



**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA**

**Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière**

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : REKIBI Mohammed El-Assyl

Thème

**Résolution d'une équation elliptique posé en demi-espace
par des éléments finis inversé**

Soutenue publiquement le : 22/06/2023

Devant le jury composé de :

Dr. MEZABIA Mohammed El hadi	M.C.A. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Dr. REZZAG Bara Rihana	M.C.B. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Dr. KALICHE Keltoum	M.C.B. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je tiens à dédier ce mémoire :

A mes parents :

Ma mère "Germina", qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude. Puisse Dieu te prêter longue vie avec beaucoup de bonheur et de santé.

Mon père "Rekibi", qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit, Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi. Puisse Dieu lui prêter longue vie.

A mon frère : Mootassim Billah

A ma soeur : Hind

A toutes les familles : REKIBI et ZOBIR.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à mon encadreur, Mme KALICHE Keltoum, qui a su m'amener à développer ce travail.

A tous mes amis : Salah eddin, Firas, Bilal, Mounir, Abdenour, Younes, Naoufel, à tous mes Amis de la catégorie de la modélisation numérique et de l'analyse. à ceux qui croyaient à l'intérieur de moi. pour ceux qui croient en moi. Et pour ceux qui croiront toujours en moi. A vous tous Merci beaucoup.

Remerciements

Je tiens en ces quelques lignes à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail et à son aboutissement.

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur **KALICHE Keltoum** J'ai dirigé mes premiers pas dans la recherche, qui m'a suggéré ce sujet et qui a dirigé ce travail, merci beaucoup.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail, et tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux. J'exprime également ma gratitude aux membres du Jurys qui m'onthonoré en acceptant de juger ce travail.

Je tiens également à remercier tous mes amis (Salah Eddin, Oussama, Firas, Ibrahim et Bilal) et mes amis docteurs (Salim, Naimi, Ali, Ahmed, Omar et Seddik) pour leurs encouragements et leur soutien pour continuer la réalisation de ce travail , Merci à tous

Enfin, un grand merci à ma famille pour son soutien et ses encouragements. Merci beaucoup à ma mère pour son soutien particulier pour moi, merci à mon père, merci à mon frère et ma sœur. Merci pour tout !

Table des matières

Dédicaces	I
Remerciements	II
LISTES DES FIGURES	V
NOTATIONS	1
INTRODUCTION	3
1 Le cadre fonctionnel	5
1.1 Définitions et notations	5
1.1.1 L'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	5
1.1.2 Les espaces de Sobolev à poids	6
1.1.3 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$	8
1.1.4 Espaces des traces	8
1.1.5 Théorème de Lax-Milgram	9
1.1.6 Quelques inégalités	10
1.1.7 La méthode de Galerkin	10
1.2 Notations géométriques	11
2 Discrétisation du problème par les éléments finis inversés	14
2.1 Position du problème	14
2.2 Existence et unicité	15
2.3 Une décomposition du domaine particulière	19
2.3.1 Construction du maillage	20
2.3.2 Construction du maillage gradué	22
2.4 L'espace discrète	23
2.5 Estimation d'erreur	24
3 Tests numériques	27
3.1 Implémentation de la méthode	27

CONCLUSION	31
Références	33

LISTES DES FIGURES

1.1	Exemple d'un simplexe infini 2D.	12
2.1	Partition de demi-espace \mathbb{R}_+^2 en la réunion d'un domaine borné et de deux triangles infinis	20
2.2	Comment l'application ϕ inversé les deux triangles infinis	21
2.3	maillage de Ω_0	22
2.4	maillage de Ω_*	23

NOTATIONS

- ♣ Ω : Un Ouvert de R^n .
- ♣ $\partial\Omega$: La frontière de Ω .
- ♣ $W^{m,p}$: Espace de Sobolev.
- ♣ $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev à poids.
- ♣ $W_{h,k,\gamma}$: Espace discret.
- ♣ $\langle \mathbf{x} \rangle$: Le poids de base définit par $\langle \mathbf{x} \rangle = (|\mathbf{x}|^2 + 1)^{1/2}$.
- ♣ ∇u : Gradient de u définit par $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})^T$.
- ♣ Δu : Laplacien de u définit par $\Delta u = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
- ♣ \mathcal{T}_h : Une triangulation.
- ♣ ϕ : Une inversion polygonal.
- ♣ T : Simplexe infini.
- ♣ S_T : Simplexe fini associé à T .
- ♣ Ω_* : Le domaine fictif.
- ♣ $r(\cdot)$: Le rayon polygonal.
- ♣ $\beta, \beta', \alpha, \sigma, \eta, \eta_0$: Des constants.
- ♣ $\tilde{\mathcal{T}}_h$: Une triangulation gradué.

INTRODUCTION

De nos jours, les équations aux dérivées partielles sont très importantes dans de nombreux domaines tels que la physique, la chimie et l'ingénierie. Elles sont posées dans des domaines illimités tels que la zone entière et les domaines extérieur et nécessitent l'utilisation de nombreuses méthodes pour leur résolution. L'une de ces méthodes est la méthode des éléments finis inversés, qui a été développée par Boulmzaoud [8]. Cette méthode est caractérisée par la préservation de l'infini du domaine, son idée de base est de diviser le domaine géométrique non borné en deux parties, choisies librement. La première partie est bornée, ce qui facilite l'utilisation des éléments finis usuels, tandis que la deuxième partie est non bornée et nécessite l'utilisation d'éléments finis inversés. Cette dernière partie est ensuite convertie en une partie bornée par une transformation inverse.

La méthode repose sur l'utilisation d'espaces de Sobolev à poids, qui représentent un cadre fonctionnel adéquat pour résoudre des problèmes elliptiques, (voir [9],[12]). Ces espaces sont des extensions des espaces de Sobolev classiques, mais qui sont munis de poids permettant de décrire la décroissance ou la croissance des fonctions à l'infini. La méthode des éléments finis inversés a été utilisée dans [10] pour approcher un problème elliptique du second ordre en demi-ligne, et dans [11] pour le cas des équations elliptiques dégénérées à coefficients singuliers ou non bornés. Elle a également été utilisée dans [6] pour résoudre un problème dans un domaine extérieur en dimension deux.

Le but de cette étude consiste à appliquer la méthode des éléments finis inversés pour résoudre une équation elliptique du second ordre qui prend la forme suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + b.\nabla u + cu = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, a , b , c sont des coefficients variables et f est une fonction donnée.

Dans le **premier chapitre** de ce travail, nous mentionnerons les définitions des espaces de Sobolev et de Sobolev à poids, et mentionnerons les théorèmes et les inégalités utilisées pour prouver l'existence et l'unicité de la solution, en plus de cela nous présentons quelques notations géométriques.

Au **deuxième chapitre** de ce travail, premièrement nous définissons le problème que nous allons étudier, et après cela nous mentionnerons l'espace de Sobolev à poids utilisé, puis nous trouvons la formulation variationnelle de ce problème, ensuite, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution.

Dans la deuxième partie du deuxième chapitre, nous faisons une discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés plus tard on donne une Estimation d'erreur.

