République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté En Vue De L'obtention Du

DIPLÔME DE MASTER

EN MATHÉMATIQUES

Option : Probabilité et Statistique

Par

Dahdi Messaouda

Intitulé

Prédiction de Processus autorégressif moyenne mobile intégré saisonnier par la méthode de Holt-Winters

Membres du jury

AMARA Abdelkader	M. C. A	UKMO	Président
MEDDI Fatima	M. C. B	UKMO	Examinateur
ARBIA Hanane	M. C. B	UKMO	Rapporteur

2022-2023

Table des matières

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma très cher Mère ABIA Djemaa et mon très cher Père DAHDI Ali ,à ceux qui m'ont toujours encouragé pour que je réussisse dans mes études.

à tous mes frères

à tout ma famille

à tous ceux qui m'ont enseigné

à tous mes compagnons de promotion et à tous ce que ma réussite leur tient à coeurque ce travail soit le témoignage de ma gratitude et de mon profond respect.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a accordée la volonté et le courage pour réaliser ce mémoire.

Mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à Dr.ARBIA Hanane qui a accepté de diriger ce travail. Sa grande disponibilité et ses encouragements ont joué un rôle important dans la réalisation de ce mémoire.

Je remercie sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examinateur.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de notre département de mathématiques de l'université de Kasdi Merbah.

Merci à tous et à toutes

Liste des tableaux

Table des figures

Notations et abriviations

ADF	Test de Dickey Fuller Augmenté.
AIC	Critère d'information d'Akaike.
AR	Autorégressif.
ARIMA	Autorégressif moyenne mobile intégré.
ARMA	Autorégressif moyenne mobile.
BB	Bruit blanc.
BIC	Critère d'information bayésien.
Cov	Covariance.
D	Opérateur d'avance.
DS	Difference Stationary.
E	Espérance.
L	Opérateur retard.
LED	Lissage exponentiel double.

LES	Lissage exponentiel simple.
MA	Moyennes Mobiles (Moving Average).
SARIMA	La moyenne mobile intégrée autorégressive saisonniére.
$\mathbf{S}_t$	Saisonnalité.
TS	Trend Stationar.
$\mathbf{X}_t$	Série temporelle.
$\boldsymbol{\Delta}$	Opérateur de différentiation.

Introduction

L'étude des séries temporelles, ou séries chronologiques correspond à l'analyse statistique d'observations réguliérement espacées dans le temps dans le but d'expliquer et privoir le phénoméne étudier dans le futur.

La série chronologique dépend principalement de temps entant que facteur indépendant déterminant et expliquer du phénomène et l'utilisation de valeurs variables dans les périodes précédentes.

Il existe de nombreux types et formes de séries chronologiques (AR, MA, ARMA, ARIMA, SARIMA,...) étant donné que chacun d'eux a certaines caractéristiques qui le distinguent des autres modéles.

ARIMA et SARIMA sont tous deux des algorithmes de prévision, ARIMA prend en compte les valeurs passées et prédit les valeurs futures en fonction de celles-ci. SARIMA utilise de la même maniére les valeurs passées, mais prend également en compte les modéles de saisonnalité, ce dernier fait l'objet de notre étude dans ce travail.

L'une des raisons les plus importantes pour étudier les séries chronologiques est la prévision, dont dépendent diverses institutions pour préparer l'avenir. Il existe plusieurs méthodes de prévision, et dans cette recherche, nous nous appuierierons sur la méthode de lissage expoentiel de Holt-Winters. Cette méthode concerne les séries chronologiques saisonniéres, qui sont la base de notre recherche.

Il existe de nombreuses études sur la méthode de lissage expoentiel de Holt-Winters, Mezian, Y. et Sayoud, H. (2019) , Senouci, S. (2012), Katlyn,T. (2011).

Ce travail se décompose comme suit :

Le premier chapitre est des définitions de processus stochastiques et généralités sur les séries chronologique.

Le deuxiéme chapitre présente les modéles de base (AR, MA, ARMA) et les propriétés de chacun et les modéles ARIMA et ARIMA saisonniers (SARIMA) et leurs propriétés.

Le troisième chapitre traite la méthode de lissage expoentiel et ses différents types et d'appliquer cette méthode à des données réelles.

Chapitre 1

Processus stochastiques et généralités sur les séries chronologiques

Dans ce chapitre on s'intéresse à la présentation des concepts, des définitions et de l'aspect générale des modéles et des méthodes qu'on utilisera dans les chapitres suivants. Ce préliminaire commencera par des généralités sur les variables aléatoires et les processus stochastiques. [1], [5], [6], [11], [12].

1.1 Variables aléatoires et processus stochastiques

Un processus aléatoire (ou processus stochastique) peut être vu comme un processus qui est le résultat d'un événement aléatoire. Il peut également être vu comme étant une collection de variables aléatoires.

Définition 1.1 (Variables aléatoires) *Soient* (Ω, F, P) *un espace probabilisé et* (E, ε) *un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de* Ω *vers* E *, toute fonction mesurable* X *de* Ω *vers* E*.*

Cette condition de mesurabilité de X assure que l'image réciproque par X de tout élément B de la tribu ε possède une probabilité et permet ainsi de définir sur (E, ε), une mesure de probabilité, notée P_X, par

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

P_X est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Considérons un espace de probabilité (Ω, F, P), un ensemble d'indices T et un espace métrique S muni de la tribu borélienne $B(S)$.

Définition 1.2 (Processus stochastique) *Un processus stochastique (un processus aléatoires) est une suite de variable aléatoires* (X_t) *définies sur* (Ω, F, P)*, indexées par* $t \in T$ *à valeurs dans* S*. Pour toute réalisation* $\omega \in \Omega$*, la famille* $(X_t(\omega))$ *est une trajectoire du processus.*

1.1.1 Fonction d'autocovariance et d'autocorrélation

Les principales caractéristiques temporelles d'un processus sont données
par la fonction d'autocovariance et celle d'autocorrélation.

Définition 1.3 (Fonction d'autocovariance) *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus telle que* $Var[X_t] < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$*, alors la fonction d'autocovariance* γ *de* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est définie par*

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)] \forall t, h \in \mathbb{Z}$$

Ainsi :

$$\gamma(0) = Cov(X_t, X_t) = Var[X_t] = E[(X_t - \mu)^2] = \sigma_X^2, \text{ ou } E[X_t] = \mu\cdot$$

Remarque 1.1 *La fonction d'autocovariance γ fournit une information sur la variabilité de la série et sur les liaisons temporelles qui existent entre les diverses composantes de a série X_t.*

La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire est une fonction :

1. Paire $\gamma(h) = \gamma(-h), \forall h.$
2. Semi-défnie positive

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma(t_j - t_k) > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a_j \in \mathbb{R}, \forall t_j \in \mathbb{Z}\cdot$$

puisque cette quantité est égale à $Var[\sum_{j=1}^{n} a_j X_{tj}]\cdot$

Définition 1.4 (Fonction d'autocorrélation) *La fonction d'autocorrélation d'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, de moyenne μ, notée $\rho(k)$ est défnie par*

$$\rho_k = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

avec $\rho_k \in [-1, 1]$, $\rho(0) = 1$ et $\mid \rho(h) \mid < 1$.

L'équivalent empirique de la fonction d'autocorrélation, noté $\hat{\rho}(h)$, est obtenu

à partir de l'estimateur suivant pour l'autocovariance $\hat{\gamma}(h)$ à l'ordre h :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T-h-1}\sum_{t=h+1}^{T}(X_t - \overline{X})(X_{t-h} - \overline{X}).$$

On défnit la matrice de corrélation (de dimension m) de la maniére suivante :

$$R(m) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & ... & \rho(m-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & .. & \rho(m-2) \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ \rho(m-1) & \rho(m-2) & ... & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 La fonction d'autocorrélation partielle

Elle mesure la liaison linéaire entre X_t, X_{t-h} une fois retirés les liens transitants par les variables intermédiaires $X_t, ..., X_{t-h+1}$.

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre h, noté $r(h)$ est défnie par

$$r(h) = cov(X_t, X_{t-h}/X_{t-1}, ..., X_{t-h+1}).$$

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre h d'un processus stationnaire se calcule de la maniére suivante :

$$r(h) = \frac{|R(h)^*|}{|R(h)|},$$

avec

$$R(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & . & . & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & . & . & \rho_{h-2} \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & . & . & 1 \end{pmatrix},$$

et $R(h)^*$est la matrice $R(h)$ dans la quelle on a remplacé la colonne h par $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ . \\ . \\ \rho_h \end{pmatrix}$,

$$R(h)^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & . & . & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & . & . & \rho_{h-2} \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$r(1) = \rho(1),\ r(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}, ...$$

De maniére empirique, les autocorrélations partielles s'estiment par l'estimation des autocorrélations simples et en calculant $\hat{r}(h)$ à partir de la formule ci dessus.

