



# جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات وعلوم مادة  
قسم الرياضيات  
ماستر

مسار: رياضيات واطلام آلي  
فرع: رياضيات  
تخصص: تحليل دالي

من إعداد الطالبة: إيمان رزاق هبلة

## الموضوع

التقريب بدوال القطع النبضية  
والتعديلات المدخلة عليها

نوقشت يوم 15 جوان 2023 من طرف أعضاء اللجنة

جامعة قاصدي مرباح ورقلة رئيسا  
جامعة قاصدي مرباح ورقلة ممتحنا  
جامعة قاصدي مرباح ورقلة مشرفا

الرتبة أستاذ M.C.B  
الرتبة أستاذ M.C.B  
الرتبة أستاذ M.A.A

معمرى محمد  
بن الشيخ عبد الكريم  
عباسى حسين

## شكر و عرفان

نحمدك ربي ونشكرك على ما تفضلت علينا من واسع فضلك و مسالك  
ربي بعزتك وجلالك أن تتقبل مني هذا العمل خالصا لوجهك الكريم...  
اللهم علما ما ينفعنا بما علمتنا وزدنا علما

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم

" من لم يشكر الناس لم يشكر الله ومن أهدى  
إليكم معروفا فكافته, فان لم تستطيعوا فأدعوه "

كما لا يفوتنا أن نتقدم بالشكر والامتنان إلى الوالدين الكريمين اللذان  
دعمونا في دراستنا من كل الجوانب نفسيا ومعنويا أكثر منها ماديا.  
من هذا المنطلق واعترافا بالجميل يطيب لنا أن نتقدم بجزيل الشكر إلى  
أستاذي الكريم المشرف على هذا البحث الأستاذ "عباسي حسين" الذي  
تكرم بإشرافه على هذا العمل وعلى إرشاداته وتوجيهاته القيمة ومشكورا  
بالنصح مساهما بكل ما لديه من جهود الذي لم يخل علينا بدعمه وتشجيعه  
لنا طيلة انجاز هذا العمل. وكما نشكر جميع أساتذة تخصص رياضيات,  
وإلى كل من ساهم ولو بالكلمة الطيبة في إعداد هذا العمل الذي  
نتمى أن يخدم المجتمع الجزائري سائلين المولى تبارك وتعالى أن يجزيهم  
عنا وعن الأمة الإسلامية كل الخير وانه ولي ذلك والقادر عليه..

## الإهداء

الحمد لله وكفى والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى  
أما بعد:

الحمد لله الذى وفقني لتثمين هذه الخطوة في مسيرتي الدراسية بمذكرتي  
هذه، ثمرة الجهد والنجاح بفضلته تعالى مهداة الى الوالدين الكريمين  
حفظها الله وأدامهما نور دربي، علموني أن الحياة مليئة بالمعارك  
الصغيرة منتصرون خاسرون، الحرب مستمرة حتى تقدموا في السن.  
الدراسات هي تدريباتي.

الشهادات ستكون أسلحتي القتالية.

المثابرة والإجتهد سيكونان سر مجدي المتوج .  
الحب والصدقة راحة الجندي .  
شكرا لكم ،

لقد حققت إبتكم نجاحا كبيرا...أحبكم.  
لكل العائلة الكريمة التي ساندتني ولا تزال إخوة  
وأخوات (محمد، ناصر، يوسف، عمار، أيوب، زهية  
،ميرا، عائشة، حليلة، مسعودة).

إلى رفيفات المشوار اللاتي قاسمنني لحظاته رعاهن الله  
ووقفهن (بثينة ،شروق، حورية، أميمة، خديجة، سهير ...).  
وإلى كل شخص قابلته وساعدني .  
وإلى كل من أحبهم قلبي ونسيهم قلبي.

# الفهرس

1	الدوال القطع النبضية	1
2	1.1 الدوال القطع النبضية (BPF's) . . . . .	1.1
2	1.1.1 دوال القطع النبضية ذات متغير واحد . . . . .	1.1.1
5	2.1.1 الدوال القطع النبضية ذات متغيرين . . . . .	2.1.1
7	2.1 تقرب التوابع . . . . .	2.1
7	1.2.1 تقرب تابع ذو متغير . . . . .	1.2.1
16	2.2.1 تقرب تابع ذو متغيرين . . . . .	2.2.1
20	3.1 مصفوفة العمليات . . . . .	3.1
20	1.3.1 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغير . . . . .	1.3.1
23	2.3.1 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغيرين . . . . .	2.3.1
25	2 الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ والمزاحة ب $\varepsilon$	2
26	1.2 الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ (IBPFs) . . . . .	1.2
26	1.1.2 دوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ ذات متغير . . . . .	1.1.2
27	2.1.2 دوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ ذات متغيرين . . . . .	2.1.2
28	3.1.2 تقرب التوابع . . . . .	3.1.2
31	4.1.2 مصفوفات العمليات . . . . .	4.1.2
35	2.2 الدوال القطع النبضية المزاحة ب $\varepsilon$ ( $\varepsilon$ MBPFs) . . . . .	2.2
35	1.2.2 الدوال القطع النبضية المزاحة ب $\varepsilon$ . . . . .	1.2.2
36	2.2.2 تقرب التوابع . . . . .	2.2.2
38	3.2.2 مصفوفات العمليات . . . . .	3.2.2
42	3 تطبيقات حول الدوال القطع النبضية وتعديلاتها	3
43	1.3 تقرب تابع . . . . .	1.3
43	1.1.3 تقرب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية . . . . .	1.1.3
43	2.1.3 تقرب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ . . . . .	2.1.3
44	3.1.3 تقرب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية المزاحة ب $\varepsilon$ . . . . .	3.1.3



## مقدمة

تمت دراسة الدوال القطع النبضية وتطبيقها على نطاق واسع كمجموعة أساسية من الدوال لتوصيف الإشارات في علم الأنظمة والتحكم فيها، تظهر كل هذه الدراسات والتطبيقات أن الدوال القطع النبضية قد يكون لها مزايا التي تتضمن التكاملات والمشتقات بسبب وضوحها في التعبيرات وبساطتها في الصياغات. بعد تحويل المسائل الأصلية إلى التعبيرات الجبرية المقابلة لها ، يمكن حساب الحلول التقريبية ، بهذه الطريقة ، يمكن استخدام الدوال القطع النبضية في العديد من التطبيقات الهندسية مثل تحليل الاشارات الرقمية ومعالجتها. [1][2][3]

كما يعتبر هذا الموضوع ليس جديدا وإنما تم دراسته ومناقشته في جامعة قاصدي مرباح ورقلة من قبل مذكرة عنوانها (الدوال القطع النبضية ذات متغيرين وتطبيقها في حل المعادلات التكاملية غير الخطية، حل عددي للمعادلات التفاضلية التكاملية ذات رتب كسرية باستعمال دوال مهبجنة (دوال القطع النبضية وكثيرات حدود جاكوبي)) ، إلا أنهما لم يتطرقا الى التعديلات المدخلة على هذه الدوال والتي سنتطرق إليها في هذه المذكرة ونرى مدى فعاليتها من خلال الأمثلة . [1][2]

يمكن إدخال تعديلات على الدوال القطع النبضية من أجل تحسين التقريبات .

سنتطرق في هذه المذكرة الى

الفصل الأول: دراسة الدوال القطع النبضية ذات متغير وذات متغيرين ودراسة خصائصها وتقديم شكلها، وكيفية تقريب تابع ذو متغير و تابع ذو متغيرين , ودراسة مصفوفات العملياتها وذلك من خلال تعيين المصفوفة التنفيذية لتكامل .

الفصل الثاني: مقسم الى جزئين

الجزء الأول: دراسة الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$  ذات متغير وذات متغيرين ، ودراسة خصائصها , وكيفية تقريب تابع , ودراسة مصفوفات العمليات وذلك من خلال تعيين المصفوفة التنفيذية لتكامل .

الجزء الثاني: دراسة الدوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$  ذات متغير وذات متغيرين ، ودراسة خصائصها , وكيفية تقريب تابع , ودراسة مصفوفات العمليات وذلك من خلال تعيين المصفوفة التنفيذية لتكامل .

الفصل الثالث: إعطاء أمثلة وتطبيق عليها التقريبات الثلاث ورسمهم في برنامج الماطلاب وإستنتاج أحسن تقريب .

# الفصل 1

## الدوال القطع النبضية

### قائمة المحتويات

---

2	.....	الدوال القطع النبضية (BPF's)	1.1
2	.....	دوال القطع النبضية ذات متغير واحد	1.1.1
5	.....	الدوال القطع النبضية ذات متغيرين	2.1.1
7	.....	تقريب التوابع	2.1
7	.....	تقريب تابع ذو متغير	1.2.1
16	.....	تقريب تابع ذو متغيرين	2.2.1
20	.....	مصفوفة العمليات	3.1
20	.....	المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغير	1.3.1
23	.....	المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغيرين	2.3.1

---

## 1.1 الدوال القطع النبضية (BPF's)

## مقدمة:

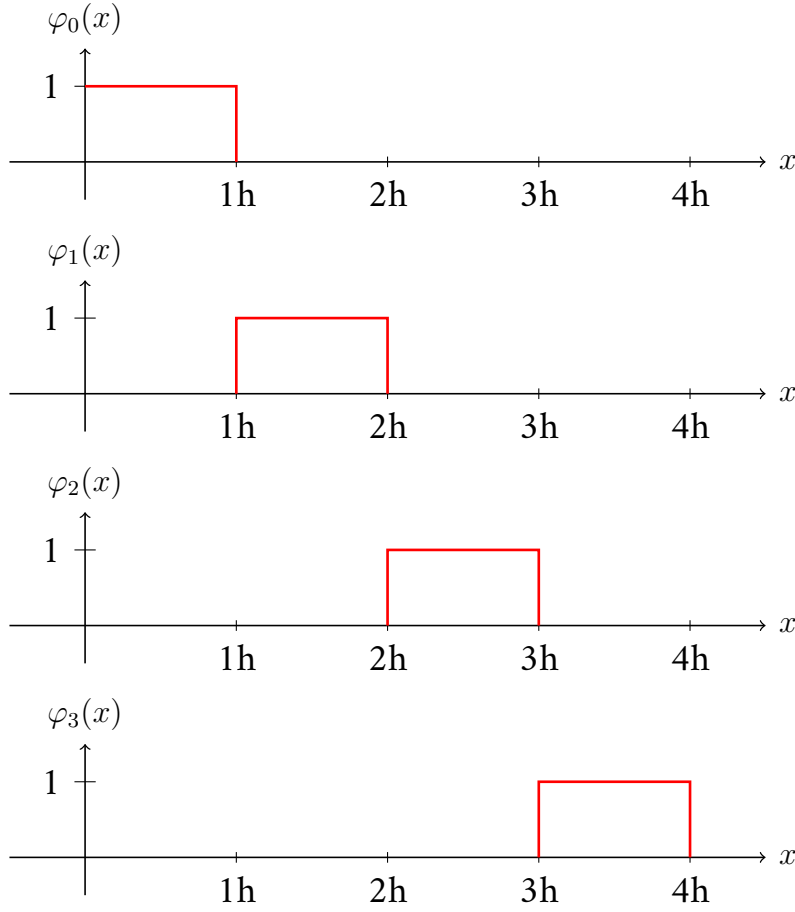
إن دوال القطع النبضية [1] [2] هي مجموعة دوال متعامدة ذات قيم ثابتة على كل مجال جزئى ، وهي عادة تستخدم كطريقة مفيدة في التحليل ، ومسائل التحكم والأنظمة العلمية الأخرى ، قدمت هذه المعادلات لأول مرة لمهندسي الكهرباء عن طريق هرميت في عام 1969 ، حيث قام بعض الباحثين بدراسة دوال القطع النبضية ومصنوفة عملياتها الخاصة بالتكامل لازالة تعقيد العبارات في حل مختلف مسائل التحكم بواسطة دوال والش . منذ ذلك الوقت ، أصبحت دوال القطع النبضية تطبق على نطاق واسع لبساطتها وسهولة عملياتها .

## 1.1.1 دوال القطع النبضية ذات متغير واحد

تعريف 1.1.1 نقسم المجال لتقسيمات متساوية و نعرف على كل مجال جزئى الدالة  $\varphi$  معرفة على  $[0, T)$  كيلي :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \frac{iT}{m} \leq x \leq \frac{(i+1)T}{m}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.1)$$

- حيث  $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$  و  $m$  عدد صحيح موجب .
- سنعمد في المذكرة أن يكون  $T = 1$  .
- في مايلى الانشاء الهندسي لدوال القطع النبضية من أجل  $m = 4$  .


 شكل 1.1: دوال القطع النبضية ( $m = 4$ )

## ملاحظة 1.1.1 [2][3]

إن دوال القطع النبضية هي دوال متعامدة ولكن ليست متجانسة وتكون هذه الدوال متعامدة و متجانسة من الشكل التالي :

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \sqrt{m}, & \frac{i}{m} \leq x \leq \frac{(i+1)}{m}, \\ 0, & \text{nonsi}, \end{cases} \quad (2.1)$$

حيث  $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$  و  $m$  عدد صحيح موجب .

دوال القطع النبضية ذات متغير واحد تحقق الخواص التالية: [3][4]

1. الفصل :

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.1)$$

حيث  $i, j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$

2. التعامد:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)d(x) = h\delta_{ij}, \quad (4.1)$$

حيث  $h = \frac{1}{m}$  و  $\delta_{ij}$  هي دالة كرونكر.



3. تامة: أي من اجل كل  $f \in L^2([0, 1])$  اذا كان  $\int_0^1 \varphi_i(x)f(x)d(x) = 0$  فانه يستلزم  $f = 0$  حيثما كان.  
لما  $m$  تؤول الى  $\infty$  تصبح الخاصية كالتالي :

$$\int_0^1 f_i^2(t)d(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 \|\varphi_i(t)\|^2, \quad (5.1)$$

كذلك

$$\|\varphi_i(t)\|^2 = \int_0^1 \varphi_i(t)^2 dt, \quad (6.1)$$

بحيث

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 f(t)\varphi_i(t)dt, \quad (7.1)$$

إن مجموعة الدوال القطع النبضية تشكل أساس للدوال المستمرة المعرفة على المجال  $[0, 1]$ ، يمكن كتابة أساس الدوال القطع النبضية على شكل شعاع كما يلي: [1]

$$\Phi(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)]^T, \quad (8.1)$$

حيث  $x \in [0, 1]$ .

