UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER(2022-2023)

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Laibi Sabah

Thème

Equation de Schrodinger non linéaire sur $\mathbb{R}^n$

Soutenu publiquement le : 22 /06 /2023

Devant le jury composé de :

Dr. AMARA Abd Elkader	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Dr. KOUIDRI Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Dr.AGTI Mohamed	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Année universitaire : 2022/2023

Dédicaces

Dédie ce modeste travaille à **ma chére mére**.

A **mon cher pére** qui m'ont toujours soutenu

Qui m'ont aide à affronter les difficultés

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseilles, leurs patience, leur persévérance

A mes trés chéres soeurs et mes fréres.

A toute ma famille speciellement.

A tous les amis : **Samira , Amira , Mebarka , Sara**.

A tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla. A tous.

LAIBI SABAH

REMERCIEMENT

En premier lieu, je tient a témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail.

Je tient a exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire ,**Dr : AGTI Mohamed**, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Je remercie sincérement les membres du jury :

Dr :AMARA Abd Elkader, d'avoir accepté la président du jury.

Aussi je remercier :**Dr : KOUIDRI Mohamed**, d'avoir accepté l'examinateur de ce travail.

Il est important pour moi de remarcier ma famille **mon pére, ma mére, mes fréres et mes soeurs**, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de KASDI Merbah-Ouargla.

MERCI BEAUCOUP

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$:L'ensemble des *nombres* non négatifs.

X : Espace de Banach.

$\|.\|$: La norme.

Δ : opérateur de Laplacien.

∇ : opérateur gradient.

B(E):L'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X.

$H_0^1(\Omega)$: Noyau de l'opérateur linéaire trace.

$L^2(\Omega)$: Espace de la fonction d'intégral au carré.

A : *Operateur.*

$D(A)$: Le demaine de A .

$(\mathrm{T(t)})_{t\geq 0}$: Semigroupe à un paramétre d'opérateurs linéaires.

$SG(M,\omega)$: L'ensemble des C_0-semi-groupes $(T(t))_{t\geq 0} \subset B(X)$.

$\hookrightarrow$: Injection.

INTRODUCTION

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la physique quantique, comme l'est la loi de Newton en physique classique. On la retrouve pour décrire des phénoménes assez variés que ce soit dans l'optique quantique (propagation d'un faisceau de laser), la physique atomique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (semiconducteurs, transistors, mémoires), la physique des plasmas, l'astrophysique, la microscopie électronique, la neutronique, la chimie ou encore la biologie, ...

Comme exemple, on va regarder la description du transport électronique dans des dispositifs semiconducteurs de taille nanométrique (MOSFET, RTD, guides d'onde,...).
Ces dispositifs sont les composants essentiels de l'industrie électronique d'aujourd'hui.
En raison de leur petite taille, atteignant des échelles nanométriques, des effets quantiques commencent à jouer un rôle important, comme l'effet tunnel, les interférences, la quantification, etc. Les modéles classiques (équation de Newton entre autres) ne sont plus valables et l'approche quantique (équation de Schrödinger) devient nécessaire.

Dans ce mémoire nous discutons L'équation de Schrödinger non linéaire, en fonction des données initiales, l'objectif de notre travail est d'examiner certaines caractéristiques d'une chaîne hamogéne d'oscillateurs NLS, qui est une chaîne de pendules réduite a une chaîne de Schrödinger non linéaire.
Nous considérons le systéme :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f(u) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suite :
le premier chapitre : nous avons données des difinitions et résultats généraux sur les systémes dynamiques discret ainsi que la stabilité des point fixe, des orbites périodiques, en outre les orbites homocliniques, orbites hétérocycliques , connexion homoclines et hétroclines.
le deuxiéme chapitre : nous rappelons quelques détails sur l'équation de Schrödinger non linéaire discret avec quelque modéle , en suite on présent les orbites homocliniques et solution localisées pour un systéme de (DNLS), symétrie par inversion du temps dans les systémes dynamiques et difféomorphismes réversibles.
le troisiéme chapitre : nous avons fait une étude pratique pour un modéle d'une équation de Schrödinger discréte non linéaire et nous discutons l'existance des stractures homoclines.
Enfin, notre thése se termine par une conclusion générale qui récapitule nos travaux et les résultats obtenus tous en suggérant déventuelles perspective et travaux futurs.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre nous rappellons quelques définitions et proprietés concernant les semi-groupes et les espaces de Sobolev.

1.1 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les puissances et les dérivées sont des intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont complets qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

1.1.1 Espace $\mathbf{H}^m(\Omega)$,$W^{m,p}(\Omega)$:

Définition 1.1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit les espaces de Sobolev suivant :*
$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ *tel que ;* $D_i u \in L^2(\Omega)$ *, pour tout* $i = 1, ..., N\}$.
Pour $m \in \mathbb{N}$ *;*
$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ *tel que* $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *pour tout ;* $|\alpha| \leq m\}$.

Définition 1.1.2 *Pour tout* $p \in [1, \infty]$ *, on définit l'éspace de sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *par :*

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *tel que* $|\alpha| \leq m$ $\}$.

On définit l'éspace de sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ *par :*

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, ..., n\}$,

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *désigne la dérivée partielle de u dans la direction* x_i *au sens des distributions.*

L'éspace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme ;*

$\|u\|_{W^{1,p}}(\Omega) = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{(L^p(\Omega))^n})^{1/p}$

pour $p \neq \infty$, *et*

$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max\limits_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Pour $p = +\infty$.

Définition 1.1.3 *Dans le cas* $p = 2$, *on note :*

$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., n\}$,

muni du produit scalaire :

$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}$

$=(u,v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{(L^2(\Omega))^n}$,

et de la norme associée :

$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^n})^{1/2}$.

Définition 1.1.4 *(Espace* $H_0^1(\Omega)$*)*

On appelle $H_0^1(\Omega)$ *l'adhérence de* C_c^∞ *dans* $H^1(\Omega)$, *ce qu'on note aussi :*$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty}^{H^1(\Omega)}$.

Pour $m > 0$ *et* $1 \leq p < +\infty$ *,on définit le sous espace* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *de* $W^{m,p}(\Omega)$ *comme l'adhérence de* C_c^∞ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$ *:*

$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$.

On remarquera facilement que si $\Omega = \mathbb{R}^N$, *on a* $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ *alors que, comme on l'a dit précédemment, l'inclusion est stricte si* Ω *est un ouvert borné.*

Proposition 1.1.5 *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$, *aussi l'espace* $H^1(\Omega)$ *muni du produit scalaire, est un espace de Hilbert séparable.*

1.1.2 Espace $L^p(\Omega)$:

Définition 1.1.6 *Soient (X, T, x) un espace mesuré,$1 \leq p < +\infty$ est f une fonction défine de X dans $\mathbb{R}$, mesurable.*
On dit que $f \in L^p(X, T, m) = L^p_{\mathbb{R}}(X, T, x)$ si $\int |f|^p dx < +\infty$.On pose alors :
$\|f\|_p = (\int |f|^p dx)^{1/p}$.
On dit que $f \notin L^p(X, T, m)$ si $\int |f|^p dx = \infty$ et on pose alors $\|f\|_p = +\infty$.

Proposition 1.1.7 *Soient (X, T, x) un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$. Alors :*
1. $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, x)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X, T, x)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.2 Semi-groupes

Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont la norme sera notée $\|.\|$. On note $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de X dans X. Remarquons que, muni du produit de composition des applications, $\mathcal{L}(X)$ est une algébre dont l'élément unité est l'application identique. Pour cette raison, nous noterons simplement T_1 T_2 le produit de composition $T_1 \circ T_2$ des eléments T_1,T_2 de $\mathcal{L}(X)$, et 1 l'application identique. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, nous noterons
$\|T\| = \sup\limits_{\|u\| \leq} \|Tu\|$ la norme sur $\mathcal{L}(X)$, qui en fait un espace de Banach. On vérifie aisément l'inégalité

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$$

pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X)$. On traduit l'ensemble de ces propriétés en disant que $(\mathcal{L}(X), \|.\|)$ est une algébre de Banach.

Définition 1.2.1 *(semi-groupe)*
Soit X un espace de Banach sur le corps $\mathbb{C}$ et soit $B(X)$ l'algébre de Banach des opérateurs linéaire bornés sur X.

La famille $(T(t))_{t\geq 0} \subset B(X)$ est appelée semi-groupe si :
i) T(0)=I (I l'élement unité d'algèbre B(X))
ii) $T(s+t) = T(s) \cdot T(t)$; $\forall\ t\ ,\ s \in \mathbb{R}_+$

Exemple :

Soit :
$C[0,+\infty[= f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, avec la norme $\|f\|_{C[0,+\infty[} = \sup\limits_{\alpha\in[0,+\infty[} |f(\alpha)|$, l'espace $C[0,+\infty[$ devient un espace de Banach. Définissons :
$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha)$, $\forall t \geq 0$ et $\alpha \in [0,+\infty[$.
Evidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :
i) $(T(0)f)(\alpha) = f(0+\alpha) = f(\alpha)$.
Donc T(0) = I.
ii) $(T(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha)$
$= (T(t)f)(s+\alpha)$
$= (T(t)T(s)f)(\alpha), \forall f \in C[0,+\infty[$.
Donc $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t,s \geq 0$.
Alors la famille $T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe.

1.2.1 Semi-groupe fortement continue :

Définition 1.2.2 *On dit que le C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformement borné s'il existe $M \geq 1$ tel que ; $\forall\ t \geq 0$;*

$$\|T(t)\| \leq M$$

Définition 1.2.3 *Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelée semi-groupe fortement continue et noté C_0-semi-groupesil'application :*
$t \longmapsto T(t)$ est continue pour le topologie forte d'opérateurs sur B(X) c'est-a-dire :
pour tout $f \in X$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)\cdot f - T(t_0)\cdot f\| = 0$$

Définition 1.2.4 *On appelle type d'un semi-groupe fortement continue $(T(t))_{t\geq 0}$, le nombre ;*

$$\omega_0 = \inf\{\omega \in \mathbb{R};\ \textit{il existe } M_\omega \in \mathbb{R}_+ \textit{telque} \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t},\ \textit{pour } t \geq 0\}$$

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|$$

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|.$$

Théorème 1.2.5 *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continue d'opérateurs linéaire bornés alors il existe $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $M \geq$ 1 tel que ;*

$\forall\ t \geq$ 0;

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Lemme 1.2.6 *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors :*

$\forall\ x \in X$, $\forall\ t \geq$ 0;

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x = T(t)x$$

Théorème 1.2.7 *(L'unicité de l'engendrement) :*

Soit deux semi-groupes $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ ayont pour générateur infinitésimale le même opérateur A. Alors :

$\forall\ t \geq$ 0;

$$T(t) = S(t)$$

Remarque 1.2.8 *On note par $S.G(M,\omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes $(T(t))_{t\geq 0} \in B(X)$,pour les quels il existe $\omega \geq$ 0 et $M \geq$ 1 tel que :*

$\forall\ t \geq$ 0;

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Corollaire 1.2.9 *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe,alors l'application :*

$$[0, +\infty[\to X$$

$$t \mapsto T(t).x$$

est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, quelque soit $x \in X$.

1.2.2 Le générateur infinitésimale :

Définition 1.2.10 *L'opérateur linéaire A définie par :*

$$D(A) = \{x \in X; \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe } \}$$

et

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) \cdot x - x}{t} = \frac{dT(t) \cdot x}{dt} \,|_{t=0}; \text{ pour tout } x \in X$$

est le générateur infinitésimale du semi-groupe $T(t)$, $D(A)$ et le domaine de A.

Proposition 1.2.11 .