1.1.3 Processus bruit blanc

Définition 1.5 (Bruit blanc) *Le processus ε_t est un bruit blanc si :*

i) $E(\varepsilon_t) = 0$ *pour tout t.*

ii) *$var(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = E(\varepsilon_t^2) = \delta^2$ pour tout t.*

iii) *$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0$ pour tout t et $h \neq 0$.*

1.1.4 Opérateurs de différenciation

Définition 1.6 *On appelle l'opérateur de retard L qui a tout processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ associe le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défni par*

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad Y_t = LX_t = X_{t-1}.$$

L'opérateur L est inversible et linéaire son inverse est $L^{-1} = D$ défni par

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad DX_t = X_{t+1},$$

avec, l'opérateur D est appelé **opèrateur d'avance**.

Définition 1.7 *L'opèrateur Δ_s est dèfni par :*

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$$

s est la période de saisonnlité.

1.1.5 Stationnarité

Une des grandes questions dans l'étude de séries tomporelles est de savoir si celles-ci suivent un processus stationnaire. Une série chronologique de réalisations d'une grandeur aléatoire, à un pas de temps donné, est dite stationnaire si ses réalisations sont issues d'un même processus stochastique dont les paramètres (moyenne, variance, autocorrélation...) restent constants au cours du temps.

Définition 1.8 *On dit que le processus (X_t) est strictement stationnaire si la probabilité ne dépent pas de l'instant t :*

$$\forall h, \forall n, \quad P(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) = P(X_{t_1+h}, ..., X_{t_n+h}).$$

Définition 1.9 *On dit que le processus* (X_t) *est faiblement stationnaire si ses propriétés statistiques ne dépend pas de* t*.*

i) $E(X_t) = \mu$ *independ de* t*.*

ii) $cov(X_t, X_{t+h})$ *independante de* t*.*

1.1.6 Non stationnarité

Un processus dont l'espérance et la variance ne se stabilisent pas simultanément au cours du temps est qualifé de **non stationnaire**. On peut distinguer deux phénoménes a l'origine de la non stationnarité d'un processus, selon sa nature déterministe ou stochastique.

1.1.7 Non stationnarité stochastique

On dit que le processus X_t est caractérisé par une non stationnarité stochastique, ou encore que le processus X_t est DS si le processus différencié une fois $(1 - L)X_t$ est stationnaire.

On parle aussi de processus intégré d'ordre 1 : $(1 - L)X_t = Z_t$ est stationnaire ce qui implique $X_t = X_{t-1} + Z_t$.

De maniére générale, on dit que le processus X_t est un processus intégré d'ordre d si le processus différencié d fois $(1 - L)^d X_t$ est stationnaire.

1.1.8 Non stationnarité déterministe

On dit que le processus X_t est caractérisé par une non stationnarité dèterministe, ou encore que le processus X_t est TS s'il peut s'ècrit :

$$X_t = f(t) + Z_t.$$

$f(t)$ est une fonction qui dépend du temps et Z_t est un processus stationnaire. Ainsi, ce processus est rendu stationnaire en lui enlevant sa tendance déterministe $X_t - f(t) = Z_t$ est stationnaire.

1.1.9 Saisonnalité

Elle reprèsente des effets périodiques de période connue p qui se reproduisent de façon plus ou mois identique d'une période à l'autre, elle est notèe par S_t, $t = 1, ..., T$. Elle est généralement supposèe périodique : $S_{t+p} = S_t$ d'une pèriode p.

1.2 Les séries chronologiques

La théorie des séries chronologiques (temporelles) abordée dans ce travail est appliquée de nos jours dans des domaines aussi variés que l'économétrie, la médecine démographie,...etc. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un phénomène, dans le but de décrire,expliquer puis prévoir ce phénomène dans le futur.

Définition 1.10 *On appelle série chronologique, ou série temporelle, une suite réelle finie $(X_t)_{1 \leq t \leq n} (n \in \mathbb{N}^*)$ de données quantitatives indexée par le temps. L'indice t représente une unité de temps qui peut être selon les cas, la seconde, la minute, l'heure, le jour, le mois, l'année.*

Remarque 1.2 *Une série chronologique peut être à temps continu ou à temps discret. Dans le cas continu, les observations sont mesurées à chaque instant de temps (T est un intervalle de $\mathbb{R}$). Par contre, la série chronologique à temps discret contient des observations mesurées à des points discrets de temps (en général $T \subset \mathbb{Z}$).*

1.2.1 Objectifs de l'analyse d'une série chronologique

L'objectif de l'étude des séries temporelles est de faire des prédictions sur
l'évolution de la série.

* Analyser un phénomène : décrire-comprendre-juger l'évolution de la série.
* Prévision : faire des prédictions sur l'évolution de la série et prévoir les valeurs futures de X_t.

1.2.2 Types de schéma d'une série chonologique

La décomposition d'une série chronologique repose sur un modèle qui porte le nom de schéma.Il existe essentiellement trois grands types des schémas :

1. Schéma additif : La sèrie X_t s'écrit comme une somme de ses trois composantes :

$$X_t = Z_t + S_t + \varepsilon_t,\ t = 1, ..., T.$$

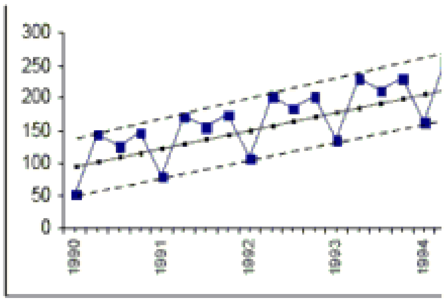


FIG. 1.1 – Schéma additif.

2. Schéma multiplicatif : Le modèle de la série s'écrit uniquement par un produit des composantes de X_t :

$$X_t = Z_t \times S_t \times \varepsilon_t, t = 1, ..., T.$$

Remarque 1.3 *Si le modèle étudié est multiplicatif, un passage au* log *permet de se ramener à un modèle additif :* $\log(X_t) = \log(S_t \times Z_t \times \varepsilon_t) = \log(Z_t) + \log(S_t) + \log(\varepsilon_t)$.

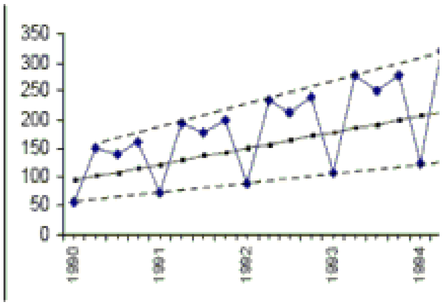


FIG. 1.2 – Schéma multiplicatif.

3. Schéma mixte : Il s'écrit comme des différentes combinaisons de ces trois composantes. On donne comme exemples :

$$X_t = Z_t \times (S_t + \varepsilon_t), t = 1, ..., T.$$

$$X_t = Z_t \times S_t + \varepsilon_t, t = 1, ..., T.$$

Remarque 1.4 *La tendance* (Z_t) *prend déffrentes forme :*

a. Linéaire : $Z_t = a + bt.$

b. Quadratique *:* $Z_t = a + bt + ct^2.$

c. Exponetielle *:* $Z_t = a\exp(bt).$

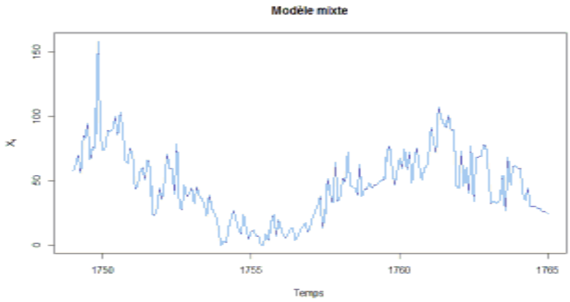


FIG. 1.3 – Schéma mixte.

1.2.3 Coefficients saisonniers

On sait que l'influence des variations saisonnières doit être neutre sur l'années et que ces variations (S_t) se répètent théoriquement à l'identique de période en période. Dans toute série chronologique observée sur un cas réel, les variations saisonnières ne sont jamais identiques. Donc, pour satisfaire aux exigences du modèle théorique, et pour pouvoir étudier la série réelle, il faut estimer, à la place des (S_t) observées qu'on appelle coefficients saisonnièrs. On les note S_j, $j = 1$ à 12 pour des données mensuelles, $j = 1$ à 4 pour des données trimestrielles.

•<u>Méthode de calcul des coefficients saisonniers</u> :

La série Y_t est observée sur n année par période p, 12mois $(j = 1, 2, ..., 12)$ ou 4 trimestres $(j = 1, 2, 3,4)$. Les variations saisonnières S_t sont égales, par hypothèse du modèle **additif** à :

$$S_t = Y_t - f_t,$$

nous obtenons donc $n \times j$ valeurs de S_t, que nous pouvons écrire S_{ij}.

On retiendra 12 valeurs de S_j (mois) ou 4 valeurs de S_j (trimestres) comme coefficients saisonniers, en calculant, mois par mois, ou trimestre par trimestre, la moyenne arithmétique des S_t sur l'ensemble des n années, on obtient :

$$S_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}.$$

La somme sur l'année de ces coefficients saisonniers S_j devrait en toute logique être égale à 0. En fait, bien souvent, les approximations des calculs conduisent à un résultat légèrement différent. Dès lors, dans le cas où la somme des S_j est différente de 0, on calcule un coefficient correcteur qui est la moyenne des S_j sur l'année

$$S_j = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12} S_j.$$

Et l'on retient en définitive, comme coefficient saisonnier corrigé la valeur :

$$S_j^* = S_j - \rho.$$

Le principe théorique selon lequel la moyenne (ou la somme) des coefficients saisonniers est égale à zéro est respectée par les S_j^* (coefficients saisonniers corrigés).