في هذه الحالة الخاصية (1) تصبح: [5]

$$\Phi(x)\Phi^T(x) = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{m-1}(x) \end{pmatrix}.$$

$$\int_0^1 \Phi(x)\Phi^T(x)dt = \begin{pmatrix} h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h \end{pmatrix} = h * I = D.$$

$$\Phi^T(x)\Phi(x) = 1.$$

ليكن  $X$  شعاع ذات  $m$  عنصر. [5]

$$\Phi(x)\Phi^T(x)V = \tilde{V}\Phi(x), \quad (9.1)$$

$$\tilde{V} = \text{diga}(V_i^T \varphi_i(x)),$$

بحيث  $\tilde{V}$  مصفوفة ذات الرتبة  $(m \times m)$  الناتجة من جداء أساس الدوال القطع النبضية في منقولة في شعاع كفي  $V$  كمايلي: [1]

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} V_0^T \varphi_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_1^T \varphi_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_{m-1}^T \varphi_{m-1}(x) \end{pmatrix}.$$

أما في حالة إذا كان  $V$  مصفوفة ولتكن  $G$  مصفوفة ذات الرتبة  $(m \times m)$  يكون الناتج كما يلي [5] :

$$\phi^T(x)G\Phi(x) = \hat{G}^T\Phi(x), \quad (10.1)$$

حيث  $\hat{G}$  عبارة عن شعاع ذات  $m$  عنصر. [1]  
أي

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \varphi_1 a_{11} + \varphi_2 a_{12} + \cdots + \varphi_m a_{1m} \\ \vdots \\ \varphi_1 a_{m1} + \varphi_2 a_{m2} + \cdots + \varphi_m a_{mm} \end{pmatrix}.$$

## 2.1.1 الدوال القطع النبضية ذات متغيرين

تعريف 2.1.1 [1][2]

نعرف دوال القطع النبضية ذات متغيرين حيث  $x \in [0, T_1)$ ,  $s \in [0, T_2)$  كما يلي :

$$\varphi_{i,j}(x, s) = \begin{cases} 1, & \frac{iT_1}{m_1} \leq x \leq \frac{(i+1)T_1}{m_1}, \frac{iT_2}{m_2} \leq s \leq \frac{(i+1)T_2}{m_2}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (11.1)$$

و  $i = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1$  عددان صحيحان موجبان .

في مايلي نأخذ  $T_2 = 1$ ,  $T_1 = 1$  و  $h_2 = \frac{1}{m_2}$ ,  $h_1 = \frac{1}{m_1}$

تحقق دوال القطع النبضية ذات متغيرين الخواص التالية: [3]

1. الفصل:

$$\varphi_{i,j}(x, s)\varphi_{k,l}(x, s) = \begin{cases} \varphi_{i,j}(x, s), & i = j, k = l, \\ 0, & i \neq j, k \neq l, \end{cases} \quad (12.1)$$

حيث  $k, l = 1, 2, \dots, m_2 - 1$  و  $i, j = 1, 2, \dots, m_1 - 1$

2. التعامد :

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{i,j}(x, s)\varphi_{k,l}(x, s)dx ds = \begin{cases} h_1 h_2, & i = j, k = l, \\ 0, & i \neq j, k \neq l, \end{cases} \quad (13.1)$$

3. تامة : أي من أجل كل  $f \in L^2([0, 1) \times [0, 1))$  إذا كان  $\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{i,j} f(x, s)dx ds = 0$  فإنه يستلزم

$f = 0$  حيثما كان . ولما  $m_2$  و  $m_1$  تؤول إلى  $\infty$  تصبح الخاصية كالتالي .

$$\int_0^1 \int_0^1 f_{ij}^2(x, s)ds dx = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_i^2 \|\varphi_{i,j}(x, s)\|^2, \quad (14.1)$$

بحيث

$$f_{i,j}(x, s) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^1 \int_0^1 f(x, s)\varphi_{i,j}(x, s)ds dx, \quad (15.1)$$

## ملاحظة 2.1.1 [1]

كل دالة من دوال القطع النبضية ذات متغيرين يمكن التعبير عنها بجداء دالتين من دوال القطع النبضية ذات متغير واحد كالتالي :

$$\varphi_{i,j}(x, s) = \varphi_i(x) \otimes \varphi_j(s), \quad (16.1)$$

بحيث  $\otimes$  يدل على جداء كرونكر.

$$\Phi(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)]^T, \quad (17.1)$$

•  $\varphi_j(x)$  و  $\varphi_i(x)$  هما دوال القطع النبضية ذات متغير واحد ذات البعد  $m_1$  و  $m_2$  على التوالي .  
\* إن مجموعة الدوال القطع النبضية ذات متغيرين يمكننا كتابتها على شكل شعاع ذات البعد  $(m \times m)$  عنصر [1].  
(18.1)

$$\varphi_{i,j}(x, s) = [\varphi_{0,0}(x, s), \dots, \varphi_{0,m_2}(x, s), \dots, \varphi_{m_1,0}(x, s), \dots, \varphi_{m_1-1,m_2-1}(x, s)]^T,$$

حيث  $(x, s) \in ([0, 1) \times [0, 1))$

في هذه الحالة الخاصية (1) تصبح: [1]

$$\Phi(x, s)\Phi^T(x, s) = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0}(x, s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_{1,1}(x, s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{m_1-1,m_2-1}(x) \end{pmatrix}.$$

ليكن  $X$  شعاع ذات  $m_2m_1$  عنصر .

$$\Phi(x, s)\Phi^T(x, s)X = \tilde{X}\Phi(x, s), \quad (19.1)$$

بحيث  $\tilde{X}$  مصفوفة ذات الرتبة  $(m_1m_2) \times (m_1m_2)$  الناتجة من جداء أساس الدوال القطع النبضية في منقولة في شعاع كيني  $X$  كمايلي :

إضافة الى ذلك يمكننا الإستنتاج بوضوح أنه من أجل كل  $(m_1m_2) \times (m_1m_2)$  مصفوفة  $A$ .

$$\varphi^T(x, s)A\varphi(x, s) = \hat{A}^T\varphi(x, s), \quad (20.1)$$

حيث  $\hat{A}$  هي عبارة عن شعاع ذات  $m_1m_2$  عنصر .

## 2.1 تقريب التوابع

### 1.2.1 تقريب تابع ذو متغير

تقريب تابع بإستعمال وال القطع النبضية ذو متغير

بأن  $\Phi$  أساس للفضاء  $L^2([0,1])$  يمكننا تقريب تابع ذات متغير واحد بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية ذات متغير [1][3]  $f(x) \in L^2([0,1])$  الآن ليكن يمكننا تقريبه باستعمال أساس الدوال القطع النبضية بالشكل التالي:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} f_i \varphi_i(x) = F^T \Phi(x) = \Phi^T(x) F, \quad (1.1)$$

حيث

$$F^T = [f_0, f_1, \dots, f_{m-1}], \quad (2.1)$$

و

$$\Phi^T(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)], \quad (3.1)$$

و

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 f(t) \varphi_i(t) dt, \quad (4.1)$$

خواص تقريب تابع بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية

1. الدالة الثابتة:

من أجل  $f(x) = k$ , يمكننا تحليل ثابت بإستعمال سلسلة الدوال القطع النبضية كيلي: [3]

$$k = k \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i(x), \quad (5.1)$$

أما في حالة إذا كان  $k$  شعاع يكون تحليله كيلي :

$$k = [k, k, k, \dots, k] \Phi(x) = k E^T \Phi(x), \quad (6.1)$$

حيث

$$E = [1, 1, 1, 1, \dots, 1]^T$$

2. جداء دالة في ثابت:

يمكننا نشر جداء دالة ذات متغير في ثابت حقيقي بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية

$$\begin{aligned}
 kf(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} (kf_i)\varphi_i(x) \\
 &= k \sum_{i=0}^{m-1} f_i\varphi_i(x),
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

أما في حالة إذا كان  $f(x)$  شعاع يكون تحليله كايلى:

$$\begin{aligned}
 kf(x) &= k(f_0, f_1, \dots, f_{m-1})\phi(x) \\
 &= kF^T\Phi(x),
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

### 3. جمع وطرح دالتين

لتكن الدالتين  $f$  و  $g$  يمكننا نشر مجموعهما أو طرحهما بدلالة سلسلة الدوال القطع النبضية كايلى: [3]

$$\begin{aligned}
 f(x) \pm g(x) &= \left( \sum_{i=0}^{m-1} f_i\varphi_i(x) \right) \pm \left( \sum_{i=0}^{m-1} g_i\varphi_i(x) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} (f_i \pm g_i)\varphi_i(x),
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

أما في حالة إذا كان  $f$  و  $g$  شعاعين يكون تحليلهما كايلى:

$$\begin{aligned}
 f(x) \pm g(x) &= (f_0 \pm g_0, f_1 \pm g_1, \dots, f_{m-1} \pm g_{m-1}) \\
 &= (F^T \pm G^T)\Phi(x),
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

### 4. جداء وقسمة دالتين

لتكن الدالتين  $f$  و  $g$  يمكننا نشر جداءهما أو قسمة أحدهما على الأخر بدلالة سلسلة الدوال القطع النبضية كايلى: [3][1]

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= \left( \sum_{i=0}^{m-1} f_i\varphi_i(x) \right) \left( \sum_{i=0}^{m-1} g_i\varphi_i(x) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} (f_i g_i)\varphi_i(x),
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

في حالة إذا كان  $g \neq 0$  يمكننا أيضا تحليل  $(f/g)$  كايلى:

$$\begin{aligned}
 f(x)/g(x) &= \left( \sum_{i=0}^{m-1} f_i\varphi_i(x) \right) / \left( \sum_{i=0}^{m-1} g_i\varphi_i(x) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} (f_i/g_i)\varphi_i(x),
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

أما في حالة إذا كان  $f$  و  $g$  أشعة يكون تحليله كما يلي:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f_0g_0, f_1g_1, \dots, f_{m-1}g_{m-1})\Phi(x) \\ &= F^T D_G \Phi(x) \\ &= G^T D_F \Phi(x) \\ &= E^T D_F D_G \Phi(x), \end{aligned} \quad (13.1)$$

و

$$\begin{aligned} f(x)/g(x) &= (f_0/g_0, f_1/g_1, \dots, f_{m-1}/g_{m-1})\Phi(x) \\ &= F^T D_G^{-1} \Phi(x), \end{aligned} \quad (14.1)$$

بحيث  $D_G$  و  $D_F$  هي مصفوفات قطرية بدلالة معاملات الدوال القطع النبضية للأشعة  $F$  و  $G$  على التوالي:

توطئة 1.2.1 [1]

في حالة إذا كان رتبة الدالة ذات المتغير أكبر من أو تساوي الواحد نستعمل الشعاعين  $X$  و  $X_n$  معاملات بدلالة الدوال القطع النبضية لدوال  $[x(s)]^n$  و  $x(s)$  على التوالي:

الآن نعرف  $X$  و  $X_n$  كما يلي:

$$X^T = [x_0, x_1, \dots, x_{m-1}], \quad (15.1)$$

كذلك

$$X_n^T = [x_0^n, x_1^n, \dots, x_{m-1}^n], \quad (16.1)$$

بحيث  $n \geq 1$  عدد صحيح موجب .  
برهان من أجل  $n = 1$

$$[x(s)]^n = x(s)$$

محققة

الآن نبرهن من أجل  $n + 1$

$$\begin{aligned} [x(s)]^{n+1} &= x(s)[x(s)]^n \\ &= X X_n \approx (X^T \Phi(s))(X_n^T \Phi(s)) \\ &\approx X^T \Phi(s) \Phi(s)^T X_n \\ &= X^T \tilde{X}_n \Phi(s), \end{aligned}$$

الآن باستخدام المعادلة (16.1) نجد

$$X^T \tilde{X}_n = [x_0^{n+1}, x_1^{n+1}, \dots, x_{m-1}^{n+1}],$$

إذن بناء عن المعادلة (16.1) من أجل  $n + 1$  هذه التوطئة محققة في تقريب التتابع ذات المتغير الواحد.



مثال 1.2.1 تقريب تابع  $f(x)$  ذات متغير واحد بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية حيث  $f(x) = 2x^2$  الآن نقوم بتقريب هذا التابع من أجل  $m = 4$

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^3 f_i \varphi_i(x) = F^T \Phi(x),$$

بحيث

$$F^T = [f_0, f_1, f_2, f_3],$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \frac{i}{4} \leq x \leq \frac{(i+1)}{4}, \\ 0 & \text{nonsi} \end{cases}$$

الآن نقوم بحساب  $\varphi_i(x)$  وبحساب التوابع  $f_i$ 

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{nonsi}, \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{nonsi}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{nonsi}, \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{nonsi}, \end{cases}$$

حساب التوابع  $f_i$ 

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dt$$

$$f_0 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} 2x^2 dx = \frac{1}{24}$$

$$f_1 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2x^2 dx = \frac{7}{24}$$

$$f_2 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x^2 dx = \frac{19}{24}$$

$$f_3 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 2x^2 dx = \frac{37}{24}$$

ومنه

$$f(x) = \frac{1}{24} \varphi_0(x) + \frac{7}{24} \varphi_1(x) + \frac{19}{24} \varphi_2(x) + \frac{37}{24} \varphi_3(x)$$

مثال 2.2.1 جمع وطرح دالتين

تقريب تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  ذات متغير بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية حيث  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = x$  على التوالي .