Enfin, dans le **troisième chapitre**, nous faisons quelques tests numériques, en commençant par calculer la matrice pour le corps fini et le corps illimité, avec le développement d'algorithmes liés à ces tests à l'aide du programme MATLAB, et à la fin nous dessinons la solution.

CHAPITRE 1

Le cadre fonctionnel

Chapitre 1

Le cadre fonctionnel

1.1 Définitions et notations

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^n , avec $n \geq 2$ sans obligation d'être borné, ayant une frontière régulière notée $\partial\Omega$. On appelle $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ son dual, qui est l'espace de distribution.

Pour tout point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ la distance entre x et l'origine. En outre, on note $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à x_i pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$. on pose

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

1.1.1 L'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1. [1] Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque, p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$ et m un entier naturel positif. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

où α est un multi-indice tel que $0 \leq |\alpha| \leq m$, D^α est une dérivée partielle de u au sens faible (i.e. au sens des distributions) et L_p un espace de Lebesgue. La norme sur $W^{m,p}$ est :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & , 1 \leq p \leq \infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & , p = \infty \end{cases}$$

où $\|\cdot\|_{L^p}$ désigne la norme des espaces de Lebesgue. $W^{m,p}$ Muni de cette norme est un espace de Banach. Dans le cas où $p < \infty$, c'est aussi un espace séparable. La norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \right)^{1/p}, & , 1 \leq p \leq \infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & , p = \infty \end{cases}$$

est une norme équivalente à la norme précédente.

1.1.2 Les espaces de Sobolev à poids

Définition 1.2. Dans toute la suite, désigne les poids de base, définie par

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$$

$$\langle \langle x \rangle \rangle = \log(2 + |x|^2)$$

Soient $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$. Pour tout domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^n , on définit l'espace de Sobolev à poids :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\lambda| \leq k, \rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg \rho)^{-1} \partial^\lambda u \in L^p(\Omega), k+1 \leq |\lambda| \leq m, \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\Omega) \right\}$$

avec $\rho = \langle x \rangle$ et $\lg \rho = \langle \langle x \rangle \rangle$.

Cet espace est un espace de Banach équipé de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=0}^k \left\| \frac{\rho^{\alpha-m+|\lambda|}}{\lg \rho} \partial^{|\lambda|} u \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{|\lambda|=0}^{k+1} \left\| \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^{|\lambda|} u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et de la semi-norme :

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \left\| \rho^\alpha \partial^\lambda u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Exemple 1.1. • si $m = 1$ et $\alpha = 0$ donc l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ est donner par :

$$W_0^{1,n}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1} (\lg \rho)^{-1} u \in L^n(\Omega), \nabla u \in L^n(\Omega) \right\} \text{ si } n = p$$

cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} = \left(\left\| \rho^{-1} (\lg \rho)^{-1} u \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et aussi de la semi norme

$$|u|_{W_0^{1,n}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega)\} \text{ si } n \neq p$$

cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\|\rho^{-1}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et aussi de la semi norme

$$|u|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

- si $m = 2$ et $\alpha = 1$ cet l'espace devient simplement

$$W_1^{2,n}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}(\lg \rho)^{-1}u \in L^n(\Omega), \nabla u \in L^n(\Omega), \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\} \text{ si } n = p$$

muni par la norme

$$\|u\|_{W_1^{2,n}(\Omega)} = \left(\|\rho^{-1}(\lg \rho)^{-1}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left\| \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et aussi la semi norme

$$|u|_{W_1^{2,n}(\Omega)} = \left(\left\| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$W_1^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega), \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega), i, j = 1, \dots, n \right\} \text{ si } n \neq p$$

muni par la norme

$$\|u\|_{W_1^{2,p}(\Omega)} = \left(\|\rho^{-1}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left\| \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et aussi la semi norme

$$|u|_{W_1^{2,p}(\Omega)} = \left(\left\| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.1.3 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Nous présentons quelques propriétés de l'espace $W_\alpha^{m,p}$ (voir [3]) :

- $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$
- Les inclusions suivantes sont valables avec injections continues :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega).$$

- Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \varphi u \in W^{m,p}(\Omega)$$

est linéaire continue.

- On a pour tout entier k dans \mathbb{Z} avec $k < m - \alpha - n/p$, $\mathbb{P}_k \subset W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^d)$
- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \langle \mathbf{x} \rangle^\beta u \in W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

- Pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$ avec $|\lambda| \leq m$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto D^\lambda u \in W_{\alpha-|\lambda|}^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est linéaire et continue.

- L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

Nous notons $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ et $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$ son espace dual. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$, nous avons l'égalité

$$\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^d) = W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^d)$$

1.1.4 Espaces des traces

Définition 1.3. [3] Pour tout $s \in]0, 1[$, l'espace $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ est composé de tous les distributions $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\langle \mathbf{x} \rangle^{-s} u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et

$$\int_0^\infty t^{-1-sp} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x + te_i) - u(x)|^p dx dt < \infty, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

où $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ désignent les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^d . Cet espace est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^d)} = \left\{ \|\langle \mathbf{x} \rangle^{-s} u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} t^{-1-sp} |u(x + te_i) - u(x)|^p dx dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, pour tout réel $s > 0$, on définit l'espace

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{u \in W_{[s]-s}^{[s],p}(\mathbb{R}^d); \forall |\lambda| = [s], D^\lambda u \in W_0^{s-[s],p}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Etant donné un réel α , on pose

$$W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d); \langle \mathbf{x} \rangle^\alpha u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Les traces sur \mathbb{R}_+^d des fonctions de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^d)$ sont données par le théorème suivant :

Théorème 1.1. [9] Il existe une application linéaire continue $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ avec les propriétés suivantes :

a) Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$,

$$\gamma u = (u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial y}(x', 0), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x', 0)).$$

b) γ est une application surjective.

c) $\gamma^{-1} = \mathring{W}_\alpha^{m,p}$

1.1.5 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram [4] est un théorème très important. Considérons un problème variationnel sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tels que} \\ a(u, v) = F(v), \forall v \in V. \end{cases}$$

Théorème 1.2. (Lax-Milgram)

Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$. On suppose que :

(i) la forme bilinéaire a est continue,

$$\exists \beta < +\infty, \forall (u, v) \in V \times V, |a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V$$

(ii) la forme bilinéaire a est coercive (on dit également V - elliptique)

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2. \quad (1.1)$$

(iii) la forme linéaire est continue,

$$\exists \gamma < +\infty, \forall v \in V, |F(v)| \leq \gamma \|v\|_V;$$

Alors, le problème admet une et une seule solution. De plus, son unique solution satisfait l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \quad (1.2)$$

Nous rappelons ici de la formule de green :

Formule de Green :

Pour toute $u \in W_{\alpha-1}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$, $\forall v \in W_{-\alpha}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ la formule de green suivante est valable

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_n} v \, dx &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_n} \, dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', 0) v(x', 0) \, dx'. \end{aligned}$$

1.1.6 Quelques inégalités

Lemme 1.1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz[5])

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire \langle, \rangle . On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , on a l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Lemme 1.2. (Inégalité de Hardy[6])

On a aussi l'inégalité de Hardy suivant : Il existe une constant η_0 telle que

$$\forall v \in \dot{W}_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq \eta_0 \int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1) (\log(2 + |x|^2))^2} \, dx$$

1.1.7 La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin [7] est une méthode très générale et une classe de méthodes permettant de transformer un problème continue en un problème discret, qui ce fait de la manière

suivante à partir d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché en dimension finie, ce qui est plus facile pour résoudre un problème.