1.2.4 Série désaisonnalisée

Nous appelons série désaisonnalisée ou série corrigée des variations saisonnières notée série CVS,la série chronologique Y_t à laquelle on a enlevé les variations saisonnières.

Dans le cas du modèle additif : La série désaisonnalisée est :

$$Y_t^* = Y_t - S_t.$$

Dans le cas du modèle multiplicatif : La série désaisonnalisée est :

$$Y_t^* = \frac{Y_t}{S_t}.$$

1.2.5 Théorème de Wold

Le théorème de Wold (1948) est fondamental pour l'analyse de série temporelles stationnaire. Il est donné par :

Théorème 1.1 *Tout processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ centré et stationnaire peut s'écrire sous la forme :*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} + l_t$$

θ_j : *les paramètres sont des réels tel que* $\theta_0 = 1$ *et* $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty$
ε_t : *Bruit Blanc*
l_t : *un processus déterministe* $cov(\varepsilon_t, l_t) = 0 \quad \forall s, t \in \mathbb{Z}.$

Alors, on peut écrire

$$X_t = \psi(l)\varepsilon_t.$$

Exemple 1.1 *Soit le processus*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j V_{t-j+1},$$

où $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance unitaire. Afin que la condition $\psi_0 = 1$ du théorème de Wold soit satisfaite, il s'agit de poser

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}V_t$$

on a alors

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\varepsilon_{t-j+1} = \varepsilon_t + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\varepsilon_{t-j}$$

où $(\varepsilon)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $var(\varepsilon_t) = var(V_t/2) = \frac{1}{4}$. Ainsi,$\psi_0 = 1$ et $\psi_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j$. On note que la condition $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty$ est également satisfaite car

$$\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{j} = \left(\frac{4}{3}\right),$$

où le résultat $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a^j = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$ été utilisé.

1.2.6 Estimation paramétrique de la tendance

Nous supposons que la série temporelle étudiée soit la réalisation d'un processus stochastique composé d'une tendance déterministe m_t et d'une partie aléatoire ε_t :

$$X_t = m_t + \varepsilon_t.$$

Une méthode simple consiste à supposer que cette tendance est linéaire :

$$m_t = a + bt,$$

et d'estimer les paramètres a et b par moindres carrés.

Ainsi, si on observe la série $x_1, x_2, ..., x_n$, il faut trouver a et b qui minimisent la quantité :

$$\sum_{t=1}^{n} (x_t - \hat{a} - \hat{b}t)^2.$$

Les solutions de ce problème sont :

$$\hat{a} = \frac{6}{n(n-1)} \left(-\sum_{t=1}^{n} t x_t + \frac{2n+1}{3} n\bar{x} \right),$$

$$\hat{b} = \frac{12}{n(n^2-1)} \left(\sum_{t=1}^{n} t x_t + \frac{n+1}{2} n\bar{x} \right).$$

L'hypothèse de linéarité de la tendance convient très bien à certaines séries temporelles. Mais ce n'est pas le cas de toutes les séries. Il est alors possible de supposer que la tendance soit de forme polynomiale :

$$m_t = a + bt + ct^2,$$

et d'estimer les paramètres a, b et c par moindres carrés. Mais il est parfois difficile d'estimer le degré du polynôme, et lorsque le degré est trop important, le nombre de paramètres à estimer devient grand et les calculs fastidieux. Dans cette situation, on a recourt à une méthode d'estimation non paramétrique.

1.2.7 Estimation non paramétrique : moyenne mobile

<u>**Tendance linéaire :**</u> On suppose que

$$X_t = m_t + \varepsilon_t,$$

avec m_t déterministe et ε_t aléatoire. Si m_t est une fonction affine (donc à croissance linéaire) dans un intervalle autour de t, on peut estimer la moyenne par :

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{q} x_{t+k}.$$

<u>**Tendance linéaire et composante périodique :**</u> On suppose que

$$X_t = m_t + s_t + \varepsilon_t,$$

avec m_t et s_t déterministes et ε_t aléatoire. La fonction m_t est supposée affine et la fonction s_t est supposée T-périodique. On peut toujours supposer que :

$$\sum_{t=1}^{T} s_t = 0.$$

On peut estimer m_t par la formule :

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{q} x_{t+k}.$$

Puis on estime la composante périodique, en faisant la moyenne sur toutes les périodes :

$$\text{pour } t \in (1, 2, \dots, T), \quad \hat{s}_t = \frac{(x_t - \hat{m}_t) + (x_{t+T} - \hat{m}_{t+T}) + \cdots + (x_{t+kT} - \hat{m}_{t+kT})}{k+1},$$

$$\text{avec} \quad k = \sup\{i : t + iT \leq n\}.$$

Chapitre 2

Le processus non stationnaire autorégressif de moyenne mobile saisonnier

Le processus ARIMA et SARIMA sont des processus aléatoires non stationnaires qui présentent des "tendances aléatoires" et/ou des "variations saisonnières aléatoires". Dans ce chapitre nous présentons certaines propriétés importantes sur les différents modéles des séries chronologiques, en particulier, les modéles : AR, MA, ARMA, ARIMA et SARIMA. [1], [2], [4], [11], [12], [16].

2.1 Les processus auto-régressifs AR(p)

Les processus auto-régressifs, construits à partir de l'idée que l'observation au temps **t** s'explique linéairement par les observations précédentes.

Définition 2.1 *On appelle processus auto-régressif d'ordre* $\boldsymbol{p}$*, noté* ***AR(p)****, un processus stationnaire* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ *vérifiant une relation du* *type :*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}. \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où les α_i sont des réels,$\alpha_p \neq 0$ et $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

Dans ce cas, on note $\{X_t\} \sim AR(p)$. De la même façon, on peut réécrire un processus AR(p) avec un polynôme $\Phi(L)$ qui multipliera X_t cette fois-ci :

$$\Longleftrightarrow (1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_P L^P)X_t = \varepsilon_t$$
$$\Longleftrightarrow \Phi(L)X_t = \varepsilon_t.$$

Remarque 2.1 *Le polynôme $\Phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_P L^P$ est le polynôme caractéristique du processus autorégressif. Le modéle s'écrit souvent $\Phi(L)X_t = \varepsilon_t$.*

2.1.1 La stationnarité

Le processus AR(p) est pour l'instant défini sous forme implicite et en particulier il n'est pas certain que cette dernière équation admette toujours une solution stationnaire.

Si le polynôme Φ a toutes ses racines de module supérieur à 1.

$$\forall j \quad |z_j| > 1 \quad \text{où} \quad \Phi(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_p z^p.$$

On peut inverser l'opérateur $\Phi(L)$. On en déduit que l'équation admet une solution unique, avec une écriture $MA(\infty)$:

$$X_t = \Phi(L)^{-1}\varepsilon_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \varepsilon_{t-i}.$$

On peut alors montrer que l'on a $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| < \infty$ et donc que la représentation est stationnaire.

Exemple 2.1

$$X_t = 0.6X_{t-1} - 0.09X_{t-2} + \varepsilon_t \quad \sim \quad AR(2)$$

Alors

$$\begin{aligned} X_t - 0.6X_{t-1} + 0.09X_{t-2} &= \varepsilon_t \\ (1 - 0.6L + 0.09L^2)X_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1 - 0.6z + 0.09z^2 \\ \Phi(z) &= (1 - 0.3z)^2 \\ z_1 = z_2 &= \frac{1}{0.3} \\ |z_1| = |z_2| &= \left|\frac{1}{0.3}\right| > 1, \end{aligned}$$

alors X_t est stationnaire.