الآن نقوم بتقريب هذا التابع من أجل  $m = 4$

$$f(x) \pm g(x) = \left( \sum_{i=0}^3 f_i \varphi_i(x) \right) \pm \left( \sum_{i=0}^3 g_i \varphi_i(x) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^3 (f_i \pm g_i) \varphi_i(x)$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

الآن نقوم بحساب التوابع  $f_i$  و  $g_i$   
حساب التوابع  $f_i$

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

$$f_0 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} x^2 dx = \frac{1}{48}$$

$$f_1 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{7}{48}$$

$$f_2 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x^2 dx = \frac{19}{48}$$

$$f_3 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 x^2 dx = \frac{37}{48}$$

حساب التوابع  $g_i$

$$g_i = \frac{1}{h} \int_0^1 g(x) \varphi_i(x) dx$$

$$g_0 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} x dx = \frac{1}{8}$$

$$g_1 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{3}{8}$$

$$g_2 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x dx = \frac{5}{8}$$

$$g_3 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 x dx = \frac{7}{8}$$





$$f(x) \pm g(x) = \left(\frac{1}{48} \pm \frac{1}{8}\right)\varphi_0(x) + \left(\frac{7}{48} \pm \frac{3}{8}\right)\varphi_1(x) + \left(\frac{19}{48} \pm \frac{5}{8}\right)\varphi_2(x) + \left(\frac{37}{48} \pm \frac{7}{8}\right)\varphi_3(x)$$

حساب  $(f \pm g)(x)$  للمقارنة مع  $f(x) \pm g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^2 + x \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$$h(x) \approx \sum_{i=0}^3 h_i \varphi_i(x) = H^T \Phi(x)$$

$$H^T = [h_0, h_1, h_2, h_3]$$

$$h_i = \frac{1}{h} \int_0^1 h(x) \varphi_i(x) dx$$

$$h_0 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} (x^2 + x) dx = \frac{7}{48}$$

$$h_1 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x^2 + x) dx = \frac{25}{48}$$

$$h_2 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x^2 + x) dx = \frac{49}{48}$$

$$h_3 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 (x^2 + x) dx = \frac{79}{48}$$

ومنه

$$h(x) = \frac{7}{48}\varphi_0(x) + \frac{25}{48}\varphi_1(x) + \frac{49}{48}\varphi_2(x) + \frac{79}{48}\varphi_3(x)$$

إذن

$$f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x)$$

مثال 3.2.1 جداء وقسمة دالتين

تقريب تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  ذات متغير بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية حيث  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = x$  على التوالي .

الآن نقوم بتقريب هذا التابع من أجل  $m = 4$  .

جداء دالتين

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} f_i \varphi_i(x)\right) \left(\sum_{i=0}^{m-1} g_i \varphi_i(x)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f_i g_i) \varphi_i(x) \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$



$$\varphi_1 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

لدينا مما سبق من (المثال 2.2.1)

$$F^T = \left[ \frac{1}{48}, \frac{7}{48}, \frac{19}{48}, \frac{37}{48} \right]$$

$$G^T = \left[ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right]$$

ومنه

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\frac{1}{48} \times \frac{1}{8}\right)\varphi_0(x) + \left(\frac{7}{48} \times \frac{3}{8}\right)\varphi_1(x) + \left(\frac{19}{48} \times \frac{5}{8}\right)\varphi_2(x) + \left(\frac{37}{48} \times \frac{7}{8}\right)\varphi_3(x) \\ &= \left(\frac{1}{384}\right)\varphi_0(x) + \left(\frac{21}{384}\right)\varphi_1(x) + \left(\frac{95}{384}\right)\varphi_2(x) + \left(\frac{259}{384}\right)\varphi_3(x) \end{aligned}$$

قسمة دالتين

$$\begin{aligned} f(x)/g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} f_i \varphi_i(x)\right) / \left(\sum_{i=0}^{m-1} g_i \varphi_i(x)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f_i/g_i) \varphi_i(x) \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} f(x)/g(x) &= \left(\frac{1}{48} \div \frac{1}{8}\right)\varphi_0(x) + \left(\frac{7}{48} \div \frac{3}{8}\right)\varphi_1(x) + \left(\frac{19}{48} \div \frac{5}{8}\right)\varphi_2(x) + \left(\frac{37}{48} \div \frac{7}{8}\right)\varphi_3(x) \\ &= \frac{1}{6}\varphi_0(x) + \frac{7}{18}\varphi_1(x) + \frac{19}{30}\varphi_2(x) + \frac{37}{42}\varphi_3(x) \end{aligned}$$

حساب  $(fg)(x)$  و  $(f/g)(x)$  للمقارنة مع  $f(x)g(x)$  و  $f(x)/g(x)$  على التوالي .

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= x^3 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

الآن نقوم بتقريب التابع  $h(x)$  من أجل  $m = 4$

$$h(x) \approx \sum_{i=0}^3 h_i \varphi_i(x) = H^T \Phi(x)$$

$$H^T = [h_0, h_1, h_2, h_3]$$

$$h_i = \frac{1}{h} \int_0^1 h(x) \varphi_i(x) dt$$

$$h_0 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} x^3 dx = \frac{1}{256}$$

$$h_1 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x^3 dx = \frac{15}{256}$$

$$h_2 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x^3 dx = \frac{65}{256}$$

$$h_3 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 x^3 dx = \frac{175}{256}$$

ومنه

$$h(x) = \frac{1}{256}\varphi_0(x) + \frac{15}{256}\varphi_1(x) + \frac{65}{256}\varphi_2(x) + \frac{175}{256}\varphi_3(x)$$

إذن

$$f(x)g(x) \neq (fg)(x)$$

حساب  $(f/g)(x)$ 

$$\begin{aligned} (f/g)(x) &= x \\ &= t(x) \end{aligned}$$

الآن نقوم بتقريب التابع  $t(x)$  من أجل  $m = 4$ 

$$t(x) \approx \sum_{i=0}^3 t_i \varphi_i(x) = T^T \Phi(x)$$

$$T^T = [t_0, t_1, t_2, t_3]$$

$$t_i = \frac{1}{h} \int_0^1 t(x) \varphi_i(x) dx$$

$$t_0 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} x dx = \frac{1}{8}$$

$$t_1 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{3}{8}$$

$$t_2 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x dx = \frac{5}{8}$$

$$t_3 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 x dx = \frac{7}{8}$$

ومنه

$$t(x) = \frac{1}{8}\varphi_0(x) + \frac{3}{8}\varphi_1(x) + \frac{5}{8}\varphi_2(x) + \frac{7}{8}\varphi_3(x)$$

إذن

$$f(x)/g(x) \neq (f/g)(x)$$



```
1 - clear
2 - syms x
3 - m=input('m=')
4 - fun=input('fun=');
5 - for i=1:m
6 -     f(i)=m*int(fun,x,((i-1)/m),(i/m));
7 - end
8 - f
```

شكل 3.1: كيفية حساب قيم الشعاع  $F$  بالنسبة لتتابع ذات متغير واحد في الماتلاب.

## 2.2.1 تقريب تابع ذو متغيرين

تقريب تابع بإستعمال أساس دوال القطع النبضية ذات متغيرين

التابع  $f(x, s) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$  يمكننا تقريبها بدلالة أساس الدوال القطع النبضية ذات متغيرين كما يلي: [1][3]

$$f(x, s) \approx \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} f_{i,j} \varphi_{i,j}(x, s) = F^T \Phi(x, s) = \Phi(x, s)^T F \quad (17.1)$$

حيث

$$F^T = [f_{0,0}, f_{0,1}, \dots, f_{0,m_2-1}, \dots, f_{m_1-1,0}, \dots, f_{m_1-1,m_2-1}] \quad (18.1)$$

$$(19.1)$$

$$\Phi(x, s) = [\varphi_{0,0}(x, s), \varphi_{0,1}(x, s), \dots, \varphi_{0,m_2-1}(x, s), \dots, \varphi_{m_1-1,0}(x, s), \dots, \varphi_{m_1-1,m_2-1}(x, s)]$$

$$f_{i,j} = \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \int_{(i-1)h_1}^{ih_1} \int_{(j-1)h_2}^{jh_2} f(x, s) dx ds \quad (20.1)$$

الدوال القطع النبضية ذات متغيرين يمكننا التعبير عنها بجداء دالتين من الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد كما يلي:

$$\varphi_{i,j}(x, s) = \varphi_i(x) \phi_j(s) \quad (21.1)$$

حيث  $\phi_j(s)$  و  $\varphi_i(x)$  هما دوال قطع نبضية ذات متغير واحد. من هنا نستخدم هذه العلاقة في تقريب الدالة  $f(x, s)$  بالعلاقة التالية:

$$f(x, s) \simeq \Phi(x) F \Psi(s) \quad (22.1)$$

حيث  $\Phi(x)$  و  $\Psi(s)$  وهما أساس الدوال القطع النبضية ذات البعد  $m_1$  و  $m_2$  على التوالي في هذا النطاق نأخذ  $m_1 = m_2 = m$  هذا يعني أن  $h_1 = h_2 = \frac{1}{m}$  و  $F$  مصفوفة ذات الرتبة  $(m \times m)$  معرفة بالعلاقة التالية :

$$F = \begin{bmatrix} f_{0,0} & \cdots & f_{0,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m-1,1} & \cdots & f_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \quad (23.1)$$

## توطئة 2.2.1 [1]

في حالة إذا كانت رتبة الدالة ذات المتغيرين أكبر من أو تساوي الواحد نستخدم الشعاعين  $U$  و  $M_p$  معاملا بتدلالة الدوال القطع النبضية لدوال  $U(x, s)$  و  $U_p(x, s)$  على التوالي

الآن نعرف  $U$  و  $U_p$  كما يلي :

$$U^T = [u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{0,m-1}, \dots, u_{m-1,0}, \dots, u_{m-1,m-1}] \quad (24.1)$$

$$U_p^T = [u_{0,0}^p, u_{0,1}^p, \dots, u_{0,m-1}^p, \dots, u_{m-1,0}^p, \dots, u_{m-1,m-1}^p] \quad (25.1)$$



- بحيث  $p \geq 1$  عدد صحيح موجب .
- برهان: من أجل  $n = 1$

$$[u(s)]^n = u(s)$$

محققة

- الآن نبرهن من أجل  $n + 1$

$$\begin{aligned} [u(x, y)]^{n+1} &= u(x, y)[u(x, y)]^n \\ &= UU_n \approx (U^T \Phi(x, y))(U_n^T \Phi(x, y)) \\ &\approx U^T \Phi(x, y) \Phi(x, y)^T U_n \\ &= U^T \tilde{U}_n \Phi(x, y) \end{aligned}$$

الآن باستخدام المعادلة (25.1) نجد

$$U^T \tilde{U}_n = [u_{0,0}^{p+1}, u_{0,1}^{p+1}, \dots, u_{0,m-1}^{p+1}, \dots, u_{m-1,0}^{p+1}, \dots, u_{m-1,m-1}^{p+1}]$$

إذن بناء عن المعادلة (25.1) ومن أجل  $p + 1$  هذه التوطئة محققة في تقريب التتابع ذات المتغيرين.

مثال 4.2.1 لتكن الدالة  $f(x, y) = x - 2y$  الآن نقوم بتحليل هذه الدالة من أجل  $m = 4$  أي

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f_{i,j} \varphi_{i,j}(x, y) = F^T \Phi(x, y)$$

حيث

$$F^T = [f_{0,0}, f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3}, f_{1,0}, f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,0}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{3,0}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}]$$

- الآن نقوم بحساب هذه التتابع  $f_{i,j}$

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \int_0^3 \int_0^3 f(x, y) dx dy \\ f_{0,0} &= 16 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{1}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{3}{5} \\ f_{0,1} &= 16 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x + 2y) dx dy = \frac{7}{8} \\ f_{0,2} &= 16 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{11}{8} \\ f_{0,3} &= 16 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{3}{4}}^1 (x + 2y) dx dy = \frac{15}{8} \\ f_{1,0} &= 16 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{5}{8} \\ f_{1,1} &= 16 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x + 2y) dx dy = \frac{9}{8} \end{aligned}$$



$$f_{1,2} = 16 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{13}{8}$$

$$f_{1,3} = 16 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{3}{4}}^1 (x + 2y) dx dy = \frac{17}{8}$$

$$f_{2,0} = 16 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{1}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{7}{8}$$

$$f_{2,1} = 16 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x + 2y) dx dy = \frac{11}{8}$$

$$f_{2,2} = 16 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{15}{8}$$

$$f_{2,3} = 16 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{3}{4}}^1 (x + 2y) dx dy = \frac{19}{8}$$

$$f_{3,0} = 16 \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_0^{\frac{1}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{9}{8}$$

$$f_{3,1} = 16 \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x + 2y) dx dy = \frac{13}{8}$$

$$f_{3,2} = 16 \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x + 2y) dx dy = \frac{17}{8}$$

$$f_{3,3} = 16 \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_{\frac{3}{4}}^1 (x + 2y) dx dy = \frac{21}{8},$$

$$F = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 & 15 \\ 5 & 9 & 12 & 17 \\ 7 & 11 & 15 & 19 \\ 9 & 13 & 17 & 21 \end{bmatrix},$$

أي

$$f(x, y) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 & 15 \\ 5 & 9 & 12 & 17 \\ 7 & 11 & 15 & 19 \\ 9 & 13 & 17 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0(y) \\ \varphi_1(y) \\ \varphi_2(y) \\ \varphi_3(y) \end{pmatrix},$$

إذن



```
1 function [ g ] = Untitled5( m, fun, x, y )
2 -     syms x y
3 -     m=input('m=')
4 -     fun=input('fun=');
5 -     for i=1:m
6 -         for j=1:m
7 -             f(i,j)=int(fun,x,((i-1)/m),(i/m));
8 -             g(i,j)=m^2*int(f(i,j),y,((j-1)/m),(j/m));
9 -         end
10 -     end
11 -     g
12
13 - end
14
15
```

شكل 3.1: كيفية حساب قيم شعاع  $F$  بالنسبة لتتابع ذات متغيرين بالمطاب



### 3.1 مصفوفة العمليات

#### 1.3.1 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغير

حينما نتطرق لحل المعادلات التكاملية عادة ما نجد التكامل  $\int_0^x \Phi(t)dt$  ينتج عنه دالة بإمكاننا تحليلها عن طريق إستعمال الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد على النحو التالي : [3][5]

$$\int_0^x \Phi(t)dt \simeq P\Phi(t), \quad (1.1)$$

يمكننا تقسيم هذا التكامل الى ثلاث حالات [5] .