Lemme 1.3. (Lemme de Céa [1])

La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ étant continue, de constante de majoration M , et coercitive, de constante de minoration α , il est aisé d'obtenir la majoration de l'erreur appelée **lemme de Céa** :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \forall v_h \in V_h \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h)$$

où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

Cette majoration donnée par le lemme de Céa ramène l'étude de l'**erreur d'approximation** $\|u - u_h\|$ à celle de l'**erreur d'interpolation** $d(u, V_h)$.

1.2 Notations géométriques

Définition 1.4. Soit $a_j = (a_{ij})_{i=0}^n, j = 0, \dots, n$, une collection de $n + 1$ points de \mathbb{R}^d qui ne sont pas dans un même hyperplan. On appelle simplexe infini de sommets $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ l'ensemble

$$T(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \left\{ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{a}_i, \lambda_0 \leq 0, \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Le sommet \mathbf{a}_0 est appelé le sommet fictif de T et les autres sommets $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ sont appelés les sommets réels de T . En effet, $\mathbf{a}_0 \notin T$ tandis que $\mathbf{a}_i \in T, \forall 1 \leq i \leq n$. On appelle vecteur altitude associé à T le vecteur $\mathbf{h}_T = \overrightarrow{a_0 P_0}$ où P_0 est la projection de a_0 sur l'hyperplan P_T contenant $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Ainsi, en dimension 2, un T -simplexe infini est triangle infini. On appellera simplexe fini associé à T le simplexe

$$S_T(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \left\{ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{a}_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, 0 \leq i \leq n, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

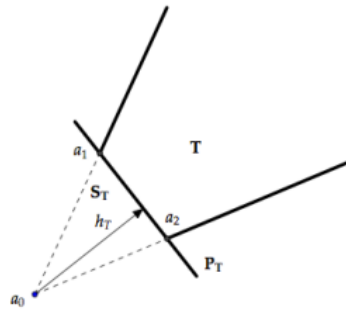


FIGURE 1.1 : Exemple d'un simplexe infini 2D.

CHAPITRE 2

Discrétisation du problème par les éléments finis inversés

Chapitre 2

Discrétisation du problème par les éléments finis inversés

2.1 Position du problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + b.\nabla u + cu = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est le demi-espace, c'est-à-dire $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, f est une fonction donné.

Ici a , b et c sont des fonctions donnés qui peuvent varier sur de grandes distances.

On considère l'espace $W_{\log}^1(\Omega)$ composé de toutes les fonctions généralisées v satisfaisant

$$\int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2} dx < +\infty, \quad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx < \infty,$$

doté de la norme

$$\|v\|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2} dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

nous fixons

$$\mathring{W}_{\log}^1(\Omega) = \{v \in W_{\log}^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

Hypothèses :

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H_1) $a \in L^\infty(\Omega)$ et il existe une constante $\alpha > 0$ tel que
 $a(x) \geq \alpha > 0$, a.e. dans Ω .

(H₂) $\mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)^2$ et $[x \in \Omega \mapsto (|x| \log |x|)\mathbf{b}(x)] \in L^\infty(\Omega)^2$

(H₃) $c \in L^\infty(\Omega)$ et $[x \in \mathbb{R}^2 \mapsto (|x| \log |x|)^2 c(x)] \in L^\infty(\Omega)$.

(H₄) $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$, $[x \in \Omega \mapsto |x|^2 (\log |x|)^2 \operatorname{div} \mathbf{b}(x)] \in L^\infty(\Omega)$ et il existe une constante $\eta < \eta_0 \alpha$ tel que

$$c - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} \geq - \frac{\eta}{|x|^2 \log(|x|^2 + 2)^2}$$

(H₅) $f \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$, où $W_{\log}^{-1}(\Omega)$ représente le dual de $\dot{W}_{\log}^1(\Omega)$.

2.2 Existence et unicité

• Formulation variationnelle du problème :

On multiplie l'équation du problème (2.1) par une fonction test v et on intègre sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x)\nabla u + c(x)u) \cdot v dx &= \int_{\Omega} f v dx \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(a(x)\nabla u) v dx + \int_{\Omega} b(x)\nabla u v dx + \int_{\Omega} c(x)u v dx &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

d'après la formule de green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (a(x)\nabla u) \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (a(x)\nabla u) \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} b(x)\nabla u v dx + \int_{\Omega} c(x)u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

on choisit $v \in \dot{W}_{\log}^1$,

$$\int_{\Omega} a(x)\nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} b(x)\nabla u v dx + \int_{\Omega} c(x)u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Alors, la formulation variationnelle associée au problème (2.1) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \text{ tels que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \end{array} \right.$$

avec \mathcal{A} une forme bilinéaire défini par

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} a(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \mathbf{b}(x) \nabla u \cdot v dx + \int_{\Omega} c(x) uv dx. \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.3)$$

Proposition 2.1. *Supposons que les hypothèses $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$ et (H_5) sont vérifiées le problème (1.1) admet une solution unique $u \in \dot{W}_{\log}^1$. De plus, on a*

$$|v|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq \frac{\|f(\mathbf{x})\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}}{C_1 \eta_0}$$

.

Démonstration 2.1. *Pour montrer l'existence et l'unicité du problème (1.1), on applique le théorème de Lax-Milgram sur (1.2).*

On commence par la continuité de la forme linéaire

$$\begin{aligned} |\langle f, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \langle x \rangle \langle \langle x \rangle \rangle f(\mathbf{x}) \frac{v(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle \langle x \rangle \rangle} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|f(\mathbf{x})\|_{W_{\log}^{-1}} \left\| \langle \langle x \rangle \langle \langle x \rangle \rangle \rangle^{-1} v \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\eta_0} \|f(\mathbf{x})\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\eta_0} \|f(\mathbf{x})\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)} |v|_{W_{\log}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Maintenant, on montre la continuité du forme bilinéaire \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| &\leq \|a(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\leq \|a(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\leq \|a(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|a(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{W_{\log}^1(\Omega)} |v|_{W_{\log}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de divergence, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| &= \left| - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\nabla v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \\
 &= \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x})(\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \frac{v(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x})\langle x \rangle \langle x \rangle \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \nabla v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} (\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 |\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x})| \left\| \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| \left\| \frac{v(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Omega} \langle x \rangle \langle x \rangle |\mathbf{b}(\mathbf{x})| \left\| \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| \|\nabla v(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \\
 \\
 \left| \int_{\Omega} c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{\Omega} c(\mathbf{x})(\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \frac{v(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} (\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 |c(\mathbf{x})| \left\| \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| \left\| \frac{v(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}(u, v)| &\leq \|a(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} (\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 (|\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x})| + |c(\mathbf{x})|) \left\| \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| \left\| \frac{v(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Omega} \langle x \rangle \langle x \rangle |\mathbf{b}(\mathbf{x})| \left\| \frac{u(\mathbf{x})}{\langle x \rangle \langle x \rangle} \right\| \|\nabla v(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

