UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

par : Saddouki Yamina

Thème

Existence de solution d'une équation différentielle d'ordre trois à condition intégrale en résonance

Soutenu le : 02/06/2016

Devant le jury composé de :

Abassi Hocine	M.A. Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Bencheikh Abdelkrim	M.A. Université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur
Mammeri Mohammed	M.A. Université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur
Kuidri Mohammed	M.A. Université KASDI Merbah-Ouargla	Rapporteur

Année universitaire :2015/2016

Dédicaces

Dieu le tout puissant, mon créateur. À mon père, en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard. À ma mère, ma raison d'être, ma raison de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin et m'illumine de douceur et d'amour. À mes frères et mes sœurs. À toutes mes amies, qui m'ont beaucoup aidé à réaliser ce projet, et à tous mes proches.

Remerciements

La louange est à Allah, qui je a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche. En suite mon mère, mes frères, et mes soeurs, qui m'ont soutenu tout le long de ce projet.

Aussi, je présente un grands remerciements et estimations à mon en-cadreur Monsieur **Kuidri.Mohamed** de je avoir encourager moralement la durée de recherche, et je adresse aussi mon remerciement à tous les enseignants de département mathématique.

Ainsi, je tiens à exprimer ma vifs remerciements aux membres de jurys pour avoir accepter de juger mon travail.

Merci, enfin à toutes mes amies, et à tout personne, du proche ou du loin , qui je adonné un coup de main, à fin de terminer ce travail de recherche.

Table des matières

Notations et conventions

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
- (M, d) : espace métrique.
- $d(.,.)$: application de distance.
- $C([a, b])$: l'espace des fonctions continues.
- Ω : un ensemble ouvert borné.
- $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$: c'est la fermeture de Ω.
- U : un ensemble ouvert.
- $\overline{C}^K(.,.)$: l'espace des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, K fois différentiable dans Ω.
- deg : degré topologique.
- deg_B : degré topologique de Brouwer.
- deg_{LS} : degré topologique de Leray-Schauder.
- $\overline{B}$: la boule unité fermée.
- Im : image d'une application.

- Ker : noyau.
- P, Q : deux projections continues.
- $\oplus$: la somme direct.
- L : l'opérateur de Fredholm.
- dom : domaine.
- ind : indice.
- dim : dimension.
- $codim$: codimension.
- $coker$: conoyau.
- K_p : l'opérateur linéaire.
- N : L-compact sur $\overline{\Omega}$.
- $\|.\|_\infty = max|.|$.
- $W^{3,1}$: espace de Sobolev.
- α, β, γ : fonctions $\in L^1[0,1]$.

Introduction

Les problèmes de la valeur marginale pour des équations différentielles ordinaires sont important dans les applications des sciences physiques et biologiques.

Il est bien connu que l'étude des équations différentielles ordinaires aux conditions non locales plus particulièrement aux conditions intégrales joue un rôle important aussi bien en théories qu'en applications. L'étude de ces problèmes est motivée par ses diverses applications notamment en thermo-élasticité, en génie chimique, en physique des plasmas, ainsi que dans certains modèles de revêtement d'écoulement d'eau souterraines.

Dans ce mémoire, on étude l'existence de la solution d'une équation différentielle à d'ordre trois aux conditions non locale de type intégral au problème en résonance, qui écrit sous la forme :

$$x'''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1,$$

avec les conditions non locales

$$x(0) = x''(0) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\eta^2} \int_0^\eta x(t)dt, \quad \eta \in (0, 1),$$

Pour trouver l'existence de solution, on utilise la théorie de degré coïncidence de Mawhin. Ce mémoire compose de trois chapitres :

Le premier chapitre : on présente une revue sur quelques théorèmes de point fixe, notamment le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, et on introduit également une notion importante sur l'homotopie . Aussi on discute le concept du degré topologique et ses propriétés, on définit deux degré : le degré de Brouwer en dimension finie puis le degré de Leray-Schauder en dimension infinie.

La deuxième chapitre : on définit la théorème de degré coïncidence de Mawhin, où du moins le construire. On aura besoin d'identifier une classe importante d'opérateurs : les opérateurs de Fredholm d'indice zéro. Ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections. Enfin, on preuve le théorème.

la troisième chapitre : est consacré à l'étude d'un problème en résonance. Au fait on propose d'établir l'existence de la solution d'une équation différentielle d'ordre trois à conditions non locales de type intégrale. Il importe de souligner que les résultats reposent sur la théorie du degré de coïncidence de Mawhin.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on s'intéresse particulièrement à rappeler quelques théorèmes importantes dans la théorie du point fixe notamment le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Aussi en guise d'introduction on discute une notion bien importante : le degré topologique et ses implications pour les théorèmes de point fixes.

1.1 théorème du point fixe

1.1.1 théorème du point fixe de Banach

Définition 1.1.1 *(**Point fixe**) Soit T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.*

Le théorème du point fixe le plus élémentaire et certainement le plus utilisé est le principe de contraction de Banach. Pour cela on commence par une présentation de ce principe ainsi qu'un certain nombre de généralisations de ce résultat.

Théorème 1.1.2 ***(Principe de contraction de Banach)[10].*** *Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $F : M \longrightarrow M$ une application contractante i.e qu'il existe $0 < k < 1$ telle que $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y); \forall\ x, y \in M$, alors F admet un point fixe $u \in M$ de plus pour tout $x \in M$ on a : $\lim_{n \longrightarrow \infty} F^n(x) = u$ et*

$$d(F^n, u) \leq \frac{k^n(x)}{1-k} d(x, F(x))$$

Preuve. D'abord, on montre l'unicité .

On suppose que il existe $x, y \in M$ avec $x = F(x);\ y = F(y)$et

$$d(x, y) = d(F(x), F(y) \leq kd(x, y)$$

Puisque $0 < k < 1$ alors l'inégalité dernier est correctement dans le cas $d(x, y) = 0$ alors $x = y$.

Maintenant, on preuve l'existence de x où $x \in M$.

On suppose que $F^n(x)$ est une suite de Cauchy pour tout $n \in \{0, 1, ...\}$ tel que

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq kd(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq .... \leq k^n d(x, F(x))$$

Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$, on obtient

$$\begin{aligned} d(F^n(x), F^m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) + ... + d(F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x) + k^{n+1} d(x, F(x)) + ... + k^{m-1} d(x, F(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) \left[1 + k + k^2 + ... + K^{m-1-n}\right] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)) \end{aligned}$$

Pour $m > n, n \in \{0, 1, ...\}$ on a

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)) \tag{1.1}$$

alors $F^n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors, il existe $u \in X$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} F^n(x) = u$$

De plus par la continuité de F, on trouve

$$u = \lim_{n \longrightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} F(F^n) = F(u)$$

Alors u est un point fixe de F.

Finalement, pour $m \longrightarrow \infty$ in (1.1), on obtient

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x))$$

■

exmple 1.1.3 *Considérons l'application* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *défini par* $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, *alors* T *une contraction avec* $0 < k = \frac{1}{2} < 1$, *et admet comme point fixe* $x = 1$ *de plus* $\lim\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 1$

Remarque 1.1.1 *Les conditions du théorème sont nécessaires, pour s'en convaincre considérons les exemples suivants :*

exmple 1.1.4 $T : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + 1$, *est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $T([0, 1]) \nsubseteq [0, 1]$ *et on ne peut pas itérer :* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, *mais* x_3 *n'est pas défini*

exmple 1.1.5 $T :]0, 1] \longrightarrow]0, 1]$, $T(x) = \frac{x}{2}$, *est contractante et vérifie* $T(]0, 1]) \subset]0, 1]$ *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $]0, 1]$ *n'est pas fermé :* $\lim u_n = 0$ *n'est pas contenue dans* $]0, 1]$

exmple 1.1.6 $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ *vérifie* $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ *pour tout* $x \neq y$, *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* T *n'est pas contractante, et pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on obtient* $x_n \longrightarrow +\infty$

1.1.2 Théorèmes du point fixe pour des contraction non définies sur tout l'espace métrique

Soit (M, d) un espace métrique complet, il est clair qu'une fonction définie seulement sur un sous-ensemble de M n'aura pas forcément un point fixe. Pour assurer cela, des conditions supplémentaires seront nécessaires.

Théorème 1.1.7 *Soient $K \subset M$ un ensemble fermé et $T : K \longrightarrow M$ une k-contraction. Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ et $r > 0$ tels que*

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K \qquad et \qquad d(x_0, T(x_0)) < (1-k)r$$

alors F a un unique point fixe $x^* \in B(x_0, r)$.

Dans certaines applications, il y'a des cas où T est lipschitzienne sans être une contraction, alors qu'une certaine puissance de T est une contraction (voir [1]). Dans ce cas on a le théorème suivant.

Théorème 1.1.8 *Soit (M, d) un espace métrique complet $T : M \longrightarrow M$ une application telle que $d(T^m(x), T^m(y) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M$, pour un certain $m \geq 1$ où $0 \leq k < 1$. Alors T admet un unique point fixe $x^* \in M$*

Preuve. comme T^m est une contraction, il en résulte du théorème (1.1.7) que T^m a un unique point fixe , soit donc $x^* = T^m x^*$. Alors $T^m(T(x^*)) = T(T^m(x^*)) = T(x^*)$, i.e $T(x^*)$ est un point fixe de T^m. Mais T^m a un unique point fixe d'où $Tx^* = x^*$. Donc T a un unique point fixe x^*, et il est unique car tout point fixe de T est également point fixe de T^m ■

exmple 1.1.9 *Considérons l'espace métrique M donné par : $M = C[a, b]$, l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$. M est un espace de Banach par rapport à la norme $\|u\| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|, u \in M$. On définit $T : M \to M$ par :*

$$Tu(t) = \int_a^t u(s)ds$$

On montre que $\|T(u) - T(v)\| \leq (b-a)\|u - v\|$. On a

$$\begin{aligned}
\|T(u) - T(v)\| &= \max_{t\in[a,b]} |\int_a^t u(s)ds - \int_a^t v(s)ds| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |u(s) - v(s)|ds
\end{aligned}$$

D'aprés la majoration, on obtient

$$\begin{aligned}\|T(u)-T(v)\| &\leq \int_a^t ds\|u(s)-v(s)\| \\ &\leq (t-a)\|u(s)-v(s)\|, \qquad \forall t\in[a,b] \\ &\leq (b-a)\|u(s)-v(s)\|\end{aligned}$$

donc (b-a) est la meilleure constante de Lipschitz pour T. D'autre part, on a :

$$T^2(u)(t)=\int_a^t\left(\int_a^s u(\mu)d\mu\right)ds=\int_a^t(t-s)u(s)ds$$

et par induction

$$T^m u(t)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}u(s)ds$$

dés lors

$$\begin{aligned}\|T^m u(t)-T^m v(t)\| &= \max_{t\in[a,b]}|T^m u(t)-T^m v(t)| \\ &= \max_{t\in[a,b]}\left|\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}u(s)ds-\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}v(s)ds\right| \\ &= \max_{t\in[a,b]}\left|\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}\left(u(s)-v(s)\right)ds\right| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]}\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}\left|(u(s)-v(s))\right|ds \\ &\leq \frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}ds\|u(s)-v(s)\| \\ &\leq \frac{-1}{(m-1)!\times m}\left[(t-s)^m\right]_a^t\|u(s)-v(s)\| \\ &\leq \frac{1}{m!}(t-a)^m\|u(s)-v(s)\| \qquad \forall t\in[a,b] \\ &\leq \frac{1}{m!}(b-a)^m\|u(s)-v(s)\|\end{aligned}$$

et donc T^m serait une contraction si $\dfrac{(b-a)^m}{m!}<1$

1.1.3 principes de continuation

Une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation . Celui-ci consiste à déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle on connait l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation connue sous le nom d'homotopie vérifier certaines conditions voir [1].