2.1.2 Les fonction auto-covariance et auto-corrélations d'un AR(p)

On considère le cas d'un modéle AR(p) stationnaire :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

On a

$$\Phi(L)X_t = \varepsilon_t \implies X_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t.$$

Donc
$$E(X_t) = E(\Phi^{-1}(L))E(\varepsilon_t) = 0.$$

L'auto-covariance

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) \\
&= E(X_t X_{t-h}) \quad \text{pour} \quad h \geq 0.
\end{aligned}$$

On a
$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Donc
$$X_t^2 = \alpha_1 X_t X_{t-1} + \alpha_2 X_t X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_t X_{t-p} + X_t \varepsilon_t.$$

Si $h = 0$:
$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= Cov(X_t, X_t) \\
&= E(X_t^2) - \underbrace{E(X_t)}_{=0} \\
&= E(X_t.X_t)
\end{aligned}$$

On a
$$E(X_t.X_t) = \alpha_1 E(X_t X_{t-1}) + \alpha_2 E(X_t X_{t-2}) + \cdots + \alpha_p E(X_t X_{t-p}) + E(X_t \varepsilon_t).$$

Alors
$$\gamma_X(0) = \alpha_1 \gamma_X(1) + \cdots + \alpha_p \gamma_X(p) + E(X_t \varepsilon_t).$$

Or
$$\begin{aligned}
E(X_t \varepsilon_t) &= E[(\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t)\varepsilon_t] \\
&= E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

D'où
$$\gamma_X(0) = \alpha_1\gamma_X(1) + \cdots + \alpha_p\gamma_X(p) + \sigma_\varepsilon^2.$$
Donc
$$\gamma_X(0) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\gamma_X(i) + \sigma_\varepsilon^2.$$
Si $h > 0$, on procède de la même façon :
$$X_tX_{t-h} = \alpha_1X_{t-1}X_{t-h} + \cdots + \alpha_pX_{t-p}X_{t-h} + \varepsilon_tX_{t-h}.$$
Alors
$$\gamma_X(h) = \alpha_1\gamma_X(h-1) + \cdots + \alpha_p\gamma_X(h-p) + E(\varepsilon_tX_{t-h}).$$
Et comme
$$E(\varepsilon_tX_{t-h}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si} \quad h = 0 \\ 0 & \text{si} \quad h \geq 1 \end{cases}.$$
On obtient donc
$$\gamma_X(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\gamma_X(h-i), \quad \forall h \geq 1. \tag{2.1}$$
La fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} \rho_X(h) &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\gamma_X(h-1)}{\gamma_X(0)} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\rho_X(h-i), \forall h \geq 1. \end{aligned}$$
L'équations (2,1) s'appelle le système de **Yule-Walker.**

Remarque 2.2

$$\frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\gamma_X(i)+\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_X(0)}$$
$$1 = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\rho_X(i)+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_X(0)},$$

donc

$$1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\rho_X(i) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_X(0)},$$

alors

$$\gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i\rho_X(i)}.$$

Les équations de **Yule-Walker** pour $h = 1, \ldots, p$ peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & & \rho(p-2) \\ . & & & . \\ . & \ldots & \ldots & . \\ . & & & . \\ \rho(p-1) & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \rho(p) \end{pmatrix}.$$

Alors les solutions de l'équation de récurrence sont :

$$\begin{cases} \rho(1) = \alpha_1 + \alpha_2\rho(1) + \cdots + \alpha_p\rho(p-1) \\ . \\ . \\ . \\ \rho(p) = \alpha_1\rho(p-1) + \cdots + \alpha_{p-1}\rho(1) + \alpha_p \end{cases}.$$

2.1.3 Estimation des paramètres d'un AR(p)

On dispose d'une observation $\{x_1, \ldots, x_T\}$ de longueur T d'un processus stationnaire X_t supposé suivre un modèle $AR(p)$, c'est à dire vérifiant :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

avec $t \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, des paramètres inconnus. On cherche alors à estimer ces paramètres à l'aide des observations disponibles

Définition 2.2 *On déssgna par R_p la matrice des autocorrélations*

$$R_P = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(p-2 \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(p-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2 & \rho(p-3) & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Estimateurs de Yule-Walker : La méthode consiste à reprendre les équations de Yule-Walker en inversant les relations : on exprime les coeficients en fonction des auto-corrélations, on trouve les paramètres estimés d'après les auto-corrélations estimées.

Le systéme de Youle-Walker prend la forme matricielle

$$\rho = R_p.\alpha.$$

Alors

$$\alpha = R_p^{-1}.\rho.$$

Donc

$$\hat{\alpha} = \hat{R}_p^{-1}.\hat{\rho}.$$

avec

$$\hat{R}_p = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(2) & \cdots & \hat{\rho}(p-1) \\ \hat{\rho}(1) & 1 & \hat{\rho}(1) & \cdots & \hat{\rho}(p-2 \\ \hat{\rho}(2) & \hat{\rho}(1) & 1 & \cdots & \hat{\rho}(p-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\rho}(p-1) & \hat{\rho}(p-2 & \hat{\rho}(p-3) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{\rho} = (\hat{\rho}(i))_{i=1,\dots,p}$ et $\hat{\alpha}$ le vecteur des paramétres

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\alpha}_p \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Autocorrélation partielle

Les fonctions γ_X et ρ_X n'interviennent que les variables X_t et $X_{t\pm h}$, nous allons introduire ici la fonction d'autocorrélation partielle, notée ϕ_h, faisant intervenir de plus les variables intermédiaires $(X_{t\pm 1}, X_{t\pm 2}, \dots, X_{t\pm(h-1)})$. Pour un modèle $AR(p)$, le calcul des auto-corrélations partielles se fait par l'algorithme de Durbin, comme suit :

$$\begin{cases} \phi_0 = \rho_X(0) = 1, \\ \phi_1 = \rho_X(1), \\ \phi_h = \frac{\det(R_h^*)}{\det(R_h)}, h \geq 2, \end{cases}$$

où R_h^* est la matrice R_h en remplaçant la dernière colonne par $(\rho_X(1), \rho_X(2), \dots, \rho_X(h))^t$

L'estimation de ϕ_h est $\hat{\phi}_h$ tel que

$$\hat{\phi}_h = \frac{\det(\hat{R}_h^*)}{\det(\hat{R}_h)}.$$

Proposition 2.1 *Pour un modèle $AR(p)$ les autocorrélations partielles sont nulles au-delà du rang p :*
$\phi_h = 0, \forall h > p$.

Cette propriété nous permet d'estimer l'ordre p du modèle $AR(p)$.

Exemple 2.2 $(X_t \sim AR(1))$
Considérons un modéle $AR(1)$, avec $|\alpha| < 1$: $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$, alors la fonction d'auto-covariance est :

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) = E(X_t X_{t-h}) &= \alpha E(X_{t-1} X_{t-h}) = \alpha \gamma_X(h-1) = \alpha^2 \gamma_X(h-2) \\
&\vdots \\
&= \alpha^h \gamma_X(0), \forall h \geq 1,
\end{aligned}$$

par conséquent la fonction d'autocorrélation est :

$$\rho_X(h) = \alpha \rho_X(h-1) = \cdots = \alpha^h, \forall h \geq 1,$$

et

$$\gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha \rho_X(1)}.$$

2.1.5 Prédiction dans le modèle AR(p)

Dans ce paragraphe, on suppose que $\{X_t\}$ est un processus stationnaire qui suit un modèle $AR(p)$:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

avec ε_t un bruit blanc.

Objectif : on cherche à prédire la valeur prise par le processus aux instants $T+1, T+2, \ldots$ à partir de la connaissance des valeurs prises par ce processus jusqu'à l'instant T, c'est à dire de $x_1, \ldots, x_T$.

Le modèle se réécrit sous la forme

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

La prévision à la date $T+1$ est

$$\hat{X}_{T+1} = E(X_{T+1}/X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1).$$

Alors

$$\hat{X}_{T+1} = \alpha_1 X_T + \cdots + \alpha_P X_{T-P+1}.$$

Pour prédire X_{T+2} à partir de $X_1, \ldots, X_T$ on a

$$\hat{X}_{T+2} = \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \cdots + \alpha_p X_{T-p+2}.$$

Et de façon générale

$$\hat{X}_{T+h} = \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \cdots + \alpha_p \hat{X}_{T+h-p.}$$

Proposition 2.2 *Dans le cas des modèles d'ordre 1, on a* $\hat{X}_{T+1} = \alpha_1 X_T$ *et* $\hat{X}_{T+2} = \alpha_1 \hat{X}_{T+1} = \alpha_1^2 X_T, \ldots$ *On vérifie aisément par récurrence que*

$$\hat{X}_{T+h} = \alpha_1^h X_T,$$

donc en particulier que $\hat{X}_{T+h} \longrightarrow 0$ *quand* h *tend vers l'infini.*

2.1.6 Processus autorégressif d'ordre infini

Définition 2.3 *On dit que* X_t *est un modèle* $AR(\infty)$*, si*

$$X_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j X_{t-j} + \varepsilon_t.$$

2.2 Processus moyennes mobiles MA(q)

Définition 2.4 *X_t est un modèle à moyenne mobile d'ordre q, noté $MA(q)$, si :*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \ \beta_q \neq 0 \quad et \ \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

On peut noter de façon équivalente

$$X_t = \Theta(L)\varepsilon_t,$$

où $\Theta(L) = 1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + \beta_q L^q$ est un polynôme moyenne mobile d'ordre q

Proposition 2.3 *Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $MA(q)$, alors*

i) $E[X_t] = u$.

ii) $var[X_t] = (1 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$.

iii) $Cov(X_t, X_{t+k}) = \begin{cases} 0 & |k| > q, \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q-|k|} \beta_i \beta_{i+|k|} & |k| \leq q. \end{cases}$

2.2.1 Stationnarité

Le processus $MA(q)$ est toujour stationnaire par sa définition.

