big)\, ds + \int_0^t \big(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\big)\, dW_s.$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t \big(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\big)\, ds + \int_0^t \big(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\big)\, dW_s\right|^2\right]$$

Par l'inégalité de Yong $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t \big(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\big)\, ds\right|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t \big(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\big)\, dW_s\right|^2\right]\end{aligned}$$

utilisant l'inégalité de BDG, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t \big(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\big)\, ds\right|^2\right] \\ &+ 2c\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\right\|^2 ds\right]\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy, schwarz donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\right|^2 ds\right] \\ &+ 2c\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\right\|^2 ds\right]\end{aligned}$$

Comme les fonction b et σ sont Lipshitiz, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] + 2cK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right]$$

De plus théorème de Fibuni, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq 2TK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]ds+2cK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]ds$$

On pose $C=\max(2TK^2,2cK^2)$, alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]ds. \tag{2.7}$$

On a

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b(s,X_s^0)ds\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s,X_s^0)dW_s\right|^2\right]$$

D'apres l'inégalité de Cauchy-schawartz et l'isométrie d'Ito, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right]\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b(s,X_s^0)\right|^2 ds\right]+2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(s,X_s^0)\right\|^2 ds\right]$$

En utilisant la croissance linéaire de b et σ, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right]\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|x|^2\right)ds\right]+2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|x|^2\right)ds\right]$$

D'aprés théorème de Fibuni, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right]&\leq 2TK^2\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\,|x|^2\right)ds+2K^2\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\,|x|^2\right)ds\\&\leq M\left(1+\mathbb{E}\,|x|^2\right)T\leq DT\end{aligned}$$

avec $M=\max(2TK^2,2K^2)$ et $C=M\left(1+\mathbb{E}\,|x|^2\right)$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^2-X1\right|^2\right]\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\right]ds$$

En appliquant les mèmes successivement, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2\right] \leq C^2 \int_0^t s ds \leq \frac{(CT)^2}{2}.$$

De plus pour $n = 3$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^3 - X_t^2\right|^2\right] &\leq C \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^2 - X_s^1\right|^2\right] ds \\
&\leq C \int_0^t C^2 \frac{s^2}{2} ds \\
&\leq \frac{C^3}{2} \frac{T^3}{3} \\
&\leq \frac{C^3 T^3}{1.2.3} \\
&\leq \frac{(CT)^3}{3!}
\end{aligned}$$

Alors $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] &\leq C \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right] ds \\
&\leq C \int_0^t C^n \frac{s^n}{n!} ds \\
&\leq \frac{(CT)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\sum_{n\geq 0} \left\|\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right]\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0} \left\|\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right]\right\|_{L^2} \leq \sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{(CT)^{n+1}}{(n+1)!}} < +\infty.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} \sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2$ converge $\mathbb{P}-p.s$ et donc $\mathbb{P}-p.s$, X^n converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus X continu. De plus $X \in S_c^2$ puisque la convergence a lieu dans S^2.

On vérfie trés facilement que X_t est une solution de l' EDS dans (2.1) en passant à la limite dans l'équation de récurrence pour X^n.

– En passant à résoudre la deuxiéme équation de récurrence pour Y^n et Z^n.

Prouvons maintenant que la suite (Y^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}^2$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
d\left(\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right) &= \alpha\exp(\alpha t)\left(Y_t^{n+1}-Y_t^n\right)^2 dt + 2\exp(\alpha t)\left(Y_t^{n+1}-Y_t^n\right) d\left(Y_t^{n+1}-Y_t^n\right) \\
&+ \exp(\alpha t)\, d\left\langle Y^{n+1}-Y^n, Y^{n+1}-Y^n\right\rangle_t \\
&= \alpha\exp(\alpha t)\left(Y_t^{n+1}-Y_t^n\right)^2 dt \\
&- 2\left\langle \exp(\alpha t)\left(Y_t^{n+1}-Y_t^n\right)^2, f\left(t, X_t^n, Y_t^n, Z_t^n\right) - f\left(t, X_t^{n-1}, Y_t^{n-1}, Z_t^{n-1}\right)\right\rangle dt \\
&+ 2\left\langle \exp(\alpha t)\left(Y_t^{n+1}-Y_t^n\right)^2, Z_t^{n+1}-Z_t^n\right\rangle dW_t + \exp(\alpha t)\left(Z_t^{n+1}-Z_t^n\right)^2 dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'integrale entre t et T , on obtient

