جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم مادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار : رياضيات واعلام آلي

فرع : رياضيات

تخصص : تحليل دالي

من إعداد الطالبة :بادو صفاء

الموضوع

بعض الخواص الطيفية للمؤثرات مؤثر سيزارو المرجح

نوقشت يوم 15 جوان2023 من طرف أعضاء اللجنة

بن الشيخ عبد الكريم	الرتبة أستاذ M.C.B	جامعة قاصدي مرباح ورقلة رئيسا
عباسي حسين	الرتبة أستاذ M.C.B	جامعة قاصدي مرباح ورقلة ممتحنا
حشيفة عبد الرزاق	الرتبة أستاذ M.C.B	جامعة قاصدي مرباح ورقلة مشرفا

شكر وعرفان

نحمدك ربي ونشكرك على ما تفضلت علينا من واسع فظلك و مسالك ربي بعزتك وجلالك أن تتقبل مني هذا العمل خالصا لوجهك الكريم...

اللهم علمنا ما ينفعنا بما علمتنا وزدنا علما

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم

" من لم يشكر الناس لم يشكر الله ومن أهدى

إليكم معروفا فكافئه, فان لم تستطيعوا فأدعو له"

كما لا يفوتنا أن نتقدم بالشكر والامتنان إلى الوالدين الكريمين اللذان دعمونا في دراستنا من كل الجوانب نفسيا ومعنويا أكثر منها ماديا. من هذا المنطلق واعترافا بالجميل يطيب لنا أن نتقدم بجزيل الشكر إلى أستاذي الكريم المشرف على هذا البحث الأستاذ "حشيفة عبد الرزاق" الذي تكرم بإشرافه على هذا العمل وعلى إرشاداته وتوجهاته القيمة ومشكورا بالنصح مساهما بكل ما لديه من جهود الذي لم يبخل علينا بدعمه وتشجيعه لنا طيلة انجاز هذا العمل . أشكر أعضاء اللجنة بدايتا برئيس اللجنة أستاذ "بن الشيخ عبد الكريم" و أستاذ المناقش "عباسي حسين" على قبول مناقشة مذكرتي وإشراف عليها. و كما أشكر جميع أساتذة تخصص رياضيات, وإلى كل من ساهم ولو بالكلمة الطيبة في إعداد هذا العمل الذي نتمنى أن يخدم المجتمع الجزائري سائلين المولى تبارك وتعالى أن يجزيهم عنا وعن الأمة الإسلامية كل الخير وانه ولي ذلك والقادر عليه.

الإهداء

الحمد لله وكفى والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى
أما بعد:
الحمد لله الذى وفقني لتثمين هذه الخطوة في مسيرتي الدراسية بمذكرتي هذه، ثمرة الجهد والنجاح بفضله تعالى مهداة الى الوالدين الكريمين
حفظها الله وأدامهما نور دربي ،علموني أن الحياة مليئة بالمعارك الصغيرة منتصرون خاسرون ،الحرب مستمرة حتى تقدموا في السن.
الدراسات هي تدريباتي.
الشهادات ستكون أسلحتي القتالية.
المثابرة والإجتهاد سيكونان سر مجدي المتوج .
الحب والصداقة راحة الجندي .
شكرا لكم ،
لقد حققت إبنتكم نجاحا كبيرا...أحبكم.
لكل العائلة الكريمة التي ساندتني ولا تزال إخوة وأخي.
إلى رفيقات المشوار اللاتي قاسمنني لحظاته رعاهن الله ووفقهن .
والى كل شخص قابلته وساعدني .
وإلى كل من أحبهم قلبي ونسيهم قلمي.

الفهرس

مقدمة

تعتبر دراسة المؤثرات الخطية والدراسة الطيفية لها من اهم ميادين التحليل الدالي ،انها تستعمل في تسهيل حل المعادلات الدالية . ومن الاشياء المهمة في دراسة المؤثر الخطي دراسة حالته .
يدور موضوع هذه المذكرة حول نظرية المؤثرات، Hفضاء هيليبرت مركب و قابل للفصل و$B(H)$ جبر المؤثرات الخطية المحدودة فيH. و من اهم مواضيعه **المؤثر ونظرية الاطياف** وهذا مانطرقنا اليه في مذكرتنا **بعض الخواص الطيفية للمؤثرات مؤثر سيزارو المرجح .**
وهذا يتم على ثلاث مراحل :
تناولنا في الفصل الاول اهم المفاهيم الاساسية التي تم دراستها في مجال نظرية الامؤثرات الخطية.
وفي الفصل الثاني تطرقنا الى مفهوم الطيف الممدد للمؤثر في حالات الخاصة ، مثل حالة البعد المنتهي وحالة المؤثرات القابلة للقلب .
وفي الفصل الاخير اثبتنا ان مؤثر سيزارو المرجح تحت الطبيعي ثم قمنا بتحديد الطيف الممدد له.

دليل الترميزات

$\langle . , . \rangle$: تطبيق الجداء السلمي.

$R(T)$: صورة T .

$M^{\perp}$: متممة التعامد.

$\overline{M}$: لاصقة M .

$\oplus$: الجمع المباشر التبولوجي .

T^{-1} : المؤثر العكسي للمؤثر T.

Re : عدد حقيقي .

∂D : حافة القرص D .

N^{*} : امتداد الطبيعي الادنى .

$\|.\|_X$: النظيم المعرف علىX .

$\mathbb{C}$: مجموعة الاعداد المركبة .

$E(T)$: مجموعة قيم المؤثر T .

$D(T)$: مجموعة تعريف المؤثر T .

$\ker T$: نواة المؤثر T .

$\sigma(T)$: طيف المؤثر T .

$\rho(T)$: مجموعة القيم .

T^{*} : المؤثر القرين للمؤثر T .

$T\mid_H = S$: اقتصار المؤثر T .

$\overline{E(T)}$: لصاقة مجموعة قيم المؤثر T .

$B(H)$: جبر المؤثرات الخطية المحدودة في H .

trT : اثر T .

$\{A\}^{'}$: التبادل .

$\{A\}^{''}$: تبديل مضاعف .

δ_A : الاشتقاق الداخلي وفق A .

$\delta_{A,B}$: الاشتقاق المعمم .

(x_n) : متتالية التعامد والتجانس .

$L_a^2(G)$: فضاء الدوال التحليلية .

z_n : متتالية ، n عدد طبيعي .

Ω_r : نصف مستوي مفتوح .

$\sigma_p(T)$: الطيف النقطي للمؤثر T .

$\sigma_c(T)$: الطيف المستمر للمؤثر T .

$\sigma_r(T)$: الطيف الباقي للمؤثر T .

$\sigma_{ext}(T)$: الطيف الممدد للمؤثر T .

$E_{ext}(T,\lambda)$: الفضاء الجزئي الذاتي المرتبط ب λ .

$r(T)$: نصف قطر الطيف .

االفصل 1
مفاهيم اساسية

1.1 تعاريف ومفاهيم

H فضاء هيلبيارتي مركب قابل للفصل ذات بعد منتهي مزود بواسطة جداء سلمي ، ويرمز له ب : $\langle .\ ,\ . \rangle$

- $B(H)$ يرمز لجبر المؤثرات الخطية المحدودة في H.
- من اجل $T \in B(H)$: يرمز لنواة المؤثر (T) بالرمز $ker(T)$ ونكتب :

$$ker(T) = \{x \in D(T)/Tx = 0\}$$

- يرمز لصورة المؤثر T بالرمز $R(T)$ ونكتب :

$$R(T) = \{x \in H/Tx = H\}$$

خاصية 1.1.1 الجداء السلمي $\langle .,. \rangle$ يعرف نظيم في H كما يلي :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in H.$$

تعريف 1.1.1 يقال أن الشعاعين x و y من H متعامدان ، إذا كان جداؤهما السلمي معدوما $\langle x\ ,\ y \rangle = 0$ ونرمز : $x \perp y$

تعريف 1.1.2 ليكن M مجموعة جزئية من H ، يرمز لمتممة التعامد على M بالرمز $M^{\perp}$ تعرف كما يلي:

$$M^{\perp} = \{y \in H; \quad \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in M\}$$

ملاحظة 1.1.1 • $M^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.

- $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$.
- $M^{\perp\perp}$ هي اصغر فراغ جزئي مغلق يحوي M.

قضية 1.1.1 اذا كان M فراغ جزئي من فضاء هيلبيارت H ، فان:

$$M^{\perp\perp} = \overline{M}$$

البرهان 1.1.1 لاثبات المساواة يجب ان نبين الاحتواء في كلا الاتجاهين:

- $(M)^{\perp\perp} \subset \overline{M}$:

ليكن: $f \in M^{\perp\perp}$ ، نكتب f على الشكل $f = g + h$ حيث $g \in \overline{M}$ و $h \in \overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$
وبالتالي : $f \in M^{\perp\perp}$

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, h \rangle &= \langle g + h, h \rangle \\ &= \langle h, h \rangle \\ &= \|h\|^2 \end{aligned}$$

اي: $h = 0$ و $f = g$ اذن : $f \in \overline{M}$ و منه الاحتواء موجود .

- الاحتواء الثاني واضح ، محقق لان $M \subset M^{\perp\perp}$ و $M^{\perp\perp}$ مغلق ، اذن :$\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$
وبالتالي : $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

قضية 1.1.2 اذا كان M فراغ جزئي مغلق من H ، فان H عبارة على جمع مباشر بين M و $M^{\perp}$. اي: $H = M \oplus M^{\perp}$.

تعريف 1.1.3 المجموعة $M = \{x_i \in H; \quad i \in I \subset \mathbb{N}\}$ تسمى نظام التعامد .
اذا كان : $i, j \in I$ و $i \neq j$
فان : $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ و $\|x_i\| = 1$ حيث : $\forall i \in I$

تعريف 1.1.4 ليكن E مجموعة غير خالية و M جزء من E .

- M محدب اذا كان :

$$\forall (x, y) \in M^2, \quad \forall \alpha \in [0, 1]; \quad \alpha x + (1 - \alpha) y \in M$$

- المحدب المغلق ل M هو اصغر محدب يحوي M ، ونرمز له $co(M)$.