De l'hypothèse (H₂), on obtient

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}(u, v)| &\leq \|a(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\quad + \left\| (\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 (|\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x})| + |c(\mathbf{x})|) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| (\langle x \rangle \langle x \rangle)^{-1} u \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| (\langle x \rangle \langle x \rangle)^{-1} v \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\quad + \left\| \langle x \rangle \langle x \rangle |\mathbf{b}(\mathbf{x})| \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| (\langle x \rangle \langle x \rangle)^{-1} u \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq C \|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \|v\|_{W_{\log}^1(\Omega)},
 \end{aligned}$$

$$C = \|a(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| (\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 (|\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x})| + |c(\mathbf{x})|) \right\|_{L^\infty} + \left\| \langle x \rangle \langle x \rangle |\mathbf{b}(\mathbf{x})| \right\|_{L^\infty}.$$

Il reste de montrer la coercivité de \mathcal{A} . Utilisant l'hypothèse (H₁), on a

$$\int_{\Omega} a(\mathbf{x})\nabla u\nabla u d\mathbf{x} \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x},$$

et d'après l'hypothèse (H_4) et l'inégalité de Hardy, il en résulte que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} b(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} \left(c(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} (\langle x \rangle \langle x \rangle)^2 \left(c(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right) \\
 &\quad \times \frac{|u(\mathbf{x})|^2}{(\langle x \rangle \langle x \rangle)^2} d\mathbf{x} \\
 &\geq \eta \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x})|^2}{(\langle x \rangle \langle x \rangle)^2} d\mathbf{x} \\
 &\geq -\frac{\eta}{\eta_0} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(u, u) &\geq \left(\alpha - \frac{\eta}{\eta_0} \right) \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\
 \mathcal{A}(u, u) &\geq \left(\alpha - \frac{\eta}{\eta_0} \right) |u|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2. \\
 \mathcal{A}(u, u) &\geq C_1 |u|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

• Choississant $v = u$, on obtient :

$$\mathcal{A}(v, v) = \mathcal{L}(v)$$

la coercivité de \mathcal{A} et la continuité de \mathcal{L} implique que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(v, v) &\geq C_1 |v|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2. \\
 \mathcal{L}(v) &\leq \frac{1}{\eta_0} \|f(\mathbf{x})\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)} |v|_{W_{\log}^1(\Omega)} \\
 C_1 |v|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2 &\leq \mathcal{A}(v, v) = \mathcal{L}(v) \leq \frac{1}{\eta_0} \|f(\mathbf{x})\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)} |v|_{W_{\log}^1(\Omega)} \\
 |v|_{W_{\log}^1(\Omega)} &\leq \frac{\|f(\mathbf{x})\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}}{C_1 \eta_0}
 \end{aligned}$$

■

2.3 Une décomposition du domaine particulière

On divise le domaine $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ en deux sous domaines tel que

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_\infty$$

- Ω_0 : est un domaine polygonal borné, on le choisit ici comme un triangle régulier centré à l'origine.
- Ω_∞ : est un domaine non borné qui représente le domaine extérieur de Ω_0 dans \mathbb{R}_+^2 .

On divise Ω_∞ en l'union M des triangles infinis tels que :

1. $\bar{\Omega}_\infty = \bigcup_{l=1}^M T_l$
2. T_1, \dots, T_M ont le même sommet fictif a_0 . On supposera, sans perdre de généralité que $a_0 = 0$,
3. Pour tous $l, m \leq M$ avec $l \neq m$, $T_l \cap T_m$ est soit vide, soit un sommet, soit une arête infinie.

En particulier, on décompose $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ en l'union d'une partie borné Ω_0 et d'une partie non-borné Ω_∞ qui est divisé en l'union de deux triangles infinis T_1 et T_2 tels que :

$$\Omega_\infty = T_1 \cup T_2, \quad \Omega_0 = R\hat{\Omega}_0, \quad T_1 = R\hat{T}_1, \quad T_2 = R\hat{T}_2$$

R est un paramètre libre, présente la taille de sous domaine Ω_0 .

avec $\hat{\Omega}_0$ est le triangle de sommets $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ et \hat{T}_1, \hat{T}_2 sont des triangles infinis de sommet fictif l'origine et de sommets réels donnés par

$$\begin{aligned} &(1, 0), (0, 1) \text{ pour } \hat{T}_1, \\ &(-1, 0), (0, 1) \text{ pour } \hat{T}_2 \end{aligned}$$

Chaque triangle infini T est converti en triangle fini S :

On pose

$$\Omega_* = \text{int} \left(\bigcup_{l=1}^M S_l \right) - \{\mathbf{a}_0\}$$

Ce domaine s'appelle le domaine fictif. Il est borné et polygonal, il faut le distinguer de Ω_0 . On considère l'inversion polygonal ϕ qui transforme Ω_∞ en Ω_* . Elle est définie comme suit :

$$\forall \mathbf{x} \in G = \bar{\Omega}_* \cup \bar{\Omega}_\infty - \{\mathbf{a}_0\}, \quad \phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_0}{r(\mathbf{x})^2} + \mathbf{a}_0,$$

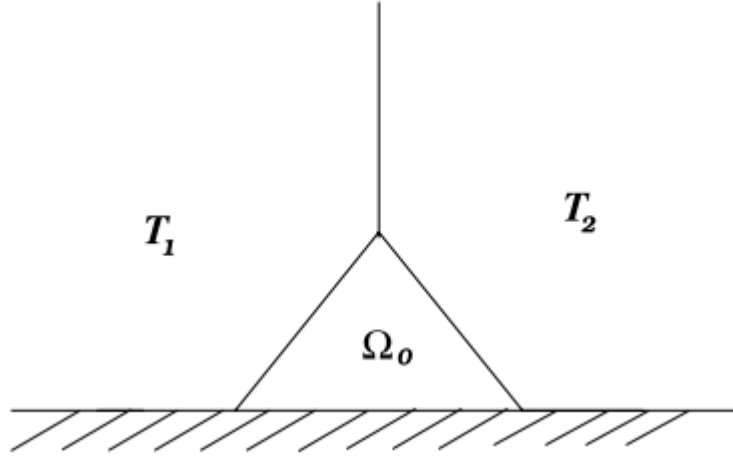


FIGURE 2.1 : Partition de demi-espace \mathbb{R}_+^2 en la réunion d'un domaine borné et de deux triangles infinis

où $r(\cdot)$ est le rayon polygonal défini de la façon suivante :

$$\forall l \in \{1, \dots, M\}, \forall \mathbf{x} \in \overline{T_l \cup S_l}, \quad r(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}_0)^t \cdot \mathbf{h}_l}{|\mathbf{h}_l|^2},$$

On peut montrer que (voir Boulmezaoud [8])