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha T)\left|g\left(X_T^n\right)-g\left(X_T^{n-1}\right)\right|^2 - \exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2 \\
&= \alpha\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds \\
&- 2\int_t^T \left\langle \exp(\alpha s)\left(Y_s^{n+1}-Y_s^n\right)^2, f\left(s, X_s^n, Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(t, X_s^{n-1}, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1}\right)\right\rangle ds \\
&+ 2\int_t^T \left\langle \exp(\alpha s)\left(Y_s^{n+1}-Y_s^n\right)^2, Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\rangle dW_s + \int_t^T \exp(\alpha s)\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds - \exp(\alpha T)\left|g\left(X_T^n\right)-g\left(X_T^{n-1}\right)\right|^2 \\
&= 2\int_t^T \left\langle \exp(\alpha s)\left(Y_s^{n+1}-Y_s^n\right)^2, f\left(s, X_s^n, Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(t, X_s^{n-1}, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1}\right)\right\rangle ds \\
&- 2\int_t^T \left\langle \exp(\alpha s)\left(Y_s^{n+1}-Y_s^n\right)^2, Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\rangle dW_s - \alpha\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

En utilisant que g est Lipshitiz et f est Lipshitizienne en (x, y, z), on a :

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds \\
&\leq K\exp(\alpha T)\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2-\alpha\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds \\
&+2K\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|\left(\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|+\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|+\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|\right) ds.
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon^2}a^2+\varepsilon^2 b^2$, donc l'inégalité précédente donne :

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds \\
&\leq K\exp(\alpha T)\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2-\alpha\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds+K^2\varepsilon^2\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds \\
&+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|\left(\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|+\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|+\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|\right)^2 ds.
\end{aligned}$$

Comme $(a+b+c)^2 \leq 3a^2+3b^2+3c^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds \\
&\leq K\exp(\alpha T)\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2+\left(K^2\varepsilon^2-\alpha\right)\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_s^{n+1}-Y_s^n\right|^2 ds \\
&+\frac{3}{\varepsilon^2}\int_t^T \exp(\alpha s)\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds+\frac{3}{\varepsilon^2}\int_t^T \exp(\alpha s)\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|^2 ds \\
&+\frac{3}{\varepsilon^2}\int_t^T \exp(\alpha s)\left\|Z^n-Z_s^{n-1}\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

On choisit α et ε tel que $\frac{3}{\varepsilon^2}=\frac{1}{3}$ et $9K^2-\alpha=0$, alors

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds \\
&\leq K\exp(\alpha T)\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2 \\
&+\frac{1}{3}\int_t^T \exp(\alpha s)\left(\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2+\left|Y_s^n-Y_s^{n-1}\right|^2+\left\|Z^n-Z_s^{n-1}\right\|^2\right) ds.
\end{aligned}$$

Prenant l'espérance, donc pour $t = 0$, trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|Z_s^{n+1}-Z_s^n\right\|^2 ds\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha T\right)\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|^2\right]+\frac{c}{3}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right)\right) \\
&+\frac{C}{3}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|Y_t^n-Y_t^{n-1}\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|^2 ds\right]\right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous répétons la même méthode, en appliquant la formule d'Itô à $\exp\left(\alpha t\right)\left|Y_t^n-Y_t^{n-1}\right|^2$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|Y_t^n-Y_t^{n-1}\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|Z_s^n-Z_s^{n-1}\right\|^2 ds\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha T\right)\left|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}\right|^2\right]+\frac{C}{3}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\right|^2\right)\right) \\
&+\frac{C}{3}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}\right\|^2 ds\right]\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En remplaçant (2.9) dans (2.8), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha t\right)\left\|Z_t^{n+1}-Z_t^n\right\|^2 dt\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha T\right)\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|\right]+\frac{c}{3}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right)\right) \\
&+K'\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha T\right)\left|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}\right|\right]+\frac{C'}{3}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\right|^2\right)\right) \\
&+\frac{C''}{3^2}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha t\right)\left\|Z_t^{n-1}-Z_t^{n-2}\right\|^2 dt\right]\right)
\end{aligned}$$