Définition 1.1.10 *Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue*

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$. En d'autres termes, il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \longrightarrow H(x,t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continument. On note $f \simeq g$.

exmple 1.1.11 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^n$, on considère $c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application constante $c(x) = 0$, et $i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application $i(x) = x$. Montrons que c et i sont homotopes. Il suffit de prendre :*

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tel que : $H(x,t) = (1-t)c(x) + ti(x)$, on a

$$H(x,0) = (1-0) \times 0 + 0 \times x = 0$$

et

$$H(x,1) = (1-1) \times 0 + 1 \times x = x$$

alors $H(x,t) = tx$ et $H(x,0) = c(x)$ et $H(x,1) = i(x)$.

exmple 1.1.12 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^n - \{0\}$, on considère cette fois $p(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, et $i(x) = x$ de nouveau. On voit que p et i sont homotopes en prenant :*

$$H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

tel que : $H(x,t) = (1-t)i(x) + tp(x)$, on a

$$H(x,0) = (1-0) \times x + 0 \times \frac{x}{\|x\|} = x$$

et

$$H(x,1) = (1-1) \times x + 1 \times \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|}$$

alors $H(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$ *et* $H(x,0) = i(x)$ *et* $H(x,1) = p(x)$.

Définition 1.1.13 *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application continue. On dit que* f *est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe* $g : Y \longrightarrow X$ *telle que* $g \circ f = id_X$ *et* $f \circ g = id_Y$*. On dit alors que* X *et* Y *ont le même type d'homotopie, ou parfois qu'ils sont homotopie équivalents, et on note* $X \simeq Y$*.*

exmple 1.1.14 *Soit* $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ *et* $Y = S^{n-1}$*, on prend alors* $f : X \longrightarrow Y$ *définie par* $f(x) = x/\|x\|$*, et* $g : Y \longrightarrow X$ *l'inclusion. Alors* $f \circ g = id_Y$ *, et l'exemple (1.1.12) montre que* $g \circ f \simeq id_X$*. Donc* $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *a le même type d'homotopie que la sphère* S^{n-1}*.*

Soit (X,d) un espace métrique complet, et U un sous ensemble ouvert de X.

Définition 1.1.15 *Soit* $F : \overline{U} \longrightarrow X$ *et* $G : \overline{U} \longrightarrow X$ *deux contractions, on dit que F et G sont homotopes s'il existe* $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow X$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) $H(.,0) = G$ *et* $H(.,1) = F$.

(b) $H(x,t) \neq x$ *pour tout* $x \in \partial U$ *et* $t \in [0,1]$.

(c) Il existe $\alpha \in [0,1)$ *tel que* $d(H(x,t), H(y,t)) \leq \alpha d(x,y)$ *pour tout* $x, y \in \overline{U}$*, et* $t, s \in [0,1]$.

(d) Il existe $M \geq 0$ *tel que* $d(H(x,t), H(y,s)) \leq M|t-s|$ *pour tout* $x \in \overline{U}$*, et* $t, s \in [0,1]$.

Théorème 1.1.16 *Soit* $F : \overline{U} \longrightarrow X$ *et* $G : \overline{U} \longrightarrow X$ *deux applications homotopiquement contractives et G a un point fixe dans U. Alors, F admet un point fixe dans U.*

Preuve. Considérons l'ensemble $Q = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x,\lambda),\ \textit{pour certain}\ x \in U\}$ où H est une homotopie entre F et G a décrite dans la définition (1.1.10) Notons que Q est non vide puisque G a un point fixe et que $0 \in Q$. On montre que Q est à la fois ouvert et fermé dans [0,1], et ainsi, par connexité on aura $Q = [0,1]$. Par conséquent F a un point fixe. Montrons d'abord que Q est un ensemble fermé dans [0,1]. En effet, soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Q telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = \lambda$, alors, nous devons montrer que $\lambda \in Q$. Comme $\lambda_n \in Q$ pour $n = 1, 2....$, il existe $x_n \in U$ où $x_n = H(x_n, \lambda_n)$. Également pour $n, m \in \{1, 2, ...\}$ on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(H(x_n, \lambda_n)H(x_m, \lambda_m) \\ &\leq d(H(x_n, \lambda_n)H(x_n, \lambda_m)) + d(H(x_n, \lambda_m), H(x_m, \lambda_m) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|$$

Ce qui montre que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy de X (car $\{\lambda_n\}$l'est aussi) et, puisque X est complet, il existe $x \in \overline{U}$ telle que $\lim_{x\longrightarrow\infty} x_n = x$. Par la continuité de H,

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} H(x_n, \lambda_n) = H(x, \lambda)$$

Ainsi, $\lambda \in Q$ et Q est fermé dans $[0, 1]$.

Montrons que Q est un ensemble ouvert de $[0, 1]$. Soit $\lambda_0 \in Q$, alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$. Puisque, par hypothèse, $x_0 \in U$, nous pouvons trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \subseteq U$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que la boule tel que $\epsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}$ où $r \leq dist(x_0, \partial U)$, et $dist(x_0, \partial U) = inf\{d(x_0, x) : x \in \partial U\}$. Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Alors, pour $x_0 \in \overline{B(x_0, r)}$

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x, \lambda)) &\leq d(H(x_0, \lambda_0), H(x, \lambda_0)) + d(H(x, \lambda_0), H(x, \lambda)) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda - \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha)r = r \end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ fixé

$$H(., \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}$$

Par le théorème (1.1.2), (1.1.7), on déduit que $H(.,\lambda)$ a un point fixe dans U. Alors, $\lambda \in Q$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, et par conséquent Q est ouvert dans [0,1]. ■

Du théorème précédent, nous déduisons le résultat suivant.

Théorème 1.1.17 ***(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)*** *[1]. Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert d'un espace de Banach E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \longrightarrow E$ une contraction telle que $F(\overline{U})$ soit bornée. Alors un des deux énoncés suivant est vérifié :*

(1) F a un point fixe dans $\overline{U}$.

(2) il existe $\lambda \in (0,1)$ et $x \in \partial U$ tels que $x = \lambda F(x)$.

Preuve. Supposons que (2) n'est pas vérifié et que F n'a pas de point fixe sur ∂U c'est à dire $x \neq \lambda F(x)$ pour tout $x \in \partial U$ λ et $\lambda \in [0,1]$.

Soit $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow E$ donnée par $H(x,\lambda) = \lambda F(x)$, et soit G l'application nulle. Notons que G a un point fixe dans U (à savoir $0 = G(0)$) et que F et G sont deux applications homotopiquement contractives. Par le théorème (1.1.16), F a également un point fixe et donc l'ennoncé (1) est vérifié. ■

1.2 Degré topologique

Dans cette section, nous donnons un brèf aperçu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, $deg(f,\Omega,y)$ de f dans Ω par rapport à y donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset X$, où $f : X \longrightarrow X$ est continue, $y \notin f(\partial\Omega)$ et X est un espace topologique, métrique la plupart du temps. Pour plus de connaissance et d'amples détails voir [2,3,4,5].

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Considérons un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}$. $\overline{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ désignera l'espace des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^n$, k fois différentiables dans Ω qui sont continues sur $\overline{\Omega}$. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.

Soit $x_0 \in \Omega$, si f est différentiable en x_0, on note par $J_f(x_0) = det f'(x_0)$ le Jacobien de f en x_0.

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω. Notons par $J_f(x_0)$le Jacobien de f en un point x_0 de Ω. Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$. Dans le cas contraire, x_0 est dite point régulier.*

On désigne par $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques. C'est à dire :

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}.$$

Définition 1.2.2 *Un élément $y \in \mathbb{R}^n$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$ Dans le cas contraire, y est dit valeur singulière.*

Définition 1.2.3 *Soit $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f. On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y, le nombre entier*

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} Sgn\ J_f(x)$$

où $Sgn\ Jf(x)$ désigne le signe de $J_f(x)$, défini par $sgn(t) = 1$ si $t > 0$ et $sgn(t) = -1$ si $t < 0$.

Remarque 1.2.1 *1) Par convention si $f^{-1}(y) = \emptyset$, $deg(f, \Omega, y) = 0$.*

2) $f^{-1}(y)$ contient un nombre fini d'éléments.

exmple 1.2.4 *soit $0 < \epsilon < 1$ et considérons la fonction $f(x, y) = (x^2 - y^2 - \epsilon, 2xy)$, et $f^{-1}(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = (0, 0)\}$ alors, on a*

$$x^2 - y^2 - \epsilon = 0 \tag{1.2}$$

et

$$2xy = 0 \tag{1.3}$$

D'aprés (1.3) on trouve $x = 0$ *ou* $y = 0$.
Si $x = 0$ *alors :* $-y^2 - \epsilon = 0 \Longrightarrow y^2 = -\epsilon$ *c'est contradiction.*
Si $y = 0$ *alors :* $x^2 - \epsilon = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\epsilon}$ *ou* $x = -\sqrt{\epsilon}$, *donc*

$$f^{-1}(0,0) = \{(-\sqrt{\epsilon}, 0); (\sqrt{\epsilon}, 0)\}$$

Si $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ *alors* $f^{-1}(0,0) \cap \partial\Omega = \emptyset$. *En outre, comme*

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $det(J_f((x,y))) = 4(x^2 - y^2)$ *et puisque* $deg(f,\Omega,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} SgnJ_f(x)$ *alors*

$$Sgn\ detJ_f(\sqrt{\epsilon}, 0) = Sgn\ 4\epsilon = 1$$

$$Sgn\ detJ_f(-\sqrt{\epsilon}, 0) = Sgn\ 4\epsilon = 1$$

$$\Longrightarrow deg(f,\Omega,0) = 1 + 1 = 2$$

Remarque 1.2.2 *Dans le cas où* $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq \emptyset$, *on a le lemme suivant.*

Lemme 1.2.1 (**Lemme de Sard**) *Soit une fonction* $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. *Alors l'ensemble* $f(S_f)$ *des valeurs critiques de* f *est de mesure nulle.*

Nous verrons maintenant qu'on peut étendre la notion de degré au cas où la fonction f est est seulement continue.