• في حالة  $t \in [0, ih)$  لدينا

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt = 0, \quad (2.1)$$

• في حالة  $t \in [ih, (i+1)h)$  لدينا

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi_i(t)dt &= \int_0^{ih} \varphi_i(t)dt + \int_{ih}^x \varphi_i(t)dt \\ &= x - ih, \end{aligned} \quad (3.1)$$

• في حالة  $t \in [(i+1)h, 1)$  لدينا

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi_i(t)dt &= \int_0^{ih} \varphi_i(t)dt + \int_{ih}^{(i+1)h} \varphi_i(t)dt + \int_{(i+1)h}^x \varphi_i(t)dt \\ &= h, \end{aligned} \quad (4.1)$$

المصفوفة P هي مصفوفة التنفيذية للتكامل وهي من الرتبة  $(m \times m)$  وللحصول عليها نتبع ما يلي :

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt = \begin{cases} 0, & si \quad x < ih, \\ (x - ih), & si \quad ih \leq x < (i+1)h, \\ h, & si \quad (i+1)h \leq x < 1, \end{cases}$$

ثم يمكن كتابتها

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt = (x - ih)\varphi_i(x) + h \sum_{j=i+1}^{m-1} \varphi_j(x), \quad (5.1)$$

بما أن  $(x - ih)$  تساوي  $\frac{h}{2}$  عند نقطة منتصف  $[ih, (i+1)h)$  يمكننا تقريب  $x - ih$  من أجل  $ih \leq x < (i+1)h$  بواسطة  $\frac{h}{2}$  لذلك [3]

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt \simeq [0, 0, 0, 0, \dots, 0, \frac{h}{2}, h, h, h, h, h, h, h, h, \dots, h]\Phi_i(x), \quad (6.1)$$

$$\int_0^x \Phi(t)dt = \begin{pmatrix} \int_0^x \varphi_0(x) \\ \int_0^x \varphi_1(x) \\ \int_0^x \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \int_0^x \varphi_{m-1}(x) \end{pmatrix} \simeq \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_{m-1}(x) \end{pmatrix},$$

إذن المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغير بالنسبة للتكامل هي

$$p = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

باستخدام هذه المصفوفة يمكننا أيضا تقريب تكامل التابع  $f(t)$  كما يلي :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x F^T \Phi(x)dt = F^T \int_0^x \Phi(x)dt = F^T P \Phi(x), \quad (7.1)$$

\*مقلوب المصفوفة التنفيذية للتكامل: [3]

المصفوفة التنفيذية للتكامل  $P$  هي مصفوفة قابلة للقلب لأنها مصفوفة مثلثية علوية يكون مقلوبها من الشكل :

$$p = \frac{2}{h} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & (-1)^{m-1}2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & (-1)^{m-2}2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

\*مشتق دالة [3]

الإشتقاق هو العملية المعاكسة للتكامل وإشتقاق أي دالة يمكننا التعبير عنه بدلالة سلسلة الدوال القطع النبضية ونحصل عليه عن طريق التكامل كما يلي إذا كانت الدالة  $g(t)$  قابلة للإشتقاق في المجال  $[0, 1]$  ونزمر له

$$f(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad (8.1)$$

بعد تكامل المعادلة (8.1) من 0 الى  $t$  نجد

$$g(t) - g_0^{(0)} = \int_0^t f(t)dt, \quad (9.1)$$

حيث يتم الإشارة إلى القيمة الألية ل  $g(t)$  بواسطة.

$$g_0^{(0)} = g(0), \quad (10.1)$$

باستبدال المعادلتين (8.1) و (8.1) في المعادلة (9.1) نحصل على مايلي:

$$(G^T - g_0^{(0)} E^T) \Phi(t) = F^T P \Phi(t), \quad (11.1)$$

نقوم بإختزال معاملات الدوال القطع النبضية  $\Phi(t)$  من هذه المعادلة نحصل على ما يلي:

$$(G^T - g_0^{(0)} E^T) = F^T P, \quad (12.1)$$

مع الملاحظة أن المصفوفة  $P$  هي المصفوفة التنفيذية وقابلة للقلب يعني أن  $P^{-1}$  موجودة ومنه

$$F^T = (G^T - g_0^{(0)} E^T) P^{-1}, \quad (13.1)$$

لذلك فإن سلسلة الدوال القطع النبضية للمشتق هي

$$\frac{dg(t)}{dt} \Phi(t) = (G^T - g_0^{(0)} E^T) P^{-1} \Phi(t), \quad (14.1)$$

توضح المعادلة (14.1) أن مشتقة أي دالة يمكن أن تحول بدلالة التقريبات إلى عمليات جبرية. بناء على أساس مقلوب المصفوفة التنفيذية للتكامل .

الآن نفترض أن سلسلة لدوال القطع النبضية تحت جداء تكاملات على أي دالة، وبالأحرى هي سبب للحصول على طريقة للإشتقاق أي يمكننا استخدام المعادلة (8.1) وتطبيقها في جداء التكاملات لأي دالة.

$$\underbrace{\int_0^s \cdots \int_0^s}_{k} f(t) dt \cdots dt, \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^s \cdots \left( \int_0^s \left( \int_0^s f(t) dt \right) dt \right) dt \\ &= \int_0^s \cdots \left( \int_0^s F^T P \Phi(t) dt \right) dt \\ &\vdots \\ &= \int_0^s F^T P^{k-1} \Phi(t) dt \\ &= F^T P^k \Phi(t), \end{aligned} \quad (16.1)$$

إذا كانت الدالة  $g(t)$  قابلة للإشتقاق  $k$  مرة حيث  $t \in [0, 1]$  ونرمز لها كما يلي :

$$f(t) = \frac{d^k g(t)}{dt^k}, \quad (17.1)$$

بعد تكامل هذه المعادلة  $k$  مرة من 0 الى  $t$  نجد

$$\underbrace{\int_0^s \cdots \int_0^s}_{k} f(t) dt \cdots dt, \quad (18.1)$$

$$= g(t) - g_0^{(0)} - g_0^{(1)} \int_0^t dt - \cdots - g_0^{(k-1)} \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k-1} dt \cdots dt, \quad (19.1)$$

حيث  $g_0^{(0)}$  هي القيمة الابتدائية لمشتقة الدالة  $g(t)$  عند 0 و  $g_0^{(i)} = (i = 0, 1, \dots, k-1)$  هي القيم الأولية للمشتقات المتتالية ل  $g(t)$  على التوالي :

$$g_0^{(i)} = \frac{d^i g(t)}{dt^i} \Big|_{t=0}, \quad (20.1)$$

من هذه العلاقة نجد

$$g_0^{(i)} \int_0^t \dots \int_0^t dt \dots dt = g_0^{(i)} E^T P^i \Phi(t), \quad (21.1)$$

من أجل  $i = 0, 1, \dots, k-1$  ومن العلاقة (16.1) يمكننا الحصول مباشرة على :

$$F^T = G^T P^{-k} - g_0^{(0)} E^T p^{-k} - g_0^{(1)} E^T p^{-(k-1)} - \dots - g_0^{(k-1)} E^T p^{-1}, \quad (22.1)$$

من (21.1) و (19.1) حيث أن المصفوفات  $P_i (i = 1, 2, \dots, k)$  ليست مفردة، لذلك فإن سلسلة الدوال القطع النبضية لمشتقة الدالة  $g(t)$   $k$  مرة هي :

$$\frac{d^k g(t)}{dt^k} = (G^T P^{-k} - \sum_{i=0}^{k-1} g_0^{(i)} E^T P^{-(k-i)}) \Phi(t), \quad (23.1)$$

### 2.3.1 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغيرين

حينما نتطرق لحل المعادلات التكاملية عادة ما نجد التكامل  $\int_0^x \int_0^y \Phi(t, s) dt ds$  ينتج عنه دالة بإمكاننا تحليلها عن طريق إستعمال الدوال القطع النبضية ذات متغيرين على النحو التالي: [1]

$$\int_0^x \int_0^y \varphi_{i,j}(t, s) dt ds \simeq E \Phi(x, y) = [P(m_1, m_1) \otimes P(m_2, m_2)] \Phi(x, y), \quad (24.1)$$

المصفوفة  $P$  هي المصفوفة التنفيذية بالنسبة للتكامل ذات متغير واحد المعرفة كمايلي :

$$P = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

والمصفوفة  $E$  تدعى المصفوفة التنفيذية للتكامل الثنائي وهي من الرتبة  $(m_1 m_2) \times (m_1 m_2)$  والمصفوفة وللحصول عليها

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y \varphi_{i,j}(t, s) dt ds &= \int_0^x \int_0^y \Phi(t) \otimes \Phi(s) dt ds \\ &= \int_0^x \Phi(t) dt \otimes \int_0^y \Phi(s) ds, \end{aligned} \quad (25.1)$$

بإستخدام المعادلة،  $\int_0^x \Phi(t) dt \simeq P \Phi(t)$  نجد

$$E = [P(m_1, m_1) \otimes P(m_2, m_2)],$$

$$E = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

حيث  $\otimes$  يدل على جداء كرونونكر المعروف كما يلي :

$$A \otimes B = (a_{ij}B),$$

وعليه فإن التكامل الثنائي لكل تابع ذات متغيرين  $f(t, s)$  يمكننا تقريبه بالعبارة التالية:

$$\int_0^t \int_0^x f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \simeq \int_0^t \int_0^x F^T \Phi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \simeq F^T E \Phi(x, t), \quad (26.1)$$

## الفصل 2

# الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ والمزاحة $\epsilon$

### قائمة المحتويات

---

26	.....	الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ (IBPFs)	1.2
26	.....	دوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ ذات متغير	1.1.2
27	.....	دوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$ ذات متغيرين	2.1.2
28	.....	تقريب التتابع	3.1.2
31	.....	مصنوفات العمليات	4.1.2
35	.....	الدوال القطع النبضية المزاحة ب $\epsilon$ ( $\epsilon$ MBPFs)	2.2
35	.....	الدوال القطع النبضية المزاحة ب $\epsilon$	1.2.2
36	.....	تقريب التتابع	2.2.2
38	.....	مصنوفات العمليات	3.2.2

---



أولاً:

## 1.2 الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف h (IBPFs)

مقدمة:

تعد تعديلات الدوال القطع النبضية جزءاً هاماً من الاستخدام العلمي لهذه الدوال ، حيث يتم تعديلها لتحسين التقريب ، وحيث أنها لم يكن هناك تاريخ محدد لتعديلها ومع ذلك يعتقد أن أول استخدامها كان في الستينات والسبعينيات من القرن العشرين ، منذ ذلك الحين استمر تطوير تعديل الدوال القطع النبضية وتحسينها وأصبحت أكثر شيوعاً .

### 1.1.2 دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h ذات متغير

تعريف 1.1.2 [6][7]

تتكون مجموعة (m + 1) من دوال القطع النبضية من (m + 1) من الدوال المحددة في المجال ([0, 1]) على النحو التالي :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{h}{2}), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [(i-1)h + \frac{h}{2}, ih + \frac{h}{2}), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1 - \frac{h}{2}, 1), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (3.2)$$

حيث m عدد صحيح موجب و  $h = \frac{1}{m}$

m : يمثل عدد الفترات الفرعية التي يتم تحديدها للدقة اللازمة لحل المشكلة .

الخواص [6][7]

1. الفصل:

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (4.2)$$

حيث  $i, j = 1, \dots, m$  ومتعامدة مع بعضها البعض

2. التعامد:

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)d(x) = \begin{cases} \frac{1}{2m}, & i = j \in \{0, m\}, \\ \frac{1}{m}, & i = j \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (5.2)$$

حيث  $x \in ([0, 1])$



يمكن كتابة أساس الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف h على شكل شعاع كما يلي :

$$\Phi_m(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)]^T \quad (6.2)$$

حيث  $x \in [0, 1)$  في هذه الحالة تصبح الخاصية (1) على النحو التالي :

$$\Phi_m(x)\Phi_m(x)^T = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_m(x) \end{pmatrix} = \text{diag}(\varphi_m(x))$$

$$\int_0^x \varphi_0(y)dy = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{h}{2}), \\ \frac{h}{2}, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\int_0^x \varphi_i(y)dy = \begin{cases} 0, & x \in [0, (i-1)h + \frac{h}{2}), \\ x - ((i-1)h + \frac{h}{2}), & x \in [(i-1)h + \frac{h}{2}, ih + \frac{h}{2}), \\ h, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\int_m^x \varphi_m(y)dy = \begin{cases} x - (1 - \frac{h}{2}), & x \in [1 - \frac{h}{2}, 1), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (9.2)$$

ليكن  $X$  شعاع ذات  $(m+1)$  عنصر نستخدم العبارة

$$\Phi_m(x)\Phi_m^T(x)X = \tilde{X}\Phi(x),$$

$$\tilde{X} = \text{diga}(X_i^T \varphi_i(x)),$$

بحيث  $\tilde{X}$  مصفوفة ذات الرتبة  $((m+1) \times (m+1))$

## 2.1.2 دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h ذات متغيرين

تعريف 2.1.2 [6][7]

نعرف دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h ذات متغيرين حيث  $x \in ([0, 1))$  و  $s \in ([0, 1))$  كما يلي

$$\varphi_0(x, s) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{h}{2}), s \in [0, \frac{h}{2}), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (10.2)$$

$$\varphi_i(x, s) = \begin{cases} 1, & x \in [(i-1)h + \frac{h}{2}, ih + \frac{h}{2}), s \in [(i-1)h + \frac{h}{2}, ih + \frac{h}{2}), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (11.2)$$

$$\varphi_m(x, s) = \begin{cases} 1, & x \in [1 - \frac{h}{2}, 1), s \in [1 - \frac{h}{2}, 1), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \quad (12.2)$$





## الخواص [6][7]

1. الفصل:

$$\varphi_{i,j}(x)\varphi_{k,l}(x) = \begin{cases} \varphi_{i,j}(x), & i = j, k = l, \\ 0, & i \neq j, k \neq l, \end{cases} \quad (13.2)$$

حيث  $i, j = 1, \dots, m$  و  $k, l = 1, \dots, m$  ومتعامدة مع بعضها البعض

2. التعامد:

(14.2)

$$\int_0^1 \varphi_{i,j}(x, s)\varphi_{k,l}(x, s)d(x) = \begin{cases} \frac{1}{2m}, & i = j \in \{0, m\}, k = l \in \{0, m\}, \\ \frac{1}{m}, & i = j \in \{1, 2, \dots, m-1\}, k = l \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

حيث  $x \in ([0, 1])$ 

يمكن كتابة أساس الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف h على شكل شعاع كما يلي :

$$\Phi_m(x, s) = [\varphi_{0,0}(x), \varphi_{1,1}(x), \dots, \varphi_{m,m}(x)]^T \quad (15.2)$$

حيث  $x \in [0, 1)$  و  $s \in [0, 1)$ 

## 3.1.2 تقريب التوابع

تقريب تابع بإستعمال دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h ذو متغير

يمكننا تقريب دالة مستمرة ذات متغير  $f(x) \in L^2([0, 1])$  بإستعمال دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h على النحو التالي : [6][7]

$$f(x) \simeq f_m(x) = \sum_{i=0}^m f_i \varphi_i(x) = F_m^T \Phi_m(x) = \Phi_m(x)^T F_m, \quad (16.2)$$