- la fonction $r(\cdot)$ est continu sur G ;
- $r(\mathbf{x}) \simeq |\mathbf{x}|, \forall \mathbf{x} \in G$
- $r(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega = \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty$; $r(\mathbf{x}) \cdot r(\phi(\mathbf{x})) = 1$
- ϕ transforme T_l en $S_l \setminus \{\mathbf{a}_0\}$ et vice versa ;
- ϕ est continu et injective de Ω_∞ dans Ω_* . Elle laisse invariant les points d'intersection de $\bar{\Omega}_\infty$ et $\bar{\Omega}_0$;
- $\phi = \phi^{-1}, \phi \circ \phi = id_{\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{a}_0\}}$;

2.3.1 Construction du maillage

L'étape suivante pour construire l'espace approché W_h est la construction du maillage. Donc, on maille les deux sous-domaines Ω_0 et Ω_* séparément, tels que

1. Dans le sous-domaine borné Ω_0 , on construit une triangulation classique en éléments finis $\{K; K \in \mathcal{T}_h\}$ vérifiant les conditions de la régularité suivantes :

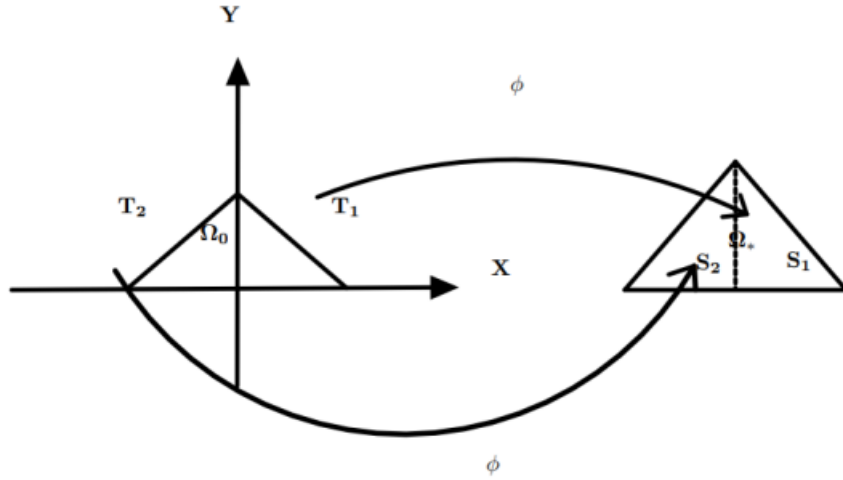


FIGURE 2.2 : Comment l'application ϕ inversé les deux triangles infinis

- (a) L'intersection de deux simplexes adjacents est vide ou est une face k -dimensionnelle entière avec $0 \leq K \leq n - 1$
- (b) Il existe une constante σ telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \text{ pour chaque } h,$$

où h est le paramètre de discrétisation, il est défini par

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$$

h_K dénote la diamètre de K et ρ_K le rayon de sphère inscrite dans K .

2. Dans le domaine fictif Ω_* , on utilise un maillage gradué de chacun des sous-domaines $S_l, 1 \leq l \leq M$, c'est-à-dire on construit une triangulation graduée $\{\tilde{K}; K \in \tilde{\mathcal{T}}_h\}$ satisfaisant en plus des conditions de la régularité, les hypothèses suivantes :

- (a) Pour tout $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h^* = \{K \in \mathcal{T}_h; 0 \notin K\}$

$$\begin{aligned} h_K &\lesssim h d_K^{1-\mu}, \\ h^{1/\mu} &\lesssim d_K. \end{aligned}$$

où d_K désigne la distance entre l'origine 0 et K . Le réel $\mu > 0$ est le paramètre de graduation, indépendant du raffinement.

(b) Pour tout $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h - \tilde{\mathcal{T}}_h^*$

$$h_K \lesssim h^{1/\mu},$$

(c) Pour tout $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$, il existe $i \in \{1, \dots, M\}$ tel que $K \subset S_i$.

(d) Si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, alors les triangulations $\tilde{\mathcal{T}}_h^i$ et $\tilde{\mathcal{T}}_h^j$ doivent avoir la même trace sur l'intersection $S_i \cap S_j$.

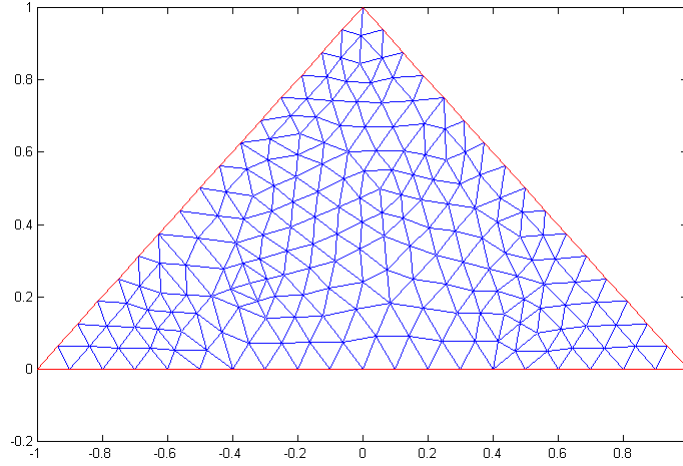


FIGURE 2.3 : maillage de Ω_0 .

2.3.2 Construction du maillage gradué

La première étape pour construire un maillage gradué est de considérer la suite croissante $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ définie par

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{i+1} = \alpha_i + \alpha_i^{1-\mu}.$$

Etant donné un entier $N \geq 2$, on pose $h_N = \alpha_N^{-\mu}$ et nous définissons la suite finie suivante :

$$d_i = \alpha_i h_N^{1/\mu} = \frac{\alpha_i}{\alpha_N}, 1 \leq i \leq N.$$

On considère les segments

$$D_i = \{(x, y) \in K_2; x + y = d_i\}, 1 \leq i \leq N.$$

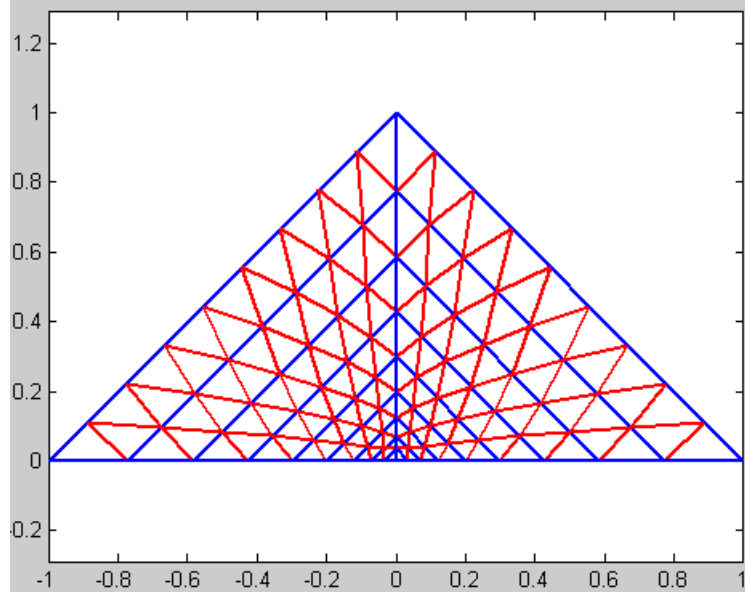


FIGURE 2.4 : maillage de Ω_* .