Définition 1.2.5 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné,* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $y \notin f(\partial\Omega)$. *On définit le degré topologique de* f *dans* Ω *par rapport à* y *par*

$$deg(f,\Omega,y) = \lim_{n \longrightarrow \infty} deg(f_n, \Omega, y)$$

où $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite de fonction* $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *qui converge uniformément vers* f *dans* $\overline{\Omega}$.

Rappelons à présent quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer.

Théorème 1.2.6 [2] *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et posons*

$$A(\Omega) = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega) \right\}$$

L'application $deg(f, \Omega, y) : A(\Omega) \to \mathbb{Z}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. *(Normalisation) $deg(I, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$ et deg $(I, \Omega, y) = 0$ si $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ où I désigne l'aplication identité sur $\overline{\Omega}$.*

2. *(Solvabilité) Si $deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω.*

3. *(Invariance par homotopie) Pour tout $h : [0, 1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et tout $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ continues telles que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ pour tout $t \in [0, 1]$, $deg(h(t, .), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.*

4. *(Additivité) Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Alors*

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y).$$

5. *$deg(f, \Omega, y)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.*

6. *$deg(f, \Omega, y) = deg(f - y, \Omega, 0)$.*

7. *Soit $g : \overline{\Omega} \to F_m$ une application continue où F_m est un sous espace de $\mathbb{R}^n$, $dimF_m = m$, $1 \leq m \leq n$: Supposons que y est tel que $y \notin (I - g)\partial\Omega$. Alors*

$$der(f, \Omega, y) = deg((I - g)_{\overline{\Omega} \cap F_m}, \Omega \cap F_m, y)$$

Dans le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, la propriété (2) du théorème ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérêt principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes, elles ont le même degré.

exmple 1.2.7 *Soit* $\Omega = (-1, 1)$ *et considérons l'application*

$$h : (t, x) \in [0, 1] \times \overline{\Omega} \to h(t, x) = (1 - t)x + txe^x$$

il est clair que cette application satisfait

1. *h est continue sur* $[0, 1] \times \overline{\Omega}$.
2. $h(0, x) = x$ *et* $h(1, x) = xe^x$.
3. *Pour tout* $t \in [0, 1]$, *la fonction* $h(t, x)$ *ne s'annule pas en* $\{-1, 1\}$. *Donc si* $f(x) = xe^x$ *alors* $deg(f, (-1, 1), 0) = deg(I, (-1, 1), 0) = 1$

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $\Omega \subset X$ est un ensemble ouvert et borné, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ une fonction continue et $y \in X$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$. Dans la section précédente, nous avons vu qu'en dimension finie, $C(\overline{\Omega}, X)$est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré, le degré de Brouwer, satisfaisant les propriétés 1,2 et 3 du théorème. Malheureusement, en dimension infinie, $C(\overline{\Omega}, X)$ ne l'est pas.

Définition 1.2.8 [4] *Soient* X *un espace de Banach et* Ω *une partie de* X. *Si* $T : \Omega \to X$ *est un opérateur continu, on dit que* T *est compact si pour toute partie bornée* B *de* Ω, $T(B)$ *est relativement compact dans* X.

On notera en particulier que si T *est compact , alors* T *est borné sur les parties bornées de* X.

Définition 1.2.9 *Soient* X *un espace de Banach et* Ω *une partie de* X. *On dit que l'application* $T : \Omega \to X$ *est de rang fini si* $dim(Im(T)) < \infty$, *autrement dit , si* $Im(T)$ *est un sous-espace de dimension finie de* X.

Lemme 1.2.2 [5] *Soient* X *un espace de Banach ,* $\Omega \subset X$ *un ouvert borné et* $T : \overline{\Omega} \to X$ *une application compacte. Alors , pour tout* $\epsilon > 0$ *, il existe un espace de dimension fini noté* F *et une application continue* $T_\epsilon : \overline{\Omega} \to F$ *telle que*

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \quad \textit{pour tout} \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Définition 1.2.10 *Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ une application compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le degré de Brouwer $deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$ est bien défini où T_ϵ est défini comme dans le lemme (1.2.2). Par conséquent , nous définissons le degré de Leray-Schauder par*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0).$$

Remarque 1.2.3 *Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $y \in X$ est tel que $y \notin (I-T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à y est défini comme étant*

$$deg(I - T, \Omega, y) = deg(I - T - y, \Omega, 0).$$

Théorème 1.2.11 [2] *Soit X un espace de Banach et*

$A = \left\{(I-T,\Omega,0), \Omega \text{ un ouvert borné de } X, T : \overline{\Omega} \to X \quad \text{compacte}, \quad 0 \notin (I-T)(\partial\Omega)\right\}$

alors , il existe une unique application $deg(f, \Omega, y) : A \to \mathbb{Z}$ appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :

1. *(Normalité) Si $0 \in \Omega$ alors $deg(I, \Omega, 0) = 1$.*

2. *(Solvabilité) Si $deg(I - T, \Omega, 0)$, alors $\exists\, x \in \Omega$ tel que $(I - T)x = 0$.*

3. *(Invariance par homotopie) Soit $H : [0,1] \times \overline{\Omega}$ une homotopie compacte, telle que $0 \notin (I - H(t, .))(\partial\Omega)$. Alors $deg(I - H(t, .), \Omega, 0)$ ne dépend de $t \in [0, 1]$;*

4. *(Additivité) Soient Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles disjoints ouverts de Ω et*

$$0 \notin (I - T)(\partial\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

   Alors,

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T, \Omega_1, 0) + deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

   Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brouwer. Pour finir et comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques en particulier l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

1.3 Théorème du point fixe topologiques

Théorème 1.3.1 ***(Brouwer)*** *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continue. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. S'il existe un $x \in \partial B$, alors il n'y a rien à prouver. Sinon considérons l'application $h(t, x) = x - tf(x)$. On a h est continue , $h(0, x) = x$ et $h(1, x) = x - f(x)$. En outre si on suppose que $h(t, x_0) = 0$ pour certain $x_0 \in \partial B$, alors on obtient $x_0 = tf(x_0)$ ce qui implique Comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, que $f(x_0) \in \partial B$, contradiction. Comme est une homotopie admissible entre $I - f$ et I alors

$$deg(I - f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

En conclusion, il existe un $x \in B$, tel que $x - tf(x) = 0$ i.e. $f(x) = x$. ■

Théorème 1.3.2 ***(Schauder)*** *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ compacte. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. Soit $h(t, x) = tf(x)$ fonction compacte sur $[0, 1] \times \overline{B}$. Si, pour un $t \in [0, 1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - h(t, x) = 0$, alors $tf(x) = x$, comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$ donc un point fixe sur ∂B situation que l'on a exclue. On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne

$$1 = deg(I, B, 0) = deg(I - f, B, 0)$$

puisque $h(0, .) = 0$ et $h(1, .) = f$ donc l'existence d'un point fixe . ■

Théorème 1.3.3 [2] ***(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)****. Soit $\Omega \subset X$ un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach X tel que $0 \in \Omega$, et soit $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact. Alors un des deux énoncés suivants vérifié :*

(1) T a un point fixe dans Ω.

(2) il existe $\lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $Tx = \lambda x$.

Preuve. Si (2) est vraie alors on a rien à prouver. Sinon, on définit l'homotopie

$$H(t,x) = tTx \quad pour \ t \in [0,1].$$

Ainsi défini $H(t,x)$ est compacte , $H(0,x) = 0$ et $H(1,x) = Tx$. Supposons que $H(t,x_0) = x_0$ pour un certain $t \in [0,1]$ et $x_0 \in \partial\Omega$. Alors on a $tTx_0 = x_0$. Si $t = 0$ ou $t = 1$ on a (1) ; Sinon

$$Tx_0 = \frac{1}{t}x_0 \qquad pour \ un \ certain \ t \in (0,1),$$

et alors on a (2). Sinon, on a $deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$ et alors T a un point fixe dans Ω. ■

Théorème 1.3.4 ***(Brouwer)*** *Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X, \|.\|)$ et soit $A : M \to M$ une application continue, alors A admet un point fixe .*

Théorème 1.3.5 ***(Schauder)*** *soit M une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach X et soit $A : M \to M$ une application compacte, alors A admet un point fixe.*

Théorème 1.3.6 ***(Schaeffer)*** *Soit X un espace de Banach et soit $A : X \to X$ une application compacte ,alors*

i. Ou bien, l'équation $x = \lambda Ax$ admet une solution pour $\lambda = 1$.

ii. Ou bien, l'ensemble $\epsilon = \{x \in X, x = \lambda Ax, \lambda \in (0,1)\}$ est non borné.

Théorème 1.3.7 ***(Ascoli-Arzela)*** *Considérons $X = C([a,b])$ muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b}|u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si M est un sous ensemble de X tel que*

i. M est borné, i.e. $\|u\| \leqslant r, \quad \forall u \in M$ et $r > 0$ un nombre fixé.

ii. M est équicontinu, i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \quad tq \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad et \quad \forall\ u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$$

Alors, M est relativement compact.

Chapitre 2

Théorème de continuation de Mawhin

Dans ce chapitre, on fait la présentation du théorème de continuation de Mawhin. Mais avant de faire la présentation plus détaillée du théorème, faisons brièvement l'état de l'art sur les opérateurs de Fredholm ainsi que les principales notions qui s'y rapportent. En revanche comme nous le verrons par la suite, ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections, alors nous y consacrons une autre section.

2.1 Supplémentaire topologique

Soit E et F deux sous-espaces fermés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé X. On dit que E est un supplémentaire topologique de F si X est la somme directe de F et E c-à-d $X = F \oplus E$.

2.2 Projection

Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \longrightarrow X$ est une projection si $P(P(x)) = P(x), \forall\, x \in X$ (c-à-d si $P^2 = P$).

Proposition 2.2.1 *Soit X, un espace vectoriel. Un opérateur linéaire $P : X \longrightarrow X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continue si et seulement si $(I - P)$ est continue.*

Preuve. On montre que : P projection $\Longleftrightarrow$ $(I - P)$ projection
Soit P une projection , alors :

$$\begin{aligned}
(I-P)^2 &= (I-P)[(I-P)(x)]x \\
&= (I-P)[x - P(x)] \\
&= I(x - P(x)) - P(x - P(x)) \\
&= x - P(x) - P(x) + P^2(x) \\
&= x - 2P(x) + P(x) \\
&= x - P(x) \\
&= (I-P)(x)
\end{aligned}$$

$\Leftarrow si\ (I - P)\ est\ une\ projection, I - (I - P) = I - I + P = P$ est aussi une projection. Pour le cadre topologique, comme l'identité est une application continue et que la somme de deux applications continues reste continue, nous avons que P est continue si et seulement s $(I - P)$ l'est. ■

Proposition 2.2.2 *Si P est une projection dans X, alors :*

$$Ker(P) = Im(I - P) \quad et \quad Im(P) = Ker(I - P).$$

Preuve. On montre que $Ker(P) = Im(P)$.
D'abord, on montre $Ker(P) \subset Im(I - P)$

Si $x \in Ker(P) \Longrightarrow P(x) = 0$. En remplaçant $P \;\; par \;\; (I-P)$ alors

$$(I-P)(x) = x - P(x) = x - 0 = x \Longrightarrow x \in Im(I-P)$$

$$\Longrightarrow Ker(P) \subset Im(I-P)$$

En suite, On montre $Ker(P) \supset Im(I-P)$.