Soient $(T(t))_{t \geq 0} \in S.G(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimale .Si $x \in D(A)$ alors :

$$T(t)x \in D(A)T(t)Ax = AT(t)x; \forall t \geq 0.$$

et on a l'égalité :

$$T(t)Ax = AT(t)x; \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.2.12 *Soient $(T(t))_{t \geq 0} \in S.G(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimale. Si $x \in A$, alors l'application :*

$$[0, +\infty[\to X$$

$$t \mapsto T(t).X$$

est d'érivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ pour tout $x \in D(A)$ et on a :

i) $\frac{dT(t)x}{dt} = T(t)Ax = AT(t)x \; , \forall \; t \geq 0.$

ii)$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds, \forall \; t \geq 0.$

Proposition 1.2.13 *Soient $(T(t))_{t \geq 0} \in S.G(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimale. Si ; $x \in A$, alors :*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$

et

$$\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.2.14 *Soient* $(T(t))_{t\geq 0} \in S.G(M,\omega)$ *et A son générateur infinitésimale, alors :*

$$\begin{cases} i)\ \overline{D(A)} = X \\ ii)\ A \text{ est un opérateur fermé.} \end{cases}$$

1.2.3 Semi-groupe adjoint , auto adjoint et anti-adjoint :

Définition 1.2.15 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné dans X, de domaine dense dans X. On appelle adjoint de A l'opérateur* $(A^*, D(A^*))$ *défini par :*
$D(A^*) = \{y \in X' ; \exists\ c \geq 0 \text{ tel que } \langle\ Ax,y\ \rangle_{E,E'} \leq c\ \|x\| \text{ pour tout } x \in D(A)\}$
et
$\langle\ x,A^*y\rangle_{X,X'} = \langle\ Ax,y\ \rangle_{X,X'}$ *pour tout* $x \in D(A)$ *et tout* $y \in D(A^*)$.

Définition 1.2.16 *Un opérateur linéaire non borné* $(A, D(A))$, *de domaine dense dans X est dit auto-adjoint si*

$$A = A^* \Leftrightarrow \begin{cases} D(A) = D(A^*) \\ Ax = A^*x, \forall x \in D(A) \end{cases}$$

Il est dit anti-adjoint si

$$A = -A^* \Leftrightarrow \begin{cases} D(A) = D(A^*) \\ Ax = -A^*x, \forall x \in D(A) \end{cases}$$

Théorème 1.2.17 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X.*
Si X est un espace réflexif et A est fermé alors $D(A^*)$ *est dense dans* X'.

Lemme 1.2.18 *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $T(t)_{t\geq 0}$ *de classe* C^0 *et soit* A^* *l'adjoint de A.* A^* *est fermé de domaine* $D(A^*)$ *dense dans X. De plus,* A^* *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $(T^*(t))_{t\geq 0}$ *de classe* C^0 *où* $T^*(t)$ *est l'adjoint de* $T(t)$ *pour tout* $t \geq 0$.

Théorème 1.2.19 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X.*
Si X est réflexif et si A est m-dissipatif alors, $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu sur X , ayant* $(A^*, D(A^*))$ *comme générateur infinitésimal.*

1.2.4 Théoréme de Hille Yossida :

Théorème 1.2.20 *Un opérateur linéaire*

$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$

est le générateur infinitésimale d'un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0} \in S.G(M,\omega)$ *si et seulement si :*

i) A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$.

ii) il existe $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a :*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n}; \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

1.3 Opérateurs m-dissipatifs

1.3.1 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Banach :

Dans cette section nous supposons que X est un espace de Banach.

Définition 1.3.1 *Un opérateur linéaire non-borné* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *est dissipatif si :*
$\forall\ x \in D(A), \forall\ \lambda > 0$

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$$

Définition 1.3.2 *Un opérateur linéaire non-borné* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *est m-dissipatif s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) A *est un opérateur dissipatif.*

(ii) $\forall\ f \in X, \forall\ \lambda > 0, \exists\ u \in D(A) : \lambda\, u - Au = f$.

Théorème 1.3.3 *Si* A *est m-dissipatif alors, pour tout* $\lambda > 0$*, l'opérateur* $(\lambda I - A)$ *admet un inverse,* $(\lambda I - A)^{-1} f$ *appartient à* $D(A)$ *pour tout* $f \in X$*, et* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est un opérateur linéaire borné sur* X *vérifiant :*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Théorème 1.3.4 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné dissipatif dans X.*
L'opérateur A est m-dissipatif si et seulement si
$\exists\ \lambda_0 > 0$ *tel que* $\forall\ f \in X$, $\exists\ x \in D(A)$ *verifier :*

$$\lambda_0 x - Ax = f$$

Théorème 1.3.5 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur non borné dans X. S'il existe* $\lambda_0 > 0$ *pour lequel l'opérateur* $(\lambda_0 I$ - $A)$ *est une bijection de* $D(A)$ *sur X, et si* $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ *est un opérateur borné sur X, alors A est fermé.*
En particulier, si A est m-dissipatif alors A est fermé.

Définition 1.3.6 *Soit A un opérateur m-dissipatif dans X. La famille d'opérateurs* $R(\lambda; A)$, $\lambda > 0$, *définie par* $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *est appelée résolvante de A.*
L'opérateur $A_\lambda = \lambda A R(\lambda; A)$ *est appelée 'approximation de Yosida' de A.*

Théorème 1.3.7 *Soit A un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X. Alors, pour tout* $x \in X$ *:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = 0$$

De plus ,pour tout $x \in D(A)$ *:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|A_\lambda x - Ax\| = 0$$

Théorème 1.3.8 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur dissipatif et de domaine dense dans X. Si A est fermé et* A^* *est dissipatif alors A est m-dissipatif.*

Corollaire 1.3.9 *Soit A un opérateur m-dissipatif. L'espace* $(D(A), \|.\|_{D(A)})$ *est un espace de Banach et* $A\backslash_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A); X)$.

1.3.2 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert :

Dans cette section nous supposons que E est un espace de Hilbert.

Théorème 1.3.10 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans E, est dissipatif si et seulement si :*
$\forall\ x \in$ *D(A) :*

$$A(x, x) \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par $\forall$ $x \in$ *D(A) :*

$$Re(Ax, x) \leq 0$$

Théorème 1.3.11 *Si A est m-dissipatif alors $D(A)$ est dense dans E.*

Théorème 1.3.12 *Soit A un opérateur dissipatif et de domaine dense dans E. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.*

Exemple :

• Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On pose maintenant $E = C_0(\Omega)$ et on définit l'opérateur A par :

$$D(A) = \{u \in X \cap H_0^1(\Omega), \Delta u \in E\}$$

$$Au = \Delta u, \text{ pour } u \in D(A)$$

Alors si la frontiére de Ω est lipshitzienne, l'opérateur A est m-dissipatif dans E.

1.4 Semi-groupe de contractions

Définition 1.4.1 *Un $C_0 -$ semi $-$ groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est dit contraction si :*
$\forall\ t \geq 0$ *(M = 1,ω = 0) :*

$$\|T(t)\| \leq 1$$

Théorème 1.4.2 *Un opérateur linéaire non borné (A, D(A)) dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) A est fermé.
(ii) D(A) est dense dans X.
(iii) pour tout $\lambda > 0$,$(\lambda I - A)$ *est une application bijective de D(A) sur X, et* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est un opérateur borné sur X vérifie :*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Théorème 1.4.3 *Un opérateur linéaire non borné (A, D(A)) dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si A est m-dissipatif et de domaine dense dans X.*

Théorème 1.4.4 *(théoréme de stone)*
Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ *un groupe d'opérateurs unitaires, de classe* C^0 *dans X et A son générateur infinitésimal. Alors il existe un opérateur H auto-adjoint tel que :*

$$A = iH$$

La réciproque de ce théoréme est :

Théorème 1.4.5 *Soit A un opérateur fermé, non-borné de domaine D(A) dense dans X, tel que* $A = iH$ *avec H un opérateur auto-adjoint. Alors A est le générateur infinitésimal dun groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *d'opérateurs unitaires, de classe* C^0.

Chapitre 2

Résolution de l'équation de Schrödinger non linéaire (existence locale,existence globale)

Dans ce chapitre nous serons consacré à l'étude de léquation de Schrödinger non linéaire dans $\mathbb{R}^n$.On se placera dans des espaces d'énergie appropriés pour démontrer un résultat d'existance locale. Des estimations d'énergie permetteront par la suite de démontrer le résultat d'existance globale.

2.1 Equations non homogénes et problémes semi lineaire

2.1.1 Equations non homogénes :

On suppose que X est un espace de Banach et $(A, D(A))$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X, on note $(T(t))_{t\geq 0}$ le semigroupe de contraction engendré par l'opérateur A.

Soient maintenant $T > 0$, x $\in$ X et f :$[0, T] \longrightarrow$ X on veut résoudre le probléme suivante :

$$\begin{cases} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X) \\ u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,T] \\ u(0) = x \end{cases} \tag{2.1}$$

Lemme 2.1.1 *Soit $x \in D(A)$ et soit $f \in C([0,T], X)$, on considére la solution $u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)$ de probléme précédent 2.1. Alors on a :*

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(s)ds \text{ pour } t \in [0,T] \tag{2.2}$$

Preuve. Soit t $\in [0, T]$, on pose :

$$\omega(s) = \mathcal{T}(t-s)u(s)$$

pour s $\in [0, t]$. Soit s $\in [0, t]$ et h $\in [0, t-s]$. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\omega(s+h) - \omega(s)}{h} &= \lim_{h \to 0} \mathcal{T}(t-s-h)\{\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{\mathcal{T}(h) - I}{h}u(s)\} \\ &= \mathcal{T}(t-s)\{u'(s) - Au(s)\} = \mathcal{T}(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Depuis $\mathcal{T}(t-.)f(.) \in C([0,T], X)$ on en déduit que $\omega \in C^1([0,T], X)$ et ce

$$\omega'(s) = \mathcal{T}(t-s)f(s) \tag{2.3}$$

pour tout s $\in [0, T]$. Intégrer 2.3 entre 0 et $\tau <$ t et en laissant $\tau \longrightarrow$ t, on obtient 2.2.

∎

Corollaire 2.1.2 *Pour tout $x \in D(A)$ et $f \in C([0,T], X)$, le problème 2.1 a au plus une solution.*

Remarque 2.1.3 *Pour tout $x \in E$ et tout $f \in C([0,T], X)$, la formule 2.2 définit une fonction $u \in C([0,T], X)$. Maintenant, nous recherchons des conditions suffisantes pour vous donnée par 2.2 comme étant la solution de 2.1.*

Remarque 2.1.4 *Il est clair que si u est une solution de 2.1, alors $x \in D(A)$. Cependant, cette condition n'est pas suffisante. En effet, supposons que $(\mathcal{T}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe d'isométrie, et soit $y \in E\, D(A)$. Alors, $\mathcal{T}(t)y \notin D(A)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $f(t) = \mathcal{T}(t)y$, et $x = 0 \in D(A)$. Il s'ensuit facilement que 2.2 donne $u(t) = t\mathcal{T}(t)y \notin D(A)$, pour $t \neq 0$.*

Proposition 2.1.5 *Soit $x \in D(A)$ et soit $f \in C([0,T],X)$. Supposons qu'à au moins une des conditions suivantes est satisfaite :*
(i) $f \in L^1([0,T],D(A))$;
(ii) $f \in W^{1,1}([0,T],X)$.
Alors u donné par 2.2 est la solution de 2.1.

Preuve. voir[5]. ■

Lemme 2.1.6 ***(Gronwall) :*** *Soit $T > 0$, $\lambda \in L^1(0,T)$,$\lambda \geq 0$ et C_1, $C_2 > 0$. Soient $\varphi \in L^1(0,T)$, $\varphi > 0$, tels que $\lambda\varphi$ $L^1(0,T)$ et :*

$$\varphi(t) < C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$$

pour presque tout $t \in (0,T)$. Ensuite nous avons :

$$\lambda(t) < C_1 exp(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds)$$

pour presque tout $t \in (0,T)$.

Preuve. voir[5]. ■

Remarque 2.1.7 *En particulier, si $C_1 = 0$, on a $\varphi = 0$.*

2.1.2 Probléme semi-linéaire :

Définition 2.1.8 *Une fonction $F : X \longrightarrow X$ est Lipschitze continue sur bornée sous-ensembles de X fournie que pour tout $M > 0$, il existe une constante $L(M)$ telle que :*

$$\|F(y) - F(x)\| \leq L(M)\|y - x\|, \forall x, y \in B_M$$

où B_M est la boule de centre 0 et de rayon M. Étant donné $x \in X$, on cherche $T > 0$ et une solution u du problème suivante :

$$\begin{cases} u \in C([0,T],D(A)) \cap C^1([0,T],X) \\ u'(t) = Au(t) + F(u(t)), & t \in [0,T] \\ u(0) = x \end{cases} \tag{2.4}$$

On considère aussi une forme faible du problème précédent. En effet, d'après le lemme 2.1.1, tout solution u de 2.4 est aussi solution du problème suivante :

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds, \forall t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

Nous commençons par un résultat d'unicité.