On répète cette méthode plusieurs fois

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha t)\left\|Z_t^{n+1}-Z_t^n\right\|^2 dt\right]$$
$$\leq C\left[\mathbb{E}\left[\exp(\alpha T)\left|X_T^n-X_T^{n-1}\right|\right]+\mathbb{E}\left[\exp(\alpha T)\left|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}\right|\right]+...\left[\mathbb{E}\left[\exp(\alpha T)\left|X_T^1-X_T^0\right|\right]\right]\right]$$
$$+\frac{C}{3}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)\left|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\right|^2\right)\right)\right.$$
$$\left.+...+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right)\right)\right)$$
$$+\frac{C''}{3^n}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)\left|Y_t^1-Y_t^0\right|^2\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha t)\left\|Z_t^1-Z_t^0\right\|^2 dt\right]\right)$$

On a déja démontrer que X^n est converge $\forall t$. Donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)\left|Y_t^{n+1}-Y_t^n\right|^2\right)\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha t)\left\|Z_t^{n+1}-Z_t^n\right\|^2 dt\right]$$
$$\leq \frac{C''}{3^n}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)\left|Y_t^1-Y_t^0\right|^2\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha t)\left\|Z_t^1-Z_t^0\right\|^2 dt\right]\right)$$
$$\leq \frac{D}{3^n}\longrightarrow 0 \text{ quand } n\longrightarrow\infty.$$

Par conséquent, $(X^n, Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}^2$, donc convergente. Alors, il existe un triple de processus stochastique $(X_t, Y_t, Z_t)\in\mathcal{B}^2$, tel que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^n-X_t\right|\right]\longrightarrow 0, \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n-Y_t\right|\right]\longrightarrow 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{0\leq t\leq T}\left\|Z_t^n-Z_t\right\|^2 dt\right]\longrightarrow 0,$$

quand $n\longrightarrow\infty$, avec une probabilitié égale à 1 C'est-à-dire

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} X^n = X,\ \ \lim Y^n = Y,\ \ \lim_{n\longrightarrow\infty} Z^n = Z.$$

Il est facile de vérifier que (X, Y, Z) est une solution de l' EDSPR (2.1), il suffit de faire une passage à la limite dans l' EDSPR (2.2).

2-L'unicité : Nous prouvons L'unicité de solution de systéme (2.1)

On suppose que (X, Y, Z) et (X', Y', Z') deux solution de (2.1) pour tout $t \in [0; T]$,

$$X_t - X'_t = \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, X'_s))ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))\, dW_s,$$

et

$$\begin{aligned} Y_t - Y'_t = g(X_T) - g(X'_T) + \int_t^T (f(s, X_s, Y_s, Z_s) - f(s, X'_s, Y'_s, Z'_s))\, ds \\ - \int_t^T (Z_s - Z'_s) dW_s. \end{aligned}$$

Puisque $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, X'_s))\, ds\right|^2\right] \\ + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))\, dW_s\right|^2\right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

Par inégalité de Cauchy, schwarz , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, X'_s))\, ds\right|^2\right] &\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, X'_s)|^2\, ds\right] \\ &\leq K^2 T\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - X'_s|^2\, ds\right]. \end{aligned}$$