Ensuite, pour tout $i \leq N$, nous subdivisons le segment D_i en i segments égaux. Après, on relie les sommets pour obtenir le maillage finale de K_2 .

On considère la transformation qui associe à toute fonction u définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ la fonction \hat{u} sur Ω_* comme suit

$$\forall (x, y) \in \Omega_*, \hat{u}(x, y) = r(x, y)^{1-\theta} u(\phi(x, y))$$

Soulignons tout de suite que

$$u = \hat{u} \text{ sur } \partial\Omega$$

2.4 L'espace discrète

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace discrète associé au maillage dessus qui approche l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ comme suit :

$$W_h = \left\{ u_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid u_h|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, \hat{u}_h|_{K_*} \in \mathbb{P}_k(K_*), \forall K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*, \hat{u}_h(\mathbf{0}) = 0, u_h = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

Remarquons que cet espace dépend principalement par :

- Le choix de sous-domaines Ω_0 et Ω_∞ , en particulier, il dépend de la taille R de sous-domaine borné Ω_0 .
- Les paramètres du maillage h et μ .
- L'exposant de l'opérateur de transformation $u \mapsto \hat{u}$.
- Le degré $k \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.2. *Pour $\theta > 0$, on*

$$W_h(\Omega) \hookrightarrow W_{\log}^1(\Omega)$$

Par conséquence, le problème approché correspondance du problème (2.1) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h(\Omega), \text{ tels que :} \\ \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h) \quad \forall v_h \in W_h(\Omega) \end{cases} \quad (2.4)$$

ce problème admet une solution unique u_h dans W_h .

2.5 Estimation d'erreur

Théorème 2.1. *Si $u_h \in W_h$ la solution unique du problème discret. Supposons que $u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$ et*

$$\forall |\lambda| \leq k+1, \quad \|(\partial^\lambda u)(|x|, \cdot)\|_{L^2(S^1)} \leq \frac{C}{|x|^{\theta+|\lambda|}} \text{ pour } |x| \geq R \quad (2.5)$$

pour deux constantes $C > 0$ et $R > 0$. Alors, pour tout nombre réel ϵ tel que $0 < \epsilon < \min(1, \theta)$, il existe une constante $C_\epsilon > 0$, ne dépend pas de u et h tel que

$$\|u - u_h\|_{W_{\log^1}(\Omega)} \leq C_\epsilon \left(h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega_\infty)} \right) \quad (2.6)$$

où $\mu_0 = \frac{\theta-\epsilon}{k}$.

Preuve 2.1. *Puisque $u \in W_{\log}^1(\Omega)$ et d'après (2.8), nous avons*

$$u \in W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega),$$

pour chaque $\epsilon > 0$.

Du lemme de C ea, nous avons

$$\|u - u_h\|_{W_{\log^1}(\Omega)} \leq C_0 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{W_{\log^1}(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Comme $W_h \subset W_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_{\log}^1(\Omega)$, nous avons

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C_0 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{W_0^1(\Omega)}. \quad (2.8)$$

Considérons maintenant l'application d'interpolation suivante : $\Pi_h : \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \rightarrow W_h$ qui associe à chacun $v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ l'unique élément $z \in W_h$ satisfaisant

$$\begin{aligned} z|_K &= \pi_K v \quad \text{pour tous } K \in \mathcal{T}_h, \\ \hat{z}|_{K_*} &= \pi_{K_*} \hat{v} \quad \text{pour tous } K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*. \end{aligned}$$

où

- pour $K \in \mathcal{T}_h$ ou $K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*$, π_K désigne le local \mathbb{P}_k opérateur d'interpolation dans K ,
- pour $K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h \setminus \tilde{\mathcal{T}}_h^*$ (c'est, $a_0 \in K_*$), π_{K_*} désigne le local \mathring{P}_k opérateur d'interpolation dans K_* , avec $\mathring{P}_k = \{p \in \mathbb{P}_k \mid p(a_0) = 0\}$.

Il est prouvé dans [8] (voir théorème 1) que

$$\|u - \Pi_h u\|_{W_0^1(\Omega)} \leq C_0 h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + h^{k \min(1, \mu_0/\mu)} \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega_\infty)}.$$

Alors, on obtient :

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C_\epsilon \left(h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega_\infty)} \right) \quad (2.9)$$

CHAPITRE 3

Tests numériques

Chapitre 3

Tests numériques

3.1 Implémentation de la méthode

Notre objectif dans cette partie est de fournir quelques précisions concernant le système linéaire dérivé du système discret (2.5).

Nous présentons d'abord une base de l'espace W_h . Soit $(x_i)_{1 \leq i \in J_1}$ (resp. $(x_{*,i})_{i \in J_3}$) être les nœuds du maillage \mathcal{T}_h (resp. $\tilde{\mathcal{T}}_h^*$). Certains nœuds sont communs à Ω_* et Ω_∞ . Nous fixons

- $J_1 = \{i \in J_1 \mid x_i \in \bar{\Omega}_\infty \cap \bar{\Omega}_0\} = \{i \in J_1 \mid x_i \in \partial\Omega_*\}$,
- $J_2 = \{i \in J_1 \mid x_i \in \partial\Omega\}$
- $J_3 = \{i \in J_3 \mid x_{*,i} \in \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty\} = \{i \in J_3 \mid x_{*,i} \in \partial\Omega_*\}$.

Comme les triangulations \mathcal{T} et \mathcal{T}^* partagent les mêmes nœuds sur leur frontière commune $\partial\Omega_* \cap \partial\Omega_\infty = \partial\Omega_\infty \cap \partial\Omega_0$, nous avons

$$\{x_i \mid i \in J_1\} = \{x_{*,i} \mid i \in J_3\} \quad (3.1)$$

On définit $w_i, i \in J_1$, comme l'unique fonction de W_h vérifiant

$$w_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{pour tous } j \in J_1, \quad \hat{w}_i(x_{*,j}) = 0 \quad \text{pour tous } j \in J_3 \setminus \partial J_3.$$

Il s'ensuit que $w_i = 0$ dans $\bar{\Omega}_\infty = \Phi(\bar{\Omega}_*)$ pour $i \notin J_1$, et $w_i = 0$ sur $\partial\Omega$ pour $i \notin J_2$.