1.2 المؤثرات الخطية المحدودة

تعريف 1.2.1 التطبيق T معرف على فضاء هيلبارتي H في H نقول انه " مؤثر خطي " اذا كان T يحقق الخاصيتين التاليتين :

1. تجميعية : $\forall x \ , \ y \in H, T(x+y) = Tx + Ty$.
2. متجانس : $\forall x \in H, T(\alpha x) = \alpha Tx$، و α عدد مركب .

<u>امثلة:</u>

- المؤثر الحيادي يرمز له ب I والمعرف ب : $\forall x \in H, Ix = x$.

- المؤثر المعدوم يرمز له ب 0 المعرف ب : $\forall x \in H, 0x = 0$.

تعريف 1.2.2 T مؤثر خطي معرف على فضاء H ، نقول ان T محدود اذا وجد عدد موجب c حيث :

$$\forall x \in H, \quad \|Tx\| \leq c \|x\|$$

نظيم المؤثر T معرف ب :

$$\|T\| = inf \{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\|, \forall x \in H\}$$

نظرية 1.2.1 من اجل كل مؤثر خطي T معرف على الفضاء H ،فان :

$$\|T\| = sup \{\|Tx\| ; x \in H, \|x\| = 1\}$$

البرهان 1.2.1 نضع : $a = sup \{\|Tx\| ; x \in H, \|x\| = 1\}$

1. اذا كان المؤثر T محدود ، فان :

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| = \|T\|, \forall \|x\| = 1$$

اي ان : $a \leq \|T\|$ حسب التعريف $\|T\|$.

2. من اجل كل شعاع $x \in H$ نضع :

$$\|Tx\| = \left\|T\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \|x\| \leq a\,\|x\|$$

و $\|T\| \leq a = sup\{\|Tx\|\,; x \in H, \|x\| = 1\}$
من خلال (1) و (2) نحصل على
$\|T\| = sup\{\|Tx\|\,; x \in H, \|x\| = 1\}$

1.3 المؤثر القابل للقلب

تعريف 1.3.1 ليكن T مؤثر خطي معرف على H نقول ان T قابل للقلب اذا وجد مؤثر S معرف على H يحقق :

$$ST = TS = I$$

حيث : I مؤثر حيادي على H .
نرمز له ب $S = T^{-1}$ ويسمى المؤثر العكسي ل T .

تعريف 1.3.2 اذا كان T مؤثر خطي محدود ، فان اثر T هو مجموع العناصر القطرية للمصفوفة للمؤثر T في اي اساس ، و نرمز له ب: trT.

1.4 المؤثر القرين

تعريف 1.4.1 من اجل $T \in B(H)$ ،T^* هو المؤثر القرين ل T ،و المعرف ب :

$$\forall x, y \in H, \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

نظرية 1.4.1 [17]
اذا كان S و T مؤثران معرفان على فضاء هيلبيارتي H ،
S^* و T^* مؤثران القرين لهما على الترتيب فان :

1. $\|T\| = \|T^*\|$.
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
4. $(T^*)^* = T$.
5. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*,$ ، اذا كان T قابل للقلب .
6. $(ST)^* = T^* S^*$.

1.5 المبدل

تعريف 1.5.1 E فضاء شعاعي نظيمي مركب .

1. تبادل $A \in B(E)$ هي المجموعة التي نرمز لها ب $\{A\}^{'}$ ومعرفة ب:

$$\{A\}^{'} = \{B \in B(E); AB = BA\}$$

2. تبديل مضاعف $A \in B(E)$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $\{A\}^{''}$ ومعرفة ب :

$$\{A\}^{''} = \left\{C \in B(E); \quad CB = BC, \quad \forall B \in \{A\}^{'}\right\}.$$

خواص 1.5.1 1. $\{A\}^{''} = \left\{\{A\}^{'}\right\}^{'}$.

2. $\{A\}^{'}$ هو جبر جزئي من $B(E)$.

3. $\{A\}^{''}$ هو جبر جزئي تبديلي من $B(E)$.

4. كل كثيرات الحدود من A تنتمي الى $\{A\}^{''}$.

1.6 المشتقات

تعريف 1.6.1 لمشتق δ على Λ هو تطبيق خطي مستمر من Λ في Λ والتي تحقق الخاصية التالية:

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y), \forall X, Y \in \Lambda$$

تعريف 1.6.2 1. ليكن $A \in \Lambda$ التطبيق δ_A من Λ نحو Λ المعرف ب :

$$\delta_A(X) = AX - XA.$$

هو الاشتقاق الداخلي وفق A.

2. ليكن $A, B \in \Lambda$ التطبيق $\delta_{A,B}$ المعرف من Λ نحو Λ كما يلي :

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB$$

يسمى الاشتقاق المعمم وفق A و B .

نظرية 1.6.1 ليكن $A, B \in B(H)$ الخواص التالية متكافئة

1. $\exists X \in B(H); AX - XB = I$.

2. $\exists Y \in B(H)$ قابل للقلب حيث : $Y \in \{A\}^{'} \cup \{B\}^{'}$ و $Y \in R(\delta_{A,B})$.

3. $R(\delta_{A,B})$ يحتوى على مجموعة المؤثرات القابلة للقلب في $B(H)$ و تبدلية مع A او B.

البرهان 1.6.1 $(2) \Rightarrow (3)$: I قابل للقلب، $I \in \{A\}^{'} \cup \{B\}^{'}$ و $I \in R(\delta_{A,B})$.

$(1) \Leftarrow (2)$: ليكن: $Y \in B(H)$ ، قابل للقلب حيث $Y \in \{A\}^{'} \cup \{B\}^{'}$

(لنفترض ان : $Y \in \{A\}^{'}$) $Y \in R(\delta_{A,B}) \Rightarrow \exists X \in B(H),$ حيث : $AX - XB = Y$

لنضع : $Z = Y^{-1}X$ (اي: $X = YZ$) ، فان : $A(YZ) - (YZ)B = Y$ حيث : $Y \in A^{'}$ فان :

$Y(AZ - ZB) = Y$ ، نحصل على نتيجة $AZ - ZB = I$.

$(3) \Leftarrow (1)$: ليكن $X \in B(H)$

حيث : $AX - XB = I$

ليكن $Y \in B(H)$ قابل للقلب وتبديلي مع B.

نضع: $Z = XY$

اي ان: $X = ZY^{-1}$ ، فان :

$$\begin{gathered} I = AX\text{-}XB \\ \Rightarrow A(ZY^{-1}) - (ZY^{-1})B = I \\ \Rightarrow (AZ - ZB)Y^{-1} = I \\ {}^{-1}YY = \end{gathered}$$

او

$$\begin{gathered} \Rightarrow AZ - ZB = Y \\ \Rightarrow Y \in R(\delta_{A,B}) \end{gathered}$$

1.7 بعض فئات المؤثر B(H)

المؤثر $T \in B(H)$ ويقال:

- **متراص** : اذا : $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$ من اجل كل متتالية التعامد والتجانس (x_n) من H .
- **من رتبة منتهية**: اذا : $R(T)$ ذو بعد منتهي.
- **موجب** ، اذا كان : $\forall x \in H, \langle Tx, x\rangle \geq 0$ ونرمز $T \geq 0$.
- **قرين لنفسه** ، اذا كان : $T = T^*$.
- **اسقاط** ، اذا كان : $T^2 = T$.
- **الاسقاط العمودي** اذا كان : $T^2 = T$ و $T = T^*$.
- **تقايس**، اذا: $T^*T = I_H$.
- **الوحدوي**، اذا: $T^*T = TT^* = I$.
- **طبيعي**، اذا : $T^*T - TT^* = 0$.
- **تحت طبيعي**،اذا كان يقبل امتداد طبيعي .
- **قريب من الطبيعي** ، اذا كان مبادل مع T^*T.
- **شبه طبيعي**، اذا : $T^*T - TT^* \geq 0$.

1.7.1 مؤثر موجب

تعريف 1.7.1 $T \in B(H)$ يسمى مؤثر موجب ونرمز له ب $T \geq 0$.
معرف على :

$$\forall x \in H, \langle Tx, x\rangle \geq 0$$

نظرية 1.7.1 من اجل كل مؤثر موجب T يوجد مؤثر وحيد موجب S يحقق: $T = S^2$
بالاضافة الى ذلك
Sتبديلي مع كل مؤثر تبديلي مع T.
نسمي S بالجذر التربيعي ل T و نرمز له ب $\sqrt{T}$.

تعريف 1.7.2 يسمى المؤثر T بالتقايس الجزئي اذا كان:

$$\forall x \in Ker(T)^{\perp}, \|T(x)\| = \|x\|.$$

خاصية 1.7.1 المؤثر $T \in B(H)$ هو تقايس جزئي اذا وفقط اذا كان T^*T هو الاسقاط العمودي .

البرهان 1.7.1 نفرض T هو تقايس جزئي فان :

$$(T^*T)^* = T^*T \quad , \quad (TT^*)^* = TT^*$$

يبقى ان نثبت ان :

$$(T^*T)^2 = T^*T \quad , \quad (TT^*)^2 = TT^*.$$

نضع: $H = \ker(T)^{\perp} \oplus \ker(T)$

$$T^*Tx = T^*Tx_1 \in Ker(T)^{\perp}$$

حيث : $x_1 \in Ker(T)^{\perp}$
نحقق من ان $(x-x_1) \in Ker(T)$
لدينا $\|Tx_1\| = \|x_1\| \Longrightarrow \langle T^*Tx_1, x_1\rangle = \langle x_1, x_1\rangle$

$$\Rightarrow \quad T^*Tx_1 = x_1$$
$$\Rightarrow \quad (T^*T)^2x_1 = T^*Tx_1$$

نبرهن العكس:
نفرض ان T^*T هو الاسقاط العمودي فان :

$$\|T^*Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2$$

ثم نستنتج من ذلك $Ker(T^*T) = Ker(T)$
و بما ان T^*T هو الاسقاط العمودي على $Ker(T)^{\perp}$.
فان : $\forall x \in Ker(T)^{\perp}$

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle = \|x\|^2$$

نظرية 1.7.2 (التحليل القطبي)
ليكن $T \in B(H)$ ، لنضع: $| T |= \sqrt{T^*T}$
يوجد قياس جزئي U حيث :
$T = U \mid T \mid$
ويكون U وحيد يحقق الشرط

$$\ker U = \ker T$$

البرهان 1.7.2 نلاحظ ان :

$$\forall x \in H, \| Tx \|^2 = \|| T | x \|^2 \qquad (1.1)$$

نستنتج $Ker(| T |) = Ker(T)$ حيث :

$$| T | x =| T | y \Longrightarrow Tx = Ty$$

بتعريف التطبيق

$$V : R(\mid T \mid) \longrightarrow R(T)$$
$$\mid T \mid x \longmapsto Tx$$

واضح ان V تقايس.
نضع $U = VP$: حيث p الاسقاط العمودي على $Ker(T)^{\perp}$ ، نحصل على تقايس جزئي على H يحقق الخصائص المذكورة .