حيث

$$F_m^T = [f_0, f_1, \dots, f_m], \quad (17.2)$$

$$\Phi_m(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)]^T, \quad (18.2)$$

$$f_i = \begin{cases} 2m \int_0^{\frac{h}{2}} f(x)dx, & i = 0, \\ m \int_{(i-1)h+\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} f(x)dx, & i = 1, 2, \dots, m-1, \\ 2m \int_{1-\frac{h}{2}}^1 f(x)dx, & i = m, \end{cases} \quad (19.2)$$



مثال 1.1.2 تقريب تابع  $f(x)$  بإستعمال أساس دوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$  حيث  $f(x) = x^2$  الآن نقوم بتقريب هذا التابع من أجل  $m = 4$

$$f(x) \simeq f_m(x) = \sum_{i=0}^4 f_i \varphi_i(x) = F_m^T \Phi_m(x) = \Phi_m(x)^T F_m,$$

حيث

$$F^T = [f_0, f_1, \dots, f_4],$$

$$\Phi_m(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_4(x)]^T,$$

$$f_i = \begin{cases} 8 \int_0^{\frac{1}{8}} f(x) dx, & i = 0, \\ 4 \int_{(i-1)h+\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} f(x) dx, & i = 1, 2, 3, \\ 8 \int_{1-\frac{h}{2}}^1 f(x) dx, & i = 4, \end{cases}$$

نقوم بحساب  $\varphi_i(x)$  وبحساب التوابع  $f_i$ 

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{8}, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{3}{8}, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{5}{8}, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 1, & \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{7}{8}, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 1, & \frac{7}{8} \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$f_0 = 8 \int_0^{\frac{1}{8}} x^2 dx = \frac{1}{192}$$

$$f_1 = 4 \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}} x^2 dx = \frac{13}{192}$$

$$f_2 = 4 \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{5}{8}} x^2 dx = \frac{49}{192}$$

$$f_3 = 4 \int_{\frac{5}{8}}^{\frac{7}{8}} x^2 dx = \frac{109}{192}$$

$$f_4 = 8 \int_{\frac{7}{8}}^1 x^2 dx = \frac{169}{192}$$

إذن

$$f(x) = \frac{1}{192} \varphi_0(x) + \frac{13}{192} \varphi_1(x) + \frac{49}{192} \varphi_2(x) + \frac{109}{192} \varphi_3(x) + \frac{169}{192} \varphi_4(x).$$



## تقريب تابع بإستعمال دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h ذو متغيرين

يمكننا تقريب دالة مستمرة ذات متغيرين  $f(x, t) \in L^2([0, 1]) \times ([0, 1])$  بإستعمال دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h على النحو التالي: [6][7]

$$f(x, t) \simeq f_m(x, t) = \Phi_m^T(x) F_m \Phi_m(t), \quad (20.2)$$

حيث  $\Phi(x)$  و  $\Phi(t)$  وهما أساس الدوال القطع النبضية ذات البعد  $m_1$  و  $m_2$  على التوالي في هذا النطاق  
نأخذ  $m_1 = m_2$

```
5 | تقريب تابع بإستعمال دوال القطع النبضية المزاحة بنصف h|
6 - syms x
7 - m=input('m=');
8 - fun=input('fun=');
9 - for i=1:m+1
10 - if (i==1)
11 - l(i)=2*m*int(fun,x,0,(1/(2*m)));
12 - else if (i==m+1)
13 - l(i)=2*m*int(fun,x,1-(1/(2*m)),1);
14 - else
15 - l(i)=m*int(fun,x,(((i-1)-1)/m)+(1/(2*m)),((i-1)/m)+(1/(2*m)));
16 - end
17 -
18 - end
19 - end
20 - l
21 -
```

شكل 3.1: كيفية حساب شعاع f بالنسبة لتتابع ذات متغير بالمطالاب



## المصفوفة التنفيذية للتكامل [6][7]

لدينا

$$\int_0^x \varphi_0(y)dy = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{h}{2}), \\ \frac{h}{2}, & \text{sinon}, \end{cases}$$

حيث نلاحظ أن النقطة  $x = \frac{h}{4}$  عند منتصف النقطة  $[0, \frac{h}{2})$  إذن يمكننا تقريب  $x$  ل  $x \in [0, \frac{h}{2})$  على  $\frac{h}{4}$

$$\int_0^x \varphi_i(y)dy = \begin{cases} 0, & x \in [0, (i-1)h + \frac{h}{2}), \\ x - ((i-1)h + \frac{h}{2}), & x \in [(i-1)h + \frac{h}{2}, ih + \frac{h}{2}), \\ h, & \text{sinon}, \end{cases}$$

حيث  $i = 1, 2, \dots, m-1$ 

أيضا يمكننا تقريب  $x - ((i-1)h + \frac{h}{2})$  من أجل  $x \in [(i-1)h + \frac{h}{2}, ih + \frac{h}{2})$  بواسطة  $\frac{h}{2}$

$$\int_0^x \varphi_m(y)dy = \begin{cases} x - (1 - \frac{h}{2}), & x \in [1 - \frac{h}{2}, 1), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

لذلك يمكننا تقريب  $x - (1 - \frac{h}{2})$  من أجل  $x \in [1 - \frac{h}{2}, 1)$  بواسطة  $\frac{h}{4}$  إذن تكامل الشعاع  $\Phi_m(x)$  يمكن تقريبه بواسطة

$$\int_0^x \Phi_m(y)dy \simeq P_1 \Phi_m(x), \quad (21.2)$$

المصفوفة P هي مصفوفة التنفيذية للتكامل وهي من الرتبة  $((m+1) \times (m+1))$  للحصول عنها نحسب ما يلي :

$$\int_0^x \Phi_m(y)dy = P \Phi_m(x), \quad (22.2)$$

حيث أن P هي المصفوفة التنفيذية للتكامل الشعاع

$$\Phi_m(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)]^T, \quad (23.2)$$

$$\int_0^x \Phi_m(y)dy = \begin{bmatrix} \int_0^x \varphi_0(y)dy \\ \int_0^x \varphi_1(y)dy \\ \int_0^x \varphi_2(y)dy \\ \vdots \\ \int_0^x \varphi_i(y)dy \end{bmatrix} \quad (24.2)$$

لحساب المصفوفة نبدأ بحساب  $\int_0^x \varphi_0(y)dy$  لدينا

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{h}{2}), \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^x \varphi_0(y)dy = \begin{cases} x, & x < \frac{h}{2}, \\ h, & x > \frac{h}{2}, \end{cases}$$



• في حالة كون  $x \in [0, \frac{h}{2})$  يعني أن  $x < \frac{h}{2}$

$$f_0 = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_0(y) dy \right) \varphi_0(x) dx = \frac{1}{h} \int_0^x x \varphi_0(x) dx = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} x dx = \frac{2}{h} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{2}} = \frac{2}{h} \left( \frac{h^2}{4} \right) = \frac{h}{4}$$

• في حالة كون  $x \geq \frac{T}{m} - \varepsilon$  فإن

$$f_0 = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_0(y) dy \right) \varphi_i(x) dx = \frac{2}{h} \int_0^x \left( \int_0^{\frac{h}{2}} dy \right) \varphi_i(x) dx = \int_0^{\frac{h}{2}} dx = \frac{h}{2}$$

حيث  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  ومنه

$$\int_0^x \varphi_0(y) dy = \left[ \frac{h}{4}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \dots, \frac{h}{2} \right] \Phi(x)$$

فيما يلي نحسب  $\int_m^x \varphi_0(y) dy$  لدينا

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in [T - \frac{h}{2}, 1), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

ومنه

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 0, & x < T - \frac{h}{2}, \\ x - T + \frac{h}{2}, & T - \frac{h}{2} < x < 1, \end{cases}$$

• في حالة كون  $x < T - \frac{h}{2}$  فإن

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_n(y) dy \right) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i < n.$$

• في حالة كون  $x > T - \frac{h}{2}$  فإن

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_n(y) dy \right) \varphi_n(x) dx = \frac{2}{h} \int_0^1 \left( \int_{1-\frac{h}{2}}^x dy \right) \varphi_i(x) dx = \frac{2}{h} \int_0^1 \left( \int_{1-\frac{h}{2}}^x dy \right) \varphi_n(x) dx \\ &= \frac{2}{h} \int_0^1 (x - T + \frac{h}{2}) \varphi_n(x) dx = \frac{2}{h} \int_{T-\frac{h}{2}}^T (x - T + \frac{h}{2}) dx \\ &= \frac{2}{h} \left[ \frac{x^2}{2} - (T - \frac{h}{2})x \right]_{T-\frac{h}{2}}^T \\ &= \frac{2}{h} \left[ \frac{T^2}{2} - (T - \frac{h}{2})T - \frac{(T - \frac{h}{2})^2}{2} + (T - \frac{h}{2})^2 \right] \\ &= \frac{1}{\frac{h}{2}} \left( \frac{T^2}{2} - (T - \frac{h}{2})T + \frac{(T - \frac{h}{2})^2}{2} \right) \\ &= \frac{2}{h} \left( \frac{T^2}{2} - T^2 + \frac{h}{2}T + \frac{T^2 - Th + \frac{h^2}{4}}{2} \right) \\ &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^x \varphi_n(y) dy = \left[ 0, 0, 0, \dots, \frac{h}{2} \right] \Phi(x)$$



وفي الأخير نجد تقريب  $\int_0^x \varphi_i(y)dy$   $0 < i < m$  لدنا

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}, \frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^x \varphi_i(y)dy = \begin{cases} 0, & x < \frac{iT}{m} - \frac{h}{2}, \\ x - ih + \frac{h}{2}, & \frac{iT}{m} - \frac{h}{2} < x < \frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}, \\ h & x > \frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}, \end{cases}$$

• في حالة كون  $x < \frac{iT}{m} - \frac{h}{2}$  فإن

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y)dy \right) \varphi_j(x)dx = 0, \quad 0 \leq x \leq m$$

• في حالة كون  $x \in [\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}, \frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2})$  فإن

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y)dy \right) \varphi_i(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^1 \left( \int_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^x dt \right) \varphi_i(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^1 \left( x - \frac{iT}{m} + \frac{h}{2} \right) \varphi_i(x)dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} \left( x - \frac{iT}{m} + \frac{h}{2} \right) dx = \frac{1}{T} \left[ \frac{x^2}{2} - \left( \frac{iT}{m} - \frac{h}{2} \right) x \right]_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{\left( \frac{(i+1)Th}{2m} \right)^2}{2} - \left( \frac{iT}{m} - \frac{h}{2} \right) \left( \frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2} \right) - \frac{\left( \frac{iT}{m} - \frac{h}{2} \right)^2}{2} + \left( \frac{iT}{m} - \frac{h}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{\frac{(i+1)^2 T^2}{m^2} - (i+1)h\frac{T}{m} + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} - \left( \frac{iT}{m}(i+1)\frac{T}{m} - \frac{ihT}{2m} - (i+1)\frac{Th}{2m} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right) + \frac{\left(\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}\right)^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{\frac{(i+1)^2 T^2}{m^2} - (i+1)\frac{Th}{m} + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} - \frac{iT}{m}(i+1)\frac{T}{m} - i\frac{Th}{2m} - (i+1)\frac{Th}{2m} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}\right)^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ (i^2 + 2i + 1)\frac{T^2}{2m^2} - \frac{h}{2}(i+1)\frac{T}{m} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} - i^2\frac{T^2}{m^2} - i\frac{T^2}{m^2} + \frac{h}{2}(i+1)\frac{T}{m} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 + i^2\frac{T^2}{m^2} + \frac{(\varepsilon^2)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ (2i + 1)\frac{T^2}{2m^2} - i\frac{T^2}{m^2} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{T^2}{2m^2} \right] \end{aligned}$$

حيث أن  $h = \frac{T}{m}$  فإن

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y)dy \right) \varphi_i(x)dx = \frac{h}{2}$$

• في حالة كون  $x > \frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}$ 

$$\begin{aligned}
f_i &= \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y) dy \right) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^1 \left( \int_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} \varphi_i(y) dy \right) \varphi_i(x) dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^1 \left( \int_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} dy \right) \varphi_i(x) dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^1 [x]_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} \varphi_i(x) dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^1 \left[ \left( (i+1) \frac{T}{m} - \frac{h}{2} \right) - \left( i \frac{T}{m} - \frac{h}{2} \right) \right] \varphi_i(x) dx \\
&= \int_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} \varphi_i(x) dx \\
&= \int_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} dx = [x]_{\frac{iT}{m} - \frac{h}{2}}^{\frac{(i+1)T}{m} - \frac{h}{2}} \\
&= \left[ \left( (i+1) \frac{T}{m} - \frac{h}{2} \right) - \left( i \frac{T}{m} - \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{T}{m} = h
\end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^x \varphi_i(y) dy = [0, 0, 0, \dots, \frac{h}{2}, h, h, \dots, h] \Phi(x)$$

$$\int_0^x \varphi_i(y) dy = [0, 0, 0, \dots, \frac{h}{2}, h, h, \dots, h] \Phi(x)$$

وعليه المصفوفة التنفيذية للتكامل نكتب من الشكل:

$$p = \frac{h}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 4 \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix},$$



ثانياً:

## 2.2 الدوال القطع النبضية المزاحة ب ε (εMBPFs)

### 1.2.2 الدوال القطع النبضية المزاحة ب ε

تعريف 1.2.2 تتكون مجموعة (m + 1) من دوال القطع النبضية المزاحة ب ε من دوال (m + 1) تم تعريفها على [0, 1) على النحو التالي: [8][9]

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{T}{m} - \varepsilon) = I_0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{iT}{m} - \varepsilon, \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon) = I_i, 0 < i < m \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in [T - \varepsilon, T) = I_m, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.2)$$

حيث  $h = \frac{1}{m}$   
في مايلي نأخذ  $T = 1$   
الخواص [8][9]

1. الفصل:

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (4.2)$$

حيث  $i, j = 1, \dots, m$

2. التعامد:

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)d(x) = h\delta_{ij} \quad (5.2)$$

حيث  $x \in ([0, 1))$

3. تامة:

$$\int_0^1 f_i^2(x)d(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \|\varphi_i(x)\|^2, \quad (6.2)$$

حيث

$$f_i = \frac{1}{\Delta(I_i)} \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)d(x) \quad (7.2)$$