2.2.2 La fonction d'autocorrélation

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.$$

On a

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= Cov(X_t, X_{t\pm h})\\ &= E(X_tX_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h})\\ &= E(X_tX_{t+h}).\end{aligned}$$

ce qui est plus adéquat ici, car il y a non-corrélation des ε_t avec le futur :

$$\gamma_X(h) = E[(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t+h} + \beta_1\varepsilon_{t+h-1} + \beta_2\varepsilon_{t+h-2} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t+h-q})]$$

$\cdot$Si $h = 0$:

$$\gamma_X(h) = Var(X_t) = (1 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_q^2)\sigma_\varepsilon^2.$$

$\cdot$Si $h > q$:

$$\gamma_X(h) = 0$$

$\cdot$Si $h \leq q$:

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= E(X_tX_{t+h})\\ &= E[(\varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \beta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t+h} + \beta_1\varepsilon_{t+h-1} + \beta_2\varepsilon_{t+h-2} + \cdots\\ &\quad + \beta_q\varepsilon_{t+h-q})]\\ &= (\beta_1 + \beta_1\beta_{h+1} + \beta_2\beta_{h+2} + \cdots + \beta_q\beta_{h+q})\sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Alors :

$$\rho_X(h) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad h = 0 \\ \frac{(\beta_1+\beta_1\beta_{h+1}+\beta_2\beta_{h+2}+\cdots+\beta_q\beta_{h+q})}{(1+\beta_1^2+\cdots+\beta_q^2)} & \text{Si} \quad h \leq q \\ 0 & \text{Si} \quad h > q \end{cases}.$$

Proposition 2.4 *Les autocorrélation $\rho_X(h)$ d'un $MA(q)$ sont nulles au dela d'ordre q*

$$\forall h > q : \rho_X(h) = 0$$

Remarque 2.3 *Les formule de la fonction d'autocorrelation partielle ϕ_h d'un $MA(q)$ sont compliquées et ϕ_h ne s'annule pas au delà de rang q $(h > q)$.*

Exemple 2.3 $X_t \sim MA(1)$

Soit X_t=$\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$ avec $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Alors :

$$E(X_t) = 0,$$
$$\gamma_X(0) = (1+\beta^2)\sigma_\varepsilon^2,$$
$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \beta\sigma_\varepsilon^2 & Si \;\; h = 1. \\ 0 & Si \;\; h > 1. \end{cases}$$

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \begin{cases} 1 & Si\ h = 0. \\ \frac{\beta}{(1+\beta^2)} & Si\ h = 1. \\ 0 & Si\ h > 1. \end{cases}$$

Définition 2.5 *On dit qu'un modèle X_t est $MA(\infty)$, s'il peut s'écrire sous la forme :*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{t-j}, \;\; \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

2.2.3 Prédiction dans le modèle MA(q)

On considère (X_t) satisfaisant :

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \beta_q\varepsilon_{t-q}.$$

La privsion à l'hoizon h est :

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} \backslash X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1).$$

Si $h = 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+1} &= E(X_{T+1} \backslash X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1) \\
&= E(\varepsilon_{T+1} + \beta_1 \varepsilon_T + \beta_2 \varepsilon_{T-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{T+1-q} \backslash X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1) \\
&= \underbrace{E(\varepsilon_{T+1})}_{=0} + \beta_1 \varepsilon_T + \beta_2 \varepsilon_{T-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{T+1-q}.
\end{aligned}$$

Si $h = 2$:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+2} &= E(X_{T+2} \backslash X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1) \\
&= E(\varepsilon_{T+2} + \beta_1 \varepsilon_{T+1} + \beta_2 \varepsilon_T + \cdots + \beta_q \varepsilon_{T+2-q} \backslash X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1) \\
&= \beta_2 \varepsilon_T + \cdots + \beta_q \varepsilon_{T+2-q}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{X}_{T+h} = \begin{cases} \beta_h \hat{X}_{T+1} + \cdots + \beta_q \hat{X}_{T+h-q} & \text{pour} \quad h \leq q \\ 0 & \text{pour} \quad h > q \end{cases}.$$

2.3 Les processus mixtes ARMA(p,q)

La classe des modèles $ARMA$ généralise les modèles AR et les modèles à moyenne mobile MA.

Définition 2.6 *Un processus stationnaire X_t admet une représentation $ARMA(p,q)$ minimale :*

$$X_t - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i} \iff \Phi(L) X_t = \Theta(L) \varepsilon_t.$$

s'il satisfait les conditions suivantes :

1. $\alpha_p \neq 0$,$\beta_q \neq 0$.
2. *les polynômes* Φ *et* Θ *toutes leur racines de module strictement supérieur à* 1.
3. Φ *et* Θ *n'ont de racine commune.*
4. ε_t *et un bruit blanc, de variance* $\sigma_\varepsilon^2 \neq 0$.

2.3.1 Autocorrélation d'un ARMA(p,q)

La covariance :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E[X_t X_{t-h}]\\ &= E[(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q}\beta_j\varepsilon_{t-j})X_{t-h}].\end{aligned}$$

On pose

$$\gamma_{x_\varepsilon}(h) = E[\varepsilon_t X_{t-h}].$$

La covariance entre X_{t-h} et ε_t

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \sum_{i=1}^{p}\alpha_i E[X_{t-i}X_{t-h}] - \sum_{j=1}^{q}\beta_j E[\varepsilon_{t-j}X_{t-h}] + \gamma_{x_\varepsilon}(h)\\ &= \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\gamma_X(h-i) - \sum_{j=1}^{q}\beta_j\gamma_{x_\varepsilon}(h-j) + \gamma_{x_\varepsilon}(h), \quad h \geq 0.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}E(X_t\varepsilon_t) &= E[(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q}\beta_j\varepsilon_{t-j})\varepsilon_t]\\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2,\end{aligned}$$

et ε_t n'est pas corrélé avec le passé.

$$\begin{cases} \gamma_{x_\varepsilon}(h) = 0 & h > 0, \\ \gamma_{x_\varepsilon}(h) = \sigma_\varepsilon^2 & h = 0, \\ \gamma_{x_\varepsilon}(h) \neq 0 & h < 0. \end{cases}$$

La fonction $\gamma_{x_\varepsilon}(h)$ n'est pas paire.
Si $h > q$, tout les $\gamma_{x_\varepsilon}(h) = 0$, donc on a

$$\begin{cases} \gamma(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \gamma(h-i), \\ \rho(h) = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \rho(h-i). \end{cases}$$

2.3.2 Prédiction dans modèle ARMA(p,q)

Soit X_t est ARMA(p,q) :

$$\Phi(L) X_t = \Theta(L) \varepsilon_t.$$

Sous cette forme ARMA, alors

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j},$$

et donc

$$X_{t+h} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t+h-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t+h-j}.$$

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} / X_T, X_{T-1}, \dots, X_1).$$

On peut noter que pour $h > q$

$$\hat{X}_{T+h} = \begin{cases} \alpha_1 \hat{X}_{T+h-1} + \cdots + \alpha_{h-1} \hat{X}_{T+h} + \cdots + \alpha_h \hat{X}_T + \cdots + \alpha_p \hat{X}_{T+h-p} & h \leq p \\ \alpha_1 \hat{X}_{T+h-1} + \cdots + \alpha_p \hat{X}_{T+h-p} & h > p \end{cases}.$$

2.4 Les processus ARIMA(p,d,q)

Lorsque l'on a une série (X_t) à non stationnarité stochastique, il convient de la modéliser à l'aide d'un processus $ARIMA(p, d, q)$ où d désigne l'ordre de différenciation (où d'intégration).

Définition 2.7 *pour $d \geq 1$ le processus X_t est un $ARIMA(p, d, q)$ si le processus $Y_t = (1-L)^d X_t$ est un processus $ARMA(p, q)$ de moyenne nulle. X_t satisfait une équation de la forme :*

$$\Phi(L)(1-L)^d X_t = \Theta(L)\varepsilon_t.$$

Φ *et* Θ : *des polynùmes de degrés respectifs p et q.*
L : *l'opérateur de retard.*

Remarque 2.4 *On dit aussi que le processus $ARIMA(p, d, q)$ est un processus $ARMA(p, q)$ de moyenne nule "intégré" d fois.*

2.4.1 Prévision dans le cas d'un processus ARIMA(p,d,q)

On considérons ici (X_t) satisfaisant une équation de la forme :

$$\Phi(L)(1-L)^d X_t = \Theta(L)\varepsilon_t.$$

posons alors $\Psi(L) = \Phi(L)(1-L)^d$: La forme $ARIMA(p, d, q)$ peut s'écrire :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j},$$

et

$$X_{t+h} = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i X_{t+h-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t+h-j}.$$

Notons $\hat{X}_{T+h}$ la prévision faite à la date $T+h$

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h}/X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1).$$

Alors

$$\hat{X}_{T+h} = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i \hat{X}_{t+h-i} + 0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \hat{\varepsilon}_{t+h-j},$$

où

$$\hat{X}_{t+h-i} = X_{T+h-i} \text{ pour } i \geq h,$$

et

$$\hat{\varepsilon}_{t+h-j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j < h, \\ \varepsilon_{T+h-j} & \text{pour } j \geq h. \end{cases}$$

En particulier, pour $h \geq q$, on obtient une relation de rècurence de la forme

$$\hat{X}_{T+h} = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i \hat{X}_{t+h-i}.$$

2.5 Les processus SARIMA

La moyenne mobile intégrée autorégressive saisonniére, SARIMA ou ARIMA saisonniére, est une extension d'ARIMA qui prend explicitement en charge les données de séries chronologique univariées avec une composante saisonniére.