الوحدانية : اذا كان U_1 و U_2 تقايسين جزئيان يحققان :
$U_1|T| = U_2|T|$ فان : $U_1 = U_2$ على $\overline{R(\mid T \mid)}$.

1.7.2 المؤثر تحت طبيعي

تعريف 1.7.3 يكون المؤثر S المعرف على فضاء هيليبرت H تحت الطبيعي اذا وجد فضاء هيليبرت K حيث : $H \subset K$
و المؤثر الطبيعي Nمعرف على K حيث $NH \subseteq H$ و $S = N \mid_H$ نقول ان المؤثر تحت الطبيعي اذا قبل امتداد طبيعي .

مثال (عامل بيرجمان)
ليكن G مجموعة مفتوحة محدودة في $\mathbb{C}$ ، $L_a^2(G)$ فضاء الدوال التحليلية التي تنتمي الى $L^2(G)$.
المؤثر Sمعرف على $L_a^2(G)$ بواسطة $(Sf)(z) = zf(z)$ ، $\forall f \in L_a^2(G)$.
اذا كان $N : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ ، هو مؤثر معرف ب :

$$\forall f \in L^2(G) \ ,(Nf)(z) = zf(z)$$

فان N طبيعي وهو امتداد ل S ،اي ان S تحت الطبيعي .

معايير الوضع تحت الطبيعي

نظرية 1.7.3 [8]
اذا كان $S \in B(H)$ فان الخواص التالية متكافئة

1. S تحت الطبيعي
2. S هو امتداد المؤثر القريب من الطبيعي
3. اذا كان $f_0, ..., f_n \in H$ فان :

$$\sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j f_k, S^k f_j \right\rangle \quad \geq 0 \tag{1.2}$$

$$\forall f_0, ...f_n \in H \ , \ \exists c > 0$$

$$\sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^{j+1} f_k, S^{k+1} f_j \right\rangle \leq c \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j f_k, S^k f_j \right\rangle \tag{1.3}$$

4. $\forall f_0, ...f_n \in H$ (1.2) صالح

5. $\forall f_0, ...f_n \in H$

$$\sum_{j,k=0}^{n} \langle S^{j+k} f_j, S^{j+k} f_k \rangle \quad \geq 0. \tag{1.4}$$

6. اذا كان $B_0, ..., B_n \in C^*(S)$, ($C^*(S)$ توليد جبري ل S) فان:

$$\sum_{j,k=0}^{n} B_j^* S^{*k} S^j B_k \quad \geq 0. \tag{1.5}$$

البرهان 1.7.3 • $(2) \Longleftrightarrow (1)$: واضح انظر الخاصية (1.7.5).

• $(3) \Longrightarrow (1)$:ليكن N مؤثر طبيعي على K حيث $H \subseteq K$ و $S = N|_H$ و ليكن P الاسقاط من K نحو H .

$S^{*n} f = P N^{*n} f, \quad n \geq 1 \ , \forall f \in H$ اذن اذا كان $f_0, ...f_n \in H$ فان :

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{n} \langle S^j f_k, S^k f_j \rangle &= \sum_{j,k=0}^{n} \langle N^j f_k, N^k f_j \rangle \\
&= \sum_{j,k=0}^{n} \langle N^{*k} N^j f_k, f_j \rangle \\
&= \sum_{j,k=0}^{n} \langle N^j N^{*k} f_k, f_j \rangle \\
&= \sum_{j,k=0}^{n} \langle N^{*k} f_k, N^{*j} f_j \rangle \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} N^{*k} f_k \right\|^2 .
\end{aligned}$$

ومنه (1.2) محققة

نضع $g_k = S f_k$ ،فان :

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{n} \langle S^{j+1} f_k, S^{k+1} f_j \rangle &= \sum_{j,k=0}^{n} \langle N^j g_k, N^k g_j \rangle \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} N^{*k} g_k \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} N^{*k} N f_k \right\|^2 \\
&= \left\| N \sum_{k=0}^{n} N^{*k} f_k \right\|^2 \leq \|N\|^2 \sum_{k=0}^{n} \langle S^j f_k, S^k f_j \rangle
\end{aligned}$$

ومنه $c = \|N\|^2$
اي (1.3) محققة .

• $(4) \Longrightarrow (3)$:واضح.

• $(5) \Longrightarrow (4)$: اذا كان $h_k = S^k f_k$ فان :

$$0 \leq \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j h_k, S^k h_j \right\rangle = \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^{j+k} f_k, S^{j+k} f_j \right\rangle$$

ومنه (1.4) محققة .

• $(6) \Longrightarrow (4)$: اذا كان $B_0, ...B_n \in C^*(S)$ و $f \in H$ ليكن $f_k = B_k f$

$$0 \leq \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j B_k f, S^k B_j f \right\rangle = \left\langle \sum_{j,k=0}^{n} B_j^* S^{*k} S^j B_k f, f \right\rangle$$

اذا (1.5) محققة .

نظرية 1.7.4 [19]
ليكن $T \in B(H)$ ، الخواص التالية متكافئة

1. T تحت الطبيعي .
2. يوجد مؤثر وحدوي $U \in B(H \oplus H)$ حيث : $T^{*n} = P_H U^n T^n, n = 0, 1, ...,$ ، و P_H هو الاسقاط العمودي ل $H \oplus H$ على $H \oplus 0$.
3. من اجل : $n = 0, 1, ...,$:

$$T^{*n} = \left[\int_{\partial D} e^{int} dQ(t) \right] T^n \qquad (1.6)$$

وQ هو قياس للمؤثرات الايجابية المعرفة على حافة قرص الوحدة ∂D .

4. يوجد متتالية من المؤثرات $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in B(H)$ تحقق :

$$\forall n = 0, 1, ..., \quad T^{*n} = K_n T^n$$

نعرف :

$$L_n = \begin{cases} K_n & n \geq 0 \\ K_n^* & n < 0 \end{cases}$$

فان من اجل كل مجموعة منتهية $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ محتواة في H.

$$\sum_{j,k \geq 0}^{n} \langle L_{j-k} x_j, x_k \rangle \geq 0.$$

5. يوجد متتالية من المؤثرات $K_n \in B(H)$ تحقق $T^{*n} = K_n T^n$ من اجل $n = 0, 1, ...,$
نعرف :

$$L_n = \begin{cases} K_n & n \geq 0 \\ K_n^* & n < 0 \end{cases}$$

من اجل $x \in H$ و $n = 0, 1, ...,$ مصفوفة

$$[\langle L_{j-k} x, x \rangle]_{j,k \geq 0}^{n}$$

فان المصفوفة معرفة موجبا .

•الامتداد الطبيعي الادنى

تعريف 1.7.4 اذا كان S مؤثر تحت الطبيعي معرف على H و N هو امتداد طبيعي ل Sمعرف على K، فان N هو الامتداد الطبيعي الادنى ل S .
اذا كان K لا يحتوي على فضاء شعاعي جزئي ذاتي يحوي H .

خاصية 1.7.2 اذا كان S هو تحت الطبيعي على H و N الامتداد الطبيعي له على K .
فان Nهو الامتداد الطبيعي الادنى ل S اذا وفقط اذا كان :

$$K = \{N^{*i}x : x \in H \quad , \quad i \geq 0\}$$

البرهان 1.7.4 اذا كان $L = \{N^{*i}x : x \in H \quad , \quad i \geq 0\}$
فان L مقلص ل Nو $H \subseteq L$.
اذا كان N امتداد الطبيعي الادنى ل S و $K = L$.
كذلك اذا كان M فضاء جزئي يحوي H ، فان: $N^{*n}x \in M$
$\forall x \in H, n \geq 0$ اي ان $L \subseteq M$
اذا كان $L = K$ فان N هو الامتداد الطبيعي الادنى ل S.