Si $x \in Im(I-P)$, on définie l'application :

$$P((I-P)(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0 \Longrightarrow x \in Ker(P)$$

alors

$$\Longrightarrow Ker(P) \supset Im(I-P)$$

Donc

$$Ker(P) = Im(I-P)$$

On montre que $Im(P) = Ker(I-P)$.

D'abord, On montre que $Im(P) \subset Ker(I-P)$.

Si $x \in Im(P) \Longrightarrow P(x) = x$, on remplaçant P par $(I-P)$ alors

$$(I-P)(x) = x - P(x)x - x = 0 \Longrightarrow x \in Ker(I-P)$$

$$\Longrightarrow Im(P) \subset Ker(I-P)$$

En suite, on montre $Im(P) \supset Ker(I-P)$.

Si $x \in Ker(I-P)(x)$ alors $(I-P)(x) = 0 \Longleftrightarrow x - P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = P(x)$. alors

$$\Longrightarrow Im(P) \supset Ker(I-P)$$

Donc

$$Im(P) = Ker(I-P)$$

■

Définition 2.2.1 *Un espace topologique X est séparé (ou de Hausdorff) si* $\forall x \neq y \in X, \exists\ x \in U_x,\ y \in U_y$ *ouverts tel que* $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Corollaire 2.2.2 *Toute projection continue dans un espace de Hausdorff est à image fermée. En particulier, les projections continues des espaces de Banach sont à images fermées.*

Théorème 2.2.3 *Si P est une projection continue dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff X, alors X est la somme directe de* $Im(P)$ *et* $Ker(P)$*, (c-à-d* $X = Im(P) \oplus Ker(P)$*).*

Preuve. Par le corollaire précédant, $Im(P)$ *et* $Ker(P)$ sont fermé dans X, où

$$Ker(P) = \{x \in X; P(x) = 0\}.$$

et

$$Im(P) = \{x \in X; P(x) = x\}.$$

on pose

$$x = P(x) + (I - P)(x)$$

1. $P(x) \in Im(P)$ car $P(P(x)) = P^2(x) = P(x)$.
   $(I-P)(x) \in Ker(P)$ car $P((I-P)(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$.
   alors
   $$X = Im(P) + Ker(P)$$
2. $P(x) \in Im(P) = Ker(I-P) \Longrightarrow P(x) = 0$.
   $(I-P)(x) \in Ker(P) \Longrightarrow (I-P)(x) = 0$.
   alors $x \in Im(P) \cap Ker(P) = \{0\}$.
   D'aprés (1) et (2)
   $$X = Im(P) \oplus Ker(P)$$

■

2.3 Sous-espace de dimension et de codimension finie

Lemme 2.3.1 ***Projection sur un sous-espace de dimension finie.*** *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un projection P continu sur X tel que $Im(P) = E$.*

Preuve. On choisit une base $e_1, ..., e_n$ de E, et on désigne par e_j^*, $j = 1, ..., n$ les formes linéaires coordonnées sur E c'est à dire $e_j^*(e_i) = 1 \quad si \quad i = j \quad et \quad 0 \quad si \quad i \neq j$; par le théorème de *Hahn-Banach* on peut prolonger ces formes linéaire sur E en formes linéaires continues $x_1^*, ..., x_n^*$ sur X . On pose

$$\forall x \in X, \quad P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j$$

il est clair que P est continue, et il est facile de vérifier que P est une projection de X sur E. ■

Corollaire 2.3.1 *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, il existe un sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ tel que $X = E \oplus Y$*

Définition 2.3.2 ***Codimension d'un sous-espace vectoriel.*** *Si l'espace quotient X/Y est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ est de codimension finie dans X qu'on écrit*

$$codim(Y) = dim(X/Y)$$

Lemme 2.3.2 *Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espace vectoriels fermés de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $dim(M) = codim(N) < \infty$, alors $E = M \oplus N$.*

Preuve.

Soit $\pi = \pi_{|N}$ la surjection canonique de E sur E/N. Comme $M \cap N = \{0\}$, l'application π_M est injective. D'où

$$dim(\pi(M)) = dim(M) = codim(N) = dim(E/N)$$

Ainsi $\pi(M) = E/N = \pi(E)$. Maintenant si $x \in E$ quelconque, alors $\pi(x) \in \pi(E) = \pi(M)$. Ainsi il existe $x_M \in M$ tel que $\pi(x) = \pi(x_M)$. D'où $\pi(x - x_M) \in Ker\pi = N$.

On en déduit donc que $x \in M + N$. Ceci prouve que $E = M + N$ et donc finalement $E = M \oplus N$. ∎

2.4 Opérateur de Fredholm

Définition 2.4.1 *Soient X et Y deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, on dit qu'une application linéaire $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ est de Fredholm* [5] *si elle vérifie les conditions suivantes*

1. $Ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ *est de dimension finie.*

2. $Im(L) = L(dom(L))$ *est fermée et de codimension finie.*

   Rappelons que la codimension de $Im(L)$ est la dimension de $coker(L) = dim(Y/Im(L))$.

Si L est un opérateur de Fredholm, alors son indice est l'entier

$$ind(L) = dim(Ker(L)) - codim(Im(L))$$

exmple 2.4.2 1. *Si X et Y sont de dimensions finies, alors tout application linéaire $L : X \longrightarrow Y$ est de Fredholm avec*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dimcoKer(L) \\ &= dim(Ker(L)) - (dim(Y) - dim(Im(L))) \\ &= dim(Ker(L)) + dim(Im(L)) - dim(Y) \\ &= dim(X) - dim(Y) \end{aligned}$$

2. *Si X et Y sont des espaces de Banach et $L : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire bijective alors L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. E n effet, il découle de la bijectivité que $Ker(L) = \{0_X\}$, dont la dimension est nulle, et $Im(L) = Y$ et sa codimension est nulle, ainsi*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dim\left(\frac{Y}{Im(Y)}\right) \\ &= dim\{0_X\} - dim\{0\} = 0 \end{aligned}$$

3. l'identité $I : X \longrightarrow X$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(I)) - codim(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dimcoKer(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dim\left(\frac{X}{Im(I)}\right) \\ &= dim\{0\} - dim\{0\} = 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.4.3 *Si L est un opérateur de Fredholm, K est une application linéaire compacte , alors $L + K$ est de Fredholm et*

$$ind(L + K) = ind(L).$$

En particulier, toute perturbation compacte de l'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 2.4.1 *Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, alors L est surjectif si et seulement si L est injectif*

Preuve. Si L est surjective, alors $Im(L) = Y = Y + \{0\}$ et par suite, $dim\{0\} = dim(Ker(L)) = 0$, donc $Ker(L) = \{0\}$, d'où L est injective. ■

Dans tout ce qui suit (sauf mention de contraire) $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Si L est de Fredholm, alors d'aprés ce qui précède, (voir aussi [2] et [8]), il existe deux projections continues, $P : X \longrightarrow X$ et $Q : Y \longrightarrow Y$ tel que

$$Im(P) = Ker(L) \text{ et } Ker(Q) = Im(L)$$

Posons

$$X_1 = Im(I - P) = Ker(P) \text{ et } Y_1 = Im(Q)$$

alors on eut écrire

$$X = Ker(L) \oplus X_1; \quad Y = Im(L) \oplus Y_1$$

Considérons un isomorphisme

$$J : Ker(L) \longrightarrow Im(Q)$$

dont l'existence est assurée par le fait que $dimker(L) = dimIm(Q) = n$. Remarquons que

$$dom(L) = Ker(L) \oplus (dom(L) \cap X_1)$$

et que la restriction de L à $dom(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur $Im(L)$, notons par L_p cette restriction c'est à dire $L_p : dom(L) \cap X_1 \longrightarrow Im(L)$, alors

Lemme 2.4.1 *L_p est un isomorphisme algébrique.*

Preuve. Tout d'abord, montrons que L_p est injective. Pour cela, soit $x \in Ker(L_p) \subset Ker(L) = Im(P)$, alors il existe un $y \in Dom(P)$ tel que $x = Py$. Comme P est une projection, on obtient $x = Py = P^2y = P(Py) = Px = 0$. Par conséquent, $x = 0$, et donc $Ker(L_p) = \{0\}$, ce qui signifie l'injection de L_p.

Quand à la surjection de L_p, puisque P est une projection , alors nous pouvons écrire l'espace vectoriel X comme somme directe $X = Ker(P) \oplus Im(P) = Ker(P) \oplus Ker(L)$. Prenons $z \in Im(L)$, donc il existe $x \in dom(L) \subset X$ tel que $Lx = z$. Comme $X = Ker(P) \oplus Ker(L)$, alors il existe deux éléments uniques $e \in Ker(P)\ et\ f \in Ker(L)$, tels que $x = e + f$. On a $z = Lx = L(e + f) = Le + Lf = Le + 0 = Le$, ainsi $e \in dom(L)$. Finalement, on obtient $e \in dom(L), e \in Ker(P)\ et\ L_pe = z$, d'où L_p est bien surjective. ■

Définition maintenant $K_p := L_p^{-1}$, il est clair que $K_p : Im(L) \subset Y \longrightarrow dom(L) \cap Ker(P)$ est bijectif, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés.

Lemme 2.4.2 *1. Sur $Im(L)$, on a $LK_p = I$.*

2. Sur $dom(L)$, on a $K_pL = (I - P)$.

Preuve.

(1) Prenons $x \in Im(L)$, alors $LK_px = L(K_p(x)) = L_p(K_p(x)) = Ix$.

(2) Comme $Im(P) = Ker(L)$, alors $LP = 0$, et par suite $K_pL = K_pL(I - P)$.Donc montrer (2), revient à vérifier que $K_pL(I-P) = K_pL_p(I-P)$. Si on a $Im(I-P) \subseteq dom(L_p) = dom(L) \cap Ker(P)$, alors le résultat s'ensuit. Prenons $x \in dom(L)$ Comme $P(x) \in Ker(L) \subset dom(L)$ et $dom(L)$ est un sous espace vectoriel de X, on a $(x - Px) \in dom(L)$.