حيث  $\Delta(I_i)$  هو طول الفترة الزمنية I المحددة في التعريف





يمكن كتابة أساس الدوال القطع النبضية المزاحة ب ε على شكل شعاع كما يلي :

$$\Phi_{m+1}(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)]^T \quad (8.2)$$

في هذه الحالة تصبح الخاصية (1) على النحو التالي:

$$\Phi_{m+1}(x)\Phi_{m+1}(x)^T = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_m(x) \end{pmatrix} = \text{diag}(\varphi_m(x))$$

$$\Phi_{m+1}(x)^T \Phi_{m+1}(x) = 1$$

ليكن X شعاع ذات m عنصر

$$\Phi_{m+1}(x)\Phi_{m+1}(x)^T V = \tilde{V}\Phi_{m+1}(x), \quad (9.2)$$

$$\tilde{V} = \text{diga}(V_i^T \varphi_i(x)),$$

بحيث  $\tilde{V}$  مصفوفة ذات الرتبة  $(m \times m)$  الناتجة من جداء أساس الدوال القطع النبضية في منقولة في شعاع كفي V كما يلي :

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} X_0^T \varphi_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_1^T \varphi_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m^T \varphi_m(x) \end{pmatrix},$$

أما في حالة إذا كان X مصفوفة ولتكن A مصفوفة ذات الرتبة  $m \times m$  يكون الناتج كما يلي :

$$\Phi_{m+1}(x)^T A \Phi_{m+1}(x) = \hat{A} \Phi_{m+1}(x), \quad (10.2)$$

حيث  $\hat{A}$  عبارة عن شعاع ذات m عنصر. أي

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \varphi_1 a_{11} + \varphi_2 a_{12} + \cdots + \varphi_m a_{1m} \\ \vdots \\ \varphi_1 a_{m1} + \varphi_2 a_{m2} + \cdots + \varphi_m a_{mm} \end{pmatrix},$$

## 2.2.2 تقريب التوابع

يمكننا تقريب دالة مستمرة ذات متغير  $f(x) \in L^2([0, 1])$  بإستعمال دوال القطع النبضية المزاحة ب ε على النحو التالي: [8][9]

$$f(x) \simeq f_{m+1}(x) = \sum_{i=0}^m f_i \varphi_i(x), \quad (11.2)$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta(I_i)} \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) d(x) \quad (12.2)$$

حيث  $\Delta(I_i)$  هو طول الفترة الزمنية I المحددة في التعريف



مثال 1.2.2 تقريب تابع  $f(x)$  بإستعمال أساس دوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$  حيث  $f(x) = x^2$  الآن نقوم بتقريب هذا التابع من أجل  $m = 4$

$$f(x) \simeq f_{m+1}(x) = \sum_{i=0}^m f_i \varphi_i(x),$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta(I_i)} \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) d(x)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{4} - \varepsilon) = I_0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{iT}{m} - \varepsilon, \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon) = I_i, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{2}{4} - \varepsilon) = I_1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{2}{4} - \varepsilon, \frac{3}{4} - \varepsilon) = I_2, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{3}{4} - \varepsilon, 1 - \varepsilon) = I_3, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1 - \varepsilon, 1) = I_4, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

حساب توابع  $f_i$

نأخذ  $\varepsilon = 120$

$$f_0 = \frac{1}{\Delta(I_0)} \int_0^{\frac{1}{4}-\varepsilon} x^2 \varphi_0(x) d(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}-\varepsilon} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{4}-\varepsilon} = \frac{841}{43200}$$

$$f_1 = \frac{1}{\Delta(I_1)} \int_{\frac{1}{4}-\varepsilon}^{\frac{2}{4}-\varepsilon} x^2 \varphi_1(x) d(x) = 4 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{4}-\varepsilon}^{\frac{2}{4}-\varepsilon} = \frac{2011}{14400}$$

$$f_2 = \frac{1}{\Delta(I_2)} \int_{\frac{2}{4}-\varepsilon}^{\frac{3}{4}-\varepsilon} x^2 \varphi_2(x) d(x) = 4 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{2}{4}-\varepsilon}^{\frac{3}{4}-\varepsilon} = \frac{5551}{14400}$$

$$f_3 = \frac{1}{\Delta(I_3)} \int_{\frac{3}{4}-\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^2 \varphi_3(x) d(x) = 4 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{3}{4}-\varepsilon}^{1-\varepsilon} = \frac{10891}{14400}$$

$$f_4 = \frac{1}{\Delta(I_4)} \int_{1-\varepsilon}^1 x^2 \varphi_4(x) d(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{1-\varepsilon}^1 = \frac{42841}{43200}$$

$$f(x) = \frac{841}{43200} \varphi_0(x) + \frac{2011}{14400} \varphi_1(x) + \frac{5551}{14400} \varphi_2(x) + \frac{10891}{14400} \varphi_3(x) + \frac{42841}{43200} \varphi_4(x).$$



```

2 - syms x a
3 - m=input('m=')
4 - fun=input('fun=');
5 - for i=1:m+1
6 -     if (i==1)
7 -         f(i)=(1/((1/m)-a))*int(fun,x,0,((1/m)-a));
8 -     else if (i==m+1)
9 -         f(i)=(1/a)*int(fun,x,1-a,1);
10 -     else
11 -         f(i)=m*int(fun,x,((i-1)/m)-a,((i/m)-a));
12 -     end
13 -
14 - end
15 - end
16 - f

```

شكل 1.2: كيفية حساب قيم شعاع F بالنسبة لتتابع ذات متغير بالمطالاب

### 3.2.2 مصفوفات العمليات

#### المصفوفة التنفيذية للتكامل [8][9]

لبحث عن المصفوفة التنفيذية للتكامل نحسب ما يلي :

$$\int_0^x \Phi_{m+1}(y)dy = P\Phi_{m+1}(x), \quad (13.2)$$

حيث أن P هي المصفوفة التنفيذية للتكامل الشعاع

$$\Phi_{m+1}(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)]^T, \quad (14.2)$$

$$\int_0^x \Phi_{m+1}(y)dy = \begin{bmatrix} \int_0^x \varphi_0(y)dy \\ \int_0^x \varphi_1(y)dy \\ \int_0^x \varphi_2(y)dy \\ \vdots \\ \int_0^x \varphi_i(y)dy \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

لحساب المصفوفة نبدأ بحساب  $\int_0^x \varphi_0(y)dy$  لدينا

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{T}{m} - \varepsilon) = I_0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^x \varphi_0(y)dy = \begin{cases} x, & x < h - \varepsilon, \\ h - \varepsilon, & x > h - \varepsilon, \end{cases}$$

• في حالة كون  $x \in [0, \frac{T}{m} - \varepsilon)$  يعني أن  $x < \frac{T}{m} - \varepsilon$

$$f_0 = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_0(y)dy \right) \varphi_0(x)dx = \frac{1}{h} \int_0^x x\varphi_0(x)dx = \frac{1}{h} \int_0^{h-\varepsilon} xdx = \frac{1}{h} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{h-\varepsilon} = \frac{(h-\varepsilon)^2}{2(h-\varepsilon)} = \frac{h-\varepsilon}{2}$$



• في حالة كون  $x \geq \frac{T}{m} - \varepsilon$  فإن

$$f_0 = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_0(y) dy \right) \varphi_i(x) dx = f_0 = \frac{1}{h - \varepsilon} \int_0^x \left( \int_0^{h-\varepsilon} dy \right) \varphi_i(x) dx = \int_0^{h-\varepsilon} dx = h - \varepsilon$$

حيث  $i = 1, 2, 3, \dots, m$   
ومنه

$$\int_0^x \varphi_0(y) dy = \left[ \frac{h - \varepsilon}{2}, h - \varepsilon, h - \varepsilon, \dots, h - \varepsilon \right] \Phi(x)$$

$$\int_0^x \varphi_0(y) dy = \left[ \frac{h - \varepsilon}{2}, h - \varepsilon, h - \varepsilon, \dots, h - \varepsilon \right] \Phi(x)$$

فيما يلي نحسب  $\int_m^x \varphi_0(y) dy$   
لدينا

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in [T - \varepsilon, 1) = I_m, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

ومنه

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 0, & x < T - \varepsilon, \\ x - T + \varepsilon, & T - \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

• في حالة كون  $x < T - \varepsilon$  فإن

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_n(y) dy \right) \varphi_i(x) dx = 0 \quad i < n. \quad (16.2)$$

• في حالة كون  $x > T - \varepsilon$  فإن

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_n(y) dy \right) \varphi_n(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \left( \int_{1-\varepsilon}^x dy \right) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \left( \int_{1-\varepsilon}^x dy \right) \varphi_n(x) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 (x - T + \varepsilon) \varphi_n(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{T-\varepsilon}^T (x - T + \varepsilon) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{x^2}{2} (T - \varepsilon) x \right]_{T-\varepsilon}^T = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{T^2}{2} - (T - \varepsilon)T - \frac{(T - \varepsilon)^2}{2} + (T - \varepsilon)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{T^2}{2} - (T - \varepsilon)T + \frac{(T - \varepsilon)^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{T^2}{2} - T^2 + \varepsilon T + \frac{T^2 - 2T\varepsilon + \varepsilon^2}{2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^x \varphi_0(y) dy = \left[ 0, 0, 0, \dots, \frac{\varepsilon}{2} \right] \Phi(x)$$

$$\int_0^x \varphi_0(y) dy = \left[ 0, 0, 0, \dots, \frac{\varepsilon}{2} \right] \Phi(x)$$



وفي الأخير نجد تقريب  $\int_0^x \varphi_i(y)dy$   $0 < i < m$  لدينا

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{iT}{m} - \varepsilon, \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon) = I_i, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^x \varphi_i(y)dy = \begin{cases} 0, & x < \frac{iT}{m} - \varepsilon, \\ x - ih + \varepsilon, & \frac{iT}{m} - \varepsilon < x < \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon, \\ h & x > \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon, \end{cases}$$

• في حالة كون  $x < \frac{iT}{m} - \varepsilon$  فإن

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y)dy \right) \varphi_j(x)dx = 0 \quad 0 \leq x \leq m$$

• في حالة كون  $x \in [\frac{iT}{m} - \varepsilon, \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon)$  فإن

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y)dy \right) \varphi_i(x)dx = \frac{1}{\frac{T}{m}} \int_0^1 \left( \int_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^x dt \right) \varphi_i(x)dx = \frac{1}{\frac{T}{m}} \int_0^1 \left( x - \frac{iT}{m} + \varepsilon \right) \varphi_i(x)dx \\ &= \frac{1}{\frac{T}{m}} \int_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} \left( x - \frac{iT}{m} + \varepsilon \right) dx = \frac{1}{\frac{T}{m}} \left[ \frac{x^2}{2} - \left( \frac{iT}{m} - \varepsilon \right) x \right]_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} \\ &= \frac{1}{\frac{T}{m}} \left[ \frac{\left( \frac{(i+1)T}{m} \varepsilon \right)^2}{2} - \left( \frac{iT}{m} - \varepsilon \right) \left( \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon \right) - \frac{\left( \frac{iT}{m} - \varepsilon \right)^2}{2} + \left( \frac{iT}{m} - \varepsilon \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\frac{T}{m}} \left[ \frac{\frac{(i+1)^2 T^2}{m^2} - 2(i+1)\varepsilon \frac{T}{m} + \varepsilon^2}{2} - \left( \frac{iT}{m} (i+1) \frac{T}{m} - \varepsilon i \frac{T}{m} - \varepsilon (i+1) \frac{T}{m} + \varepsilon^2 \right) + \frac{\left( \frac{iT}{m} - \varepsilon \right)^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{T}{m}} \left[ \frac{\frac{(i+1)^2 T^2}{m^2} - 2(i+1)\varepsilon \frac{T}{m} + \varepsilon^2}{2} - \frac{iT}{m} (i+1) \frac{T}{m} - \varepsilon i \frac{T}{m} - \varepsilon (i+1) \frac{T}{m} + \varepsilon^2 + \frac{\left( \frac{iT}{m} - \varepsilon \right)^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{T}{m}} \left[ (i^2 + 2i + 1) \frac{T^2}{2m^2} - \varepsilon (i+1) \frac{T}{m} + \frac{\varepsilon^2}{2} - i^2 \frac{T^2}{m^2} - i \frac{T^2}{m^2} + \varepsilon i \frac{T}{m} + \varepsilon (i+1) \frac{T}{m} - \varepsilon^2 + i^2 \frac{T^2}{m^2} - \varepsilon i \frac{T}{m} + \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{T}{m}} \left[ (2i + 1) \frac{T^2}{2m^2} - i \frac{T^2}{m^2} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{T}{m}} \left[ \frac{T^2}{2m^2} \right] \end{aligned}$$

حيث أن  $h = \frac{T}{m}$  فإن

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y)dy \right) \varphi_i(x)dx = \frac{h}{2}$$



• في حالة كون  $x > \frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon$

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_0^x \varphi_i(y) dy \right) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^1 \left( \int_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} \varphi_i(y) dy \right) \varphi_i(x) dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^1 \left( \int_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} dy \right) \varphi_i(x) dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^1 [x]_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} \varphi_i(x) dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^1 \left[ \left( (i+1) \frac{T}{m} - \varepsilon \right) - \left( i \frac{T}{m} - \varepsilon \right) \right] \varphi_i(x) dx \\
 &= \int_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} \varphi_i(x) dx \\
 &= \int_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} dx = [x]_{\frac{iT}{m} - \varepsilon}^{\frac{(i+1)T}{m} - \varepsilon} \\
 &= \left[ \left( (i+1) \frac{T}{m} - \varepsilon \right) - \left( i \frac{T}{m} - \varepsilon \right) \right] = \frac{T}{m} = h
 \end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^x \varphi_i(y) dy = [0, 0, 0, \dots, \frac{h}{2}, h, h, \dots, h] \Phi(x)$$

$$\int_0^x \varphi_i(y) dy = [0, 0, 0, \dots, \frac{h}{2}, h, h, \dots, h] \Phi(x)$$

ومنه المصفوفة التنفيذية للتكامل تكتب على النحو التالي :

$$\int_0^x \Phi(y) dy = P \Phi(x)$$

حيث P هي مصفوفة معرفة كما يلي :

$$p = \begin{bmatrix} \frac{h-\varepsilon}{2} & h-\varepsilon & h-\varepsilon & \dots & h-\varepsilon \\ 0 & \frac{h}{2} & h & \dots & h \\ 0 & 0 & \frac{h}{2} & \dots & h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{h}{2} \end{bmatrix},$$

## الفصل 3

# تطبيقات حول الدوال القطع النبضية وتعديلاتها

### قائمة المحتويات

---

43	.....	تقريب تابع	1.3
43	.....	تقريب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية	1.1.3
43	.....	تقريب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$	2.1.3
44	.....	تقريب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية المزاحة ب $\varepsilon$	3.1.3

---

نقوم في هذا الفصل بمجموعة من التطبيقات التي تبرز لنا فاعلية التغييرات المدخلة على دوال القطع النبضية من أجل تحسين التقريب نقوم بتقريب تابع .