Définition 2.8 *Le processus X_t est appelé $SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ si :*

$$Y_t = \Delta^d \Delta_s^D X_t = (1-L)^d (1-L^S)^D X_t,$$

$$\Phi(L)\Phi_s(L^s)Y_t = \Theta(L)\Theta_s(L^s)\varepsilon_t.$$

Φ et Θ sont des polynômes de degrés p et q :

$$\Phi(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_p z^p,$$
$$\Theta(z) = 1 + \beta_1 z - \cdots - \beta_q z^q.$$

Φ_s et Θ_s sont des polynômes de degrés P et Q :

$$\Phi_s(z) = 1 - \alpha_{s,1} z - \cdots - \alpha_{s,P} z^P,$$
$$\Theta_s(z) = 1 + \beta_{s,1} z - \cdots - \beta_{s,Q} z^Q.$$

2.5.1 Prévision des processus SARIMA

Si les données $X_1, \ldots, X_T$ suivent un modèle $SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)$, on définit

$$Y_t = (I - L)^d (I - L^s)^D X_t.$$

Si par exemple $(d, D, s) = (1, 1, 12)$,

$$Y_t = (X_t - X_{t-12}) - (X_{t-1} - X_{t-13}) \tag{2.2}$$

On traite le problème de prédiction du processus Y_t du type $SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, et on rentre aprés au niveau du processus X_t du type $SARIMA$ en exprimant $\hat{X}_T(1)$ en fonction de $\hat{Y}_T(1)$ et les valeurs observées X_t pour $t \leq T$. Nous expliquons ce principe briévement dans le cadre d'un exemple :

Exemple 2.4 *En cas d'un processus purement autorégressif $AR(p + Ps)$ de Y_t, par exemple pour $p = 1, P = 1, s = 12$, c'est-à-dire pour le processus $AR(13)$,*

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \alpha_s Y_{t-12} - \alpha \alpha_s Y_{t-13} + \eta_t,$$

la prédiction linéaire de cette partie autorégressive est donnée par

$$\hat{Y}_T(1) = \alpha Y_T + \alpha_s Y_{T-11} - \alpha\alpha_s Y_{T-12}.$$

Donc, la forme de l'équation (2.2) implique la prédiction d'un processus X_t du type $SARIMA(1,1,0) \times (1,1,0)_{12}$ par :

$$\hat{X}_T(1) = \hat{Y}_T(1) + X_{T-11} + X_T + X_{T-12}.$$

Remarque 2.5 *Cette technique de prévision est valable si T est suffisamment grand et l'horizon h n'est pas trop grand. Dans le cas contraire, on utilise des méthodes non paramétriques, comme le lissage exponentiel.*

Chapitre 3

Prévision par les méthodes de lissage exponetiel

Les méthodes de lissage exponetiel constituent des techniques qui accordent plus ou moins d'importance aux valeurs du passé d'une série chronologique, dans notre étude, nous allons examiner 03 types de méthodes et choisir la plus adaptée à notre cas : [3], [7], [8], [9], [10], [13], [14], [15].

1. Lissage exponentiel simple.
2. Lissage exponentiel double.
3. Lissage de Holt-Winters.

3.1 Lissage exponentiel simple

La méthode de lissage exponentiel simple « LES » permet d'effectuer des prévisions pour des séries chronologiques sans saisonnalité et dont la tendance est constante.

On suppose que l'on dispose de T observations $X_1, \ldots, X_T$ indexées par les instants $1, \ldots, T$. On veut réaliser une prédiction pour les instants suivantes $T+k,\ k \geq 1$. Le lissage exponentiel simple est bien adapté au cas où la série a une moyenne approximativement constante au voisinage de T, pour ce type de lissage, on considère le modéle suivant :

$$X_t = a + \varepsilon_t,$$

avec ε_t est le terme erreur du modèle et a est une constante.

Définition 3.1 *La prévision de la série à l'horizon h, $\hat{X}_T(h)$ fournie par la méthode de lissage exponentiel simple est donnée par :*

$$\hat{X}_T(h) = \hat{X}_{T+h} = (1-\beta)\sum_{i=0}^{T-1} \beta^i X_{T-i}(h), \quad 0 < \beta < 1,$$

où β est dite constante de lissage.

3.1.1 Formule de mise à jour

La définition précédente vérfie les formules de récurrences suivantes :

$$\begin{aligned}
\hat{X}_T(h) &= (1-\beta)\sum_{i=0}^{T-1}\beta^i X_{T-i} \\
&= (1-\beta)X_T + (1-\beta)\sum_{i=1}^{T-1}\beta^i X_{T-i} \\
&= (1-\beta)X_T + (1-\beta)\sum_{i=0}^{T-2}\beta^{i+1} X_{T-i-1} \\
&= (1-\beta)X_T + \beta \underbrace{(1-\beta)\sum_{i=0}^{\overbrace{T-1}-1}\beta^i X_{\underbrace{T-1}-i}} \\
&= (1-\beta)X_T + \beta\hat{X}_{(T-1)}(h) \\
&= \hat{X}_{T-1}(h) + (1-\beta)(X_T - \hat{X}_{T-1}(h)).
\end{aligned}$$

et l'erreur de la prévision est donnée par

$$e_T = \hat{X}_T - \beta\hat{X}_{T-1} = (1-\beta)X_t.$$

En particulier on peut choisir $\hat{X}_1(h) = X_1$ comme valeur initiale de cette formule récursive.

Remarque 3.1

1. *La prévision est une moyenne de toutes les observations passées, pondérée de sorte à ce que plus l'observation soit ancienne moins elle ait d'importance.*
2. *$\hat{X}_T(h)$ est indépend de h alors elle peut être notée par $\hat{X}_T$.*
3. *Plus β est petit (ou encore β proche de 0), la prévision est souple, c-à-d fortement influencée par les observations les plus récentes.*

4. Plus β est grand (ou encore β proche de 1), la prévision est rigide, c-à-d l'influence des observations anciennes est plus importante.

3.1.2 Choix de la constante de lissage

Un problème important en pratique est le choix du β qui est en général trés subjectif et varie selon le contexte de l'étude et/ou le type de prévision souhaité. En pratique, si on veut une prévision rigide, on choisira $\beta \in [0.7; 0.99]$.

Si on veut une prévision souple, on choisira $\beta \in [0.01; 0.3]$.

Si on ne sait pas, une autre solution, dictée par les données, consiste à choisir β comme la solution qui minimise

$$\sum_{[\frac{T-h}{2}]}^{T-1} \left(X_{T+h} - \hat{X}_T(h) \right)^2 .$$

On repéte cette opération pour plusieurs valeurs de β, et on choisit celle la plus petite erreur.

3.2 Lissage exponentiel double

Le lissage exponentiel double généralise l'idée du lissage exponentiel simple au cas où la série peut être ajustée par une droite au voisinage de T comme suit :

$$X_t = a(t - T) + b + \varepsilon_t.$$

Donc, elle permet de calculer une prévision pour des séries chronologiques sans saisonnalité et ayant une tendance linéaire, la technique du lissage double consiste à effectuer un lissage de la série déjà lissée.

Pour tout h, Notons que a et b dépendent de t. On cherche à déterminer les valeurs des deux paramétres en minimisant la fonction suivante :

$$\min \left[\sum_{i=0}^{T-1} \beta^i (X_{T-i}(h) - (ai - b))^2 \right].$$

Proposition 3.1 *La prévision de la série à l'horizon h, $\hat{X}_T(h)$ fournie par la méthode de lissage exponentiel double est donnée par*

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}(T)h + \hat{b}(T),$$

où β est la constante de lissage et le couple $(\hat{a}(T), \hat{b}(T))$ est donne par :

$$\begin{cases} \hat{a}(T) = \frac{1-\beta}{\beta}(S_1(T) - S_2(T)), \\ \\ \hat{b}(T) = 2S_1(T) - S_2(T). \end{cases}$$

telles que

$$S_1(T) = (1-\beta)X_{T-1} \sum_{i=0}^{T-1} \beta^i X_{T-i},$$

$$S_2(T) = (1-\beta) \sum_{i=0}^{T-1} \beta^i S_1(T-i).$$

3.2.1 Formule de mise à jour

Les fourmules de mise à jour s'obtiennent à partir de ces expressions

$$\hat{a}(T) = \hat{a}(T-1) + (1-\beta)^2 \left(X_T - \hat{X}_{T-1}(1) \right),$$

$$\hat{b}(T) = \hat{b}(T-1) + \hat{a}(T-1) + (1-\beta^2) \left(X_T - \hat{X}_{T-1}(1) \right).$$

On peut prendre comme valeurs initiales :

$$\begin{cases} \hat{a}(0) = X_1, \\ \hat{b}(0) = X_2 - X_1. \end{cases}$$

3.3 Lissage de Holt-Winters

Cette méthode est à privilégier dans le cas de séries chronologiques présentant à la fois un terme de tendance et une saisonnalité. Elle est basée sur l'estimation de trois termes. Il existe trois méthodes dont l'une est adaptée aux séries admettant une décomposition multiplicative et l'autre correspondant aux décompositions additives et la troisième est adaptée aux séries ayant un terme de tendance mais ne présentant une saisonnalité qui se résume dans ce qui suit :

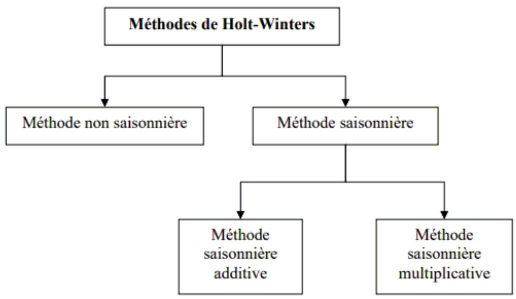


FIG. 3.1 – Méthode Holt-Winters.