خاصية 1.7.3 من اجل كل $k = 1, 2$ ، ليكن S_k مؤثر تحت الطبيعي في H_k و N_k هو االامتداد الطبيعي الادنى ل S_k في الفضاء الهيليبرتي K_k.
اذا كان $U : H_1 \to H_2$ هو تشاكل تقابلي حيث $US_1U^* = S_2$ M، فان يوجد تشاكل تقابلي $V : K_1 \to K_2$ كما يلي :

$$V|_{H_1} = U \quad , \quad VN_1V^* = N_2.$$

البرهان 1.7.5 نعرف V في K_1 كما يلي :

$$VN_1^{*n}f_1 = N_2^{*n}Uf_1, \quad f_1 \in H_1, \quad n \geq 0.$$

اذا كان $f_1, f_2, ..., f_m \in H_1$ و $n_1, n_2, ..., n_m \geq 0$ فان :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{m} N_2^{*n_k} U f_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{m} N_2^{*n_k} U f_k, \sum_{j=1}^{m} N_2^{*n_j} U f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle N_2^{*n_k} U f_k, N_2^{*n_j} U f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle N_2^{n_j} U f_k, N_2^{n_k} U f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle U N_1^{n_j} f_k, U N_1^{n_k} f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle N_1^{n_j} f_k, N_1^{n_k} f_j \right\rangle \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{m} N_1^{*n_k} f_k \right\|^2.
\end{aligned}$$

ومنه

$$V\left(\sum_{k=1}^{m} N_1^{*n_k} f_k\right) = \sum_{k=1}^{m} N_2^{*n_k} U f_k \tag{1.7}$$

من خلال الخاصية (1.7.2)
N_1 و N_2 امتداد طبيعي ادنى ل S_1 و S_2، V تشكل تقابلي من $V : K_1 \to K_2$.
حيث :

$$V|_{H_1} = U \quad , \quad VN_1V^* = N_2.$$

اصطلاحا . S مؤثر تحت الطبيعي في فضاء هيليبرت H و N امتداده الطبيعي الادنى على $K \supseteq H$.
ليكن X مؤثر معرف على $H^{\perp}$ نحو H معرف ب :

$$Xx = PNx, \quad x \in H^{\perp}$$

حيث P هو الاسقاط K على H.
ليكن T مؤثر معرف على $H^{\perp}$ نحو $H^{\perp}$ معرف ب :

$$T = N^*|_{H^{\perp}}.$$

اذا كان $K = H \oplus H^{\perp}$ ، فان N هي المصفوفة الممثلة كالتالي:

$$N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

و تكون المصفوفة N^* كما يلي :

$$N^* = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ X^* & T \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

و منه T تحت الطبيعي و N^* هو الامتداد الطبيعي الادنى .

1.7.3 المؤثر القريب من الطبيعي

تعريف 1.7.5 المؤثر $S \in B(H)$ هو القريب من الطبيعي اذا كان S تبديلي مع S^*S.

خاصية 1.7.4 اذا كان $S = UA$ التحليل القطبي ل S ، فان S يكون قريب من الطبيعي اذا وفقط اذا كان A و U تبدليان.

البرهان 1.7.6 لدينا $A = |S| = \sqrt{(S^*S)}$ ، U تقايس جزئي .

1. اذا كان S قريب من الطبيعي فان S و S^*S تبدليان ، مع $S^*S = A^2$.
لدينا S و A تبدليان .
فان :

$$\begin{aligned} SA - AS &= 0 \\ &= UAA - AUA \\ &= (UA - AU)A \\ &\Longrightarrow (UA - AU) = 0 \\ &\Longrightarrow UA = AU. \end{aligned}$$

2. اذا كان A و U تبدليان .
فان :

$$\begin{aligned} UA = AU \Longrightarrow UAAA &= AUAA \\ &= AAUA \\ &\Longrightarrow SA^2 = A^2S \end{aligned}$$

ومنه S قريب من الطبيعي .

خاصية 1.7.5 كل مؤثر S قريب من الطبيعي هو تحت الطبيعي.

البرهان 1.7.7 الحالة 1 :
نفرض ان $\ker S = (0)$ اذا كان $S = UA$ هو التحليل القطبي ل S حيث U تقايس جزئي.
ليكن $E = UU^*$ فان E هو الاسقاط على الفضاء النهائي ل U.
لدينا $E^{\perp}U = U^*E^{\perp} = 0$
حيث $E^{\perp} = I - E$ ، المؤثران V و B معرفان على $K = H \oplus H$ كما يلي :

$$V = \begin{pmatrix} U & E^{\perp} \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

و $N = VB$ لدينا $UA = AU$ و $U^*A = AU^*$ تحقق بسهولة ان N طبيعي . حيث :

$$N = \begin{pmatrix} S & E^{\perp}A \\ 0 & U^*A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & E^{\perp}A \\ 0 & S^* \end{pmatrix}$$

ويترتب على ذلك : $S = N \mid_H$.
الحالة 2:
نفرض ان $KerS \neq (0)$.
ليكن $KerS = L \subseteq KerS^*$
لدينا $S^* = AU^* = U^*A$.
اذا كان $S_1 = S \mid_{L^{\perp}}$ و $S = S_1 \oplus (0)$ على $L^{\perp} \oplus L = H$, $S^*S = S_1^*S \oplus (0)$
واضح ان S_1 قريب من الطبيعي.
باستخدام الجزء الاول نجد ان S_1 هو تحت الطبيعي .
وبالتالي S تحت الطبيعي .

قضية 1.7.1 اذا كان N هو الامتداد الطبيعي الادنى ل S فان S قريب من الطبيعي اذا وفقط اذا كان H صامد بواسطة N^*N .

البرهان 1.7.8 اذا كان S قريب من الطبيعي و $f \in H$ فان :

$$\begin{aligned} \|S^*Sf\|^2 &= \langle S^*Sf, S^*Sf \rangle \\ &= \langle Sf, SS^*Sf \rangle \\ &= \left\langle Sf, S^*S^2f \right\rangle \\ &= \left\langle S^2f, S^2f \right\rangle \\ &= \left\| S^2f \right\|^2 \\ &= \left\| N^2f \right\|^2 \\ &= \|N^*Nf\|^2 . \end{aligned}$$

نتيجة ذلك $N^*Nf \in H$.
العكس واضح.

1.7.4 المؤثرات الشبه الطبيعية

تعريف 1.7.6 المؤثر T هو شبه طبيعي اذا كان:

$$T^*T \geq TT^*. \tag{1.10}$$

خاصية 1.7.6 ليكن T مؤثر شبه طبيعي .اذا كانت T قابلة للقلب فان T^{-1} شبه طبيعي .

البرهان 1.7.9 يستخدم هذا البرهان حقيقة انه اذا كان T مؤثرا موجبا قابل للقلب و $T \geq 1$ فان $T^{-1} \leq 1$.
فان :

$$T^*T \geq TT^*$$

و T قابل للقلب فان :

$$T^{-1}T^*TT^{*-1} \geq T^{-1}TT^*T^{*-1} = 1$$

ومنه

$$T^*T^{-1}T^{*-1}T \leq 1$$

بالتالي :

$$T^{-1}T^{*-1} \leq T^{*-1}T^{-1}.$$

ومنه T^{-1} شبه طبيعي .

خاصية 1.7.7 اذا كان T مؤثر شبه طبيعي فان :

$$\|T^n\| = \|T\|^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

البرهان 1.7.10 اذا كان $f \in H$ و $n \geq 1$ فان :

$$\begin{aligned} \|T^n f\|^2 &= \langle T^n f, T^n f\rangle \\ &= \left\langle T^*T^n f, T^{n-1} f\right\rangle \\ &\leq \|T^*T^n f\| \left\|T^{n-1} f\right\| \\ &\leq \left\|T^{n+1} f\right\| \left\|T^{n-1} f\right\| \end{aligned}$$

ومنه :

$$\|T^n\|^2 \leq \left\|T^{n+1}\right\| \left\|T^{n-1}\right\|$$

والعلاقة التالية تبرهن بالتراجع (واضح) .
ومنه : $\|T^n\| = \|T\|^n$

خاصية 1.7.8 كل مؤثر تحت الطبيعي فهو شبه طبيعي.

البرهان 1.7.11 ليكن S مؤثر تحت الطبيعي و N امتداده الطبيعي الادنى .
لدينا N مصفوفة كما يلي (1.8) ، N^* مصفوفة كما يلي (1.9) ومنه :

$$0 = N^*N - NN^* = \begin{pmatrix} S^*S & S^*X \\ X^*S & X^*X + TT^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} SS^* + XX^* & XT \\ T^*X^* & T^*T \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$\begin{aligned} 0 &= S^*S - SS^* - XX^* \\ &\Longrightarrow S^*S - SS^* = XX^* \geq 0 \end{aligned}$$

ومنه S شبه طبيعي .

نتيجة 1.7.1 من خلال ماسبق نستنتج التالي :
المؤثر الطبيعي $\supset$ المؤثر قريب من الطبيعي $\supset$ المؤثر تحت الطبيعي $\supset$ المؤثر شبه الطبيعي .

االفصل 2
الطيف الممدد للمؤثر

2.1 العموميات على الطيف الممدد

في هذا الفصل، نقوم بتعريف بعض النظريات الطيفية لمؤثر خطي محدود على فضاء بناخ مركب . والعلاقة بين الطيف والطيف الممدد، واعطاء بعض النتائج للطيف الممدد لبعض الحالات الخاصة من المؤثر.

تعريف 2.1.1 ليكن $T \in B(H)$. λ عدد مركب يقال ان λ قيمة نظامية للمؤثر T .
اذا كان المؤثر $\lambda I - T$ قابل للقلب باستمرار على $B(H)$.
حيث I المؤثر الحيادي نرمز لمجموعة هذه القيم بالرمز $\rho(T)$ وتسمى المجموعة التحليلية .
ونكتب :

$$\rho(T) = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - T) \text{ قابل للقلب } \Big\}.$$

تعريف 2.1.2 مجموعة القيم المركبة λ ، التي لا تنتمي الى $\rho(T)$ تسمى طيف المؤثر T ، ونرمز لها بالرمز $\sigma(T)$ ، اي : $\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(T)$.

تعريف 2.1.3 تسمى الدالة الحالة ل T المعرفة كمايلي :

$$\lambda \longrightarrow (\lambda I - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T)$$

نظرية 2.1.1 ليكن $T \in B(H)$.
المجموعة التحليلية $\rho(T)$ هي مجموعة مفتوحة .
كذلك الدالة الحالة لكل $\lambda \longrightarrow (\lambda I - T)^{-1}$ هي تحليلية في $\rho(T)$.

البرهان 2.1.1 ليكن λ قيمة ثابتة في $\rho(T)$ و μ عدد مركب حيث : $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$
لنبين ان $\lambda + \mu \in \rho(T)$ لتكن السلسلة $S(\mu)$.
حيث :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k (\lambda I - T)^{-(k+1)}.$$

حيث : $\|\mu(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$ سلسلة متقاربة بانتظام $B(H)$.
نرمز لهذا المجموع ب $S(\mu)$ فان :

$$[(\lambda + \mu)I - T]\, S(\mu) = (\lambda I - T)S(\mu) + \mu S(\mu) = I,$$

$$S(\mu)\, [(\lambda + \mu)I - T] = S(\mu)(\lambda I - T) + \mu S(\mu) = I.$$

ومنه نستنتج ان :
$(\lambda + \mu) \in \rho(T)$ والتابع لكل μ يرفق $S(\mu)$ و الدالة $\mu \longrightarrow S(\mu) = [(\lambda + \mu)I - T]^{-1}$ وهي تحليلية من اجل $\mu = 0$.