### 1.3 تقريب تابع

مثال 1.1.3 نقوم بتقريب التابعين  $f(x)$  و  $g(x)$  بالتقريبات الثلاث، حيث  $f(x) = xe^x$  و  $g(x) = e^{-x}$  على التوالي، من أجل  $m = 30$

#### 1.1.3 تقريب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{29} f_i \varphi_i(x) = F^T \Phi(x) = \Phi^T(x) F,$$

إذا

$$\begin{aligned} f(x) = & 0.017041\varphi_0(x) + 0.052663\varphi_1(x) + 0.090680\varphi_2(x) + 0.131213\varphi_3(x) + 0.174390\varphi_4(x) \\ & + 0.220344\varphi_5(x) + 0.269212\varphi_6(x) + 0.321140\varphi_7(x) + 0.376278\varphi_8(x) + 0.434786\varphi_9(x) \\ & + 0.496828\varphi_{10}(x) + 0.562575\varphi_{11}(x) + 0.632210\varphi_{12}(x) + 0.705918\varphi_{13}(x) + 0.783897\varphi_{14}(x) \\ & + 0.866350\varphi_{15}(x) + 0.953493\varphi_{16}(x) + 1.045548\varphi_{17}(x) + 1.142748\varphi_{18}(x) + 1.245336\varphi_{19}(x) \\ & + 1.353566\varphi_{20}(x) + 1.467701\varphi_{21}(x) + 1.588019\varphi_{22}(x) + 1.714807\varphi_{23}(x) + 1.848366\varphi_{24}(x) \\ & + 1.989008\varphi_{25}(x) + 2.137061\varphi_{26}(x) + 2.292866\varphi_{27}(x) + 2.456777\varphi_{28} + 2.629165\varphi_{29}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = & 0.98351698554\varphi_0(x) + 0.95127346351\varphi_1(x) + 0.92008700987\varphi_2(x) + 0.88992296979\varphi_3(x) \\ & + 0.86074782457\varphi_4(x) + 0.83252915437\varphi_5(x) + 0.80523560223\varphi_6(x) + 0.77883683916\varphi_7(x) \\ & + 0.75330353048\varphi_8(x) + 0.72860730323\varphi_9(x) + 0.70472071462\varphi_{10}(x) + 0.68161722152\varphi_{11}(x) \\ & + 0.65927115102\varphi_{12}(x) + 0.63765767185\varphi_{13}(x) + 0.61675276681\varphi_{14}(x) + 0.59653320607\varphi_{15}(x) \\ & + 0.57697652139\varphi_{16}(x) + 0.55806098108\varphi_{17}(x) + 0.53976556596\varphi_{18}(x) + 0.52206994588\varphi_{19}(x) \\ & + 0.50495445723\varphi_{20}(x) + 0.48840008104\varphi_{21}(x) + 0.47238842186\varphi_{22}(x) + 0.45690168731\varphi_{23}(x) \\ & + 0.4419226683\varphi_{24}(x) + 0.42743471995\varphi_{25}(x) + 0.41342174304\varphi_{26}(x) + 0.39986816616\varphi_{27}(x) \\ & + 0.38675892838\varphi_{28}(x) + 0.37407946253\varphi_{29}(x) \end{aligned}$$

#### 2.1.3 تقريب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف $h$

$$f(x) \simeq f_m(x) = \sum_{i=0}^{30} f_i \varphi_i(x) = F_m^T \Phi_m(x) = \Phi_m(x)^T F_m,$$





$$\begin{aligned}
f(x) = & 0.00842650721\varphi_0(x) + 0.03456049967\varphi_1(x) + 0.07136488488\varphi_2(x) + 0.11062454189\varphi_3(x) \\
& + 0.15246363036\varphi_4(x) + 0.19701190596\varphi_5(x) + 0.24440495706\varphi_6(x) + 0.29478445106\varphi_7(x) \\
& + 0.34829839074\varphi_8(x) + 0.40510138097\varphi_9(x) + 0.46535490618\varphi_{10}(x) + 0.52922761919\varphi_{11}(x) \\
& + 0.59689564157\varphi_{12}(x) + 0.6685428762\varphi_{13}(x) + 0.74436133243\varphi_{14}(x) + 0.82455146434\varphi_{15}(x) \\
& + 0.9093225226\varphi_{16}(x) + 0.99889292051\varphi_{17}(x) + 1.09349061474\varphi_{18}(x) + 1.19335350131\varphi_{19}(x) \\
& + 1.29872982754\varphi_{20}(x) + 1.4098786204\varphi_{21}(x) + 1.52707013211\varphi_{22}(x) + 1.65058630345\varphi_{23}(x) \\
& + 1.78072124571\varphi_{24}(x) + 1.91778174177\varphi_{25}(x) + 2.06208776723\varphi_{26}(x) + 2.21397303228\varphi_{27}(x) \\
& + 2.37378554518\varphi_{28} + 2.54188819811\varphi_{29}(x) + 2.67335258173\varphi_{30}(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) = & 0.9917127707\varphi_0(x) + 0.96726087962\varphi_1(x) + 0.93555029614\varphi_2(x) + 0.90487930923\varphi_3(x) \\
& + 0.87521383688\varphi_4(x) + 0.8465209144\varphi_5(x) + 0.8187686578\varphi_6(x) + 0.7919262284\varphi_7(x) \\
& + 0.7659637985\varphi_8(x) + 0.74085251829\varphi_9(x) + 0.71656448378\varphi_{10}(x) + 0.69307270574\varphi_{11}(x) \\
& + 0.6703510798\varphi_{12}(x) + 0.64837435736\varphi_{13}(x) + 0.62711811757\varphi_{14}(x) + 0.60655874022\varphi_{15}(x) \\
& + 0.58667337943\varphi_{16}(x) + 0.56743993831\varphi_{17}(x) + 0.54883704439\varphi_{18}(x) + 0.53084402587\varphi_{19}(x) \\
& + 0.51344088867\varphi_{20}(x) + 0.49660829417\varphi_{21}(x) + 0.48032753775\varphi_{22}(x) + 0.46458052802\varphi_{23}(x) \\
& + 0.44934976667\varphi_{24}(x) + 0.43461832907\varphi_{25}(x) + 0.42036984544\varphi_{26}(x) + 0.40658848267\varphi_{27}(x) \\
& + 0.39325892671\varphi_{28}(x) + 0.38036636557\varphi_{29}(x) + 0.37096220583\varphi_{30}(x)
\end{aligned}$$

### 3.1.3 تقريب بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية المزاحة ب $\varepsilon$

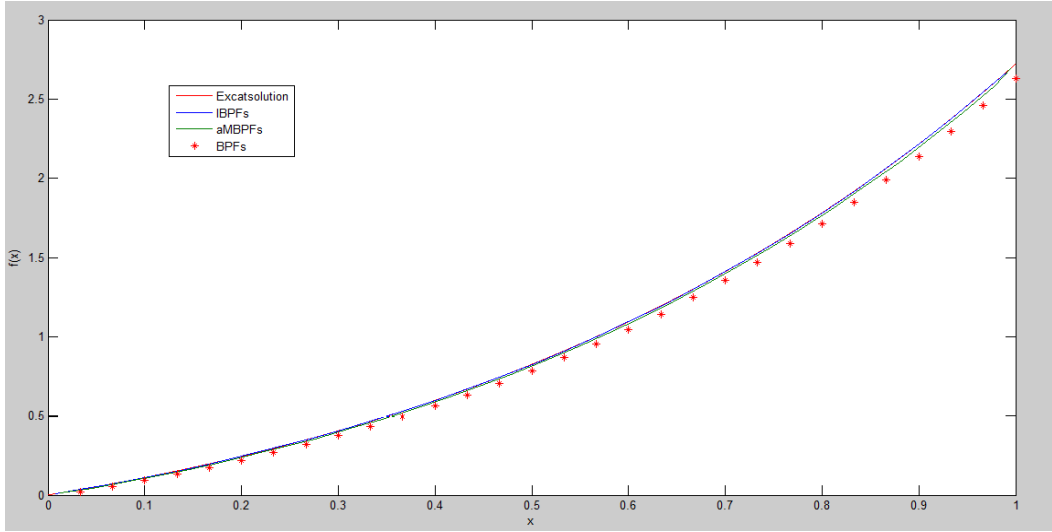
$$f(x) \simeq f_{m+1}(x) = \sum_{i=0}^{30} f_i \varphi_i(x),$$

نعطي  $\varepsilon$  القيمة  $4m$

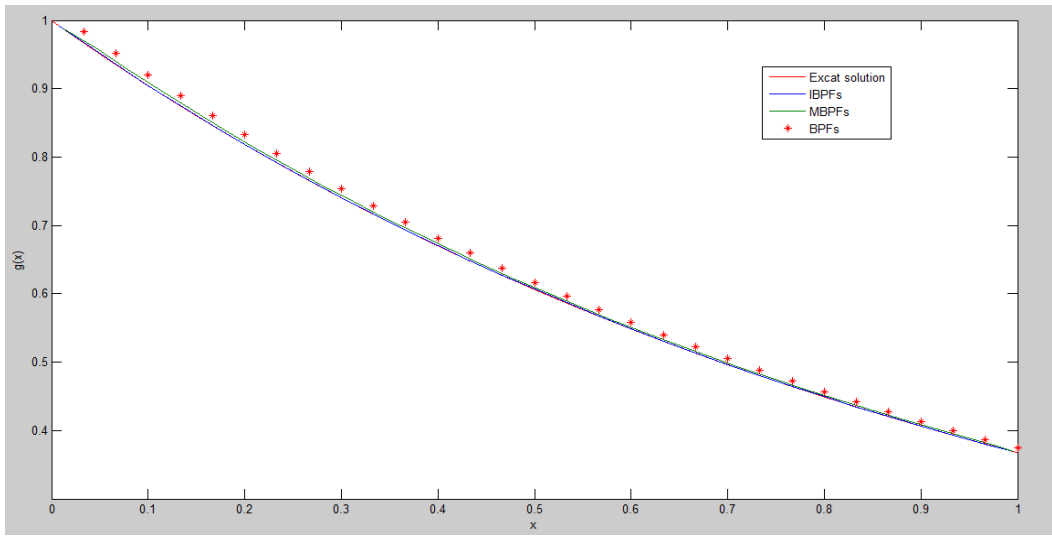
إذا

$$\begin{aligned}
f(x) = & 0.01271029954\varphi_0(x) + 0.04353800029\varphi_1(x) + 0.08094486088\varphi_2(x) + 0.12083752115\varphi_3(x) \\
& + 0.16334151809\varphi_4(x) + 0.20858804298\varphi_5(x) + 0.25671418046\varphi_6(x) + 0.30786315737\varphi_7(x) \\
& + 0.36218460158\varphi_8(x) + 0.41983481139\varphi_9(x) + 0.48097703583\varphi_{10}(x) + 0.54578176627\varphi_{11}(x) \\
& + 0.61442703981\varphi_{12}(x) + 0.68709875497\varphi_{13}(x) + 0.76399100006\varphi_{14}(x) + 0.84530639475\varphi_{15}(x) \\
& + 0.93125644551\varphi_{16}(x) + 1.0220619152\varphi_{17}(x) + 1.11795320758\varphi_{18}(x) + 1.21917076725\varphi_{19}(x) \\
& + 1.32596549562\varphi_{20}(x) + 1.43859918352\varphi_{21}(x) + 1.55734496116\varphi_{22}(x) + 1.68248776603\varphi_{23}(x) \\
& + 1.81432482956\varphi_{24}(x) + 1.95316618318\varphi_{25}(x) + 2.09933518448\varphi_{26}(x) + 2.25316906451\varphi_{27}(x) \\
& + 2.41501949667\varphi_{28} + 2.58525318838\varphi_{29}(x) + 2.69572360304\varphi_{30}(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) = & 0.98760351886\varphi_0(x) + 0.95923386464\varphi_1(x) + 0.92778643801\varphi_2(x) + 0.89736998065\varphi_3(x) \\
& + 0.86795069337\varphi_4(x) + 0.83949588506\varphi_5(x) + 0.81197393631\varphi_6(x) + 0.78535426437\varphi_7(x) \\
& + 0.75960728908\varphi_8(x) + 0.73470440005\varphi_9(x) + 0.71061792482\varphi_{10}(x) + 0.68732109818\varphi_{11}(x) \\
& + 0.66478803236\varphi_{12}(x) + 0.6429936883\varphi_{13}(x) + 0.62191384784\varphi_{14}(x) + 0.60152508674\varphi_{15}(x) \\
& + 0.58180474874\varphi_{16}(x) + 0.56273092032\varphi_{17}(x) + 0.54428240637\varphi_{18}(x) + 0.52643870665\varphi_{19}(x) \\
& + 0.50917999299\varphi_{20}(x) + 0.49248708726\varphi_{21}(x) + 0.47634144008\varphi_{22}(x) + 0.46072511017\varphi_{23}(x) \\
& + 0.44562074445\varphi_{24}(x) + 0.43101155874\varphi_{25}(x) + 0.41688131911\varphi_{26}(x) + 0.40321432383\varphi_{27}(x) \\
& + 0.38999538596\varphi_{28}(x) + 0.37720981641\varphi_{29}(x) + 0.36941653892\varphi_{30}(x).
\end{aligned}$$



شكل 1.3: المقارنة بين القيم الدقيقة والتقريب من حلول BPFs و IBPFs و  $\epsilon$ MBPFs.



شكل 2.3: المقارنة بين القيم الدقيقة والتقريب لكل من حلول BPFs و IBPFs و  $\epsilon$ MBPFs.

ملاحظة 1.1.3 نلاحظ أن التقريب بالدوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$  تقترب بشكل أفضل من الحل الدقيق وتفريرا منطبقة عليه أما بالنسبة التقريب بالدوال المزاحة ب  $\epsilon$  تقترب من الحل الدقيق أفضل من التقريب بالدوال القطع النبضية .