Lemme 2.1.9 *Soit $T > 0$, $x \in X$, et soit u, $v \in C([0,T],X)$ deux solutions de problème 2.5. Alors $u = v$.*

Preuve. On pose M $= \sup\limits_{t\in[0,T]} \max\{\|u(t)\|, \|v(t)\|\}$. On a :

$u(t)$ solution de (2.5) $\Rightarrow u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))$ ds, $\forall$ t $\in [0,T]$.

et

$v(t)$ solution de (2.5) $\Rightarrow v(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(v(s))$ ds, $\forall$ t $\in [0,T]$.

$\|u(t) - v(t)\| = \|\mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds - \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(v(s))ds\|$

$\|u(t) - v(t)\| = \|\mathcal{T}(t)x(1 + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds - 1 + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(v(s)))ds\|$

$\|u(t) - v(t)\| \leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|ds$

de (2.1.8), on a :

$\int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|ds \leq L(M) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds$

donc ;

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|ds \leq L(M) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds$$

et on conclut en utilisant la remarque 2.1.7 .

Soit l'ensemble :

$$T_M = \frac{1}{2L(2M + \|F(0)\|) + 2} > 0,$$

pour M > 0. On peut énoncer un premier résultat d'existence locale.

■

Proposition 2.1.10 *Soit $M > 0$ et soit $x \in X$ tel que $\|x\| < M$. Alors il existe une unique solution $u \in C([0,T_M],E)$ de 2.2 avec $T = T_M$.*

Théorème 2.1.11 *Il existe une fonction $T : E \longrightarrow [0, +\infty]$ avec la formule suivante les propriétés : pour tout $x \in E$, il existe $u \in C([0, T(x)], E)$ tel que pour tout $0 < T < T(x)$, u est l'unique solution de 2.5 dans $C([0, T], X)$. En outre,*

$$2L(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|) \geq \frac{1}{T(x) - t} - 2 \tag{2.6}$$

pour tout $t \in [0, T(x)]$. En particulier, nous avons les alternatives suivantes :
(i) $T(x) = +\infty$;
(ii) $T(x) < +\infty$ et $\lim \|u(t)\|_{t \to T(x)} = \infty$.

Remarque 2.1.12 *Il peut très bien arriver que, pour une même équation, $T(x) < +\infty$ pour certaines données initiales, et $T(x) = +\infty$ pour d'autres. Par exemple, choisissez E = $\mathbb{R}$, A = 0, et F(u) = u^3 - u. Ce choix correspond au différentiel ordinaire équation u' = u^3 - u. Si $|x| \leq 1$ on a $T(x) = +\infty$, et si $|x| > 1$ on a $T(x) < +\infty$. Dans ce dernier cas, 2.6 donne $12|u(t)|^2 \geq (T(x) - t)^{-1}$ - 4. cette estimation décrit bien le phénomène d'explosion, puisque les solutions exploser en $(T(x) - t)^{-\frac{1}{2}}$.*

Définition 2.1.13 ***(Solution forte).*** *u est une solution forte de 2.1 si :*
(i). $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $[0, T]$.
(ii). $u \in C^1(0, T; X)$, ce qui signifie que $u'(t) \in X$, $\forall\ t \in [0, T]$ et $t \to u'(t)$ est continue.
(iii). u vérifie $u(0) = u_0$ et $u'(t) = Au(t) + f(t)$ p.p. sur $[0, T]$.

Définition 2.1.14 ***(Solution faible).*** *u est une solution faible de 2.1 si :*
(i). $u \in C(0, T; X)$.
(ii). Pour tout $z \in D(A^*)$, $t \longmapsto$ < u(t), z > est absolument continue sur $[0, T]$ et

$$<u(0), z> = <u_0, z>, \frac{d}{dt}<u(t), z> = <u(t), A^*z> + <f(t), z> \ p.p\ .sur[0, T]$$

Remarque 2.1.15 *1. Toute solution forte est nécessairement faible, mais la réciproque est fausse en général.*
2. Les définitions ci-dessus montrent que si u est une solution forte de 2.1, alors $u'(t)$ existe dans E, pour tout $t \in [0, T]$, tandis que si u est une solution faible, alors $u'(t)$ n'existe pas nécessairement dans X, mais peut être identifiée à une forme linéaire sur

l'espace $D(A^*)$.

3. Soit u une solution faible de 2.1. Si $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1(0,T;X)$, alors u est une solution forte de 2.1.

2.2 L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

On a l'équation de Schrödinger non linéaire suivante :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f(u) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{2.7}$$

où f est une non linéarité donnée.

La non linéarité la plus courant est la non linéarité de type puissance, $f(u) = \lambda|u|^\alpha u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$. Dans ce cas on peut formellement voir que la solution de systéme 2.7 satisfait deux lois de conservation, à savoir la conservation de la charge et la conservation de l'énergie.

Définition 2.2.1 *Soit $f \in C(H_0^1(\Omega),\ H^{-1}(\Omega))$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et I un intervalle avec $0 \in I$.*

(i) On appelle $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution classique de 2.7 sur I si et seulement si :

$u \in C(I; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(I; H^{-1}(\Omega))$, et si u vérifie 2.7 pour tout $t \in I$ (au sens $H^{-1}(\Omega)$).

(ii) On appelle $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution forte de 2.7 sur I si et seulement si :

$u \in L^\infty(I; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I; H^{-1}(\Omega))$, et si u vérifie 2.7 presque partout sur I (au sens $H^{-1}(\Omega)$).

On a la propriété suivante :

Proposition 2.2.2 ***(Formule de Duhamel)***

Soit $f \in C(H_0^1(\Omega),\ H^{-1}(\Omega))$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et I un intervalle avec $0 \in I$. Si f est bornée sur des ensembles bornés et si $u \in L^\infty(I; H_0^1(\Omega))$, alors u est solution forte de 2.7 si et seulement si :

$$u(t) = \mathcal{T}(t) \cdot \varphi + i \int_0^t \mathcal{T}(t-s) f(u(s)) ds, \ \ p.p.t\ t \geq 0. \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.3 ***(Estimations de Strichartz)***
(i) Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors la fonction $t \to \mathcal{T}(t)\cdot\varphi$ appartient à ;

$$L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$$

pour chaque paire admissible (q, r). De plus il existe une constante C telle que

$$\|\mathcal{T}(.)\varphi\|_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^N))} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \forall\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

(ii) Soit $I \subset \mathbb{R}$(borné ou pas), $J = \overline{I}$ et $t_0 \in J$. Soit (γ, ρ) une paire admissible et $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$.. Alors pour chaque paire admissible (q, r) la fonction

$$t \to \Phi_f(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{T}(t-s)f(s)ds, t \in I,$$

appartient à $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^N))$.De plus il existe une constante C indépendante de I, telle que ;

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I,L^r(\mathbb{R}^N))} \leq C\|f\|_{L^{\gamma'}(I,L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))}, \forall f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^N)).$$

Plusieurs types de non linéarités peuvent être étudiés dans le cadre fonctionnel de ce chapitre. On va présenter ici trois types.

- ***Potentiel extérieur :***

Soit V $\in L^p(\Omega)$ avec p $\geq$ 1, p $>$ N/2 et soit la “nonlinéarité” f définie par :

$$f(u) = Vu$$

ainsi qu'une sorte de primitive

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} V(x)|u(x)|^2dx$$

où u : $\Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable telle que $V|u|^2 \in L^1(\Omega)$. On définit dans ce cas :

$$r = \frac{2p}{p-1}$$

tel que (r $\in [2, \frac{2N}{N-2}]$),(r $\in [2, \infty]$, si N $=$ 1). Ainsi on a les injections continues et denses $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ et donc $L^{r'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ qui signifie que $F(u)$ est bien définie pour u $\in H_0^1(\Omega)$. Ce type de “nonlinéarité” apparait dans le cas de l'équation de Schrödinger linéaire avec un potentiel extérieur donné, c-à-d ;

$$iu_t + \Delta u + Vu = 0$$

•***La non linéarité de type puissance :***

Soit le paramétre α donné par :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2} \text{ , si N} \geq 2. \\ 0 \leq \alpha < \infty \text{ , si N} = 1. \end{cases}$$

alors on définit la non linéarité f par :

$$f(u) = \lambda |u|^{\alpha} u, \lambda \in \mathbb{R} et \alpha \geq 0$$

et une primitive F par :

$$F(u) = \frac{\lambda}{\alpha + 2} \int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha+2} dx$$

pour u $\in L^{\alpha+2}(\Omega)$. On définit dans ce cas :

$$r = \begin{cases} \alpha + 2, \text{ si } N \geq 2 \\ 2, \text{ si N} = 1 \end{cases}$$

tel que r $\in [2, \frac{2N}{N-2}]$. Cela implique de nouveau que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ et donc $L^{r\prime}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ qui signifie que $F(u)$ est bien définie pour u $\in H_0^1(\Omega)$.
Pour $\alpha = 2$ il s'agit de l'équation de Gross-Pitaevskii décrivant l'évolution d'un condensat de Bose-Einstein :

$$iu_t + \Delta u + |u|^2 u = 0$$

•***La non linéarité de Hartree dans*** $\mathbb{R}^n$:

Soit W $\in L^p(\mathbb{R}^n)$ un potentiel impair, p $\geq$ 1, p $>$ N/4. On définit la nonlinéarité f et F par :

$$f(u) = (W * |u|^2)u, F(u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} (W * |u|^2)(x)|u(x)|^2 dx$$

pour une fonction mesurable u : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(W * |u|^2)(x)|u(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.On définit dans ce cas :

$$r = \frac{4p}{2p - 1}$$

tel que r $\in [2, \frac{2N}{N-2}]$, ($r \in [2, \infty]$ si N $=$ 1). Ainsi $F(u)$ est bien définie pour u $\in H_0^1(\Omega)$.
Cette nonlinéarité décrit par exemple l'équation de Schrödinger couplée (de maniére non-linéaire) avec l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = Vu \\ -\Delta V = |u|^2 \end{cases}$$

où de maniére équivalente (en $\mathbb{R}^3$) : $iu_t+\Delta$ u $= (\frac{1}{4\pi|x|}*$|u|$^2)u$
On peut vérifier que toutes ces nonlinéarités satisfont les propriétés suivantes, avec r comme défini pour chaque non linéarité :
(i) $f = F'$ avec $f \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, F $\in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.
$(ii) f \in C(L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega))$.
(iii) Pour chaque M $>$ 0 il existe $C(M) < \infty$ telle que pour tout u, v $\in H_0^1(\Omega)$ avec
$\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq$ M on a ;
$\|f(u) - f(v)\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C(M)\|u - v\|_{L^r(\Omega)}$.
(iv) $\mathcal{I}m(f(u)\overline{u}) = 0$ presque partout sur Ω et pour tout u $\in H_0^1(\Omega)$.

2.2.1 Existence et Unicité

Théorème 2.2.4 *Soit f : $X \to X$ une fonction lipschitzienne sur les ensembles bornés de X et soit $F \in C^1(X_A, \mathbb{R})$ une fonction telle que $F'(x) = f(x)$ pour $x \in X$. Supposons que :*

$$(f(x), ix)_X = 0, \forall x \in X. \tag{2.9}$$

En notant

$$E(x) = \frac{1}{2}(\|x\|_{X_A}^2 - \|x\|_X^2) - F(x) = -\frac{1}{2}(Ax, x)_X - F(x)$$

on a $X \in C^1(X_A; \mathbb{R})$ et $X'(x) =$ -Ax f(x) $\in X_A^*$.
Alors, pour chaque $\varphi \in X$ il existe une solution unique $u \in C(\mathbb{R}; X) \cap C^1(\mathbb{R}, (D(A))^*)$ du probléme :

$$\begin{cases} iu_t + Au + f(u) = 0, t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{2.10}$$

De plus on a les propriétés suivantes :
(i) $\|u(t)\|_X = \|\varphi\|_X$, $\forall$ $t \in \mathbb{R}$ (conservation de la charge).

(ii) Si $\varphi \in X_A$*, alors* $u \in C(\mathbb{R}; X_A) \cap C^1(\mathbb{R}, X_A^*)$ *et* $E(u(t)) = E(\varphi)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *(régularité et conservation de l'énergie).*

(iii) Si $\varphi \in D(A)$*, alors* $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, X)$ *(régularité).*

La preuve de ce théoréme se fera en plusieurs étapes. La premiére est un résultat d'existence et unicité locale en temps.