On définit aussi $w_i^*, i \in J_3$, comme fonction unique de W_h satisfaisant

$$w_i^*(x_j) = 0 \quad \text{pour tous } j \in J_1 \setminus \partial J_1, \quad \hat{w}_i^*(x_{*,j}) = \delta_{i,j} \quad \text{pour tous } j \in J_3.$$

On a $w_i^* = 0$ dans $\bar{\Omega}_0$ pour $i \notin J_3$. De plus, au vu de (3.1), on a

$$\{w_i \mid i \in J_1\} = \{w_i^* \mid i \in J_3\}.$$

La famille $\{w_i \mid i \in J_1 \setminus J_2\} \cup \{w_i^* \mid i \in J_3 \setminus \partial J_3\}$ est une base de W_h et chaque fonction $v_h \in W_h$ peut se décomposer sous la forme

$$v_h(x) = \sum_{i \in J_1 \setminus J_2} v_h(x_i) w_i(x) + \sum_{i \in J_3 \setminus \partial J_3} \hat{v}_h(x_{*,i}) w_i^*(x_*), \quad \text{pour } x \in \Omega$$

À présent, nous allons expliquer comment calculer les intégrales présentes dans (2.5). introduit la famille $(\psi_i)_{1 \leq i \leq DOF}$ des fonctions qui sont définies par

$$\begin{cases} \psi_{ik} = w_i & , k \in \mathcal{T}_h, \\ \psi_{ik} = w_i^* & , k \in \hat{\mathcal{T}}_h. \end{cases}$$

Alors, pour tout $u_h \in W_h$, u_h est décomposé de la forme suivante

$$u(x) = \sum_{i=1}^{DOF} u_i \psi_i$$

où les coefficients u_i sont donnés par

$$u_i = \begin{cases} u_h(x_i) & \text{si } x_i \in K \text{ pour quelque } K \subset \Omega_0, \\ \hat{u}_h(x_{*,i}) & \text{si } x_{*,i} \in K \text{ pour quelque } K \subset \Omega_*. \end{cases}$$

Alors, le problème discret (2.5) est équivalent au système linéaire

$$Au = b$$

avec $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq DOF}$ tels que $A_{i,j} = a(\psi_j, \psi_i)$, $b_i = l(\psi_i)$ et u est inconnu, ses composants sont les coefficients u_i .

Les coefficients de la matrice A s'écrivent

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_{\mathbb{R}_+^2} a(\psi_i(x)) [\nabla \psi_i]^t \nabla \psi_j d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}_+^2} b(x) \cdot \nabla \psi_i \psi_j d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}_+^2} c(x) \psi_i \psi_j d\mathbf{x} \\ &= I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} \end{aligned}$$

$a(x)$ est une scalarie avec $a(\psi_i(x)) = (a_{i,j})_{i,j}$ est une matrice de dimension $n \times n$.

On commence par le premier intégrale $I^{(1)}$ qui est décomposé comme suit

$$I^{(1)} = \int_{\Omega_0} a(\psi_i(x)) [\nabla \psi_i]^t \nabla \psi_j dx + \sum_{m=1}^4 \int_{T_m} a(\psi_i(x)) [\nabla \psi_i]^t \nabla \psi_j d\mathbf{x}$$

Il est possible de calculer facilement le premier terme de cette expression de la même manière que dans la méthode classique des éléments finis. Le calcul du deuxième terme se fait de la manière suivante

$$\int_{T_m} a(\psi_i(x)) [\nabla \psi_i]^t \nabla \psi_j d\mathbf{x} = \sum_{K \subset S_m} \int_{\phi(K)} a(\psi_i(x)) [\nabla \psi_i]^t \nabla \psi_j d\mathbf{x}.$$

Pour tout i , on note

$$\tilde{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) = \psi_i(F_m(\boldsymbol{\xi})), \text{ avec } \boldsymbol{x} = F_m(\boldsymbol{\xi})$$

où F_m la transformation affine est une transformation qui permet de transformer le simplexe de référence infini \hat{T} en T_m et le simplexe de référence fini \hat{S} en S_m . Conformément à la règle de dérivation en chaîne, on a

$$\nabla \psi_i(\boldsymbol{x}) = B_m^{-t} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_i(\boldsymbol{\xi})$$

Alors

$$\int_{\phi(K)} a(\psi_i(x)) [\nabla \psi_i]^t \nabla \psi_j dx = |\det B_m| \int_{F_m^{-1}a(\psi_i(x)) \circ \phi(K)} \left[\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_i \right]^t B_m^{-1}(F_m(\boldsymbol{\xi})) B_m^{-t} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_j d\boldsymbol{\xi}$$

Maintenant, on pose $\hat{\psi}_l(\hat{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\psi}_l(\hat{\phi}(\hat{\boldsymbol{x}}))$ pour $l = i$ ou $l = j$ avec $\boldsymbol{\xi} = \hat{\phi}(\hat{\boldsymbol{x}})$ où $\hat{\phi}$ est l'inversion associée à \hat{T} qui est définie par

$$\hat{\phi}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{r(\hat{\boldsymbol{x}})^2}, \text{ avec } r(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3$$

Ainsi, en appliquant la règle de dérivation en chaîne, on a

$$\left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_l \right) \circ \hat{\phi}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \left[j_{\boldsymbol{\xi}} \left(\hat{\phi}^{-1} \right) \circ \hat{\phi}(\hat{\boldsymbol{x}}) \right] \nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{\psi}_l(\hat{\boldsymbol{x}})$$

où $j_{\boldsymbol{\xi}} \left(\hat{\phi}^{-1} \right) = \left(\frac{\partial \hat{\phi}_j^{-1}}{\partial \xi_i} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$ est la matrice Jacobienne de $\hat{\phi}^{-1}$. De la définition de $\hat{\phi}$, nous déduisons que $\hat{\phi}^{-1} = \hat{\phi}$ et

$$j_{\boldsymbol{\xi}} \left(\hat{\phi}^{-1} \right) \circ \hat{\phi}(\hat{\boldsymbol{x}}) = r(\hat{\boldsymbol{x}})^2 (I - 2c\hat{\boldsymbol{x}}_*^t),$$

où $c = (1, 1, 1)^t$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_*^t = \frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{r(\hat{\boldsymbol{x}})}$. Ainsi, $\det \left(j_{\boldsymbol{\xi}} \left(\hat{\phi}^{-1} \right) \right) = r(\hat{\boldsymbol{x}})^{-6}$ (voir Lemme 1, [8]). Alors

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_l(\boldsymbol{\xi}) = r(\hat{\boldsymbol{x}})^2 (I - 2c\hat{\boldsymbol{x}}_*^t) \cdot \nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{\psi}_l(\hat{\boldsymbol{x}})$$

Pour chaque tétraèdre $K \subset S_m$, on a

$$\begin{aligned} \int_{F_m^{-1} \circ \phi(K)} a(\psi_i(x)) \left[\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_i \right]^t \cdot B_m^{-1}(F_m(\boldsymbol{\xi})) B_m^{-t} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_j d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\hat{\phi}^{-1} \circ F_m^{-1} \circ \phi(K)} \left\{ r(\hat{\boldsymbol{x}})^4 \mid \det j_{\boldsymbol{\xi}} \left(\hat{\phi}^{-1} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \mid \left[\nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{\psi}_i \right]^t (I - 2\hat{\boldsymbol{x}}_* \cdot c^t) B_m^{-1} x (F_m \circ \phi(\hat{\boldsymbol{x}})) \times \right. \\ &\quad \left. B_m^{-t} (I - 2c\hat{\boldsymbol{x}}_*^t) \nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{\psi}_j \right\} d\hat{\boldsymbol{x}} \\ &= \int_{F_m^{-1}(K)} r(\hat{\boldsymbol{x}})^{-2} \left[\nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{\psi}_i \right]^t A'(\hat{\boldsymbol{x}}_*) \nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{\psi}_j d\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

avec

$$A'(\hat{\mathbf{x}}_*) = (I - 2\hat{\mathbf{x}}_* \cdot \mathbf{c}^t) B_m^{-1} \cdot a(\psi_i(\mathbf{x})) (F_m \circ \phi(\hat{\mathbf{x}})) B_m^{-t} (I - 2c\hat{\mathbf{x}}_*^t)$$

et $\hat{\phi}^{-1} \circ F_m^{-1} \circ \phi = F_m^{-1}$ (voir Lemme 2 dans [8]). Les calculs sont effectués en utilisant une formule de quadrature.