Appliquant l'isométrie d'Itô on a ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s) dW_s\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)\|^2\, ds\right] \\ &\leq K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - X'_s|^2\, ds\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^2\right] &\leq 2K^2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - X'_s|^2\, ds\right] + 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - X'_s|^2\, ds\right] \\ &\leq \left(2K^2T + 2K^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s - X'_s|^2\right) ds\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Fibuni

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^2\right] \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s - X'_s|^2\right) ds.$$

Utilisant le lemme de Granwall tel que $f(t) = \mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^2\right]$ et $a = 0, b = C$, on trouve

$$\mathbb{E}\left[|X_s - X'_s|^2\right] = 0 \tag{2.11}$$

En appliquant la formule d'Itô à $|Y_t - Y'_t|^2$ on trouve

$$d\,|Y_t - Y'_t|^2 = 2\,|Y_t - Y'_t|\, d\left(Y_t - Y'_t\right) + d\left\langle Y - Y', Y - Y'\right\rangle_t$$

Par passage à l'intégrale de t à T et l'espérance on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t - Y'_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_s - Z'_s\|^2\, ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|g\left(X_T\right) - g\left(X'_T\right)|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \langle Y_s - Y'_s, f(s, X_s, Y_s, Z_s) - f(X'_s, Y'_s, Z'_s)\rangle\, ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonctions g et f sont Lipschitz, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t-Y'_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|Z_s-Z'_s\right\|^2ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\left|X_T-X'_T\right|^2\right]\\
&\leq 2K\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|Y_s-Y'_s\right|\left(\left|X_s-X'_s\right|+\left|Y_s-Y'_s\right|+\left|Z_s-Z'_s\right|\right)ds\right].
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon>0$ on a $2ab\leq\frac{1}{\varepsilon^2}a^2+\varepsilon^2b^2$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t-Y'_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|Z_s-Z'_s\right\|^2ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\left|X_T-X'_T\right|^2\right]+2K^2\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_t^T\left|Y_s-Y'_s\right|^2ds\right]\\
&+\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\left(\left|X_s-X'_s\right|+\left|Y_s-Y'_s\right|+\left|Z_s-Z'_s\right|\right)^2ds\right].
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Yong $(a+b+c)^2\leq 3a^2+3b^2+3c^2$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t-Y'_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\|Z_s-Z'_s\right\|^2ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\left|X_T-X'_T\right|^2\right]+2K^2\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_t^T\left|Y_s-Y'_s\right|^2ds\right]\\
&+\frac{3}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\left|X_s-X'_s\right|^2ds\right]\\
&+\frac{3}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\left|Y_s-Y'_s\right|^2ds\right]+\frac{3}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\left\|Z_s-Z'_s\right\|^2ds\right].
\end{aligned}$$

on posant $\frac{3}{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|Y_t-Y'_t\right|^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\left\|Z_s-Z'_s\right\|^2ds\right]\\
&\leq K^2\mathbb{E}\left[\left|X_T-X'_T\right|^2\right]+\left(2K^2+\frac{1}{2}\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T\left|Y_s-Y'_s\right|^2ds\right]\\
&+\frac{T}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t-X'_t\right|^2\right].
\end{aligned}$$

on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t - X_t'\right|^2\right] = 0$$

alors , $X_t \equiv X_t'$ et $X_T \equiv X_T'$ donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t - Y_t'\right|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Z_s - Z_s'\right\|^2 ds\right] \leq C\left[\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|Y_s - Y_s'\right|^2\right] ds\right],$$

avec $C = \left(2K^2 + \frac{1}{2}\right)$.