Lemme 2.2.5 *Soit* $f : X \to X$ *une fonction lipschitzienne sur les ensembles bornés de X. Alors pour chaque* $\varphi \in X$ *il existe une unique solution maximale* $u \in C((T_1, T_2); X) \cap C^1((T_1, T_2); (D(A))^*)$ *de 2.10 avec* $T_1 < 0 < T_2$*.La solution est maximale dans le sens où si* $|T_i| < +\infty$*, alors* $\|u(t)\|_X \longrightarrow_{t \to T_i} +\infty$ *. En plus, cette solution dépend continuement de la donnée initiale, c.à.d. pour* $\varphi_n \longrightarrow_{n \to +\infty} \varphi$ *dans X et pour tout intervalle fermé I* $\subset (T_1, T_2)$ *on a* $u_n \longrightarrow_{n \to +\infty} u$ *dans* $C(I, X)$ *pour n assez grand. On a noté ici un la solution maximale correspondant à la donnée initiale* φ_n*.*

On a aussi la propriété de régularité suivante : si $\varphi \in D(A)$*, alors la solution u satisfait* $u \in C((T_1, T_2); D(A)) \cap C^1((T_1, T_2); X)$*.*

Preuve.

Existence et Unicité :

Cette partie sera basée sur un argument de point fixe. Soit $\varphi \in$ X avec $\|\varphi\|_X \leq$ M.

Notons K(R) $>$ 0 la constante de Lipschitz de g sur la boule B_R de rayon R et définissons

$$L = 2M + \|f(0)\|_X, T_M = \frac{1}{2K(L) + 2}$$

On introduit de plus l'espace métrique complet ;

$$E = u \in C([0, T_M]; X) / \|u(t)\|_X \leq L, \forall t \in [0, T_M].$$

muni de la distance $d(u, v) = \max_{t \in [0, T_M]} \|u(t) - v(t)\|_X$ pour u, v $\in$ E. On définit maintenant l'application

$$\Phi_{u(t)} = \mathcal{T}(t)\varphi + i \int_0^t \mathcal{T}(t - s) f(u(s)) ds, \forall t \in [0, T_M].$$

On a pour u $\in$ E

$$\|f(u(s))\|_X = \|f(0)\|_X + \|f(u(s))f(0)\|_X \leq \|f(0)\|_X + K(L)L$$

Il en résulte que ;

$$\|\Phi u(t)\|_X \leq \|\varphi\|_X + \int_0^t \|f(u(s))\|_X ds \leq M + t(\|f(0)\|_X + K(L)L) \leq L$$

ce qui signifie que Φ_u : E $\rightarrow$ E. Cette application est même une contraction. En effet

$$\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\|_X \leq K(L) \int_0^t \|u(s)v(s)\|_X \leq K(L)T_M d(u,v) \leq \frac{1}{2}d(u,v).$$

D'aprés le théoréme du point fixe de Banach l'application Φ_u admet un unique point fixe u $\in$ E. Pour chaque $\varphi \in$ X avec $\|\varphi\|_X \leq$ M il existe donc un $T_M > 0$ et une unique solution u $\in C([0,T_M];X)$ du probléme

$$u(t) = \mathcal{T}(t)\varphi + i\int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(u(s))ds, \forall t \in [0,T_M]. \tag{2.11}$$

Par conséquent cette solution est l'unique solution u $\in C([0,T_M];X) \cap C^1([0,T_M];(D(A))^*)$ du probléme nonlinéaire 2.10.

Alternative d'explosion :

Notons ;

$$T(\varphi) = sup\{T > 0/\exists u \in C([0,T];X) \text{ solution de 2.11 }\}$$

et supposons que $T(\varphi) < +\infty$. On veut montrer que dans ce cas $\|u(t)\|_X \rightarrow_{t\rightarrow T(\varphi)} +\infty$. On va le montrer par l'absurde. Supposons donc qu'il existe un $0 <$ M $< +\infty$ et une suite $t_j \rightarrow T(\varphi)$ telle que $\|u(t_j)\|_X \leq$ M. Soit T_M le temps défini dans la premiére étape et soit k $\in \mathbb{N}$ tel que t_k + T$_M$ >T(φ). D'aprés la premiére étape, il existe une solution unique v du probléme 2.10 avec condition initiale v(0) $= u(t_k)$ et cette solution sera définie sur $[t_k, t_k + T_M]$.L'unicité d'une solution de 2.10 implique que cette solution v sera identique sur $[t_k, T(\varphi)]$ à u, ce qui signifie que la solution u pourra être prolongée sur un intervalle plus grand que $[0, T(\varphi)]$, ce qui est en contradiction avec la définition de $T(\varphi)$. Avec ça on a démontré qu'on doit avoir $\|u(t)\|_X \rightarrow_{t\rightarrow T(\varphi)} \infty$ dans le cas où $T(\varphi) < +\infty$.

■

Preuve. (Preuve du théoréme 2.2.4) :

D'aprés le lemme (2.2.5) pour chaque $\varphi \in$ X il existe une unique solution maximale u $\in C((T_1, T_2); X) \cap C^1((T_1, T_2); (D(A))^*)$ de (2.13) avec $T_1 < 0 < T_2$. En plus, cette solution dépend continuement de la donnée initiale et pour $\varphi \in D(A)$ elle satisfait u $\in C((T_1, T_2); D(A)) \cap C^1((T_1, T_2), X)$. On va poursuivre maintenant en plusieurs étapes.

1. Etape :

Soit $\varphi \in$ D(A). En prenant le produit scalaire (dans X) de l'équation 2.10 avec iu, on a

$$(u_t, u)_X = (iu_T, iu)_X = -(Au, iu)_X - (f(u), iu)_X = 0.$$

Le terme de droite s'annule du fait que A est autoadjoint et que g satisfait 2.9. Alors

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 = 2(u_t, u)_X = 0,$$

ce qui n'est rien d'autre que la conservation de la charge. En prenant maintenant le produit scalaire de l'équation 2.10 avec u_t , on obtient

$$0 = (iu_t, u_t)_X = -(Au, u_t)_X - (f(u), u_t)_X,$$

ce qui signifie que l'énergie est conservée

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = 0$$

2. Etape :

Soit $\varphi \in$ X. La dépendance continue de la solution u par rapport à la donnée initiale permet d'obtenir la conservation de la charge pour tout $\varphi \in$ X. Par conséquent et en utilisant l'alternative d'explosion du lemme précédent la solution est définie sur tout $\mathbb{R}$ et on a ainsi montré (i) et (iii) du théoréme. Il reste à montrer (ii).

3. Etape :

Soit $\varphi \in X_A$ et $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ une suite convergeant dans X_A vers φ.
On note un les solutions de 2.10 correspondant aux données initiales φ_n. D'aprés (i) les u_n sont bornées uniformément dans $L^\infty(\mathbb{R};X)$ et ainsi $F(u_n)$ est borné uniformément.
En effet, cela se voit comme suit

$$|F(u_n)| \leq |F(u_n) - F(0)| + |F(0)| \leq |\int_0^t \frac{d}{ds}F(su_n)ds + |F(0)|$$

$$\leq \int_0^t (f(su_n), u_n)_X ds + |F(0)| \leq \int_0^t \|f(su_n)\|_X ds \|u_n\|_X + |F(0)| \leq C.$$

A partir de la conservation de l'énergie on peut maintenant affirmer que les un sont bornés uniformément dans $L^\infty(\mathbb{R};X_A)$, ce qui méne à l'aide de l'équation au fait que $\partial_t u_n$ est borné dans $L^\infty(\mathbb{R};X_A^*)$. Comme $u_n(t) \to_{n\to+\infty} u(t)$ dans X pour chaque t $\in \mathbb{R}$, alors $u_n(t) \to_{n\to+\infty} u(t)$ faiblement dans X_A et on a u $\in L^\infty(\mathbb{R};X_A) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R};X_A^*)$ ainsi que $E(u(t)) \leq E(\varphi)$ pour chaque t $\in \mathbb{R}$.

4. Etape :

Soit $\varphi \in X_A$ et u $\in L^\infty(\mathbb{R};X_A) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R};X^*A)$ l'unique solution du probléme 2.10 avec condition initiale φ. Soit t $\in \mathbb{R}$ fixé. On définit une nouvelle fonction v(s) = u(s + t) $\in L^\infty(\mathbb{R};X_A) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R};X_A^*)$. Cette fonction v est l'unique solution du probléme 2.10 avec condition initiale $u(t) \in X_A$. D'aprés l'étape 4 on a $E(v(s)) \leq E(u(t))$ pour chaque s $\in \mathbb{R}$. Donc pour s = -t on retrouve $E(\varphi) = E(u(0)) \leq E(u(t))$. Avec l'estimation de l'étape précédente on a la conservation de l'énergie. Cela implique aussi que $\|u(t)\|^2_{X_A}$ est une fonction continue et donc, avec la continuité faible de t $\in \mathbb{R} \longmapsto u(t) \in X_A$ on a u $\in C(\mathbb{R};X_A)$. A partir de l'équation 2.10 on trouve alors u $\in C^1(\mathbb{R};X_A^*)$ et (iii) est démontré.
■

2.2.2 Existence locale

Le résultat de la section précédente est trés beau, mais il est seulement utilisable pour des nonlinéarités assez réguliéres. Les trois nonlinéarités introduites dans la section (2.2) ne sont pas suffisamment réguliéres pour pouvoir utiliser le théoréme 2.2.4. Placons nous donc dans cette section dans le contexte de l'équation de Schrödinger, c.à.d. X $= L^2(\Omega)$, $X_A = H_0^1(\Omega)$ et dans un cadre plus réaliste, c.à.d. supposons que la nonlinéarité f satisfasse les propriétés suivantes :

$$f = F' \text{ avec } f \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \text{ et } F \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}) \tag{2.12}$$

Supposons qu'il existe r, $\rho \in [2, \frac{2N}{N-1}]$ si N ≥ 2 (où r, $\rho \in [2, +\infty[$ si N $= 1$), tels que ;

$$f \in C(H_0^1(\Omega), L^{\rho'}(\Omega)), \tag{2.13}$$

ainsi que pour chaque M > 0 il existe $C(M) < +\infty$ tel que tout u, v $\in H_0^1(\Omega)$ avec $\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq$ M on a :

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \leq C(M)\|u - v\|_{L^{\rho'}(\Omega)}. \tag{2.14}$$

Finalement supposons que pour tout u $\in H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{I}m(< f(u), u >_{H^{-1},H^1}) = 0 \tag{2.15}$$

Définisons maintenant ;

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - F(u), \forall u \in\leq H_0^1(\Omega). \tag{2.16}$$

On a E $\in C^1(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})$ et $E'(u) = -\Delta u - F(u)$ pour tout u $\in H_0^1(\Omega)$.
Avant de passer au théoréme d'existence on va démontrer un lemme nécéssaire pour la suite.

Lemme 2.2.6 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega))$. Alors on a*

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2}C|t-s|^{1/2}, \forall s, t \in I, \tag{2.17}$$

qui signifie entre autres que $u \in C(\overline{I}, L^2(\Omega))$. Ici $C = max\|u\|_{L^\infty(I,H^1)}; \|u'\|_{L^\infty(I,H^{-1})}$.
Soit maintenant f une fonction satisfaisant 2.12-2.16. Alors on a

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \leq C(M)\|u-v\|^a_{L^2(\Omega)}, |F(u) - F(v)| \leq C(M)\|u-v\|^b_{L^2(\Omega)}, \tag{2.18}$$

pour tout u, v $\in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant $\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq M$. Ici on a noté $a = 1 - N(1/2 - 1/r)$, $b = 1 - N(1/2 - 1/\rho)$ et $C(M) > 0$ une constante ne dépendant que de M.

Preuve. $\|u(t)-u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} = <$ u(t)- u(s) , u(t) - u(s) $>_{H^{-1},H^1_0} \leq 2C\|u(t)-u(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}$
$\leq 2C\| \int_s^t u'(\tau)d\tau\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq 2C\int_s^t \|u'(\tau)\|_{H^{-1}(\Omega)}\; d\tau \leq 2C^2|t-s|$
La propriété 2.14 ainsi que l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg ménent à

$$\|f(u)-f(v)\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \leq C(M)\|u-v\|_{L^r(\Omega)} \leq C(M)\|u-v\|^{1-a}_{H^1(\Omega)}\|u-v\|^a_{L^2(\Omega)}$$

avec 0 < b $\leq$ 1 donné dans l'énoncé.