### الإستنتاج

نستنتج بعد تطبيق التقريبات الثلاث لدوال القطع النبضية على الدالتين  $f(x)$  و  $g(x)$  أنه أحسن تقريب لهما هو التقريب بالدوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$  .

مثال 2.1.3 نقوم بتقريب التابع  $k(x)$  بالتقريبات الثلاث، حيث  $k(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + 1$  من أجل  $m=5$  و  $m=4$ .

$$\varepsilon = 120m, m=4, \bullet$$

- بإستعمال أساس دوال القطع النبضية

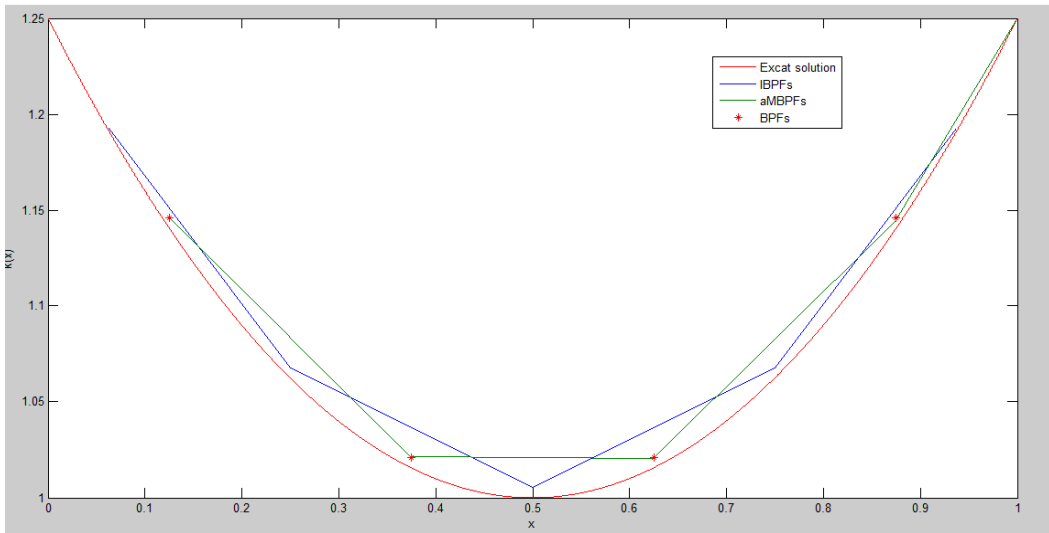
$$k(x) = 1.1458333333\varphi_0(x) + 1.0208333333\varphi_1(x) + 1.0208333333\varphi_2(x) + 1.1458333333\varphi_3(x)$$

- بإستعمال أساس دوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$

$$k(x) = 1.1927083333\varphi_0(x) + 1.0677083333\varphi_1(x) + 1.0052083333\varphi_2(x) + 1.0677083333\varphi_3(x) + 1.1927083333\varphi_4(x)$$

- بإستعمال أساس دوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$

$$k(x) = 1.14652922454\varphi_0(x) + 1.02135850694\varphi_1(x) + 1.02031684028\varphi_2(x) + 1.14427517361\varphi_3(x) + 1.248959780093\varphi_4(x)$$



شكل 3.3: المقارنة بين القيم الدقيقة والتقريب لكل من حلول BPFs و IBPFs و aMBPFs.

ملاحظة 2.1.3 نلاحظ أن التقريب بدوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$  تقترب بشكل أفضل من تقريب بدوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$  ومن تقريب بدوال القطع النبضية للحل الدقيق.

الإستنتاج

نستنتج أن أفضل تقريب للدالة  $k(x)$  من أجل  $m = 4$  هو التقريب بدوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$ .

$$\varepsilon = 120m, m=5 \bullet$$

- بإستعمال أساس دوال القطع النبضية

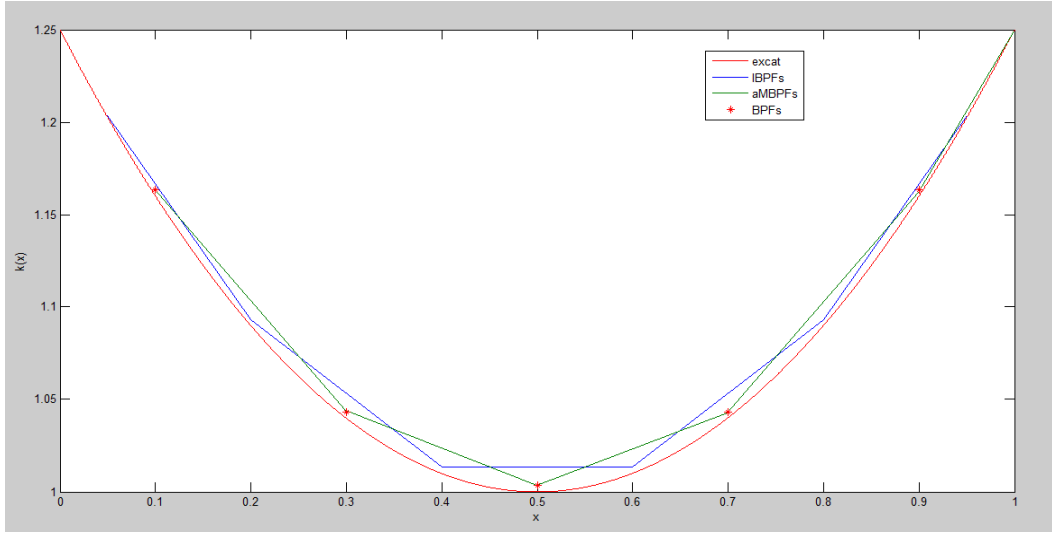
$$k(x) = 1.1633333333\varphi_0(x) + 1.0433333333\varphi_1(x) + 1.0033333333\varphi_2(x) + 1.0433333333\varphi_3(x) + 1.1633333333\varphi_4(x)$$

- بإستعمال أساس دوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$

$$k(x) = 1.2033333333\varphi_0(x) + 1.0933333333\varphi_1(x) + 1.0133333333\varphi_2(x) \\ + 1.0133333333\varphi_3(x) + 1.0933333333\varphi_4(x) + 1.2033333333\varphi_5(x)$$

- بإستعمال أساس دوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$

$$k(x) = 1.16394537037\varphi_0(x) + 1.04400277778\varphi_1(x) + 1.00333611111\varphi_2(x) \\ + 1.04400277778\varphi_3(x) + 1.16200277778\varphi_4(x) + 1.24916759259\varphi_5(x)$$



شكل 4.3: المقارنة بين القيم الدقيقة والتقريب لكل من حلول IBPFs و aMBPFs و BPFs.

ملاحظة 3.1.3 نلاحظ أن التقريب بدوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$  تقترب بشكل أفضل من تقريب بدوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$  ومن تقريب بدوال القطع النبضية للحل الدقيق .

الإستنتاج

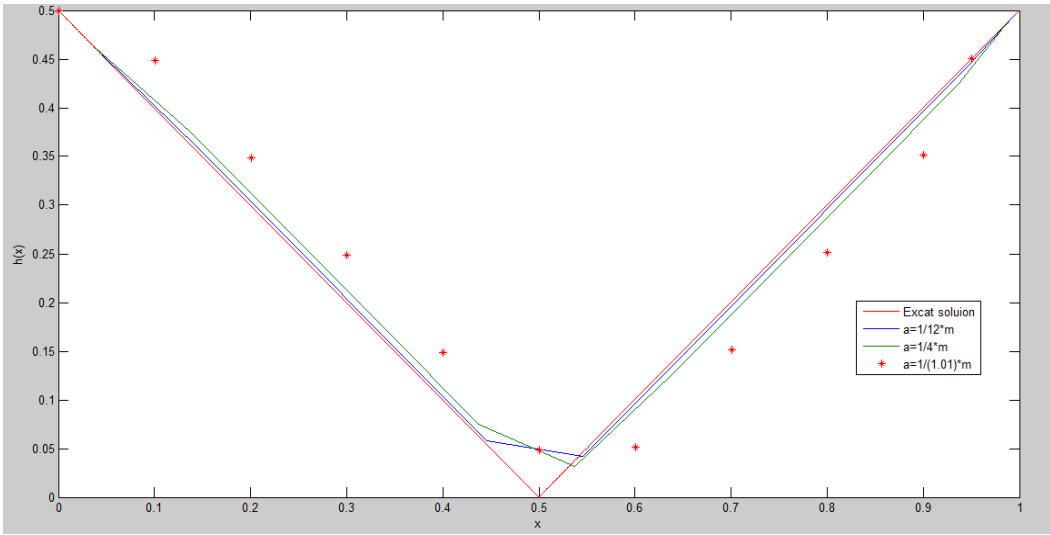
نستنتج أن أفضل تقريب للدالة  $k(x)$  من أجل  $m = 5$  هو التقريب بدوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$ .

مثال 3.1.3 المقارنة بين قيم  $\varepsilon$

• نأخذ قيمة  $\varepsilon = 12m$  ونطبق التقريب على الدالة  $h(x) = |x - \frac{1}{2}|$  ,  $(m = 10)$

• نأخذ قيمة  $\varepsilon = 4m$  ونطبق التقريب على الدالة  $h(x) = |x - \frac{1}{2}|$  ,  $(m = 10)$

• نأخذ قيمة  $\varepsilon = (1.01)m$  ونطبق التقريب على الدالة  $h(x) = |x - \frac{1}{2}|$  ,  $(m = 10)$



الشكل 5.3: المقارنة بين القيم الدقيقة والتقريب من حلول قيم  $\varepsilon$ .

ملاحظة 4.1.3 نلاحظ أن التقريب بالدوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$  عند  $\varepsilon = 12m$  تقترب بشكل أفضل من القيمة  $\varepsilon = 4m$  و  $\varepsilon = (1.01)m$  من الحل الدقيق .

### الإستنتاج

نستنتج أن التقريب بالدوال القطع النبضية المزاحة ب  $\varepsilon$  يكون أفضل عندما نأخذ قيمة  $\varepsilon$  صغيرة جدا .

### الإستنتاج العام :

نستنتج أن التقريب الأحسن للدوال هو أنه لكل دالة تقريباها الأفضل لها ، حيث أنه يوجد دوال التقريب الأفضل لها هو أساس دوال القطع النبضية ، ويوجد دوال التقريب الأفضل لها هو أساس دوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$  ، يوجد دوال التقريب الأفضل لها هو أساس دوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $\varepsilon$  .



## الخلاصة

يندرج محتوى هذه المذكرة في دراسة الدوال القطع النبضية والتعديلات المدخلة عليها واستنتاج أحسن تقريب بواسطة أساس الدوال القطع النبضية والتعديلات المدخلة عليها بناء عن الأمثلة التي إستخدمناها وتم تطبيقها في برنامج الماطلاب, بحيث تعتمد هذه الطريقة على أساس الدوال القطع النبضية و أساس التعديلات المدخلة عليه ومصفوفات عملياتها .

# المراجع

- [1] مذكرة تخرج, الدوال القطع النبضية ذات متغيرين وتطبيقاتها في حل المعادلات التكاملية غير خطية , 02.06.2018, قسم الرياضيات بورقلة.
- [2] مذكرة تخرج, حل عددي لمعادلة تفاضلية تكاملية لفريدهولم-فولتيرا غير خطية باستعمال دوال مهجنة (دوال القطع النبضية وكثير حدود ليجاندر) 2017.05, قسم الرياضيات بورقلة .
- [3] Jiang, Zhihua, and Walter Schaufelberger. Block pulse functions and their applications in control systems. Vol. 179. Berlin : Springer-Verlag, .1992
- [4] Dawood, Hameed Kadhim. "Computational block-pulse functions method for solving Volterra integral equations with delay." Journal of University of Babylon for Pure and Applied Sciences 27.1 (2019) : .32-42
- [5] Ebadian, Ali, and Amir Ahmad Khajehnasiri. "Block-pulse functions and their applications to solving systems of higher-order nonlinear Volterra integro-differential equations." Electron. J. Differ. Equ 54 (2014) : .1-9
- [6] He, Ji-Huan, et al. "Improved block-pulse functions for numerical solution of mixed Volterra-Fredholm integral equations." Axioms 10.3 (2021) : .200
- [7] Mirzaee, Farshid. "Numerical solution of system of linear integral equations via improvement of block-pulse functions." Journal of Mathematical Modeling 4.2 (2016) : .133-159
- [8] Maleknejad, K., and B. Rahimi. "Modification of block pulse functions and their application to solve numerically Volterra integral equation of the first kind." Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 16.6 (2011) : .2469-2477
- [9] Maleknejad, Khosrow, Morteza Khodabin, and F. Hosseini Shekarabi. "Modified block pulse functions for numerical solution of stochastic Volterra integral equations." Journal of Applied Mathematics 2014 .(2014)
- [10] Hwang, Chyi, and Yen-Ping Shih. "On the operational matrices of block pulse functions." International journal of systems science 17.10 (1986) : .1489-1498

الملخص:

في هذه المذكرة قمنا بتقديم أحسن تقريب للدوال القطع النبضية والتعديلات المدخلة عليها وذلك من خلال دراسة الدوال القطع النبضية والتعديلات المدخلة عليها ودراسة التقريب ومصفوفات العمليات الخاصة بهم وإعطاء أمثلة وتطبيقهم على برنامج الماطلاب

الكلمات المفتاحية:

الدوال القطع النبضية, الدوال القطع النبضية المزاحة بنصف  $h$ , الدوال القطع النبضية المزاحة ب

$\varepsilon$

Résumé:

Dans cette note, nous avons présenté la meilleure approximation des fonctions de découpage impulsif et des modifications qui leur ont été apportées, en étudiant les fonctions de découpage impulsif et les modifications qui leur ont été apportées, en étudiant l'approximation et leurs matrices d'opérations, en donnant des exemples et en les appliquant au programme matlab.

**Mot clés :** fonctions des morceaux d'impulsion, Fonctions de segment d'impulsion demi-décalées  $h$ , Fonctions de segment d'impulsion décalé  $\varepsilon$

Summary

In this note, we have presented the best approximation of the pulse cutting functions and the modifications made to them, by studying the pulse cutting functions and the modifications made to them, studying the approximation and their operations matrices, giving examples and applying them to the matlab program .

**Key word**

Block Pulse functions, Improved Block–Pulse Function ,  $\varepsilon$  Modified Block Pulse Functions