Puisque $P(x-Px) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$, alors $(x - Px) \in Ker(P)$ et par conséquent $(x - Px) \in dom(L) \cap Ker(P)$. D'ici obtient $Im(I - P) \subset dom(L) \cap Ker(P)$. D'où en utilisant (1) $K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P) s'ensuit.$

■

Considérons l'opérateur $K_{P,Q} : Y \longrightarrow X$ définie par $L_p^{-1}(I - Q)$ on a

Lemme 2.4.3 *L'opérateur $L + JP : dom(L) \longrightarrow Y$ est un isomorphisme et*

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$$

En particulier,

$$(L + JP)^{-1}x = J^{-1}x \quad \textit{pour tout } x \in Im(Q)$$

Preuve. Pour l'injectivité de $L + JP$, soit $x \in dom(L)$ tel que

$$(L + JP)x = 0 \tag{2.1}$$

De cette égalité on en déduit que

$$Lx \in Im(L) \cap Im(J) = Ker(Q) \cap Im(Q) = \{0\}$$

d'où $x \in Ker(L)$. Par conséquence, Px=x et compte tenu de $u''' + f(t, u) = 0$ où $0 < t < 1$, $Jx = 0$, par suite $x = 0$. Pour la surjectivité de $L + JP$, $y \in Y$. Affirmons que

$$x = (K_{P,Q} + J^{-1}Q)y$$

est une solution de

$$(L + JP)x = y$$

En effet, comme $J^{-1}Qy \in Ker(L)$, il en résulte que

$$Lx = LK_{P,Q}y = LL_p^{-1}(I-Q)y = (I-Q)y$$

Comme $K_{P,Q}y \in dom(L) \cap Ker(P)$, il en s'ensuit que

$$JPx = JJ^{-1}Qy = Qy$$

Conséquement

$$(L+JP)x = (I-Q)y = Qy$$

et,

$$(L+JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$$

■

Lemme 2.4.4 *Si $N : \triangle \subset X \longrightarrow X$ est une application, le problème*

$$x \in dom(L) \cap \triangle,\ Lx = Nx$$

est équivalent au problème de point fixe

$$x \in \triangle,\ x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&[x \in dom(L) \cap \triangle,\ Lx = Nx] \\
\Leftrightarrow &[x \in dom(L) \cap \triangle,\ (L+JP)x = (N+JP)x] \\
\Leftrightarrow &\left[x \in \triangle,\ x = (L+JP)^{-1}(N+JP)x\right]
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le lemme suivante :

Lemme 2.4.5 *Soit $y \in E$. Si $\psi = (1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$, alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} u'''(t) + y(t) = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1), u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution

$$\begin{aligned}
u(t) = &-\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds - \frac{\beta}{2\psi}(t^2(1-\alpha)+\alpha)\int_0^\eta (\eta-s)y(s)ds \\
&+ \frac{1}{2\psi}\int_0^1 (1-s)(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(t-s)+\alpha s)y(s)ds
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(L+JP)^{-1}(N+JP) &= (K_{P,Q}+J^{-1}Q)(N+JP) \\ &= K_{P,Q}N + K_{P,Q}JP + J^{-1}QN + J^{-1}QJP.\end{aligned}$$

Puisque $Im(J) = Im(Q) = Ker(I-Q)$, il en résulte que

$$K_{P,Q}JP = L_p^{-1}(I-Q)JP = 0$$

Puisque $Q|_{Im(Q)} = I|_{Im(Q)}$ et $Im(J) = Im(Q)$, on en déduit que

$$J^{-1}QJP = J^{-1}JP = P$$

Par conséquent, $(L+JP)^{-1}(N+JP) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$. ■

Soient X, Y deux espaces de Banach et $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Définition 2.4.4 *Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \longrightarrow Y$ est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si $QN(\overline{\Omega})$ est borné et $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte.*

Comme conséquence des lemmes (2.4.3) et (2.4.4) le degré de coïncidence de Mawhin se définit comme suit :

Définition 2.4.5 *[9] Si les opérateur L et N satisfont les propriétés mentionnées ci dessus, alors le degré de coïncidence de L et N sur Ω est définit par*

$$deg[(L,N),\Omega] = deg_{LS}(I-M,\Omega,0)$$

où M désignera la quantité donnée par $M(P,J,Q) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$ voir ci dessus

Revenons à ce qui a motivé cette section et prouvons le théorème de continuation de Mawhin.

2.5 Preuve du théorème de Mawhin

Théorème 2.5.1 *Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est L-compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $Lx \neq \lambda Nx$ *pour tout* $(x,\lambda) \in [(dom(L) \backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0,1[$.

(ii) $QNx \neq 0$ *pour tout* $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.

(iii) $deg_B(J^{-1}QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$, *où* $Q : Y \longrightarrow Y$ *est la projection définie ci dessus avec* $Im(L) = Ker(Q)$.

Alors l'équation $Lx = Nx$ *admet au moins une solution dans* $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Preuve. Pour $\lambda \in [0,1]$, considérons la famille de problèmes

$$x \in dom(L) \cap \overline{\Omega}, Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)QNx \tag{2.2}$$

Soit $M : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow Y$ une homotopie définie par

$$M(\lambda, x) = Px + J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx$$

En vertu du(2.4.4), le problème (2.2) est équivalent à un problème de point fixe $x \in \overline{\Omega}$ et

$$\begin{aligned} x &= Px + J^{-1}Q(\lambda N + (1-\lambda)QN)x + K_{P,Q}(\lambda N + (1-\lambda)QN)x \\ &= Px + \lambda J^{-1}QNx + (1-\lambda)J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx + (1-\lambda)K_{P,Q}QNx \\ &= M(\lambda, x) \end{aligned}$$

Donc, cette dernière équation est équivalente à un problème de point fixe

$$x \in \overline{\Omega}, \quad x = M(\lambda, x). \tag{2.3}$$

S'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que $Lx = Nx$, alors nous avons terminé. Maintenant supposons que

$$Lx \neq Nx \text{ pour tout } x \in dom(L) \cap \Omega \tag{2.4}$$

et d'autre part

$$Lx \neq \lambda Nx + (1-\lambda)QNx \tag{2.5}$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (dom(L) \cap \Omega)$. Si

$$Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)QNx$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (dom(L) \cap \Omega)$, on obtient par application de Q aux deux membres de l'égalité précédente

$$QNx = 0, \quad Lx = \lambda Nx$$

La première de ces égalités et la condition (ii) impliquent que $x \notin Ker(L) \cap \partial\Omega$ $i.e$ $x \in \partial\Omega \cap (dom(L) \backslash Ker(L))$ et donc la seconde égalité contredit (i). En utilisant une nouvelle fois (ii), il s'ensuit que

$$Lx \neq QNx \quad pour\ tout\ x \in dom(L) \cap \partial\Omega. \tag{2.6}$$

En vertu de (2.4), (2.5) et (2.6), on déduit que

$$x \neq M(\lambda, x) \;\; pour\ tout \;\; (\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega \tag{2.7}$$

Il est facile de vérifier que $M(\lambda, x)$ est compacte car N est L-compacte sur $\overline{\Omega}$, dés lors en utilisant la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, on obtient

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0) \tag{2.8}$$

D'autre part on a

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0) \tag{2.9}$$

Mas le rang de $P + J^{-1}QN$ est contenu dans $Ker(L)$, d'où en utilisant la propriété de reduction du degré de Leray-Schauder et le fait que $P|_{Ker(L)} = I|_{Ker(L)}$, (car $Ker(L) = Im(P) = Ker(I - P)$), on obtient

$$\begin{aligned} deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0) &= deg_B(I - (P + J^{-1}QN), \Omega \cap Ker(L), 0) \\ &= deg_B(J^{-1}QN, \Omega \cap Ker(L), 0) \end{aligned} \tag{2.10}$$

En vertu de (2.8), (2.9) et (2.10), il s'ensuit que $deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0) \neq 0$, et donc la propriété d'existence du degré de Leray-Schauder implique l'existence d'un $x \in \Omega$ tel que $x = M(1, x)$ $i.e$ $\;x \in dom(L) \cap \Omega, Lx = Nx$ ■

Chapitre 3

Application de théorème

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étude l'existence de solution de l'équation différentielle d'ordre trois suivante :

$$x'''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1, \tag{3.1}$$

assujettie aux condition non locales

$$x(0) = x''(0) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\eta^2} \int_0^\eta x(t)dt, \quad \eta \in (0,1), \tag{3.2}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et $\eta \in (0,1)$. Par la théorème de Mawhin et de théorème et des lemmes auxiliaire.

On dit que le problème à valeur aux limites (3.1), (3.2) est en résonance si l'équation linéaire $Lx = x''' = 0$, sous les conditions aux limites (3.2) possède une solution non triviale i.e, $dimkerL \geq 1$.

3.2 Résultat d'existence

Soit X, Y deux espaces de Banach, et soit $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro et $P : X \longrightarrow X,\ Q : Y \longrightarrow Y$ deux projection continues telles que $Im(P) = Ker(L),\ Ker(Q) = Im(L)$ et $X = Ker(L) \oplus Ker(P),\ Y = Im(L) \oplus Im(Q)$. Il en suit que $L|_{dom(L)\cap Ker(P)} : dom(L) \cap Ker(P) \longrightarrow Im(L)$ est inversible, notons par K_P son l'application inverse. Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L)\cap\Omega \neq \emptyset$, application $N : X \longrightarrow Y$ est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si l'application $QN(\overline{\Omega})$ est bornée et $K_P(I - Q)N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte. Enfin rappelons le théorème d'existence de point fixe de Mawhin.

Théorème 3.2.1 *Soient L un opérateur de Fredholm d'indice zéro et N une application L-compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $Lx \neq \lambda Nx$ *pour tout* $(x, \lambda) \in [(dom(L)\backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times (0, 1)$.

(ii) $Nx \notin Im(L)$ *pour tout* $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.

(iii) $deg(QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$, *où* $Q : Y \longrightarrow Y$ *est la projection définie ci dessus avec* $Im(L) = Ker(Q)$.

Alors l'équation $Lx = Nx$ *admet au moins une solution dans* $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Dans ce qui suit, utilisons les espaces classiques $C[0, 1], C^1[0, 1],\ C^2[0, 1]$ et $L^1[0, 1]$. Pour $x \in C^2[0, 1]$, on définit la norme $\|x\| = max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$ où $\|x\|_\infty = max_{t\in[0,1]}|x(t)|$ tendis que $\|x\|_1$ représente la norme dans $L^1[0, 1]$. Soient $X = C^2[0, 1], Y = L^1[0, 1]$ et l'opérateur linéaire $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ défini par

$$Lx = x''', x \in dom(L) = \left\{x \in W^{3,1}([0, 1]) : x(0) = x''(0) = 0,\quad x(1) = \frac{2}{\eta}\int_0^\eta x(t)dt\right\}$$

où $W^{3,1}$ est un espace Sobolev définie comme :

$W^{3,1}[0, 1] = \{x : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x, x', x''$ *sont absolument continues dans* $[0, 1]$ *avec* $x''' \in L^1[0, 1]\}$

Soit l'opérateur $N : X \longrightarrow Y$ défini par

$$Nx = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1)$$

Alors le problème limites (3.1) et (3.2) sera équivalent à $Lx = Nx$

Nous donnons à présent le théorème principale de ce chapitre, soit celui d'existence de solution du problème (3.1) et (3.2).