مبرهنة 2.1.1 ليكن $T \in B(H)$ ، اذا كان $d(\lambda)$ هي المسافة من النقطة λ الى الطيف $\sigma(T)$ فان :

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(\lambda)}, \quad \lambda \in \rho(T).$$

البرهان 2.1.2 حسب النظرية (2.1.1) السابقة ، بين انه اذا كان $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$ فان: $(\lambda + \mu) \in \rho(T)$.
اي ان :

$$d(\lambda) \geq \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|^{-1}.$$

نظرية 2.1.2 ليكن $T \in B(H)$ ،فان الطيف $\sigma(T)$ متراص .

البرهان 2.1.3 من اجل $|\lambda| > \|T\|$.السلسلة $S(\lambda)$ متقاربة بالانتظام على $B(H)$ فان :

$$(\lambda I - T)S(\lambda) = S(\lambda)(\lambda I - T) = I.$$

ومنه :

$$S(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}, \quad (|\lambda| > \|T\|)$$

ويترتب على ذالك ان $\sigma(T)$ محدود . انطلاقا من النظرية (2.1.1) فان $\sigma(T)$ مغلق .
و هذا يعني ان :$\sigma(T)$ متراص.

تعريف 2.1.4 ليكن $T \in B(H)$ ، نصف قطر طيف $r(T)$ ل T المعرف بواسطة :

$$r(T) = Sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

خاصية 2.1.1 ليكن $T \in B(H)$:

$$\forall \lambda, \mu \in \rho(T), (\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1}$$

البرهان 2.1.4 لدينا :

$$(\lambda I - T)\left\{(\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1}\right\}(\mu I - T) = (\mu I - T) - (\lambda I - T) = (\mu - \lambda)I,$$

ومنه نتحصل على النتيجة بضرب الطرفين المعادلة في $(\lambda I - T)^{-1}$ ثم في $(\mu I - T)^{-1}$

تعريف 2.1.5 ليكن $T \in B(H)$ ينقسم طيف المؤثر T الى ثلاث اقسام وهي :

- الطيف النقطي ويرمز له بالرمز $\sigma_p(T)$ و المعرفة ب :

$$\sigma_p(T) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - T) \text{ غير قابل للقلب } \Big\}.$$

- الطيف المستمر ويرمز له بالرمز $\sigma_c(T)$ ، والمعرفة ب :

$$\sigma_c(T) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda I - T \text{ قابل للقلب }, \overline{(\lambda I - T)X} = X \quad \text{ حيث } \quad (\lambda I - T)X \neq X\Big\}.$$

- الطيف النقطي الباقي ونرمز له بالرمز $\sigma_r(T)$ ، والمعرفة ب :

$$\sigma_r(T) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - T) \text{ قابل للقلب } \quad \overline{(\lambda I - T)X} \neq X\Big\}.$$

ويكون طيف المؤثر T معرف ب :

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

اذا كان $\lambda \in \sigma_p(T)$ ، يقال ان λ هي قيمة ذاتية للمؤثر T ، في هذه الحالة يوجد شعاع غير معدوم x في H حيث : $Tx = \lambda x$.
يسمى x شعاعا ذاتيا يتوافق مع القيمة الذاتية λ ل T.

2.2 الطيف الممدد للمؤثر

تعريف 2.2.1 يقال ان العدد المركب λ هو قيمة ذاتية ممددة للمؤثر $T \in B(H)$ ، اذا وجد مؤثر X غير معدوم من $B(H)$ حيث : $TX = \lambda XT$.
يقال ان X هو مؤثر ذاتي ممدد ل T المرتبط ب القيمة الذاتية λ.
نسمي الطيف الممدد للمؤثر T مجموعة كل القيم الذاتية λ الممددة للمؤثر T، ونرمز لها ب $\sigma_{ext}(T)$.
ونرمز $E_{ext}(T, \lambda)$ الفضاء الذاتي الممدد الموافق ل $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$.
نلاحظ ان $\lambda = 1$ينتمي الى $\sigma_{ext}(T)$ من اجل كل $T \in B(H)$ ، مع $X = I$ المؤثر الممدد الموافق لها .

نظرية 2.2.1 نفرض ان $A, B \in B(H)$ حيث :

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset.$$

فان : $X = 0$ هو الحل الوحيد لمعادلة المؤثرات

$$AX - XB = 0.$$

البرهان 2.2.1 انظر مرجع [12].
بالتعويض في النظرية الاخيرة $A = T, B = \lambda T$ ، نحصل مباشرة على الخاصية التالية .

خاصية 2.2.1 [5]
ليكن $T \in B(H)$ ، فان :

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}$$

اذا كان : $\sigma(T) = \{\alpha\}$ ، حيث :$\alpha \neq 0$ ، فان :$\sigma_{ext}(T) = \{1\}$.

قضية 2.2.1 لنفترض ان $T \in B(H)$ يكون شبه عديم القوة ، فان :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}/\{0\}, \sigma_{ext}(\lambda I + T) = \{1\}.$$

2.2.1 علاقة الطيف الممدد مع الطيف النقطي

خاصية 2.2.2 [5] ليكن $T \in B(H)$. اذا كان $\sigma_p(T)$ الطيف النقطي ل T ، فان :

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in \sigma_p(T), \beta \in \sigma_p(T^*), \beta \neq 0\right\} \subset \sigma_{ext}(T)$$

البرهان 2.2.2 لنفترض ان $\alpha \in \sigma_p(T)$ و $\beta \in \sigma_p(T^*)$ **فانه يوجد** $x, y \in H/\{0\}$ بحيث : $Tx = \alpha x$ و $T^*y = \beta y$.
ليكن المؤثر X معرف ب $X = x \otimes y$ حيث :

$$\forall z \in H, \quad Xz = (x \otimes y)z = <z, y> x$$

ومنه :

$$TXz = <z, y> Tx = \alpha <z, y> x$$

و

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\overline{\beta}} XTz &= \frac{\alpha}{\overline{\beta}} < Tz, y > x \\ &= \frac{\alpha}{\overline{\beta}} < z, T^{*}y > x = \alpha < z, y > x,\end{aligned}$$

ومنه X هو مؤثر ذاتي ممدد ل T المرتبط بالقيمة $\frac{\alpha}{\overline{\beta}}$.
اذن : $\frac{\alpha}{\overline{\beta}} \in \sigma_{ext}(T)$.

2.2.2 الطيف الممدد لمؤثر قابل للقلب

نظرية 2.2.2 ليكن $T \in B(H)$ قابل للقلب ، نضع $a := \|T\| \|T^{-1}\|$ فان :

1. $\sigma_{ext}(T) \subset \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{a} \leq |z| \leq a\right\} = A_{\frac{1}{a},a}$.
2. اذا كان $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ حيث $|\lambda| \neq 1$. فان $\exists N > 1$ حيث من اجل جداء N عنصر من مجموعة $E_{ext}(T,\lambda)$ معدوم .

و بصفة خاصة ، كل عنصر من $E_{ext}(T,\lambda)$ هو مؤثر عديم القوة من الرتبة N على الاكثر .

البرهان 2.2.3 1) بما ان T قابل للقلب ، فانه يوجد $(c = \|T^{-1}\|^{-1}) \quad \exists c > 0$ حيث :

$$\forall x \in H, \|Tx\| \geq c \|x\| .$$

ليكن $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ و $X \in E_{ext}(T,\lambda)/\{0\}$ ، فان :

$$TX = \lambda XT.$$

$$\forall x \in H, c\|Xx\| \leq \|TXx\| = |\lambda| \|XTx\| \leq |\lambda| \|X\| \|Tx\| .$$

فان :

$$\forall x \in H, c\|X\| \leq |\lambda| \|X\| \|T\|$$

وبالتالي : $\frac{1}{a} \leq |\lambda|$.
من المتراجحة الثانية ، اذا كان $\lambda \in \sigma_{ext}(T), (\lambda \neq 0)$ فان $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ext}(T^{-1})$.
وبنفس الطريقة نحصل على

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{a}$$

ومنه : $|\lambda| \leq a$.
2) ليكن $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ حيث $|\lambda| \neq 1$ ، وليكن العدد الطبيعي $N > 1$ حيث $\lambda^{N} \notin A_{a,\frac{1}{a}}$ و $\lambda^{N-1} \in A_{a,\frac{1}{a}}$.
ليكن $X_1, ..., X_N \in E_{ext}(T,\lambda)/\{0\}$ ، فان :

$$TX_1...X_N = \lambda^{N} X_1...X_N T,$$

ومنه $X_1...X_N = 0:$

2.2.3 فضاء هيليبارتي ذات البعد منتهي

في هذه الفقرة ، نصف بشكل كامل الطيف الممدد لمؤثر يعمل على فضاء هيليبرت المركب ذات الابعاد المنتهية .

نظرية 2.2.3 [5]
ليكن T مؤثر في فضاء هيليبرت H ذات البعد المنتهي. فان :

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}$$

البرهان 2.2.4 نفرض في الحالة الاولى ان T غير قابل للقلب ، فان النواة T وT^* لا تساوي المجموعة $\{0\}$.
ليكن المؤثرX غير معدوم معرف من $kerT^*$ نحو $kerT$ وليكن المؤثر $X' = XP$ ، حيث P هو الاسقاط العمودي ل H على $kerT^*$.
واضح ان $(X' \neq 0)$.
ومنه :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad TX' = \lambda X'T = 0$$

اي : $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$ ، حيث T غير قابل للقلب ، ومنه :
$0 \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$ من اجل كل $\lambda \in \mathbb{C}$ ومنه :

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} = \mathbb{C}.$$

نفرض في الحالة الثانية ان T قابل للقلب ، اي $0 \notin \sigma(T)$ معطاة $\lambda \in \mathbb{C}$ ، يكفي اثبات ان :

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} \subset \sigma_{ext}(T).$$

لنفرض $\beta \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$ ، اي انه يوجد X شعاع ذاتي غير معدوم $a \in H$ حيث $Ta = \beta a$ (بالضرورة $\beta \neq 0$ و $\lambda \neq 0$) .لدينا $(\beta/\lambda) \in \sigma(T)$ ، هذا يعني $\overline{(\beta/\lambda)} \in \sigma(T^*)$ ، وبالتالي يوجد شعاع ذاتي غير معدوم $b \in H$ حيث $T^*b = \overline{(\beta/\lambda)}b$. في الاخير نضع $X = a \otimes b$ ، نتحقق بسهولة ان $TX = \lambda XT$ حيث $X \neq 0$. ومنه $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$.