■

Le théoréme d'existence locale s'écrit maintenant :

Théorème 2.2.7 *Supposons que f, F, et E satisfont les hypothéses 2.12-2.16. Alors pour chaque $M>0$ il existe $T_M>0$ tel que : pour chaque $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ avec $\|\varphi\|_{H^1} \leq M$, il existe une H^1_0-solution forte sur $I=(-T_M,T_M)$ du systéme 2.7*
avec $u \in L^\infty(I,H^1_0(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I,H^{-1}(\Omega))$ et satisfaisant

$$\|u\|_{L^\infty(I,H^1_0(\Omega))} \leq 2M$$

De plus on a la conservation de la charge et l'inégalité de l'énergie :

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, E(u(t)) \leq E(\varphi), \forall t \in I \tag{2.19}$$

Preuve.
L'idée de la preuve est la suivante :
On va tout d'abord régulariser la nonlinéarité f pour pouvoir utiliser le théoréme 2.2.4 dans le but de construire une suite de solutions approchées u_m. La deuxiéme étape sera d'utiliser les lois de conservations pour avoir des estimations de u_m uniformes en m. Et finalement on va passer à la limite m $\to +\infty$ dans les équations approchées pour trouver une solution u de l'équation initiale 2.7.

1.Etape (Construction des solutions approchées u_m) :

On va régulariser la nonlinéarité f en utilisant l'opérateur autoadjoint J_m, m $\in \mathbb{N}$

$$J_m = (I - \frac{1}{m}\Delta)^{-1}$$

qui associe à f $\in H^{-1}(\Omega)$ la fonction $J_m f \in H_0^1(\Omega)$ solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ du probléme :

$$u - \frac{1}{m}u = f; u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Cet opérateur a les propriétés suivantes :

$$J_m \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)); \|J_m\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega))} \leq 1$$

et pour un des espaces Y $= H_0^1(\Omega)$, Y $= L^p(\Omega)$, $1 <$ p $< +\infty$ ou Y $= H^{-1}(\Omega)$ on a :

$$J_m \in \mathcal{L}(Y); \|J_m\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq 1; J_m u \to_{m\to\infty} u$$

dans Y , $\forall$ u $\in$ Y .

Définissons maintenant les applications $f_m : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ et $F_m : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par :

$$f_m(u) = J_m(f(J_m(u))); F_m(u) = F(J_m(u)).$$

Ces deux fonctions satisfont les hypothéses du théoréme 2.2.4 avec X $= L^2(\Omega)$. En effet, dû au fait que J_m est auto-adjoint, on a pour u $\in X$
$(f_m(u), iu)_X =< f(J_m u), iJ_m(u) >_{H^{-1},H^1} = 0$.
Le théoréme 2.2.4 peut donc être utilisé et on a l'existence d'une suite de fonctions $u_m \in C(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega))$ solutions du probléme régularisé :

$$\begin{cases} i\partial_t u_m + \Delta u_m + g_m(u_m) = 0, t \in \mathbb{R} \\ u_m(0) = \varphi \in H_0^1(\Omega); \\ u_m|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

De plus on a la conservation de la charge et de l'énergie ;

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, E_m(u_m(t)) = E_m(\varphi), \forall t \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, \tag{2.21}$$

oú $E_m(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - F_m(u)$.

2.Etape (Estimations uniformes en m) :

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|\varphi\|_{H^1} \leq$ M. Notons

$$\theta_m = \sup\{\tau > 0 / \|u_m(t)\|_{H^1} \leq 2M \text{ sur } [-\tau, \tau]\}.$$

On a donc ;

$$\|u_m\|_{L^\infty(-\theta_m,\theta_m;H_0^1(\Omega))} \leq 2M, \forall m \in \mathbb{N}.$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur J_m on peut démontrer que f_m satisfait 2.13 et 2.14 uniformément en m de telle maniére qu'on peut montrer (à l'aide de l'équation 2.20) qu'on a avec une constante $C(M) > 0$ (dépendante que de M) l'estimation :

$$\|\partial_t u_m\|_{L^\infty(-\theta_m,\theta_m;H^{-1}(\mathbb{R}^N))} \leq C(M), \forall m \in \mathbb{N}$$

L'intervalle de définition de ces estimations dépend malheureusement de m. Mais en utilisant l'égalité d'énergie et le lemme (2.4.1) on a pour chaque t $\in (-\theta_m, \theta_m)$

$$\|u_m(t)\|^2_{H^1} \leq \|\varphi\|^2_{L^2} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2} + 2|F_m(u_m(t)) - F_m(\varphi)| \leq \|\varphi\|^2_{H^1} + C(M)|t|^{\frac{b}{2}}$$

Cela implique que si on choisit à ce moment T_M tel que $C(M)T_M^{\frac{b}{2}} = 2M^2$ on a pour $T = \min(T_M, \theta_m)$;

$$\|u_m\|_{L^\infty((T,T);H_0^1(\Omega))} \leq \sqrt{3}M < 2M.$$

Cela signifie avec la définition de θ_m que $T_m \leq \theta_m$ pour chaque m $\in \mathbb{N}$ ce qui implique qu'on a les estimations suivantes indépendantes de m.

$$\|u_m\|_{L^\infty((-T_M,T_M);H_0^1(\Omega))} \leq 2M, \|\partial_t u_m\|_{L^\infty((-T_M,T_M);H^{-1}(\Omega))} \leq C(M)$$

3.Etape (Passage à la limite m $\to +\infty$) :

Cette partie est assez technique. On ne donnera que le fil conducteur. L'idée est de passer à la limite m $\to +\infty$ dans la formulation faible de l'équation 2.20, donnée par ;

$$\int_{-T_M}^{T_M} [- < iu_m, \omega >_{H^{-1},H_0^1} \phi'(t) + < \Delta u_m, f_m(u_m), \omega >_{H^{-1},H_0^1} \phi(t)]dt = 0,$$

où $\omega \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi \in C_0^\infty(-T_M, T_M)$ sont des fonctions test. Tout d'abord les estimations uniformes de l'étape précédente entraîne l'existence d'une fonction :

$$u \in L^\infty((-T_M, T_M), H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}((-T_M, T_M), H^{-1}(\Omega)).$$

et pour chaque t $\in [-T_M, T_M]$ on a,à une sous-suite prés, $u_m(t) \to u(t)$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On peut aussi montrer que ;

$$f_m(u_m(t)) \to f(t) \text{ faiblement dans } L^{\rho'}(\Omega)$$

Cela permet de passer à la limite dans la formulation faible et d'obtenir :

$$\int_{-T_M}^{T_M} [- < iu, \omega >_{H^{-1}, H_0^1} \phi'(t) + < \Delta u, f, \omega >_{H^{-1}, H_0^1} \phi(t)] dt = 0,$$

Il suffit maintenant d'identifier f avec $g(u)$ pour démontrer l'existence d'une solution locale u $\in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega))$ de l'équation de Schrödinger non linéaire 2.10.

■

Théorème 2.2.8 *Supposons que f, F, et E satisfont les hypothéses 2.12-2.16 et supposons de plus que le probléme 2.10 admet une solution unique. Alors le systéme 2.10 est bien posé et on a la conservation de la charge et de l'énergie :*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, E(u(t)) = E(\varphi), \forall t \in (-T_{\min}, T_{\max}). \tag{2.22}$$

Preuve.

1.Etape (Régularité) :

Soit I un intervalle quelconque et u $\in L^\infty(I; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I; H^{-1}(\Omega))$ l'unique solution forte de 2.10 sur I. On va d'abord montrer que u $\in C(\overline{I}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\overline{I}; H^{-1}(\Omega))$ et qu'elle satisfait la conservation de la charge et de l'énergie 2.22.
Soient M $=$ sup $\|u(t)\|_{H^1}, t \in I$ et J $\subset$ I un intervalle tel que $|J| \leq T_M$, où T_M a été défini dans le théoréme 2.2.7. Soient de plus σ, $\tau \in$ J arbitraires, mais fixés. On définit la fonction $v(s) = u(\sigma + s)$ pour tout s $\in \mathbb{R}$ tel que $\sigma + s \in$ I. Alors v est l'unique solution de 2.10 avec condition initiale $u(\sigma)$. De plus, d'aprés le théoréme 2.2.7, v est défini sur $(-T_M, T_M)$ et satisfait la conservation de la charge ainsi que l'inégalité d'énergie. Donc

$$\|u(\sigma + s)\|_{L^2} = \|v(s)\|_{L^2} = \|u(\sigma)\|_{L^2}, E(u(\sigma + s)) = E(v(s)) \leq E(u(\sigma))$$

En prenant s $\in (-T_M, T_M)$ tel que $\tau = \sigma + s$ on a $\|u(\tau)\|_{L^2} = \|u(\sigma)\|_{L^2}$ et
$E(u(\tau)) \leq E(u(\sigma))$. En faisant de même avec la fonction $w(s) = u(\tau + s)$ on démontre que

$\|u(\sigma)\|_{L^2} = \|u(\tau)\|_{L^2}$ et $E(u(\sigma)) \leq E(u(\tau))$. Et comme σ, τ sont choisis de maniére arbitraire on a montré les deux lois de conservation sur tout J et ainsi sur I. Maintenant on sait que u $\in C(I, L^2(\Omega))$ et ainsi G $\in C(\overline{I}, \mathbb{R})$ (Lemme 2.2.6). L'égalité de l'énergie implique donc que u $\in C(I, H_0^1(\Omega))$. Et finalement par l'équation on a aussi u $\in C^1(I, H^{-1}(\Omega))$.

2.Etape (Maximalité) :

Soit I $= (-T_{\min}, T_{\max})$ l'intervalle maximal pour lequel il existe une solution de 2.10 avec condition initiale $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. D'aprés l'étape (1) on a u $\in C(\overline{I}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\overline{I}; H^{-1}(\Omega))$. L'alternative d'explosion se démontre maintenant exactement comme dans la preuve du théoréme 2.2.4.

3.Etape (Dépendance continue par rapport à la donnée initiale) :

Soit $\varphi_n \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \varphi$ dans $H_0^1(\Omega)$ une suite de données initiales et u_n (resp. u) les solutions classiques maximales correspondant aux conditions initiales φ_n (resp. φ). Soit de plus
M $= 2\sup\{\|u(t)\|_{H^1}$; t $\in (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))\}$. Alors pour n assez grand on a ;
$\|\varphi_n\|_{H^1} \leq$ M et donc $[-T_M, T_M] \subset (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$. De plus la suite un est bornée dans $L^\infty((-T_M, T_M); H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}((-T_M, T_M); H^{-1}(\Omega))$. On peut ainsi montrer que :

$$u_n \longrightarrow_{n\rightarrow+\infty} u$$

dans $C([-T_M, T_M]; L^2(\Omega))$,
Le lemme (2.4.1) ainsi que la conservation de l'énergie impliquent alors $\|u_n(t)\|_{H^1} \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \|u(t)\|_{H^1}$ uniformément sur $[-T_M, T_M]$, ce qui signifie que :

$$u_n \longrightarrow_{n\rightarrow+\infty} u$$

dans $C([-T_M, T_M]; H_0^1(\Omega))$.
En répétant cet argument on peut couvrir tout intervalle I $\subset (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$.

■

2.2.3 Existence globale

Nous allons établir maintenant un résultat d'existence globale pour certaines conditions initiales $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et lorsque F satisfait une condition supplémentaire. La preuve est basée sur la conservation de la charge et l'inégalité d'énergie.