Théorème 3.2.2 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) Il existe des fonctions $\alpha, \beta, \gamma \in L^1[0,1]$, tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, t \in [0,1]$ on a

$$|f(t,x,y)| \leq \alpha(t)|x| + \beta(t)|y| + \gamma(t). \tag{3.3}$$

(2) Il existe une constante $M > 0$, telle que pour $x \in dom(L)$, si $|x'(t)| > M$ pour tout $t \in [0,1]$, alors

$$\int_0^1 (1-s)^2 f(s, x(s), x'(s))ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s, x(s), x'(s))ds \neq 0. \tag{3.4}$$

(3) Il existe une constante $M^* > 0$, telle que pour $x(t) = bt \in Ker(L)$ avec $|b| > M^*$, on a ou bien

$$b\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s, b(s), b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s, b(s), b)ds\right] < 0. \tag{3.5}$$

ou bien

$$b\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s, b(s), b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s, b(s), b)ds\right] > 0. \tag{3.6}$$

Alors le problème (3.1) et (3.2) admet au moins une solution dans $C^2[0,1]$ pourvu que

$$\|\alpha\| + \|\beta\| < \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

La preuve de ce théorème se fait en des étapes dont chacune sera représentée par la démonstration d'un lemme

Lemme 3.2.1 *L'opérateur $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. De plus on peut définir l'opérateur projection continue $Q : Y \longrightarrow Y$, par*

$$Qy(t) = k \left[\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 y(s)ds \right] t$$

où $= \frac{60}{5-2\eta^3}$ et l'opérateur linéaire $K_P = (L_{dom(L)\cap Ker(P)})^{-1} : Im(L) \longrightarrow dom(L) \cap Ker(P)$ par

$$K_p y(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (t-s)^2 y(s)ds, \quad y \in Im(L)$$

En outre

$$\|K_p y\| \leq \|y\|_1, \quad \textit{pour tout } y \in Im(L).$$

Preuve. On a $Ker(L) = \{x \in dom(L);\ L(x) = 0\}$ où $dom(L) = \{x(t);\ x'' = f + cI\}$;

$$\begin{aligned} L(x) = 0 &\Longleftrightarrow x'''(t) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(t) = \frac{at^2}{2} + bt + c \end{aligned}$$

où a, b et c sont constantes réelles, et d'aprés les conditions non locales $x''(0) = x(0) = 0$, on trouve $a = c = 0$, donc

$$Ker(L) = \{x \in domL : x = bt, b \in \mathbb{R}, t \in [0,1]\}$$

Montrons que

$$Im(L) = \left\{ y \in Y : \int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 y(s)ds = 0 \right\} \tag{3.8}$$

Le problème

$$x''' = y \tag{3.9}$$

a une solution $x(t)$ satisfaisant les conditions $x(0) = x''(0) = 0,\ x(1) = \frac{2}{\eta^2} \int_0^\eta x(t)dt$ si et seulement si

$$\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 y(s)ds = 0 \tag{3.10}$$

En effet de (3.9) on a

$$x(t) = x''(0)\frac{t^2}{2} + x'(0)t + x(0) + \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds = x'(0)t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds$$

comme $x(0) = x''(0) = 0$, alors

$$x(t) = x'(0)t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds$$

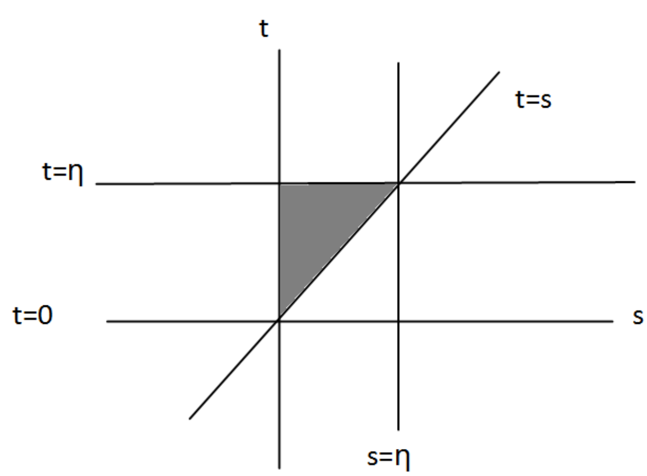
En vertu de $x(1) = \dfrac{2}{\eta^2}\int_0^\eta x(t)dt$, on obtient

$$x(1) = x'(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds$$

et

$$\begin{aligned}
x(1) &= \frac{2}{\eta^2}\int_0^\eta \left[x'(0)t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds\right] dt \\
&= \frac{2}{\eta^2}\int_0^\eta x'(0)tdt + \frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta \left[\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds\right] dt \\
&= \frac{2}{\eta^2}x'(0)\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\eta + \frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta \left[\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds\right] dt \\
&= x'(0) + \frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta \left[\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds\right] dt
\end{aligned}$$

maintenant on calcule l'intégrale $\frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta \left[\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds\right] dt$, où $s < t$. D'aprés l'intégrale de Fubini, on a :



$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta\left[\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds\right]dt &= \frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta\left[\int_s^\eta (t-s)^2 y(s)dt\right]ds\\ &= \frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta\left[\frac{1}{3}\left[(t-s)^3\right]_s^\eta y(s)\right]ds\\ &= \frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta\left[\frac{1}{3}(\eta-s)^3 y(s)\right]ds\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} x'(0)+\frac{1}{2}\int_0^1(1-s)^2y(s)ds &= x'(0)+\frac{1}{3\eta^2}\int_0^\eta(t-s)^3y(s)ds\\ \Longleftrightarrow\qquad 2\times\frac{1}{2}\int_0^1(1-s)^2y(s)ds &= 2\times\frac{1}{3\eta^2}\int_0^\eta(t-s)^3y(s)ds\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1(1-s)^2(s)ds-\frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta(\eta-s)^3y(s)ds=0$$

D'autre part, si (3.10) est vérifiée, posons

$$x(t)=bt+\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2y(s)ds \tag{3.11}$$

Posons

$$Ry=\int_0^1(1-s)^2y(s)ds-\frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta(\eta-s)^3y(s)ds$$

définition $Qy(t)=k.(Ry).t$, il est clair que $dimIm(Q)=1$. On a

$$\begin{aligned}Q^2y=Q(Qy)&=k(RQ(y))t\\ &=k\left(\int_0^1(1-s)^2Q(y)ds-\frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta(\eta-s^3)Q(y)ds\right)t\\ &=k\left(\int_0^1(1-s)^2kRysds-\frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta(\eta-s^3)kRysds\right)t\\ &=k(kRy)\left(\int_0^1(1-s)^2sds-\frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta(\eta-s^3)sds\right)t\\ &=k(kRy)Ryt=(kRy)t=Qy\end{aligned}$$

ce qui implique que l'opérateur Q est une projection. En outre il est facile de vérifier que $Im(L)=Ker(Q)$, et que $Im(L)$ est fermée vient du fait que $Im(L)=Ker(Q)=Q^{-1}(\{0\})$.

Vérifions à présent que $Y = Im(L) \oplus Im(Q)$.

1) Pour $y \in Y$, on a $y = (y - Qy) + Qy$ d'où $y - Qy \in ker(Q) = Im(L)$ car $(Q^2y = Qy)$ et $Qy \in Im(Q)$ alors

$$Y = Im(L) + Im(Q)$$

.

2) On montre que $Im(L) \cap Im(Q) = \{0\}$

• si $y \in Im(L) = Ker(Q) \Longrightarrow Qy = 0$

• si $y \in Im(Q)$: $\exists\ y' \in Y$ tel que

$$\begin{aligned} y = Qy' \Longleftrightarrow & Qy = Q^2y' \\ & = Qy' = y = 0 \qquad (car\ Qy = 0) \end{aligned}$$

donc : $y \in Im(L) \cap Im(Q) \Longleftrightarrow Im(L) \cap Im(Q) = \{0\}$.

D'aprés (1) et (2)

$$Y = Im(L) \oplus Im(Q)$$

Puisque $Im(Q) = Ker(L), alorsdimKer(L) = 1 = dimIm(Q) = codimIm(L) = 1$ donc $ind(L) = dimKer(L) - codimIm(L) = 0$, dés lors L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Définissons maintenant la projection $P : X \longrightarrow X$ par

$$Px(t) = x'(0)t$$

Alors l'inverse généralisé de l'opérateur $K_P : Im(L) \longrightarrow dom(L) \cap Ker(P)$ de L est donnée par

$$K_py(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (1-s)^2 y(s)ds.$$

On remarque que $Im(P) = Ker(L)$ et $Ker(P) = \{x \in X; x'(0) = 0\}$. Montrons que P est une projection. En effet, $Px(t) = x'(0)t \Longrightarrow P^2x(t) = P[x'(0)t] = x'(0)t = Px$.

On montre que $X = Ker(L) \oplus Ker(P)$

1) Pour $x \in X$, on a : $x = (x - Px) + Px$ d'où $(x - Px) \in Ker(L) = Im(P)$ car

$(P^2x = Px)$, et $Px \in Ker(P)$

$$X = Ker(L) + Ker(P)$$

2) On montre que $Ker(L) \cap Ker(P) = 0$

• si $x \in Ker(P) \Longrightarrow Px = 0$.

• si $x \in Ker(P) = Im(P)$: $\exists\ x' \in X$ tel que

$$\begin{aligned} Px = x' \Longleftrightarrow P^2x &= Px' \\ &= x' = Px = 0 \quad (car Px = 0) \end{aligned}$$

Donc $x \in Ker(L) \cap Ker(P)$; alors $Ker(L) \cap Ker(P) = \{0\}$.