نتيجة 2.2.1 ليكن T مؤثر خطي معرف على فضاء هيليبرت ذات البعد المنتهي ،فان :

1. $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$ اذا وفقط اذا كان $\sigma(T) = \{\alpha\}$ حيث $\alpha \neq 0$.
2. $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$ اذا وفقط اذا كان T غير قابل للقلب .
3. اذا كان T قابل للقلب ، فان $\sigma_{ext}(T) = \{\alpha/\beta : \alpha, \beta \in \sigma(T)\}$.

2.2.4 حالة المؤثرات ذات الطيف النقطي الغني

تعريف 2.2.2 نقول ان المؤثر T له طيف نقطي غني اذا حقق :
$int\sigma_p(T) \neq \emptyset$.
من اجل كل قرص مفتوح $D \subseteq \sigma_p(T)$ مجموعة الاشعة الذاتية

$$\bigcup_{z \in D} ker(T - z) \tag{2.1}$$

وهي مجموعة كثيفة .

نظرية 2.2.4 [15]
ليكن المؤثر Tمعرف على فضاء بناخ مركب لديه طيف نقطي غني .
اذا كان λ قيمة ذاتية ممددة من اجل T فان :

$$\lambda.int\sigma_p(T) \subseteq \overline{\sigma_p(T)}. \qquad (2.2)$$

البرهان 2.2.5 ليكن X مؤثر ذاتي ممدد ل T موافق للقيمة الذاتية الممددة λ اي $X \neq 0$ و $TX = \lambda XT$.
ليكن $z \in int\sigma_p(T)$ و ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $D(z, \frac{1}{n}) \subseteq \sigma_p(T)$.
بما ان $X \neq 0$ و T له طيف نقطي غني ، فانه يوجد $z_n \in D(z, \frac{1}{n})$ و $f_n \in ker(T - z_n)/\{0\}$ حيث : $Xf_n \neq 0$.وبالتالي :

$$\begin{aligned} TXf_n &= \lambda XTf_n \\ &= \lambda z_n X f_n \end{aligned}$$

وبما ان : $Xf_n \neq 0$ ، هذا يعني $\lambda z_n \in \sigma_p(T)$. لما $n \longrightarrow \infty$ وبالتالي $\lambda z \in \overline{\sigma_p(T)}$.

نظرية 2.2.5 ليكن T مؤثر خطي محدود له طيف نقطي غني حيث $\sigma_p(T) = D(r, r)$ حيث : $r > 0$. اذا كان λ قيمة ذاتية ممددة ل T فان λ عدد حقيقي و $0 < \lambda \leq 1$.
$D(r, r)$ هو القرص ذو المركز $(r, 0)$ ونصف قطر r في $\mathbb{R}^2$.

البرهان 2.2.6 ليكن $\mu = \frac{1}{\lambda}$. لنبين ان μ عدد حقيقي و $\mu \geq 1$.ليكن نصف المستوى مفتوح .فان :

$$\Omega_r = \left\{ w \in \mathbb{C} : Rew > \frac{1}{2r} \right\}$$

وليكن $z \in D(r, r)$ اذا وفقط اذا كان $\frac{1}{z} \in \Omega_r$. انطلاقا من النظرية (2.2.4)، نجد ان $\mu w \in \overline{\Omega_r}$ ، من اجل كل $w \in \Omega_r$.هذا يعني نعرف التطبيق من Ω_r نحو $\overline{\Omega_r}$ ل $\varphi(w) = \mu w$.
ليكن $w \in \Omega_r \cap \mathbb{R}$ و لتكن متتالية النقاط $(\mu^n w)$ من $\overline{\Omega_r}$ ، بحيث $Re(\mu^n w) \geq \frac{1}{2r}$ ، من ناحية اخر كذلك لدينا

$$Re\left[\left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^n\right] \geq \frac{1}{2rw\,|\mu|^n} > 0.$$

اخيرا ، نكتب $\mu = |\mu|\,(cos(\theta) + isin(\theta))$. $0 \leq \theta < 2\pi$. حيث : $cos(n\theta) > 0$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$.يتحقق ان $\theta = 0$ و هذا يعني ان μ عدد حقيقي .
من الواضح لان $\mu \leq 1$ فان صورة φ خارج $\overline{\Omega_r}$ ، مثال

$$\varphi(\frac{1}{2r}) = \frac{\mu}{2r} < \frac{1}{2r}.$$

لانه اذا كان $\mu < 1$ وهذا تناقض .

قضية 2.2.2 ليكن T مؤثر خطي محدود معرف على فضاء بناخ مركب E نفرض انه يوجد تابع تحليلي $h : int\sigma_p(T) \longrightarrow E$ حيث $h(z) \in ker(T - z)/\{0\}$ من اجل كل $z \in int\sigma_p(T)$.
اذا كانت المجموعة $\{h(z) : z \in int\sigma_p(T)\}$ هي مجموعة جزئية كلية في E .
فان للمؤثر T طيف نقطي غني .

البرهان 2.2.7 ليكن D قرص مفتوح موجود في $\sigma_p(T)$ وليكن $g^* \in E^*$ حيث : $\langle h(z), g^* \rangle = 0$ من اجل كل $z \in D$،نثبت ان $g^* = 0$. ليكن تابع التحليلي في $\varphi : int\sigma_p(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرف ب :

$$\varphi(z) = \langle h(z), g^* \rangle .$$

نفرض ان φ تنعدم على D. من التمديد التحليلي ل φانها تنعدم في $int\sigma_p(T)$.
وبما ان مجموعة الاشعة الذاتية $\{h(z) : z \in int\sigma_p(T)\}$ هي مجموعة كلية فان $g^* = 0$.

نظرية 2.2.6 ليكن T, S مؤثرين خطيان محدودين معرفان على فضاء بناخ مركب ، لنفرض انه يوجد مؤثر X غير معدوم حيث : $X \neq 0$ و $XT = SX$.
اذا كان المؤثر T طيف نقطي غني ، فان :

$$int\sigma_p(T) \subseteq \overline{\sigma_p(S)}.$$

البرهان 2.2.8 ليكن $z \in int\sigma_p(T)$ وليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $D(z, \frac{1}{n}) \subseteq \sigma_p(T)$.
بما ان : $X \neq 0$ و المؤثر T له طيف نقطي غني ، فان يوجد $z_n \in D(z, \frac{1}{n})$ و $f_n \in ker(T - z)/\{0\}$ حيث :$Xf_n \neq 0$ وبالتالي :

$$SXf_n = XTf_n = z_n Xf_n$$

وبما ان : $Xf_n \neq 0$ ، فان $z_n \in \sigma_p(S)$. لما $n \longrightarrow \infty$ وبالتالي : $z \in \overline{\sigma_p(S)}$.

االفصل 3

مؤثر سيزارو المرجح C_h

3.1 تعريف

من اجل المتتالية $h = (h(n))_{n\in\mathbb{N}}$ اعداد موجبة، يسمى الوزن والمتتالية $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ عدد مركب ، مؤثر سيزارو المرجح المنفصل C_h معرف ب :

$$(C_ha)(n) = \frac{1}{H(n)}\sum_{k=0}^{n} h(k)a(k), \qquad H(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k) \tag{3.1}$$

ليكن $1 < p < \infty$ و

$$\ell^p(h) = \left\{a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}} : a(n) \in \mathbb{C}, \|a\|_{p,h}^p = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)|a(n)|^p < \infty\right\} \tag{3.2}$$

ان مؤثر سيزارو المرجح في $\ell^p(h)$ محدود حيث :

$$\|C_h\| \leq \frac{p}{p-1}$$

انظر [20].نعرف المؤثر القرين C_h^* ل C_h على $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\ell^q(h),$ هو

$$(C_h^*a)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{h(k)a(k)}{H(k)}. \tag{3.3}$$

نعرف الجذاء السلمي على $\ell^2(h)$ في فضاء هيليبرت معرف ب :

$$\langle a,b\rangle_h = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)a(n)\overline{b(n)}, \quad a,b \in \ell^2(h). \tag{3.4}$$

3.2 المؤثر C_h تحت الطبيعي

نعرف المصفوفة C_h و C_h^* بواسطة نسبة الاساس .
ليكن $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ في $\ell^2(h)$ مصفوفة C_h و C_h^* في هذا الاساس معرفة كمايلي :

$$C_h = \begin{pmatrix} \frac{h(0)}{H(0)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{h(0)}{H(1)} & \frac{h(1)}{H(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{h(0)}{H(2)} & \frac{h(1)}{H(2)} & \frac{h(2)}{H(2)} & 0 & \cdots \\ \frac{h(0)}{H(3)} & \frac{h(1)}{H(3)} & \frac{h(2)}{H(3)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$C_h^* = \begin{pmatrix} \frac{h(0)}{H(0)} & \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h(3)}{H(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

بعد الحساب نجد المصفوفة المرافقة C_h^{-1} و C_h^{*-1}معرفة كمايلي :

$$C_h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{H(0)}{h(0)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{-H(0)}{h(1)} & \frac{H(1)}{h(1)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{-H(1)}{h(2)} & \frac{H(2)}{h(2)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{-H(2)}{h(3)} & \frac{H(3)}{h(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

و

$$C_h^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{H(0)}{h(0)} & -\frac{H(0)}{h(0)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{H(1)}{h(1)} & -\frac{H(1)}{h(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{H(2)}{h(2)} & -\frac{H(2)}{h(2)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{H(3)}{h(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

نظرية 3.2.1 [14]
مؤثر سيزارو المرجح C_h ل $\ell^2(h)$ هو تحت الطبيعي .