Théorème 2.2.9 *Soient f, F et E comme dans le théoréme 2.2.6. Supposons qu'il existe un $A > 0$, $C(A) > 0$ et $\varepsilon \in (0, 1)$ tels que :*

$$F(u) \leq \frac{1-\varepsilon}{2}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + C(A), \forall u \in H_0^1(\Omega) avec \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq A.$$

Si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ satisfait $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq A$, alors le probléme 2.10 admet une H_0^1-solution forte, globale sur $\mathbb{R}$, c.à.d. $u \in L^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$. Cette solution satisfait la conservation de la charge et l'inégalité de l'énergie 2.19 pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et u $\in L^\infty(I; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega))$ une solution forte de 2.10 sur I, où 0 $\in$ I (théoréme 2.2.7). Comme :

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 = 2E(u(t)) + 2F(u(t)) + \|u(t)\|_{L^2}^2$$

la conservation de la charge et l'inégalité de l'énergie 2.19 implique

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq \|\varphi\|_{H^1}^2 - 2F(\varphi) + 2F(u(t)), \forall t \in I.$$

En supposant que $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq$ A, la propriété de F nous permet d'estimer :

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq \|\varphi\|_{H^1}^2 - 2F(\varphi) + (1-\varepsilon)\|u(t)\|_{H^1}^2 + 2C(A), \forall t \in I.$$

et on déduit l'estimation de u dans la norme H^1, estimation qui dépend que de la donnée initiale :

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|_{H^1}^2 - 2F(\varphi) + 2C(A), \forall t \in I \tag{2.23}$$

Notons maintenant :

$$M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\|\varphi\|_{H^1}^2 - 2F(\varphi) + 2C(A)} \tag{2.24}$$

Tout d'abord on a $\|\varphi\|_{H^1} \leq$ M. Le théoréme locale implique alors l'existence d'un T_M et d'une solution forte u $\in L^\infty((-T_M, T_M); H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}((-T_M, T_M), H^{-1}(\Omega))$, qui satisfait (2.22). L'idée c'est de prolonger cette solution sur tout $\mathbb{R}$. L'estimation 2.23 implique d'abord que $\|u(T_M)\|_{H^1} \leq$ M. En appliquant de nouveau le théoréme 2.2.7, on peut démontrer qu'il existe une solution forte v $\in L^\infty((-T_M, T_M); H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}((-T_M, T_M), H^{-1}(\Omega))$ avec v(0) $= u(T_M)$ et satisfaisant 2.19. En définissant maintenant

$$u(t) = \begin{cases} u(t) \;\; \text{pour} \;\; \mathrm{t} \in [-T_M, T_M] \\ v(t - T_M) \;\; \text{pour} \;\; \mathrm{t} \in [T_M, 2T_M] \end{cases}$$

alors cette nouvelle fonction est définie sur $[T_M, 2T_M]$, elle satisfait l'équation 2.10 et la conservation de charge ainsi que l'inégalité d'énergie. En effet pour $T_M \leq$ t $\leq 2T_M$ on a :

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|v(tT_M)\|_{L^2} = \|u(T_M)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$$

$$E(u(t)) = E(v(tT_M)) \leq E(u(T_M)) \leq E(\varphi)$$

En continuant de cette maniére on peut prolonger u sur tout $\mathbb{R}$.

■

Parmi les problémes les plus importants liés aux équations d'évolution nonlinéaires figure l'étude du comportement à l'infini des solutions globales. C'est ce qu'on appelle le comportement asymptotique des solutions , c.à.d. comment se comporte u(t) lorsque t $\to +\infty$. On n'aura pas le temps d'aborder ce vaste sujet dans le cadre de ce cours.

Chapitre 3

Applications sur l'équation de Schrödinger non linéaire

3.1 Non linéarité en $k|u|^{p-1}u$

3.1.1 Préliminaries :

Soit k $\in \mathbb{R}$. On note $ju = k|u|^2u$. Pour u_0 définie sur $\mathbb{R}$, on a le probléme :

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = k|u|^{p-1}u \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

On a le probléme en général équivalent :

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)Ju(s)ds \tag{3.2}$$

Lemme 3.1.1 *Soit $\varphi \in L^1(0,T)$ vérifiant :*

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2t^{-\frac{1}{2}} + C_3\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\varphi(s)ds.$$

Alors il existe $C(T,C_3)$ telle que $\varphi(t) \leq C(C_1 + C_2t^{-\frac{1}{2}})$.

Preuve. *voir*[15]. ■

Lemme 3.1.2 *On a :*

$$\|Jv - Ju\|_{\frac{4}{3}} \leq C(\|u\|_4^2 + \|v\|_4^2)\|v-u\|_4 \text{ pour tout } u, v \in L^4(\mathbb{R}^2) \tag{3.3}$$

$$\|Ju\|_{m,2} \leq C\|u\|_2^{\infty}\|u\|_{m,2}) \text{ pour tout } u \in H^m(\mathbb{R}^2), m \geq 0. \tag{3.4}$$

$$\|Jv - Ju\|_{m,2} \leq C(\|u\|_{m,2}^2 + \|v\|_{m,2}^2)\|v-u\|_{m,2} \text{ pour tout } u, v \in H^m(\mathbb{R}^2), m \geq 2. \tag{3.5}$$

Lemme 3.1.3 *Soit $t \neq 0$. On a :*

$$\|S(t)Ju\|_\infty \leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{1,2}^3 \text{ pour tout } u \in H^1(\mathbb{R}^2) \tag{3.6}$$

$$\|S(t)Ju\|_\infty \leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{1,2}\|u\|_4\|u\|_\infty \text{ pour tout } u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \tag{3.7}$$

Preuve. On a :

$$\|S(t)Ju\|_\infty \leq C\|S(t)Ju\|_4^{\frac{1}{2}}\|\nabla(S(t)Ju)\|_4^{\frac{1}{2}}$$

d'où :

$$\|S(t)Ju\|_\infty \leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|Ju\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{1}{2}}\|\nabla Ju\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{1}{2}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|_4^{\frac{3}{2}}\|\nabla Ju\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{1}{2}}$$

or, $|\nabla Ju| \leq |u||\nabla u|$ et donc par Hölder : $\|\nabla Ju\|_{\frac{4}{3}} \leq \|u\|_\infty^2\|u\|_{1,2}$. Utilisant l'inclusion $H^1(\mathbb{R}^2) \circlearrowleft L^\infty(\mathbb{R}^2)$, on en déduit 3.6.Par ailleurs,$\|u\|_\infty^2 \leq \|u\|_\infty\|u\|_4$, d'où 3.7.

■

3.1.2 Existence et unicité :

Théorème 3.1.4 *Soient $T > 0$, $m \geq 2$ et $u_0 \in H^m(\mathbb{R}^2)$. On suppose $k \geq 0$ ou bien $k < 0$ et $|k|\|u_0\|_2^2 < 2$. Alors il existe u unique $u \in C^0([0,T], H^m(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T], H^{m-2}(\mathbb{R}^2))$ solution de 3.1. De plus, pour tout $t \in [0,T]$, on a :*

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2 \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{k}{4}\|u(t)\|_4^4 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{k}{4}\|u(t)\|_4^4 \tag{3.9}$$

Lemme 3.1.5 *Soient $T' > 0$ et $u \in C^0([0,T], H^2(\mathbb{R}^2))$ solution de 3.1 avec $k \geq 0$ ou bien $k < 0$ et $|k|\|u_0\|_2^2 < 2$. Alors on a : $\|u(t)\|_{1,2} \leq Cste$ pour $t \in [0,T']$, la constante ne dépendant pas de $\to T'$.*

Preuve. Puisque u $\in C^0([0,T'],H^2(\mathbb{R}^2))$, on a $(\partial u/\partial t) \in C^0([0,T'],L^2(\mathbb{R})$.

On multiplie l'équation par $\overline{u}$, on intégre et on prend la la partie imaginaire. Il vient $(d/dt)\|u(t)\|_2^2 = 0$, d'où 3.8. En multipliant l'équation par $(\partial\overline{u}/\partial t)$, en intégrant et en prenant la partie réelle, on trouve $(d/dt)\{\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + (k/4)\|u(t)\|_4^4\} = 0$. On en déduit 3.9. Si k ≥ 0, on a alors $\|u(t)\|_{1,2}^2 \leq \|u_0\|_{1,2}^2 + (k/4)\ \|u_0\|_4^4$. Si k < 0 , utilisant l'inégalité $\|u\|_4 \leq \|u\|_2^{\frac{1}{2}}\ \|\nabla u\|_2^{\frac{1}{2}}$, on deduit de 3.9 :

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq C + \frac{|k|}{4}\|u_0\|_2^2\|\nabla u(t)\|_2^2$$

soit

$$(1 - \frac{|k|}{4}\|u_0\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq C$$

On reprend alors la démonstration du théoréme. On prend la norme $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ des deux membres de 3.2 :

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|S(t)u_0\|_\infty + \int_0^t \|S(t-s)Ju(s)\|_\infty ds$$

or

$$\|S(t)u_0\|_\infty \leq C\|S(t)u_0\|_{m,2} \leq C\|u_0\|_{m,2}$$

utilisant par ailleurs 3.6, on trouve :

$$\|u(t)\|_\infty \leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{1,2}^3 ds \leq C\|u_0\|_{m,2} + Ct^{\frac{1}{2}}$$

$\|u(t)\|_\infty$ est donc uniformément bornée sur $[0,T]$.

On prend alors la norme $H^m(\mathbb{R}^2)$ des deux membres de 3.1 et on utilise 3.4 :

$$\|u(t)\|_{m,2} \leq \|u_0\|_{m,2} + \int_0^t \|u(s)\|_\infty^2\|u(s)\|_{m,2} ds.$$

Appliquant Gronwall, on en déduit une estimation de $\|u(t)\|_{m,2}$ et donc l'existence globale.

■

3.1.3 Cas où $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$:

Le théoréme suivant est une conséquence de Ginibre. Nous en donnons une démonstration différente utilisant les résultats du paragraphe précédent. Notons qu'ici on ne peut utiliser la téchnique de point fixe du théoréme 3.1.4 car J n'est pas localement lipschitzien dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 3.1.6 *Soient $T > 0$ et $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose $k \geq 0$ ou bien $k < 0$ et $|k|\|u_0\|_2^2 < 2$. Alors il existe u unique, $u \in C^0([0,T], H^1(\mathbb{R}^2) \cap C^1[0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ solution de3.1. De plus, u vérifie les égalités 3.8 et 3.9 pour tout $t \in [0,T]$.*

Preuve. Unicité : soient u et v deux solutions de 3.1 et donc de 3.2. On a : $v(t) - u(t)$ $= -i \int_0^t S(t-s)(Jv(s) - Ju(s))ds$.
D'où :

$$\|v(t) - u(t)\|_4 \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(\|v(s)\|_4^2 + \|u(s)\|_4^2)\|v(s) - u(s)\|_4 ds.$$

Appliquant le lemme 3.1.1, on en déduit v = u.
Existence : Soit $u_n^0 \in H^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $u_n^0 \longrightarrow u_0$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Si k < 0, on choisit u_n^0 vérifiant $|k|\|u_n^0\|_2^2 < 2$. On note un la solution de 3.1 vérifiant $u_n(0) = u_n^0$. Les intégrales premiéres donnent comme au lemme 3.1.5 $\|u_n\|_{L^\infty(0,T,H^1)} \leq Cste$. Soient n et p deux entiers. On a :

$$u_n(t) - u_p(t) = S(t)(u_n^0 - u_p^0) - i \int_0^t S(t-s)(Ju_n(s) - Ju_p(s))ds.$$

Or

$$\|S(t)(u_n^0 - u_p^0)\|_4 \leq C\|S(t)(u_n^0 - u_p^0)\|_{1,2} \leq C\|u_n^0 - u_p^0\|_{1,2}$$

et donc :

$$\|u_n(t) - u_p(t)\| \leq C\|u_n^0 - u_p^0\|_{1,2} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(\|u_n(s)\|_{1,2}^2 + \|u_p(s)\|_{1,2}^2)\|u_n(s) - u_p(s)\|_4 ds.$$

Appliquant le lemme 3.1.1, on en déduit que un est de Cauchy dans $C^0([0,T], L^4(\mathbb{R}^2))$. Soit u sa limite. Compte tenu de $\|u_n\|_{L^\infty(0,T,H^1)} \leq Cste$, on en déduit que pour tout t $\in$ $[0,T]$, $u(t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, que $u_n(t) \longrightarrow u(t)$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ faible, que u $\in L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^2)$ et que u est faiblement continue à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Or

$$\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,H^{-1})} \leq \|\Delta u_n\|_{L^\infty(0,T,H^{-1})} + \|Ju_n\|_{L^\infty(0,T,H^{-1})}$$

$$\leq \|u_n\|_{L^\infty(0,T,H^1)} + \|Ju_n\|_{L^\infty(0,T,L^{4/3})} \leq Cste.$$

Et donc $(\partial u/\partial t) \in L^\infty([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ et $(\partial u_n/\partial t) \longrightarrow (\partial u/\partial t)$ dans $L^\infty([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ faible*.$Enfin \|Ju_n - Ju\|_{\frac{4}{3}} \leq$ C $\|u_n - u\|_4$ et donc $Ju_n \longrightarrow Ju$ dans $C^0([0,T], L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}))$. A la limite u vérifie donc $i(\partial u/\partial t) + \Delta u =$ Ju dans $L^\infty([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}))$. Comme $u_n(0) \longrightarrow u(0)$ dans $L^4(\mathbb{R}^2)$, on a $u(0) = u_0$ et donc u est solution de 3.1. D'autre part, un vérifie 3.8 et 3.9, et done puisque u_n^0 u_0 dans $H^1(\mathbb{R}^2$ et $u_n(t) \longrightarrow u(t)$ dans $L^4(\mathbb{R}^2)$ et dans $H^1(\mathbb{R})$ faible, on a :

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2$$

et

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{k}{4}\|u(t)\|_4^4 \leq \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{k}{4}\|u_0\|_4^4$$

On peut résoudre par la même téchnique le probléme rétrograde à partir du $u(t)$. Compte tenu de l'unicité, on en déduit les inégalités opposées et donc 3.8 et 3.9. Puisque u $\in C^0([0,T], L^4(\mathbb{R}^2)$, on a $\|u(.)\|_{1,2} \in C^0([0,T])$. Il en résulte que u $\in C^0([0,T], H^1(\mathbb{R}^2)$ et donc $(\partial u/\partial t) \in$ C$^0([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^2))$.