D'aprés (1) et (2)

$$X = Ker(L) \oplus Ker(P).$$

Suite aux définition de P et K_P. En effet, pour $y \in Im(L)$, on a

$$(LK_p)y(t) = [(K_py)t]''' = \left(\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds\right)''' = y(t)$$

et pour $x \in dom(L) \cap Ker(P)$, en utilisant deux intégrations par partie on obtient

$$\begin{aligned} (K_pL)x(t) = (K_p)x'''(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t (1-s)^2 x'''(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left[(t-s)^2x''(s)\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t (-2)(1-s)x''(s)ds \\ &= -\frac{1}{2}x''(0)t^2 + \int_0^t (t-s)x''(s)ds \\ &= -\frac{1}{2}x''(0)t^2 + [(t-s)x'(s)]_0^t + \int_0^t x'(s)ds \\ &= -\frac{1}{2}x''(0)t^2 - x'(0)t + x(t) - x(0) \end{aligned}$$

étant donné que $x \in dom(L) \cap Ker(P)$, c'est à dire $x(0) = x''(0) = 0$ et $Px = 0$ alors

$$(K_pL)x(t) = x(t)$$

Ceci montre que $K_p = (L|_{dom(L)\cap Ker(P)})^{-1}$. D'autre part on a pour tout $y \in Im(L), t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|K_p y\|_\infty &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^t \left| \frac{1}{2}(t-s)^2 y(s)ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 \left| y(s) \right| ds
\end{aligned}$$

on a $\max_{0\leq s\leq t}((t-s)^2)' = \max_{0\leq s\leq t}(-2(t-s)) < 0$, donc $0 \leq (t-s)^2 \leq t^2$, alors

$$\begin{aligned}
\|K_p y\|_\infty &\leq \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{2} t^2 \int_0^t |y(s)|ds \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |y(s)|ds \\
&\leq \int_0^1 |y(s)|ds = \|y\|_1
\end{aligned}$$

et comme $(K_p y)'(t) = \int_0^1 (1-s)y(s)ds$, alors

$$\begin{aligned}
\|(K_p y)'\|_\infty &= \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t (t-s)y(s)ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^t (t-s) \left| y(s) \right| ds
\end{aligned}$$

on a $\dfrac{d}{ds}(\max_{0\leq s\leq t}(t-s)) = \max_{0\leq s\leq t}(-1) < 0$, donc $0 \leq (t-s) \leq t$, alors

$$\begin{aligned}
\|(K_p y)'\|_\infty &\leq \max_{t\in[0,1]} t \int_0^t |y(s)|ds \\
&\leq \int_0^1 |y(s)|ds = \|y\|_1
\end{aligned}$$

d'où $\|K_p y\| = max(\|K_p y\|_\infty, \|(K_p y)'\|_\infty) \leq \|y\|_1$. Ceci termine la démonstration du lemme.

■

Lemme 3.2.2 *Soit $\Omega_1 = \{x \in dom(L)\backslash Ker(L) : Lx = \lambda Nx,\ pour\ \lambda \in [0,1]\}$. Alors Ω_1 est borné.*

Preuve. Soit $x \in \Omega_1$, et $Lx = \lambda Nx$. Alors $\lambda \neq 0$ et $QNx = 0$, car $x \notin Ker(L)$ et $Nx \in Im(L) = Ker(Q)$, donc

$$\int_0^1 (1-s)^2 f(s, x(s), x'(s))ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s, x(s), x'(s))ds = 0$$

Ainsi par la condition (2), il existe $t_0 \int [0,1]$, tel que $|x'(t)| \leq M$. Comme x', x'' sont absolument continues pour tout $t \in [0,1]$

$$x'(0) = x'(t_0) - \int_0^{t_0} x''(t)dt, \qquad x''(t) = x''(0) + \int_0^t x'''(s)ds$$

alors on a

$$\begin{aligned} |x'(0)| \leq M \leq M + \left| \int_0^{t_0} x''(t)dt \right| &= M + \left| \int_0^{t_0} \left(x''(0) + \int_0^t x'''(s)ds \right) dt \right| \\ &\leq M + \int_0^{t_0} |x'''(0)|\, dt + \int_0^{t_0} \left| \left(\int_0^t x'''(s)ds \right) \right| dt \\ &\leq M + \int_0^{t_0} |x''(0)|\, dt + \int_0^{t_0} \left(\int_0^t |x'''(s)|\, ds \right) dt \\ &\leq M + \int_0^1 |x''(0)|\, dt + \int_0^1 \left(\int_0^1 |x'''(s)|\, ds \right) dt \\ &\leq M + \int_0^1 \left(\int_0^1 |x'''(s)|\, ds \right) dt \end{aligned}$$

puisque $x''(0) = 0$ alors

$$|x'(0)| \leq M + \|x'''\|_1 = M + \|Lx\|_1 = M + \|\lambda Nx\|_1 \leq M + \max_{\lambda \in [0,1]} \lambda \|Nx\|_1 \leq M + \|Nx\|_1 \tag{3.12}$$

A nouveau pour $x \in \Omega_1, x \in dom(L) \backslash Ker(L)$, alors $(I - P)x \in dom(L) \cap Ker(L)$ et $LPx = 0$, on sait d'aprés le lemme (3.2.1)que

$$\|(I-P)x\| = \|K_p L(I-P)x\| \leq \|L(I-P)x\|_1 = \|L(x - Px)\|_1 = \|Lx\|_1 \leq \|Nx\|_1 \tag{3.13}$$

En se servant des estimations (3.12)et (3.13), on déduit que

$$\|x\| \leq \|Px\| + \|(I-P)x\| = |x'(0)| + \|(I-P)x\| \leq M + \|Nx\|_1 + \|Nx\|_1 = M + 2\|Nx\|_1 \tag{3.14}$$

De (3.3)et(3.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\|Nx\|_1 &= \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \leq \int_0^1 (\alpha(s)|x| + \beta(s)|y| + \gamma(s))\, ds \\
&\leq \left| \int_0^1 (\alpha(s)|x| + \beta(s)|y| + \gamma(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |\alpha(s)|ds|x| + \int_0^1 |\beta(s)|ds|y| + \int_0^1 |\gamma(s)|ds \\
&= \|\alpha\|_1|x| + \|\beta\|_1|y| + \|\gamma\|_1 \\
&\leq \|\alpha\|_1 \max_{t\in[0,1]}|x| + \|\beta\|_1 \max_{t\in[0,1]}|y| + \|\gamma\|_1 \\
&= \|\alpha\|_1\|x\|_\infty + \|\beta\|_1\|y\|_\infty + \|\gamma\|_1 \\
&= \|\alpha\|_1\|x\|_\infty + \|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1
\end{aligned}$$

Dés lors

$$\|x\| \leq M + 2\|Nx\|_1 \leq M + 2\left[\|\alpha\|_1\|x\|_\infty + \|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1\right]$$

donc

$$\|x\| \leq 2\left[\|\alpha\|_1\|x\|_\infty + \|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right] \tag{3.15}$$

Puisque$\|x\|_\infty \leq \|x\|$ et (3.15), alors

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty \leq \|x\| &\leq 2\left[\|\alpha\|_1\|x\|_\infty + \|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right] \\
&\Longleftrightarrow \|x\|_\infty - 2\|\alpha\|_1\|x\|_\infty \leq 2\left[\|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right] \\
&\Longleftrightarrow \|x\|_\infty(1 - 2\|\alpha\|_1) \leq 2\left[\|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\|x\|_\infty \leq \frac{2}{1 - 2\|\alpha\|_1}\left[\|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right] \tag{3.16}$$

car $1-2\|\alpha\|_1 \geq (1-2)(\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1) > 0$, voir condition(3.7). D'autre part de $\|x'\|_\infty \leq \|x\|$, de (3.15) et (3.16), on a

$$\begin{aligned}
\|x'\|_\infty \leq \|x\| &\leq 2\left[1 + \frac{2\|\alpha\|_1}{1 - 2\|\alpha\|_1}\right]\left[\|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right] \\
&= \frac{2}{1 - 2\|\alpha\|}\left[\|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right]
\end{aligned}$$

alors

$$\|x'\|_\infty \leq \frac{2}{1-2\|\alpha\|}\left[\|\beta\|_1\|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right]$$

donc

$$\|x'\|_\infty\left[\frac{1-2\|\alpha\|_1 - 2\|\beta\|_1}{1-2\|\alpha\|_1}\right] \leq \frac{2}{1-2\|\alpha\|_1}\left[\|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right] \tag{3.17}$$

c'est à dire

$$\|x'\|_\infty \leq \frac{2\left[\|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right]}{1-2\|\alpha\|_1 - 2\|\beta\|_1} = M_1 \tag{3.18}$$

D'où de (3.18) ; il existe $M_1 > 0$, tel que

$$\|x'\|_\infty \leq M_1 \tag{3.19}$$

ainsi de (3.19) et(3.16), il existe $M_2 > 0$ tel que

$$\|x\|_\infty \leq M_2 \tag{3.20}$$

Par conséquent

$$\|x\| = max\left\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\right\} \leq \max\left\{M_1, M_2\right\}$$

Donc Ω_1 est borné ■

Lemme 3.2.3 *L'ensemble* $\Omega_2 = \{x \in Ker(L) : Nx \in Im(L)\}$ *est borné.*

Preuve. Soit $x \in \Omega_2$, alors $x \in Ker(L)$ *et* $QNx = 0$, car $Nx \in Im(L) = Ker(Q)$ par conséquent

$$\int_0^1 (1-s)^2 f(s, bs, b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s, bs, b)ds = 0.$$

De la condition (2) du théorème (3.2.2), on déduit qu'il existe $t_1 \in [0,1]$, tel que $|x'(t_1)| = |b| \leq M$. Comme dans ce cas on a $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| = |b| = \|x'(t)\|_\infty$, alors $\|x\| = |b| \leq M$, donc Ω_2 est bornée. ■

Lemme 3.2.4 *Si la première partie de la condition (3) du théorème (3.2.2) est satisfait, c'est à dire*

$$b.\frac{60}{5-2\eta^3}\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s, b(s), b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s, b(s), b)ds\right] < 0 \tag{3.21}$$

pour tout $|b| > M^*$. *Alors l'ensemble*

$$\Omega_3 = \{x \in Ker(L) : -\lambda Jx + (1-\lambda)QNx = 0, \lambda \in [0,1]\}$$

est bornée, où $J : Ker(L) \longrightarrow Im(Q)$ *désigne un isomorphisme linéaire défini par* $J(bt) = bt, \quad \forall\, b \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1]$.

Preuve. Supposons que $x = b_0 t \in \Omega_3$ alors on a

$$\lambda J(b_0 t) + (1-\lambda)QNb_0 t = 0$$

$$\lambda J(b_0 t) = (1-\lambda)QNb_0 t$$

$$\lambda b_0 t = (1-\lambda)\frac{60}{5-2\eta^3}\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s,b(s),b)ds\right] t$$

par la division sur t, on obtient

$$\lambda b_0 = (1-\lambda)\frac{60}{5-2\eta^3}\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s,b(s),b)ds\right]$$

Si $\lambda = 1$, alors $b_0 = 0$. Par ailleurs, si $|b_0| > M^*$, alors en vue de (3.21), on a

$$\lambda b_0^2 = b_0(1-\lambda).\frac{60}{5-2\eta^3}\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s,b(s),b)ds\right] < 0$$

ceci contredit le fait que $\lambda b_0^2 \geq 0$. D'où $|x| = |b_0 t| \leq M^*$, alors $\|x\| \leq M^*$, par suite $\Omega_3 \subset \{x \in Ker(L) : \|x\| \leq M^*\}$ est borné.