3.3.1 Méthode non saisonnière

Modéle considéré :

$$X_t = a_1(t - T) + a_2.$$

La méthode de Holt-Winters sans saisonnalité est fondée, comme la méthode de lissage double, sur l'hypothése d'ajuster au voisinage de T, une droite quelconque, elle prend la forme suivante :

$$\hat{a}_1(T) = (1 - \alpha)X_T + \alpha\left[\hat{a}_1(T - 1) + \hat{a}_2(T - 1)\right], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cette formule est une moyenne pondérée de deux informations sur le **niveau** a_1 de la série à la date T : l'observation X_T et la prévision faite en $T - 1$.

$$\hat{a}_2(T) = (1 - \gamma)\left[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T - 1)\right] + \gamma\hat{a}_2(T - 1), \ 0 < \gamma < 1$$

Cette formule est une moyenne pondérée de deux informations sur la **pente** a_2 de la série à la date T : la différence entre les niveaux estimés à $T-1$ et T. Toutefois ces deux relations ne peuvent être utilisées qu'aprés initialisation qui se fait généralement de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{a}_1(T) = X_2, \\ \hat{a}_2(T) = X_2 - X_1. \end{cases}$$

La prévision à l'horizon h faite à la date T est donnée par :

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_1(T) + h\ \hat{a}_2(T).$$

3.3.2 Méthode saisonnière

Cette méthode fait introduire la notion de saisonnalité, une notion qui peut prendre deux formes :

Méthode saisonniére additive

On suppose ici que la série X_t peut être approchée au voisinage de T par la série

$$Y_t = a_1 + (t-T)a_2 + S_T,$$

ou S_t : est un facteur saisonnier.

Les formules de mise à jour s'écrivent de la façon suivantes, ou s est le facteur de saisonnalisation (ou le nombre de saisons $s = 4$ pour des données trimestrielles ou $s = 12$ pour des données mensuelles) :

$$\begin{cases} \text{Lissage de la moyenne :} \\ \hat{a}_1(T) = (1-\alpha)(X_T - \hat{S}_{T-s}) + \alpha\left[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)\right], 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \text{Lissage de la tendance :} \\ \hat{a}_2(T) = (1-\gamma)\left[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)\right] + \gamma\hat{a}_2(T-1), \qquad 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \\ \text{Lissage de la saisonnalité :} \\ \hat{S}_T = (1-\delta)\left[X_T - \hat{a}_1(T)\right] + \delta\ \hat{S}_{T-s}, \qquad 0 \leq \delta \leq 1 \end{cases}$$

et la prévision à horizon h s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{X}_T(h) = \hat{a}_1(T) + h\ \hat{a}_2(T) + \hat{S}_{T+h-s} & \text{si } 1 \leq h \leq s \\ \hat{X}_T(h) = \hat{a}_1(T) + h\ \hat{a}_2(T) + \hat{S}_{T+h-2s} & \text{si } s \leq h \leq 2s \end{cases}$$

Le principale problème est le même que celui de la méthode non saisonniére.

Le probléme d'initialisation va se poser, et on peut pendre :

$$\begin{cases} \hat{a}_1(s) = M_s(X_1, \ldots, X_s) & M_s \text{ est une moyenne pondérée,} \\ \hat{a}_1(s+1) = M_s(X_2, \ldots, X_{s+1}) & \\ \hat{a}_2(s+1) = \hat{a}_1(s+1) - \hat{a}_1(s) & \\ \hat{S}_j = X_j - \hat{a}_1(j), & \end{cases}$$

Remarque 3.2 *Le cas d'une saisonnalité trimestrielle,* $s = 4$

$$\hat{a}_1(4) = \frac{\frac{1}{2}X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + \frac{1}{2}X_6}{4}.$$

3.3.3 Méthode saisonnière multiplicative

On suppose ici que la série X_t peut être approchée au voisinage de T par la série :

$$Y_t = [a_1 + (t-T)a_2] \times S_T,$$

ou S_t : est un facteur saisonnier.

Les formules de mise à jour s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{a}_1(T) = (1-\alpha)\frac{X_T}{\hat{S}_{T-s}} + \alpha\left[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)\right], & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \hat{a}_2(T) = (1-\gamma)\left[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)\right] + \gamma\hat{a}_2(T-1), & 0 \leq \gamma \leq 1, \\ \hat{S}_T = (1-\delta)\frac{X_T}{\hat{a}_1(T)} + \delta\hat{S}_{T-s} & , 0 \leq \delta \leq 1, \end{cases}$$

La prévision à horizon h s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{X}_T(h) = [\hat{a}_1(T) + h\ \hat{a}_2(T)]\, \hat{S}_{T+h-s} & \text{,si} \quad 1 \leq h \leq s, \\ \\ \hat{X}_T(h) = [\hat{a}_1(T) + h\ \hat{a}_2(T)]\, \hat{S}_{T+h-2s} & \text{,si} \quad s \leq h \leq 2s, \end{cases}$$

Pour le probléme d'initialisation, on peut pendre :

$$\begin{cases} \hat{a}_1(s) = M_s(X_1, \ldots, X_s) \qquad M_s \text{ est une moyenne pondérée,} \\ \hat{a}_1(s+1) = M_s(X_2, \ldots, X_{s+1}) \\ \hat{a}_2(s+1) = \frac{\hat{a}_1(s+1)}{\hat{a}_1(s)} \\ \hat{S}_j = \frac{X_j}{\hat{a}_1(j)}. \end{cases}$$

3.4 Application de la méthodes lissage de Holt-Winters sur données réelles

Le tableau suivant présente le montant de la consommation d'électricité pour la wilaya de Ouargla de 2018 à 2022. Ces données sont extraites de la direction de l'électricité et du gaz de la wilaya de Ouargla.

mois\anné	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**
janvier	16.64	36.86	36.08	34.27	39.30
février	35.06	37.70	38.31	34.90	40.94
mars	15.71	17.21	17.69	18.98	20.54
avril	30.74	32.42	35.63	29.51	33.86
mai	30.45	33.41	34.05	37.98	39.23
juin	22.90	25.26	25.11	33.19	34.47
juillet	73.88	77.54	71.20	97.08	95.40
aout	90.81	101.07	96.09	120.64	112.16
septembre	45.87	53.51	53.31	63.06	56.25
octobre	81.20	94.40	92.35	102.71	98.77
novembre	53.99	63.81	66.49	72.73	74.66
décembre	19.04	23.70	24.05	27.10	28.31

TAB. 3.1 – Consommation d'électricité pour la wilaya de Ouargla de (2018 - 2022) en GWH.

Nous lisons les données du tableau dans R en utilisant l'instruction suivante :

```
>sc<-read.table(file.choose(),header=TRUE)
>sc
```

3.4.1 Identification de la série

Pour déterminer le type de chaîne étudier, nous appuierons sur la représentation graphique des données présentées dans la figure suivante :

```
>plot.ts(sc$X)
```

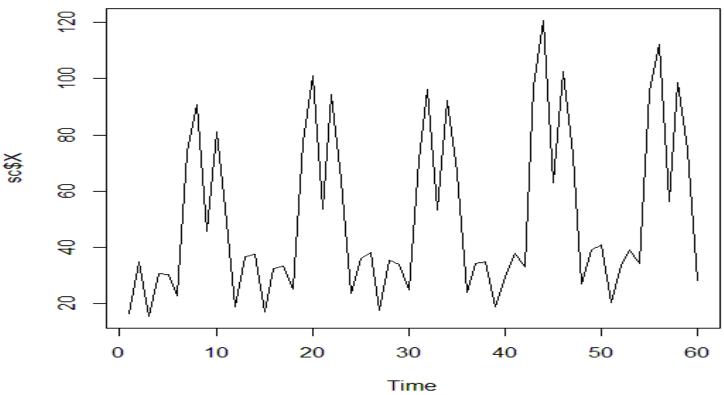


FIG. 3.2 – Consommation d'électricité pour la wilaya de Ouargla de 2018 à 2022.

De la figure nous concluons :

1. De ce graphique, nous observons que les données contiennent un élément saisonnier toutes les 12 périodes.
2. La série est stationnaire.
3. La série additif.

3.4.2 Test de la stationnarité

Pour confirmer que la série est stationnaire on peut utiliser **ADF** Augmented Dickey-Fuller.

Les hypothéses pour notre test sont :

$$\begin{cases} H_0 : \text{la série est stationnaire.} \\ H_1 : \text{la série n'est pas stationnaire.} \end{cases}$$

* Si|p-value| < 0.05, on accepte l'hypothése nulle, la série est stationnaire.
* Si|p-value| ≥ 0.05, on rejette l'hypothése nulle, la série est non stationnaire.