البرهان 3.2.1 ليكن $C_h^* = K_1 C_h$ حيث: $K_1 = C_h^* C_h^{-1}$
مصفوفة K_1 معرفة كمايلي :

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \dots & 1 \\ \frac{-H(0)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \dots & 1 \\ 0 & \frac{-H(1)}{H(2)} & \frac{h(3)}{H(3)} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-H(2)}{H(3)} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

و من اجل كل n عدد طبيعي لدينا :

$$K_n = C_h^{*n} C_h^{-n} = C_h^{*n-1} K_1 C_h^{1-n}. \tag{3.6}$$

يبقى ان نثبت ان K_n معرف موجبا .
حيث الشكل الثنائي الخطي $\langle ., K_1 . \rangle_h$ معرف من اجل كل المتتاليات

$$a, b \in \ell^2(h).$$

باستخدام تمثيلات الاشعة ل a و b ، وتمثيل المصفوفة K_1 والجداء السلمي المعرف في (3.4)من تعريف

(3.1)، ومنه

$$\begin{aligned}
\langle a, K_1 b\rangle_h &= \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} h(0) & 0 & \\ 0 & h(1) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \frac{h(1)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \cdots \\ \frac{-H(0)}{H(1)} & \frac{h(2)}{H(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \\ \vdots \end{pmatrix}^t K_{1h} \begin{pmatrix} b(0) \\ b(1) \\ b(2) \\ \vdots \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

حيث :

$$K_{1h} = \begin{pmatrix} \frac{h(0)h(1)}{H(1)} & \frac{h(0)h(2)}{H(2)} & \frac{h(0)h(3)}{H(3)} & \cdots \\ \frac{-h(1)H(0)}{H(1)} & \frac{h(1)h(2)}{H(2)} & \frac{h(1)h(3)}{H(3)} & \cdots \\ 0 & \frac{-h(2)H(1)}{H(2)} & \frac{h(2)h(3)}{H(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

من اجل كل $n \in \mathbb{N}$،

$$\langle e_i, K_1 e_i\rangle_h = \frac{h(i-1)h(i)}{H(i)} \geq 0, \quad i \geq 1.$$

اذا كان : $n = i$ فان :

$$\langle e_n, K_1 e_n\rangle_h = h(n) \geq 0.$$

ومنه $a \in \ell^2(h), \langle a, K_1 a\rangle_h \geq 0$.
و منه K_1 معرف موجبا .
لدينا C_h و C_h^{-1} معرفة موجبة من اجل كل n عدد طبيعي ، C_h^{-n} معرفة موجبة .
بالنسبة ل C_h^* و C_h^{*n} معرفة موجبة . من اجل كل n عدد طبيعي.
ومنه $n : K_n = C_h^{*n-1} K_1 C_h^{1-n}$ معرف موجبا.
انطلاقا من النظرية (1.7.4) من الفصل الاول ، المؤثر C_h تحت الطبيعي .

3.3 القيم الذاتية الممددة للمؤثر C_h

سنبين في هذا القسم ان مجموعة القيم الذاتية الممددة من اجل المؤثر سيزارو المرجح في المجال $[1, \infty[$

نظرية 3.3.1 [14]

1. الطيف النقطي للمؤثر C_h هو مجموعة خالية .
2. فان $|1 - \lambda| < 1$ ، فان λ قيمة ذاتية بسيطة في C_h^*.
3. الطيف النقطي للمؤثر C_h هو قرص مغلق $\{\lambda : |1 - \lambda| \leq 1\}$.
4. الطيف النقطي للمؤثر C_h^* هو قرص مفتوح $\{\lambda : |1 - \lambda| < 1\}$.

البرهان 3،3،1 .1 ليكن $C_h f = g$ ، فان :

$f(0) = g(0)$ و من اجل $n \geq 1$

فان :

$$C_h f(n) = \frac{1}{H(n)} \sum_{k=0}^{n} h(k) f(k) = g(n)$$

و

$$\frac{h(0)f(0)}{H(n)} + \frac{h(1)f(1)}{H(n)} + ... + \frac{h(n)f(n)}{H(n)} = g(n)$$
$$\frac{h(0)f(0)}{H(n-1)} + \frac{h(1)f(1)}{H(n-1)} + ... + \frac{h(n-1)f(n-1)}{H(n-1)} = g(n-1)$$

بالطرح نجد

$$h(n)f(n) = H(n)g(n) - H(n-1)g(n-1)$$

حيث:

$$f(n) = \frac{H(n)g(n)}{h(n)} - \frac{H(n-1)g(n-1)}{h(n)}$$

في $C_h f = \lambda f$

$$f(n) = \lambda \left(\frac{H(n)f(n)}{h(n)} - \frac{H(n-1)f(n-1)}{h(n)} \right)$$

ومنه :

$$\left(\lambda \frac{H(n)}{h(n)} - 1 \right) f(n) = \lambda \frac{H(n-1)f(n-1)}{h(n)}$$

من اجل كل $n \geq 1$ ، اذا كان m هي اصغر عدد صحيح يحقق $f(m) \neq 0$، فان $\lambda = \frac{h(m)}{H(m)}$
اي : $0 < \lambda \leq 1$ اذا كان $n \geq 1$ فان :

$$\begin{aligned} |f(n)| &= \left| \frac{\lambda \frac{H(n-1)f(n-1)}{h(n)}}{\lambda \frac{H(n)}{h(n)} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda H(n-1)f(n-1)}{\lambda H(n) - h(n)} \right| \geq f(n-1) \end{aligned}$$

وهذا مستحيل وبالتالي $f \in \ell^2$ معدومة.
ومنه الطيف النقطي مجموعة خالية .

.2 لدينا

$$(C_h^* f)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{h(k)f(k)}{H(k)}$$

اذا كان $C_h^* f = g$ فان :

$$\frac{h(n)f(n)}{H(n)} + \frac{h(n+1)f(n+1)}{H(n+1)} + ... = g(n)$$
$$\frac{h(n+1)f(n+1)}{H(n+1)} + \frac{h(n+2)f(n+2)}{H(n+2)} + ... = g(n+1)$$
$$\Longrightarrow f(n) = \frac{H(n)g(n)}{h(n)} - \frac{H(n)g(n+1)}{h(n)}, \quad n = 0, 1, 2...$$

بالطرح نجد ، اذا كان $C_h^* f = \lambda f$ فان :

$$f(n) = \lambda \left(\frac{H(n)f(n)}{h(n)} - \frac{H(n)f(n+1)}{h(n)} \right)$$

ومنه

$$\lambda \frac{H(n)f(n+1)}{h(n)} = \left(\lambda \frac{H(n)}{h(n)} - 1 \right) f(n)$$

نلاحظ ان 0 ليس قيمة ذاتية ل C_h^* (اذا كان $\lambda = 0$ فان $f(n) = 0, n = 0, 1, 2, ...$) و منه

$$f(n+1) = \left(1 - \frac{h(n)}{\lambda H(n)} \right) f(n).$$

من اجل $n \geq 1$ فان :

$$f(n) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{h(j)}{\lambda H(j)} \right) f(0).$$

وبالتالي القيم الذاتية بسيطة.

3. لدينا $\|I - C_h\| \leq 1$ ، الطيف المؤثر $(I - C_h)$ موجود في القرص المغلق $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ ، الطيف المؤثر C_h موجود القرص المغلق $\{\lambda : |1 - \lambda| \leq 1\}$.

4. اذا كان $|1 - \lambda| = 1$ فان λ ليس قيمة ذاتية ل C_h^* وهذا يكافئ $1 - \lambda$ ليست قيمة ذاتية ل $I - C_h^*$.
ومنه الطيف النقطي ل C_h^* هو القرص المفتوح حيث $\{\lambda : |1 - \lambda| < 1\}$.

نظرية 3.3.2 [14]
المؤثر القرين لسيزارو المرجح $C_h^* \in B(\ell^q)$ له طيف نقطي غني .

البرهان 3.3.2 لدينا الطيف C_h^* هو $D(q/2, q/2)$ قرص مفتوح ومحدب اي : $\sigma_p(C_h^*) = D(q/2, q/2)$

من اجل كل $z \in D(q/2, q/2)$ هو قيمة ذاتية بسيطة من اجل C_h^* و الشعاع الذاتي $f(z) = (f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ المعرف ب :

$$f_0(z) = 1, \quad f_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{h(j)}{zH(j)} \right), \quad n \geq 1 \qquad (3.1)$$

من السهل ان نلاحظ ان التطبيق $f : \sigma_p(C_h^*) \longrightarrow \ell^q$ المعرف على (3.1) للقيم الذاتية الممددة للمؤثر C_hهو تحليلي و $f(z) \in ker\,(C_h^* - z) \,/\, \{0\}$

مجموعة الاشعة الذاتية $f(z)$ حيث :
$\{f(z) : z \in D(q/2, q/2)\}$ هي مجموعة كثيفة في ℓ^q.
ومنه باستخدام القضية (2.2.2) من الفصل الثاني نستنتج ان مؤثر C_h^* له طيف نقطي غني .

نتيجة 3.3.1 اذا كان λ قيمة ذاتية ممددة للمؤثر C_h^* فان λ عدد حقيقي موجود $0 < \lambda \leq 1$.

قضية 3.3.1 [14]
اذا كان λ قيمة ذاتية ممددة للمؤثر C_h فان λ عدد حقيقي و $\lambda \geq 1$.

البرهان 3.3.3 اذا كان λ هي قيمة ذاتية ممددة للمؤثر C_h على l^pفان $1/\overline{\lambda}$ قيمة ذاتية ممددة للمؤثر C_h^*.
باستخدام النتيجة الطيف الممدد السابقة λ قيمة ذاتية ممددة للمؤثر C_h^* فان λ عدد حقيقي $0 < \lambda \leq 1$.