Si $\lambda = 0$, alors

$$\int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s,b(s),b)ds = 0$$

en tenant compte de la condition (3) du théorème (3.2.2), on obtient $\|x\| = |b| \leq M^*$ ■

Lemme 3.2.5 *Si la deuxième partie de la condition (3) du théorème (3.2.2) est satisfait, c'est à dire*

$$b.\frac{60}{5-2\eta^3}\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s,b(s),b)ds\right] > 0 \qquad (3.22)$$

pour tout $|b| > M^*$. *Alors l'ensemble*

$$\Omega_3 = \{x \in Ker(L) : \lambda Jx + (1-\lambda)QNx = 0, \lambda \in [0,1]\}$$

est bornée. Ici J est défini comme dans le lemme (3.2.4). D'une manière analogue à la preuve du lemme précédent on prouve également que Ω_3 *est bornée.*

Lemme 3.2.6 *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \Omega \neq \emptyset$. Alors N est L-compact sur $\overline{\Omega}$*

Preuve. En effet nous devons montrer que l'application $QN(\overline{\Omega})$ est bornée et $K_P(I - Q)N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte.

Comme Ω est borné, il existe une constante $r > 0$ telle que $\|x\| \leq r$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Pour $x \in \overline{\Omega}$ on a

$$\begin{aligned}
|QNx| &= \left| k \left(\int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s,b(s),b)ds \right) t \right| \\
&\leq \left| kt \int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)ds \right| + \left| kt \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 f(s,b(s),b)ds \right| \\
&\leq kt \int_0^1 \left| (1-s)^2 f(s,b(s),b) \right| ds + kt \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta \left| (\eta - s)^3 f(s,b(s),b) \right| ds \\
&\leq kt \int_0^1 (1-s)^2 |f(s,b(s),b)| ds + kt \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 |f(s,b(s),b)| ds \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} tk \int_0^1 (1-s)^2 |f(s,b(s),b)| ds + \max_{t\in[0,1]} tk \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta |(\eta - s)^3 f(s,b(s),b)| ds \\
&\leq k \int_0^1 (1-s)^2 |f(s,b(s),b)| ds + k \frac{2}{3\eta^2} \int_0^1 (1-s)^2 |f(s,b(s),b)| ds \\
&\leq \left(k + k \frac{2}{3\eta^2} \right) \int_0^1 (1-s)^2 |f(s,b(s),b)| ds \\
&\leq k \left(1 + \frac{2}{3\eta^2} \right) \int_0^1 (1-s)^2 |f(s,b(s),b)| ds
\end{aligned}$$

compte tenu de la condition (3.3) du théorème (3.2.2), on obtient

$$\|QNx\|_1 \leq k \left(1 + \frac{2}{3\eta^2} \right) (\|\alpha\|_1 \|x\|_\infty + \|\beta\|_1 \|x'\|_\infty + \|\gamma\|_1)$$

Puisque $\|x'\|_\infty \leq \|x\|$ et $\|x\|_\infty \leq \|x\|$, alors

$$\begin{aligned}
\|QNx\|_1 &\leq k \left(1 + \frac{2}{3\eta^2} \right) (\|\alpha\|_1 \|x\| + \|\beta\|_1 \|x\| + \|\gamma\|_1) \\
&\leq k \left(1 + \frac{2}{3\eta^2} \right) ((\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1) \|x\| + \|\gamma\|_1)
\end{aligned}$$

puisque $\|x\|\leq r$ alors on obtient

$$\|QNx\|_1\leq k\left(1+\frac{2}{3\eta^2}\right)((\|\alpha\|_1+\|\beta\|_1)r+\|\gamma\|_1) \tag{3.23}$$

Dés lors $QN(\overline{\Omega})$ est borné.

Montrons à présent que $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est compacte. En effet, remarquons d'abord que pour $x\in(\overline{\Omega})$

$$\|Nx\|_1=\int_0^1|f(s,x(s),x'(s)|ds\leq(\|\alpha\|_1+\|\beta\|_1)r+\|\gamma\|_1 \tag{3.24}$$

De plus

$$\begin{aligned}|K_P(I-Q)Nx(t)| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^t(t-s)^2(I-Q)Nx(s)ds\right|\leq\frac{1}{2}\int_0^t\left|(t-s)^2(I-Q)Nx(s)\right|ds\\ &\leq\max_{t\in[0,1]}\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2\left(I-Q)Nx(s)\right|ds\leq\max_{t\in[0,1]}\int_0^t\frac{1}{2}t^2\left|(I-Q)Nx(s)\right|ds\\ &\leq\frac{1}{2}\int_0^1|Nx(s)-QNx(s)|ds\leq\int_0^1(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds\\ &=\int_0^1(|Nx(s)|)ds+\int_0^1(|QNx(s)|)ds\\ &=\|Nx\|_1+\|QNx\|_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|[K_P(I-Q)Nx]'(t)| &= \left|\int_0^t(t-s)(I-Q)Nx(s)ds\right|\leq\int_0^t|(t-s)(I-Q)Nx(s)|\,ds\\ &\leq\max_{t\in[0,1]}\int_0^t(t-s)\left|(I-Q)Nx(s)\right|ds\leq\max_{t\in[0,1]}\int_0^t t|Nx(s)-QNx(s)|ds\\ &\leq\int_0^1(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds=\int_0^1(|Nx(s)|ds+\int_0^1(|QNx(s)|ds\\ &=\|Nx\|_1+\|QNx\|_1\end{aligned}$$

D'où de (3.23) et (3.24), $\|K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})\|\leq\|Nx\|_1+\|QNx\|_1$.

Conséquement $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est borné.

Prouvons maintenant que $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu. En effet pour $t_1,t_2\in[0,1],t_1<$

t_2, on a

$$|K_P(I-Q)Nx(t_1) - K_P(I-Q)Nx(t_2)|=$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^2(I-Q)Nx(s)ds - \int_0^{t_2}(t_2-s)^2(I-Q)Nx(s)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^2(I-Q)Nx(s)ds\right| + \frac{1}{2}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^2(I-Q)Nx(s)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{t_1}|(t_1-s)^2(I-Q)Nx(s)|ds + \frac{1}{2}\int_0^{t_2}|(t_2-s)^2(I-Q)Nx(s)|ds$$

$$\leq \int_0^{t_1}(t_2-s)^2-(t_1-s)^2|(I-Q)Nx(s)|ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^2|(I-Q)Nx(s)|ds$$

$$= \int_0^{t_1}(t_2-s)^2-(t_1-s)^2|Nx(s)-QNx(s)|ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^2|Nx(s)-QNx(s)|ds$$

$$\leq \int_0^{t_1}(t_2-s)^2-(t_1-s)^2(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^2(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds$$

on a $(t_2-s)^2-(t_1-s)^2 = (t_2-t_1)(t_1+t_2-2s)$, et $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ alors $t_1+t_2-2s < 2-2s < 2$, donc $(t_2-s)^2-(t_1-s)^2 \leq 2(t_2-t_1)$, on obtient

$$\leq 2(t_2-t_1)\int_0^1(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds + \int_{t_1}^{t_2}(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds$$

et

$$|[K_P(I-Q)Nx]'(t_1) - [K_P(I-Q)Nx]'(t_2)|=$$

$$= \left|\int_0^{t_1}(t_1-s)(I-Q)Nx(s)ds - \int_0^{t_2}(I-Q)Nx(s)ds\right|$$

$$\leq \left|\int_0^{t_1}(t_1-s)(I-Q)Nx(s)ds\right| + \left|\int_0^{t_2}(t_2-s)(I-Q)Nx(s)ds\right|$$

$$\leq \int_0^{t_1}|(t_1-s)(I-Q)Nx(s)|ds + \int_0^{t_2}|(t_2-s)(I-Q)Nx(s)|ds$$

$$\leq \int_0^{t_1}(t_2-s)-(t_1-s)|(I-Q)Nx(s)|ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)|(I-Q)Nx(s)|ds$$

$$= \int_0^{t_1}(t_2-s)-(t_1-s)|Nx(s)-QNx(s)|ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)|Nx(s)-QNx(s)|ds$$

$$\leq \int_0^{t_1}(t_2-s)-(t_1-s)(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds$$

$$\leq (t_2-t_1)\int_0^1(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds + \int_{t_1}^{t_2}(|Nx(s)|+|QNx(s)|)ds$$

Ainsi $\|K_P(I-Q)Nx(t_1) - K_P(I-Q)Nx(t_2)\| \longrightarrow 0$ quand $t_1 \longrightarrow t_2$ par conséquent $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu, alors d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est compacte, donc N est L-compacte sur $\overline{\Omega}$ ■

3.2.1 Preuve du théorème 3.2.2

La preuve du théorème 3.2.2 est une conséquence immédiate des lemmes ci-dessus et le théorème de coïncidence de Mawhin.

Preuve. Soit donc Ω le sous ensemble ouvert borné de X i.e $\Omega = \{x \in X; \|x\| \leq r\}$ tel que $\cup_{i=1}^{3}\overline{\Omega}_i \subset \Omega$. Des lemmes précédents on se convainc que

(i) $Lx \neq \lambda Nx$, pour tout $x \in (dom(L)\backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega$ et $\lambda \in (0,1)$ car $\Omega_1 \cap \partial\Omega \times]0,1[= \varnothing$

(ii) $Nx \notin Im(L)$ pour tout $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$ *car* $\Omega_2 \cap \partial\Omega = \varnothing$

(iii) On a $H(x,\lambda) = \pm\lambda Jx + (1-\lambda)QNx \neq 0$ pour tout $x \in Ker(L) \cap \Omega$ car $\Omega_3 \cap \Omega = \varnothing$. alors par la propriété d'invariance par homotopie du dégrée on obtient

$$\begin{aligned} deg(QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) &= deg(H(.,0), \Omega \cap Ker(L), 0) \\ &= deg(H(.,1), \Omega \cap Ker(L), 0) \\ &= deg(\pm J, \Omega \cap Ker(L), 0) \end{aligned}$$

Donc par le théorème 3.2.1, l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solution dans $dom(L) \cap \overline{\Omega}$, et dés lors (3.1) et (3.2) a au moins une solution $x \in C^2[0,1]$

■

Conclusion

Dans cette mémoire, on fait démontrer l'existence solution d'une équation différentielle d'ordre trois à condition non locale de type intégrale, par la théorème de coïncidence de Mawhin, qui vérifie trois conditions pour démontrer l'existence de solution, par l'utilisation de théorème et des lemmes auxiliaires.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[2] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[3] G. Dinca, J. Mawhin, Brouwer Degree and Applications, January 17, 2009.

[4] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques and Applications. Springer-Verlag, 1993.

[5] D. O'Regan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman and Hall/CRC, (2006).

[6] A.Guezane-Lakoud and A.Frioui, Third Order Boundary Value Problem with Integral Condition at Resonance. Theory and Applications of Mathematics and Computer science,3(1)(2013)56-64.

[7] J. Mawhin, Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, CBMS Reg. Conf. in Math., No 40, American Math. Soc., Providence, RI, 1979.

[8] A. Sirma, S. Sevgin, A Note on Coincidence Degree Theory, Int. J. Math. Math. Sc, Volume 2012Article ID 370946, 18 pages

[9] J. Mawhin, Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory, J. Differential Equations 12 (1972), 610-636

[10] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.