■

3.1.4 Résultat d'explosion :

Théorème 3.1.7 *Soient $k < 0$ et $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2) vrifiant r u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ $(r = |x|)$. On note $E(u_0) = \|\nabla u_0\|_2^2 + (k/2)\|u_0\|_4^4$ et on suppose que u_0 satisfait l'une des deux hypothéses suivantes :*

(i) $E(u_0) < 0$.

(ii) $E(u_0) \geq 0$ et $Im \int r \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial r} u_0 < 0$

avec $(Im \int r \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial r} u_0)^2 > (\int r^2 |u_0|^2) E_0$.

Alors il existe $0 < T^* < +\infty$ et il existe $u \in C^0([0,T^*[, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T^*[, H^{-1}(\mathbb{R}^2))$, unique solution de 3.1 vérfiant :

$$\|\nabla u(t)\|_2 \longrightarrow +\infty \text{ quand } t \longrightarrow (T^*)_-$$

$$\text{et pour } 4 \leq p \leq +\infty \|u(t)\|_p \longrightarrow +\infty \text{ quand } t \longrightarrow (T^*)_-$$

Preuve. En supposant la solution u reguliere, on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}\int r^2|u(t)|^2 = 8E(u_0) et \frac{d}{dt}\int r^2|u(t)|^2 = 4Im\int r\frac{\partial\overline{u}(t)}{\partial r}u(t).$$

D'où :

$$\int r^2|u(t)|^2 = 4E(u_0)t^2 + 4(Im\int r\frac{\partial\overline{u}_0}{\partial r}u_0)t + \int r^2|u_0|^2.$$

Lorsque u n'est pas réguliére, on obtient par régularisation et passage a la limite :

$$\int r^2|u(t)|^2 \leq 4E(u_0)t^2 + 4(Im\int r\frac{\partial\overline{u}_0}{\partial r}u_0)t + \int r^2|u_0|^2.$$

Or, sous les hypotheses du théoréme, le second membre devient négatif en un temps fini. La non existence à partir d'un T^* en résulte. Le théoréme d'existence locale dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de Ginibre, assure que celle-ci se produit par explosion de $\|u(t)\|_{1,2}$. u vérifiant encore 3.8 et 3.9, on a :

$$\|\nabla u(t)\|_2 \longrightarrow +\infty \text{ quand } t \longrightarrow (T^*)_-$$

et

$$\|u(t)\|_4 \longrightarrow +\infty \text{ quand } t \longrightarrow (T^*)_-.$$

Enfin, pour $4 \leq$ p $\leq +\infty$, on a $\|u(t)\|_4 \leq C\|u(t)\|_2^{(p-4)/2(p-2)}\ \|u(t)\|_p^{p/2(p-2)}$ par Hölder et donc $\|u(t)\|_p \longrightarrow +\infty$ t $\longrightarrow (T^*)_-$. ■

3.1.5 Comportement asymptotique :

Théorème 3.1.8 *Soient $u_0 \in H^m(\mathbb{R}^2)$, $m \geq 1$ avec $ru_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)(r = |x|)$ et $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose $k \geq 0$ ou bien $k < 0$ et $|k|\ \|u_0\|_2^2 < 2$. Alors la solution du probleme 3.4 verifie :*

$$\|u(t)\|_\infty = 0(t^{-1}\log t)$$

et

$$\|u(t)\|_{m,2} \leq C.$$

Lemme 3.1.9 *Sous les hypotheses du theoreme la solution u verifie :*
oú $r = |x|$.

$$\|rS(-t)u(t)\|_2^2 + 2kt^2\|u(t)\|_4^4 = \|ru_0\|_2^2 \tag{3.10}$$

Preuve. Si l'on considére l'équation $i(\partial u/\partial t)$ + Δ u = $f(|u|^2)u$, où f : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie des conditions de croissance en 0 et à l'infini, on a, en posant $F(s) = \int_0^t f(\sigma)\, d\sigma$ et $G(s)$ = $2F(s)$ - $sf(s)$:

$$\|rS(-t)u(t)\|_2^2+4t^2\int F(|u(t)|^2) = \|rS(-t_0)u(t_0)\|_2^2+4t_0^2\int F(|u(t_0)|^2)+\int_{t_0}^t 8s(\int G(|u(s)|^2))ds.$$

La démonstration nécessite une régularisation et un passage a la limite. Toutefois, si u est réguliére, on peut procéder de la façon suivante : On multiplie l'équation par $2(\partial u/\partial t)$ et on prend la partie réelle. Il vient (dE/dt) = 0ù $E(t) = \|\nabla u(t)\|_2^2 + \int F(|u(t)|^2)$. On multiplie ensuite l'équation par $r^2\overline{u}$ et on prend la partie imaginaire. On trouve : d/dt $\|ru(t)\|_2^2 = 4$ Im $\int r(\partial\overline{u}/\partial r)u$. Multipliant enfin l'équation par $2r(\partial u/\partial r) + \overline{u}$, on obtient en prenant la partie réelle (d/dt) Im $\int$ $r(\partial\overline{u}/\partial r)u$ = 2E - 2 $\int$ $G(|u(t)|^2)$. Notant que d'aprés la représentation intégrale de St on a :

$$xS(-t)u = S(-t)\{(x + 2it\nabla)u\},$$

on en déduit :

$$\|rS(-t)u(t)\|_2^2 = \|ru(t)\|_2^2 + 4t^2(E(t) - \int F(|u(t)|^2)) - 4tIm\int r\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}u.$$

D'où, compte tenu des relations précédentes :

$$\frac{d}{dt}\{\|rS(-t)u(t)\|_2^2 + 4t^2\int F(|u(t)|^2)\} = 8t\int G(|u(t)|^2).$$

■

Lemme 3.1.10 *Sous les hypotheses du theoreme la solution u vérifie :*

$$\|u(t)\|_4 \leq Ct^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

Preuve. On écrit :

$$\|u(t)\|_4 = \|S(t)S(-t)u(t)\|_4 \leq (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\|S(-t)u(t)\|_{\frac{4}{3}}.$$

On a, pour ρ fixé :

$$\|S(-t)u(t)\|\frac{4}{3} \leq \|(\rho^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}S(-t)u(t)\|_2\|(\rho^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}\|_4.$$

Or,

$$\|(\rho^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}\|_4 = \pi\frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{2}}$$

et ;

$$\|(\rho^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} S(-t)u(t)\|_2^2 = \rho^2\|S(-t)u(t)\|_2^2 + \|rS(-t)u(t)\|_2^2$$

$$= \rho^2\|u_0\|_2^2 + \|rS(-t)u(t)\|_2^2.$$

Choisissant $\rho = \|u_0\|_2^{-1}\ \|rS(-t)u(t)\|_2$, on obtient :

$$\|u(t)\|_4 \leq (4\pi)^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|_2^{\frac{1}{2}}\|rS(-t)u(t)\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

Si k ≥ 0, on déduit immédiatement 3.10 de 3.11. Si k < 0, 3.10 donne :

$$\|rS(-t)u(t)\|_2^2 \leq C + \frac{|k|}{2\pi}\|u_0\|_2^2\|rS(-t)u(t)\|_2^2, soit :$$

$$(1 - \frac{|k|}{2\pi}\|u_0\|_2^2)\|rS(-t)u(t)\|_2^2 \leq C, \text{ d'où } (3.11).$$

Démonstration du théoréme. On écrit pour t ≥ 2 :

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)Ju(s)ds.$$

On a donc :

$$\|u(t)\|_\infty \leq t^{-1}\|u_0\|_1 + \int_0^t \|S(t-s)Ju(s)\|_\infty ds.$$

Or :

$$\|S(t-s)Ju(s)\|_\infty \leq C(t-s)^{-1}\|Ju(s)\|_1 = C(t-s)^{-1}\|u(s)\|_3^3$$

$$\leq C(t-s)^{-1}\|u(s)\|_4^2\|u(s)\|_2.$$

Et donc : $\int_0^t \|S(t-s)Ju(s)\|_\infty ds \leq C\int_0^1 (t-s)^{-1}ds \leq Ct^{-1}$, et aussi :

$$\int_1^{t-1} \|S(t-s)Ju(s)\|_\infty ds \leq C\int_1^{t-1} s^{-1}(t-s)^{-1}ds \leq Ct^{-1}\log t.$$

On applique ensuite 3.7. On trouve :

$$\int_{t-1}^t \|S(t-1)Ju(s)\|_\infty ds \leq C\int_{t-1}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_\infty ds$$

$$\leq Ct^{-\frac{1}{2}}\sup_{[t-1,t]}\|u(s)\|_\infty.$$

D'où finalement : $\|u(t)\|_\infty \leq Ct^{-1}\log t + Ct^{-\frac{1}{2}} \sup\limits_{[t-1,t]} \|u(s)\|_\infty$. On pose $M(t) = t(\log t)^{-1}$ $\|u(t)\|_\infty$ et on choisit t_0 tel que $Ct_0^{-\frac{1}{2}} \leq 1_{\overline{2},} t_0 \geq 2$. Alors pour tout t $\geq t_0+1$, on a : $M(t)$ $\leq C + \frac{1}{2} \sup\limits_{[t-1,t]} M(s)$. On reprend l'estimation de $\|u(t)\|_\infty$ obtenue dans la démonstration du théoréme 3.1.4, soit $\|u(t)\|_\infty \leq \|S(t)u_0\|_\infty + Ct^{\frac{1}{2}} \leq Ct^{-1} + Ct^{\frac{1}{2}}$. Il en résulte que : $\sup\limits_{[t_0,t_0+1]} M(s) < \infty$ et donc :

$$\sup_{[t_0,t]} M(s) \leq \sup_{[t_0,t_0+1]} M(s) + \sup_{[t_0+1,t]} M(s) \leq C + \frac{1}{2}\sup_{[t_0,t]} M(s).$$

D'où $\sup\limits_{[t_0,+\infty]} M(s) \leq 2C$. On en déduit $\|u(t)\|_\infty \leq Ct^{-1}\log t$. Lorsque $u_0 \in H^m(\mathbb{R}^2)$, m $\geq$ 2 ,on a :

$$\|u(t)\|_{m,2} \leq \|u_0\|_{m,2} + \int_0^t \|Ju(s)\|_{m,2} ds$$

$$\leq \|u_0\|_{m,2} + C\int_0^t \|u(s)\|_\infty^2 \|u(s)\|_{m,2} ds.$$

Il en résulte : $\|u(t)\|_{m,2} \leq \|u_0\|_{m,2} \exp(C\int_0^{+\infty} \|u(s)\|_\infty^2 ds) \leq Cste.$

■

3.2 NON LINÉARITÉ EN $k|u|^{p-1}u$, $p > 3$:

On peut obtenir, par les mêmes téchniques, des résultats analogues à ceux des paragraphes 3.4 à 3.7 pour une non linéarité du type $k|u|^{p-1}u$, $p > 3$. Nous citons les résultats en donnant des indications sur les démonstrations.