>adf.test(sc$X,alternative="stationary")

La **p-value** $= 0.01 < 0.05$ donc la série est stationnaire.

3.4.3 Modélisation de la série

Pour spécifier la forme de la série, nous utilisons l'instruction **auto.arima()**. En choisissant les meilleurs **AIC** et **BIC**.

>ARIMA1<-auto.arima(sc)
>ARIMA1
Le modéle est **SARIMA(1,0,0)(1,1,0)**^{12} et les coefficients sont :

Head	ar1	sar1	drift
coff	0.6274	-0.4227	0.3007
s.e.	0.1256	0.1403	0.1128

TAB. 3.2 – Coefficients du modèle SARIMA.

et **AIC=296.2 ; AICc=297.13 ; BIC=303.68.**

3.4.4 La prévision

La prédiction est la derniére étape de notre application, qui se divise en deux étapes :

1. Extraire les constantes α, β et γ.
2. Prévision.

Extraire les constantes

Pour l'extraction des constantes, on utilise l'instruction **HoltWinters() :**

>const<-HoltWinters(sc)
>const
Lissage exponentiel de Holt-Winters avec tendance et composante saisonniére additive.

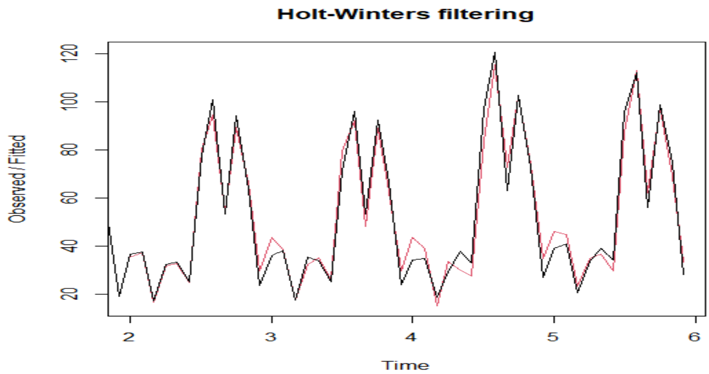
Paramétres de lissage :

$\alpha = 0.7355041$
$\beta = 0$
$\gamma = 1$

Coefficients :

$a = 60.6573714$
$b = 0.4682226$
$s1 = -14.2088870$
$s2 = -10.1338308$
$s3 = -28.9121626$
$s4 = -15.3182637$
$s5 = -12.2738011$
$s6 = -21.0452522$
$s7 = 33.4892213$
$s8 = 50.4737598$
$s9 = -1.6296826$
$s10 = 39.3010586$
$s11 = 10.7863338$
$s12 = -32.3473714$

>plot(const)



Filtrage de Holt-Winters.

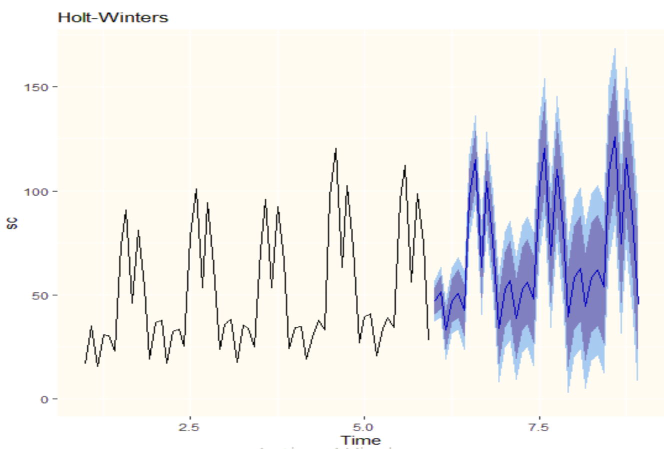
La prévision

Et à la fin de l'application et en utilisant l'instruction **forecast()**, nous avons obtenu une prédiction des valeurs possibles de consommation d'électricité pour les trois prochaines années (2023, 2024, 2025).

```
>library(forecast)
>prévisions<-forecast(const,h=36,findfrequency=TRUE)
>prévisions
```

mois\années	**2023**	**2024**	**2025**
janvier	46.91	52.53	58.15
février	51.45	57.07	62.69
mars	33.14	38.76	44.38
avril	47.21	52.83	58.44
mai	50.72	56.34	61.69
juin	42.42	48.04	53.65
juillet	97.42	103.04	108.66
aout	114.87	120.49	126.11
septembre	63.24	68.86	74.47
octobre	104.64	110.25	115.87
novembre	76.59	82.21	87.83
décembre	33.92	39.54	45.16

TAB. 3.3 – Prévision de la consommation d'électricité (2023, 2024 et 2025).



Reprsentation graphique des prévisions de consommation d'électricité.

Conclusion

Dans le cadre de cette recherche, nous avons colllecté quelques modéles de séries temporelles et les avons définis ainsi que leurs caractéristiques (AR, MA, ARMA).

Nous avons également présenté les deux modéles ARIMAet SARIMA et mentionné leurs caractéristiques les plus importantes et la définition de leurs formes.

Et nous avons mené une étude sur la méthode de prédiction du lissage expoentiel de Holt-Winters, qui est compatible avec la série SARIMA que nous allons étudier.

Nous avons complété cette étude en la mettant en pratique dans **R** à l'aide des packages tseries et forecast et en appliquant la méthode de lissage expoentiel de Holt-Winters, qui nous a permis de prévoir la quantité de consommation d'électricité de Ouargla pour les trois prochaines années et d'accéder au modéle SARIMA$(1,0,0)(1,1,0)^{12}$.

Bibliographie

[1] BOUKHRIS, M. (2020). Prévisions par l'utilisation des modéles (Nombre des naissances à l'hôpital de sidi Abd-elkader de Ouargla). Thèse de mastère, université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie.

[2] Corinne, P. (2004). Les modéles ARMA stationnaire. Thèse de mastère, université Paris 1.

[3] DJAIDER, H. (2022). Analyse et prévision du taux de change par les méthode de lissage exponentiel. Thèse de mastère, université Yahia Fares de Médéa, Algérie.

[4] FREDRIK, N.S. (2013). Forecast comparison of models based on SARIMA and the Kalman filter for inflation. Thèse de mastère, Uppsala université.

[5] GASMI, L. (2019). Time series forecasting using network and genetic algarithms. Thèse de mastère, université Djillali Liabes Sidi Belabbes, Algérie.

[6] HEMSAS, O. (2014). Prédiction dans les séries chronologique. Thèse de mastère, université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, Algérie.

[7] JONATHAN, D. (2008). Time series analysis with applications in R. Springer science+Business media, LLC.

[8] JONOS, K. (2018). Prévision par l'approche méthodologique de Box et Jenkins : cas d'une série non saisonniére et non stationnaire du type TS (pratique sur eviews et stata). Hal open science.

[9] KATLYN, T. (2011). Comme exigence partielle de la maîtrise en mathématiques et informatiqique appliquees. Université du Québec.

[10] KADRI, F. & CHAABANE, S. & HARROU, F. & TAHON, CH. (2014). Modélisation et prévision des flux quotidiens des patients aux urgences hospitaliéres en utilisant l'analyse de séries chronologiques. Hal open science.

[11] MARIUS, S. (2020). Statistique asymptotique de certanes séries chronologiques à mémoire. Hal open science.

[12] MERAH, F. (2022). Méthodes chronologiques et prévision. Thèse de mastère, université Mustapha Ben Boulaid de Batna 2, Algérie.

[13] MEZIAN, Y. & SAYOUD, H. (2019). Prévision des achats d'électricité de la région de distribution centre de sonelgaz.Thése de mastére, université Saad Dahlab Blida1, Algérie.

[14] SENOUCI, S.K. (2012). Essai d'application des modéles de prévision univariés sur la consommation d'énergie électrique en Algérie. Thèse de doctorat, université d'Oran, Algérie.

[15] WALTER, E. (2014). Applied econometric time series. John wiley & sons ,INC.

[16] YVES, A. (2011). séries temporelles avec R méthodes et cas. Springer, verlag, France.

Résumé

Nous nous intéressons dans ce mémoire à la modélisation et à la prévision de séries temporelles par la méthode de lissage expoentiel de Holt-Winters au moyen du modèle saisonnier SARIMA.Et nous arrivons enfin à une application pratique d'un exemple de série en temps réel dans un cadre du programme **R**.

Mots clés: Lissage exponetiel (Holt-Winters); les processus SARIMA; prévision.

Abstract

We are interested in this memoir to modeling and forecasting of time series by the Holt-Winters exponential smoothing methode using the seasonal model SARIMA. And finally we come to a practical application of a real-time serial example in an **R** program framework.

Keywords: Exponetial smoothing (Holt-Winters); SARIMA processes; forecast.

ملخص

نحن مهتمون في هذه المذكرة بنمذجة السلاسل الزمنية و التنبؤ بها من خلال طريقة التجانس الأسي لهولت وينترز عن طريق النموذج الآسيSARIMA. ووصلنا أخيرا إلى تطبيق عملي لمثال لسلسلة زمنية حقيقية في إطار البرنامجR

الكلمات المفتاحية: SARIMA,طريقة التجانس الأسي , التنبؤ.