3.4 الطيف الممدد لمؤثر C_h في حالة فضاء هيليبرت

نريد ان نبين في حالة فضاء هيليبرت $p = 2$ اذا كان λ عدد حقيقي و $\lambda \geq 1$ ، فان λ هو قيمة ذاتية ممددة للمؤثر C_h.
لقد تم اثبات نظرية(3.2.1)ان المؤثر C_h هو مؤثر تحت الطبيعي بالتالي يمكن باستخدام التركيب التالي :
ليكن μ قياس موجب منتهي معرف على مجموعة جزئية بورغل مركب مع حامل متراص و $H^2(\mu)$ كثيرات الحدود على فضاء الهيليبارت $\ell^2(\mu)$ نعتبر مؤثر الازاحة M_z المعرف على فضاء هيليبرت $H^2(\mu)$ بالعبارة التالية $(M_z f)(z) = zf(z)$ ، يوجد مؤثر وحدوي $U : \ell^2 \longrightarrow H^2(\mu)$ حيث : $I - C_h = U^* M_z U$ ، وبالتالي :

$$C_h = U^*(I - M_z)U$$

وبالتالي القيم الذاتية الممددة للمؤثر C_h هي نفسها القيم الذاتية الممددة للمؤثر $(I - M_z)$ ، من اجل مؤثر غير معدوم X يحقق $(I-M_z)X = \lambda X(I-M_z)$ ، فان المؤثر $Y = U^*XU$ يحقق $C_h Y = \lambda Y C_h$.

نظرية 3.4.1 [14]
اذا كان $1 \geq \frac{H(k)}{h(k)} = \lambda_k$ ، فان λ_k قيمة ذاتية ممددة للمؤثر $I - M_z$ و المؤثر الذاتي الممدد الموافق للقيمة λ_k هو X_k المعرف بالعبارة التالية :

$$(X_k f)(z) = f\left(\frac{H(k) - h(k)}{H(k)} + \frac{zh(k)}{H(k)}\right). \tag{3.1}$$

حيث $H(k), h(k)$ معرف بالعلاقة (3.1) من التعريف (3.1)و $k \in \mathbb{N}$

البرهان 3.4.1 ليكن $f_n = X_k z^n = \left(\frac{H(k)-h(k)}{H(k)} + \frac{zh(k)}{H(k)}\right)^n$
و

$$f_{n+1} = \left(\frac{H(k) - h(k)}{H(k)} + \frac{zh(k)}{H(k)}\right) f_n$$

و

$$\begin{aligned}
\frac{H(k)}{h(k)} f_{n+1} &= \left(\frac{H(k)}{h(k)} - 1 + z\right) f_n \\
&= \left(\frac{H(k)}{h(k)} - 1 + M_z\right) f_n \\
&= \frac{H(k)}{h(k)} f_n - (I - M_z) f_n
\end{aligned}$$

ومنه

$$(I-M_z)f_n=\frac{H(k)}{h(k)}(f_n-f_{n+1})$$

فان

$$\begin{aligned}(I-M_z)X_kz^n &= \frac{H(k)}{h(k)}(f_n-f_{n+1})\\ &= \frac{H(k)}{h(k)}(X_kz^n-X_kM_zz^n)\\ &= \frac{H(k)}{h(k)}X_k(I-M_z)z^n,\end{aligned}$$

ومنه $\lambda_k=\frac{H(k)}{h(k)}$ قيمة ذاتية ممددة للمؤثر$(I-M_z)$.
حيث X_k مؤثر ذاتي الموافق لها بالعلاقة :

$$(I-M_z)X_k=\lambda_kX_k(I-M_z).$$

نتيجة 3.4.1 اذا كان $1\geq\lambda_k=\frac{H(k)}{h(k)}$ فان λ_k قيمة ذاتية ممددة للمؤثر سيزارو المرجح C_h .
والمؤثر الممدد الموافق لهذا التركيب

$$U^*X_kU.$$

حيث : U مؤثر وحدوي .
X_k مؤثر

$$(X_kf)(z)=f\left(\frac{H(k)-h(k)}{H(k)}+\frac{zh(k)}{H(k)}\right). \tag{3.2}$$

الخاتمة

تمّ بعون الله تناول بحثنا هذا المتواضع والمتمثّل في بعض خواص المؤثّرات الخطّية في الفضاءات النّظيميّة إذ يعتبر هذا الموضوع من المواضيع الهامّة والشّائكة. لقد حاولنا إستعراض تعاريف المؤثّرات كّزنا في الأخير على العلاقة القائمة بهما.الخطّيّة وخواصّهما ومجمل المفاهيم المتعلقة بهما وركزنا في الأخير على العلاقة القائمة بهما. لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع و بعض المراجع من التحليل الدالي و نظر يةالمؤثرات. كل هذا يكمن في تسهيل حلول المعادلات الدالية التي معاملاتها مؤثرات قرينة لنفسها و العمل يبقى مفتوحا من أجل مؤثرات أخرى. في الأخير نأمل أننا وفقنا في دراسة هذا الموضوع ,و لله و بتوفيق منه تعالى تمكنت من اجتياز جملة من العراقيل و الصعوبات لاتمام هذا العمل و الذي لا يخلو من النقائص فلله الكمال و التمام .

المصادر

[1] Hasan Alkanjo. *On extended eigenvalues and extended eigenvectors of truncated shift*. Concrete Operators, 1 :19–27, 2013

[2] Constantin Apostol. *Universal quasinilpotent operators*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 25(2) :135–138, 1980

[3] Hari Bercovici. *Operator theory and arithmetic in H^∞*, volume 26 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988

[4] Animikh Biswas, Alan Lambert, and Srdjan Petrovic. *Extended eigenvalues and the Volterra operator.* Glasg. math. J.,44(3) :521-534, 2002

[5] Animikh Biswas, Srdjan Petrovic. *On extended eigenvalues of operators.* Integral Equtions Operator Theory, 55(2) : 233-248, 2006

[6] J. Bram, Subnormal operators, Duke Math. J., (1955), 75-94

[7] A. Brown,P.R. Halmos, A. L. Shield. *Cesàro operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), 26 :125–137, 1965

[8] John B. Conway,*The theory of subnormal operators*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume : 36, 1991

[9] John B. Conway. *Functions of one complex variable*. II, volume 159 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, NewYork, 1995

[10] James A. Deddens. *Intertwining analytic Toeplitz operators*. Michigan Math. J., 18 :243–246, 1971

[11] James A. Deddens. *Analytic Toeplitz and composition operators*. Canad. J. Math., 24 :859–865, 1972

[12] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators*. Part I.Wiley Classics Library. John Wiley Sons, Inc., New York, 1988

[13] Paul Richard Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17

[14] .A Hechifa, A. Mansour. *The weighted Cesàro operator $C_h \in \ell^2(h)$ is subnormal*, (En préparation)

[15] .M Lacruz, F. Saavedra, S. Petrovic and O. Zabeti. *Extended eigenvalues for Cesàro operators*, Math. FA. Arxi=1403-4844V1

[16] Alan Lambert. *Hyperinvariant subspaces and extended eigenvalues*. New York J. Math., 10 :83–88, 2004

[17] R.Nagel .*Towards a "Matrix theory" for unbounded operator matrices*, Math.Z, 201 (2009), 57-68

[18] Marvin Rosenblum. *On the operator equation* $BX - XA = Q$. Duke Math. J., 23 :263–269, 1956

[19] Tavan T. Trent, *New conditions for subnormality* , Pacific Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 2, April, 1981

[20] Julia Wagner, *On the cesàro operator in weighted* l^2*sequence space and the generalized concept of normality*, Ann. Funct. Anal. 4 (2013), no. 2, 1-11

الملخص:

يهدف هذا العمل الى معرفة بعض الخواص الطيفية للمؤثرات المعرفة على فضاءات بناخ، وخصوصا المفهوم الطيفي حديث التعريف و الذي يسمى الطيف الممدد لمؤثر سيزارو المرجح.

في الجزء الأول نقدم تعريفات في مجال نظرية مؤثر وبعض فئات المؤثرين. ونهتم في الجزء الثاني بالخصائص العامة من الطيف الموسع للمؤثر في حالات محددة. وفي الجزء الأخير، يظهر أن مؤثر سيزارو مرجح على $\ell^2(h)$.

الكلمات المفتاحية : الطيف الممدد، القيم الذاتية الممددة، الشعاع الذاتي الممدد، مؤثر سيزارو، المؤثر ذاتي القرين، المؤثر الطبيعي، المؤثر تحت الطبيعي، مؤثر قريب من الطبيعي، مؤثر شبه طبيعي .

Résumé :

Ce travail vise à identifier certaines des propriétés spectrales des effets définis sur les espaces de Banach, en particulier le concept spectral nouvellement défini appelé spectre étendu de l'effet Cesàro pondéré.

Dans la première partie nous fournissons des définitions dans le domaine de la théorie des opérateurs et quelques classes d'opérateurs. Et nous intéressons dans la deuxième partie par les propriétés générales du spectre étendu d'un opérateur dans certains cas particuliers. Et dans la dernière partie, on démontre que l'opérateur de Cesàro pondéré sur $\ell^2(h)$.

Mot clés : Spectre étendu, valeur propre étendue, vecteur propre étendu, opérateur de Cesàro, opérateur auto-adjoint, opérateur normal, opérateur quasinormal, opérateur sous normal, opérateur hyponormal.

Abstract :

This work aims to identify some of the spectral properties of definite effectson Banach spaces, in particular the newly defined spectral concept called the weighted extended Cesaro effect spectrum.

In the first part we provide definitions in the field of operator theory and some classes of operators. And we are interested in the second part by the general properties of an operator's extended spectrum in specific cases. In the last part, it is shown that the Cesaro operator weighted on the $\ell^2(h)$.

Key word : Extended spectrum, Extended eigenvalue, Extended eigenoperator, Cesaro operator, self-adjoint operator, normal operator, quasinormal operator, subnormal operator, hyponormal operator.