De manière similaire, on peut calculer les autres intégrales.

$$\begin{aligned} \int_{\phi(K)} b(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= |\det B_m| \int_{F_m^{-1} \circ \phi(K)} b(F_m(\boldsymbol{\xi})) \cdot B_m^t \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\psi}_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= |\det B_m| \int_{F_m^{-1}(K)} r(\hat{\mathbf{x}})^{-4} b(F_m \circ \hat{\phi}) B_m^{-t} (I - 2c\hat{\mathbf{x}}_*^t) \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\psi}_i(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\psi}_j(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\phi(K)} c(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= |\det B_m| \int_{F_m^{-1} \circ \phi(K)} c(F_m(\boldsymbol{\xi})) \tilde{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\psi}_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= |\det B_m| \int_{F_m^{-1}(K)} r(\hat{\mathbf{x}})^{-6} c(F_m \circ \hat{\phi}) \hat{\psi}_i(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\psi}_j(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

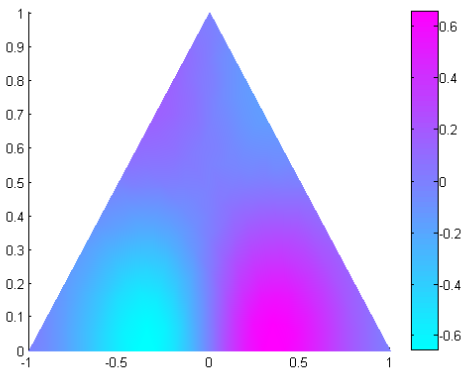
Exemple 3.1. On considère le problème suivant :

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

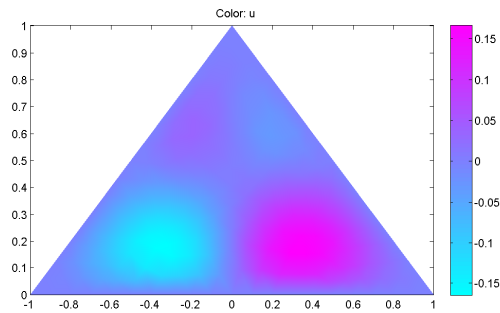
où f est choisi tel que la solution exacte soit donnée par

$$u(x, y) = \frac{\sin(\pi x) \cos(\pi y)}{(x^2 + y^2 + 1)^{5/2}}. \quad (3.2)$$

Observez que $u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$.



(a) Solution exacte dans Ω_0



(b) Solution approchée dans Ω_0

CONCLUSION

Nous avons examiné dans cette étude la résolution des équations elliptiques du second ordre posées dans un demi-espace en utilisant la méthode des éléments finis inversés. Cette méthode s'est avérée particulièrement efficace pour résoudre des problèmes elliptiques posés dans des domaines non bornés, sans avoir à imposer une frontière artificielle.

Bibliographie

- [1] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 46 :227–272, 1971.
- [2] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroier. Weighted Sobolev spaces for the Laplace equation in \mathbb{R}^3 *J. Math. Pures et Appliquées* 20 : 579-606, 1994.
- [3] Frédéric Alliot and Chérif Amrouche. Problème de Stokes dans n et espaces de Sobolev avec poids. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(12) :1247– 1252, 1997.
- [4] Haim Brezis and Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.
- [5] Hervé Le Dret. *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*, volume 72. Springer, 2013.
- [6] Keltoum Kaliche. *Méthode des éléments finis inversés pour des domaines non bornés*. PhD thesis, Université Paris-Saclay (ComUE), 2016.
- [7] P. D. Lax and A. N. Milgram. Parabolic equations. In *Contributions to the theory of partial differential equations*, *Annals of Mathematics Studies*, no. 33, pp. 167-190. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1954.
- [8] Samir Kumar Bhowmik, Rabah Belbaki, Tahar Zamene Boulmezaoud, and Samy Mziou. Solving two dimensional second order elliptic equations in exterior domains using the inverted finite elements method. *Computers Mathematics with Applications*, 72(9) :2315– 2333, 2016.
- [9] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problem in unbounded domains. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(1) :109–145, 2005.
- [10] T. Z. Boulmezaoud, B. Boudjedaa, S. Mziou, and M. M. Babatin. Approximation of singular and radial elliptic problems in unbounded domains. *Journal of Scientific Computing*, 32(1) : 237–261, 2015.

- [11] T. Z. Boulmezaoud, S. Mziou, and T. Boudjedaa. Numerical approximation of second-order elliptic problems in unbounded domains,. *Journal of Scientific Computing*, 60(2) : 295-312, 2014.
- [12] Vincent Manet. *Méthode des éléments finis : vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode*. 2018.

ملخص:

طريقة العناصر المنتهية المقلوبة هي طريقة عددية تم تقديمها لحل المعادلات التفاضلية الجزئية على مجالات غير محدودة. الهدف من هذا العمل هو تحليل و تنفيذ هذه الطريقة لحل معادلة إهليلجية من الدرجة الثانية مطروحة على نصف فضاء \mathbb{R}_+^2 دون فرض حدود إصطناعية. يحتوي العمل على نتائج النظرية المتعلقة باستخدام فضاءات سوبوليف المرجحة كإطار وظيفي. كما يتضمن أيضا بعض النتائج العددية.

الكلمات المفتاحية:

طريقة العناصر المنتهية المقلوبة، المجالات غير محدودة، المعادلة الإهليلجية، فضاءات سوبوليف المرجحة .

Abstract :

The method of inverse finite elements is a numerical method that has been introduced to solve partial differential equations on unbounded domains. The aim of this work is to analyze and implement this method to solve a second order elliptic equation posed in a half- space \mathbb{R}_+^2 without imposing any artificial boundary. This work contains theoretical results related to the use of weighted Sobolev spaces as a functional framework. It also includes some numerical results.

Keywords:

Inverted finite elements method, unbounded domains, elliptic equation, weighted Sobolev spaces.

Résumé :

La méthode des éléments finis inversés est une méthode numérique qui a été introduite pour résoudre des équations aux dérivées partielles sur des domaines non bornés. L'objectif de ce travail est d'analyser et de mettre en œuvre cette méthode pour résoudre une équation elliptique du second ordre posée en un demi-espace \mathbb{R}_+^2 . Ce travail contient des résultats théoriques liés à l'utilisation d'espaces de Sobolev à poids comme cadre fonctionnel. Il inclut aussi quelques résultats numériques.

Mots clés :

Méthode des éléments finis inversés, domaines non bornés, équation elliptique, espaces de Sobolev à poids.