On peut extraire deux inégalités :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t - Y_t'\right|^2\right] \leq C\left[\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|Y_s - Y_s'\right|^2\right] ds\right], \tag{2.12}$$

et

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Z_s - Z_s'\right\|^2 ds\right] \leq C\left[\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|Y_s - Y_s'\right|^2\right] ds\right] \tag{2.13}$$

On appliquant l'inégalité de Granwall à (2.12), on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t - Y_t'\right|^2\right] = 0.$$

Donc on résult que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Z_s - Z_s'\right\|^2 ds\right] = 0$$

Donc $X_t \equiv X_t'$,$Y_t \equiv Y_t'$ et $Z_s \equiv Z_s'$. Ce qui prouve l'unicité. ■

Conclusion

Ce mémoire a pour cadre l'étude d'existence et d'unicité de solution pour les systémes gouverné par une équation différentielle stochastique progréssive rétrograde non linéaire. La méthode de démonstration est basée sur l'itération de Picard

Il est inétressant de voir comment généraliser ce résultat d'éxistence de solution pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades non linéaires fortement complées.

Bibliographie

[1] Briand,P.,(2001). Équations différentielles stochastiques rétrogrades.

[2] Christophe breton,J.,(2019). Processus stochastiques.Université de Rennes 1.

[3] Claude .,Portenier.(16 janvier 2006). Théorème de Fubini et changement de variables Christophe.

[4] D. Foata & A. Fuchs (1998), calcul des probabilités, Masson. ISBN 2 10 007547 0 Dunod, Paris.

[5] J. Jacques Ruch et M. Line Chabanol (2013-2014). RAPPELS de PROBABILITÉ.

[6] J. M. Bismut.(1973). Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. Mem. Amer. Math. Soc.176, Providence, Rhode Island.

[7] E. Pardoux et S.G. Peng (1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems Control Letters, 14, pp 55-61.

[8] Jacod,J.,(2007-2008).Mouvement brownien et calcul stochastique. Universit´e Pierre et Marie Curie.

[9] Jeanblanc,M., septembre (2006). Cours de Calcul stochastique. Master 2IF EVRY.

[10] Lamberton,D et Lapeyre,B (1997). Introduction au calcul stochastique appliaué à la finance. ellipses.

[11] Lamberton,D et Lapeyre,B,(2012).INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE APPLIQUÉ À LA FINANCE.3 Édition.

[12] N. GUILLOTIN-PLANTARD, (13 novembre 2009). Inroduction au calcul stochastique.

[13] O.Lévéque.,(2004-2005). Cour de probabilités et calcul stochastique.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}[X]$	espérance mathématique ou moyenne du v.a. X.
exp	exponentiel.
Ω	un ensemble.
$\mathcal{F}$	une tribu sur Ω.
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{P}$	es une mesure de probabilité sur (Ω, F).
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	un espace de probabilité.
$v.a$	variable aléatoire
$\int_0^T \theta_s dW_s$	intégrale stochastique.
EDS	equation differentielle stochastique
$EDSR$	equation differentielle stochastique rétrograde
$EDSPR$	equation differentielle stochastique progréssive rétrogrades

$\mathbb{P}-p.s$	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$s \wedge t$	$min(s,t)$.
$\| \, . \, \|$	la norme.
$M.B$	Mouvement Brownien.
$c-\grave{a}-d$	c'est-à-dire
$E[\backslash]$	L'espérance conditionnelle

Résumé

Notre objectif dans ce étude est de démontrer le résultat d'existence et l'unicité des solutions pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades non linéaires par la méthode de l'itération de Picard.

Mots-clés : **équations différentielles stochastiques, progressives, rétrogrades, intégrale d'Ito, mouvement brownien, processus stochastique, existence, unicité, ...**

Abstract

Our objective in this study is to demonstrate the existence result and uniqueness of solutions for systems governed by nonlinear forward backward stochastic differential equations by the Picard iteration method.

Key Words : **Forward backward Stochastic differential equation, Ito integral, Brownian motion, stochastic process , existence, uniqueness…**

ملخص

هدفنا في هذه الدراسة هو إظهار نتيجة وجود ووحدانية الحلول للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية المتدرجة و التراجعية غير الخطية بواسطة طريقة تكرار بيكار.

الكلمات المفتاحية: **المعادلات التفاضلية العشوائية المتدرجة , التراجعية, تكامل إيطو, الحركة البراونية, العملية العشوائية, , الوجود, الوحدانية....**