Théorème 3.2.1 *Soient $p > 3$, $T > 0$, $k \geq 0$ et m un entier vérifiant $m \geq 1$ si p est un entier impair, $p \geq m \geq 1$ sinon. Soit $u_0 \in H^m(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe u unique $u \in C^0([0,T], H^m(\mathbb{R}^2)) \cap C^1[0,T], H^{m-2}(\mathbb{R}^2)$ solution de :*

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = k|u|^{p-1}u \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

De plus, vérifie pour tout $t \in [0,T]$:

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2. \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{k}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{k}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.14}$$

Preuve. Pour le cas m ≥ 2 , on procéde comme au théoréme 3.1.4 en utilisant en place de 3.4 et 3.5 les inégalités suivantes :

$$\||u|^{p-1}u\|_{m,2} \leq C\|u\|_{\infty}^{p-1}\|u\|_{m,2}$$

et

$$\||v|^{p-1}v - |u|^{p-1}u\|_{m,2} \leq C(\|v\|_{m,2}^{p-1} + \|u\|_{m,2}^{p-1})\|v-u\|_{m,2}$$

Pour le cas m $= 1$, on procéde comme au théoréme 3.1.8.

■

Remarque 3.2.2 *Dans le cas $k < 0$, on a encore existence globale sous les conditions suivantes :*
(i) $E(u_0) = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{k}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1} > 0$.
(ii) $\|u_0\|_2 E(u_0)^{(p-3)/4} \leq C_1(p)$.
(iii) $C_2(p)\|u_0\|_2^2\|\nabla u_0\|_2^{p-1} - \frac{1}{2}\ |\nabla u_0\|_2^2 + E(u_0) \geq 0$.
(iv) $\|u_0\|_2\|\nabla u_0\|_2^{p-3} \leq [(p-1)C_2(p)]^{-1}$.
En effet, l'existence locale s'établit comme dans le cas $k \geq 0$. u vérifie encore 3.13 et 3.14. Utilisant l'inégalité $\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq C_2(p)\|u\|_2^2\|\nabla u\|_2^{p-1}$,on déduit de 3.14 :

$$f(\|\nabla u(t)\|_2^2) \geq 0, ou f(x) = C_2(p)\|u_0\|_2^2 x^{(p-1)/2} - \frac{1}{2}x + E(u_0).$$

(i) et (ii) assurent que : $\{x \geq 0, f(x) \geq 0\} = [0,a] \cup [b,+\infty[$ avec $a < b$.(iii) et (iv) assurent que : $\|\nabla u_0\|_2^2 \in [0,a]$.$\|\nabla u(t)\|_2$ étant continue, il en résulte que $\|\nabla u(t)\|_2 \leq a$.Notons que les conditions (i) a (iv) peuvent être réalisées, car en choisissant $C_2(p) > (|k|/p+1)$, et $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$,on voit que pour λ assez petit, $u_0 = \lambda u_0$ verifie (i) à (iv).

Théorème 3.2.3 *Soient $k \geq 0$, $p > 3$ et $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $ru_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ $(r = |x|)$. Alors la solution u du probléme 3.12 vérifie, pour $t \to +\infty$*

$$\|u(t)\|_\infty = 0(t^{-1})$$

Si de plus $u_0 \in H^m(\mathbb{R}^2)$ avec $m \geq 2$ si p est un entier impair, $p \geq m \geq 2$ sinon, on a : $\|u(t)\|_{m,2} \leq C$.

Preuve. On procéde comme au théoréme 3.1.8. L'identité de Ginibre et Velo donne (voir lemme 3.1.9) $\|rS(^-t)u(t)\|_2 = \mathrm{C}$. On en deduit comme au lemme 3.1.10 $\|u(t)\|_p \leq Ct^{-(1-(2/p))}$ et on peut poursuivre la démonstration comme au théoréme 3.1.8. Il n'apparait pas ici de $\log t$ car :
$\int_1^{t-1} \|S(t-s)\{|u(s)|^{p-1}u(s)\}\|_\infty ds \leq C\int_1^{t-1}(t-s)^{-1}\|u(s)\|_p^p$
$\leq C\int_1^{t-1}(t-s)^{-1}s^{2-p}ds \leq Ct^{-1}$.
On peut déduire du théoréme 3.2.3 un résultat de comportement asymptotique.plus précis.

■

Corollaire 3.2.4 *Soient $p>3$, $k>0$ et $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $ru_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ $(r=|x|)$. Soit u la solution de (3.14). Alors il existe un unique $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant :*

$$\|u(t) - S(t)u^+\|_{1,2} \leq Ct^{2-p}.$$

On a de plus $u^+ \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et :

$$\|rS(-t)u(t) - ru^+\|_2 \leq Ct^{3-p}.$$

et

$$\|u(t) - S(t)u^+\|_\infty \leq Ct^{2-p}.$$

Enfin, on a $\|u^+\|_2 = \|u_0\|_2$ et $\|\nabla u^+\|_2^2 = \|\nabla u_0\|_2^2 + (2k/p+1)\|u_0\|_{p+1}^{p+1}$.

Preuve. Posons :

$$u^+ = u_0 - i\int_0^{+\infty} S(-s)Ju(s)ds = S(-t)u(t) - i\int_t^{+\infty} S(-s)Ju(s)ds.$$

L'expression a bien un sens car :

$$\|S(-s)Ju(s)\|_{1,2} \leq \|Ju(s)\|_{1,2} \leq \|u(s)\|_\infty^{p-1}\|u(s)\|_{1,2} \leq Ct^{1-p}$$

D'où :$\| \int_0^{+\infty} S(-s)Ju(s)ds\|_{1,2} < +\infty$.On a donc $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et :

$$\|S(t)u^+ - u(t)\|_{1,2} = \|\int_t^{+\infty} S(-s)Ju(s)ds\|_{1,2} \leq C\int_t^{+\infty} s^{1-p}ds \leq Ct^{2-p}$$

Par ailleurs,on a :$\|rS(-t)u(t) - ru^+\|_2 \leq \int_t^{+\infty} \|rS(-t)Ju(s)\|_2 ds$.Or :

$$\begin{aligned}\|rS(-t)Ju(s)\|_2 &= \|(x+2is\nabla)Ju(s)\|_2 \\ &\leq C(\|rJu(s)\|_2 + s\|\nabla Ju(s)\|_2) \\ &\leq C\|u(s)\|_\infty^{p-1}(\|ru(s)\|_2 + s\|u(s)\|_{1,2})\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|ru(s)\|_2 &\leq \|(x+2is\nabla)u(s)\|_2 + 2s\|u(s)\|_2 \\ &\leq \|rS(-s)u(s)\|_2 + 2s\|u(s)\|_{1,2} \\ &\leq C + Cs\end{aligned}$$

Et donc $\|rS(-s)Ju(s)\|_2 \leq Cs^{2-p}$. D'ou $\|rS(-t)u(t) - ru^+\|_2 \leq Ct^{3-p}$. On écrit ensuite :

$$\|u(t) - S(t)u^+\|_\infty \leq \int_t^{+\infty} \|S(t-s)Ju(s)\|_\infty ds.$$

Notant que :

$$\begin{aligned}\|S(t-s)Ju(s)\|_\infty &\leq C(t-s)^{(2/(p+1))-1}\|Ju(s)\|_{(p+1)/p}^{(p-1)/(p+1)}\|\nabla Ju(s)\|_{(p+1)/p}^{2/(p+1)} \\ &\leq C(t-s)^{(2/(p+1))-1}\|u(s)\|_\infty^{p(p-1)/(p+1)}\|u(s)\|_2^{(p-1)/(p+1)}\|u(s)\|_{1,2} \\ &\leq C(t-s)^{(2/(p+1))-1}s^{-p(p-1)/(p+1)},\end{aligned}$$

on en déduit que $\|u(t) - S(t)u^+\|_\infty \leq Ct^{2-p}$. Enfin,

$$|\|u^+\|_2 - \|u_0\|_2| = |\|S(t)u^+\|_2 - \|u(t)\|_2| \leq \|S(t)u^+ - u(t)\|_2 \longrightarrow_{t\to+\infty} 0$$

D'où $\|u^+\|_2 = \|u_0\|_2$. On a de même : $|\|\nabla u^+\|_2$ - $\|\nabla u(t)\|_2| \longrightarrow_{t\to+\infty} 0$ Comme par ailleurs $\|u(t)\|_{p+1} \longrightarrow_{t\to+\infty} 0$, on déduit de 3.14 que :

$$\|\nabla u^+\|_2^2 = \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{k}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1}$$

Pour prouver l'unicité, supposons u^+ et v^+ deux solutions. On a :

$$\|u^+ - v^+\|_2 = \|S(t)u^+ - S(t)v^+\|_2 \leq \|S(t)u^+ - u(t)\|_2 + \|S(t)v^+ - u(t)\|_2 \to_{t\to+\infty} 0.$$

D'où $u^+ = v^+$.

■

CONCLUSION

L'objectif principal de ce travail est d'étudier les problèmes semi-linéaires $u'(t) = Au(t) + f(u(t))$, t $\in [0, T]$ tel que A : D(A) $\subseteq$ X $\longrightarrow$ X est un opérateur linéaire fermé densément défini sur un réel ou espace de Banach complexe X, soit T $>$ 0 et f $\in L^1(T, X)$ si A est générateur de $C_0 semi-groupedebornesoprateurslinaires$(T(t))$_{t \geq 0}$ a une unique solution continue vérifiant u(0) $=$ x et que u est donné par
$u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))$ ds, $\forall$ t $\in [0, T]$.
Enfin nous avons exposé comme application , l'équation de Schrödinger non linéaire.

Bibliographie

[1] A.Pazy, Semigroups of linear Operators and Applications to Partial differential équations. Springer- Verlag 1983.

[2] A.Pazy and M.G.Crandall, Semi-Groups of nonlinear contractions and dissipative sets, Journal of Functional Analysis 3, 376-418 (1969).

[3] F.Dardalhon, Le théoréme de Hille-Yosida et ses applications aux problémes d'évolution semi-linéaires, juin 2006.

[4] H.Brezis. Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[5] H.Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland mathematics studies, 5, 1973.

[6] J. Pierre Raymond. Équations d'évolution. Résumé de la premiére partie du cours du module A0 du DEA de mathématiques appliquées. Université Paul Sabatier.

[7] J.P.Marco, Mathématiques L3. Analyse. 47 bis. Rue des vinaigriers 75010 Paris. Juin 2009.

[8] K.Jochen Engel Rainer Nagel. One-parameter semigroups for linear evolution équations, Springer.

[9] L.Den Lemel . Autour des propriétés spectrales des semi-groupes. Lecturas Matematicas. Volum 31(2010).

[10] K.Engel and R.Nagel, Short course on semigroups. Springer, 2010.

[11] L.Den Lemel. Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et applications. Mathematics. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2007. French.

[12] M.G.Crandall and T.M. Liggett, Generation of Semi-Groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, American Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 2 (Apr., 1971), pp. 265-298.

[13] N.U.Ahmed, Semigroup theory with applications to systems and control. Logman Scientific and Technical. London 1991.

[14] O.Heaviside. physicien britannique autodidacte.(1850 - 1925).

[15] S.Lvovitch, Sobolev est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique.(6 octobre 1908).

[16] T.Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problémes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, 1990.

[17] T.Cazenave. Équations de Schrödinger non linéaires en dimension deux. Université Pierre et Marie Curie. Laboratoire Analyse Numérique,4 place Jussieu, Paris, France 1979.

Résumé :

Ce mémoire est consacrée à la présentation d'une étude théorique de l'équation de Schrödinger non linéaire, dans laquelle nous avons discutés on équation d'après les données primaires. Dans la partie théorique nous prouvons l'approche d'orbite homocline en utilisant les propriétés des systèmes planaires réversible.

Mots clés: équation de Schrödinger non linéaire (NLS), orbite homocline, équation de Schrödinger non linéaire discrète (DNLS), système planaire réversible.

Abstract :

This memory is devoted to the presentation of a theoretical study of the nonlinear Schrödinger equation, in which we have discussed its equation according to the primary data. In the theoretical part we prove the approach of homoclinic orbit by using the properties of reversible planar systems.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation (NLS), homoclinic orbit, discrete non linear Schrödinger equation (DNLS). reversible planar system.

ملخص

هذه المذكرة مكرسة لتقديم دراسة نظرية لمعادلة شرودينجر الغير الخطية. حيث قمنا بمناقشة معادلتها وفقا لبيانات الأولية . و في الجانب النظري نثبت وجود المدارات باستعمال خصائص النظم العكسية.

كلمات مفتاحية : معادلة شرودنجر الغير خطية ،المدارات ،معادلة شرودنجر المتقطعة الغير خطية النظم العكسية .