جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

فرع: رياضيات

اختصاص: نمذجة و تحليل عددي

من إعداد الطالبة : بكوش امنة احسان

الموضوع

دراسة معادلتي فولتيرا وفريدهولهم التكاملية التفاضلية الخطية

تناقش يوم 2023/06/15 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد	أستاذ محاضر ب	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
حشيقه عبدالرزاق	أستاذ محاضر ب	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
عباسي حسين	أستاذ مساعد. أ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
بن الشيخ عبد الكريم	أستاذ محاضر .ب	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

الاهداء وشكر

الحمد للهِ الذي أنار لي درب العلم والمعرفة و أعانني و وفقني في
إنجاز هذا العمل
أتوجه بأعمق عبارات الشكر و العرفان
إلى الأستاذ المشرف
* بن الشيخ عبد الكريم *
الذي لم يبخل علي بتوجيهاته و نصائحه القيمة و
الثمينة طوال مراحل إنجاز هذا العمل
إلى جميع أساتذتي الكرام الذين أشرفوا على تكويني طيلة
مشواري الجامعي
إلى كل من ساهم في تقديم يد العون من قريب أو بعيد لإنجاز هذا
العمل المتواضع
إلى الأساتذة الكرام أعضاء اللجنة المناقشة على تكرمهم و
تفضلهم بقبول مناقشة هذه المذكرة
شاكرة لهم كل ما يقدمونه من ملاحظات قيمة حول هذه
المذكرة

الاهداء

إليك أنت وحدك يا صاحب السيرة العطرة وصاحب الفكر المستنير، فأنت
وحدك من كان له الفضل الأول على لأبلغ سلم النجاح، لك أنت والدي
الحبيب إبراهيم اطال الله في عمرك إليك أنتِ يا من وضعتني على طريق
الحياة، فأنتِ من جعلتيني ربط الجأش، ويا من راعيتيني حتى صرت كبيرة،
لك أنتي يا أمي الغالية سعيدة
اطال الله في عمرك

و إلى عائلتي الجميلة أخواتي الجميلات خديجة.صفاء . مريم شيماء
وإخواني عزي وسندي في الحياة
جمال حسونه
و إلى صديقات المواقف والايام و إلى زميلات في الدراسة و العمل الى
اعمامي وعماتي كل باسمه
الى اخوالي وخالاتي كل باسمه
إلى كل من ساعدني في يوم من الأيام و إلى كل من قال أني لا أستطيع وكان
حافزًا كبيراً لأواصل لا لينكسر طموحي إلى من نسيهم قلمي وتذكرهم قلبي
ها آنا اليوم
أهدي تخرجي إليكم جميعاً .

Abstract

The aim of this research is to study the Volterra and Fredholm integral equations, which are of great importance in many scientific and technological applications that rely on these equations for their solution and analysis using various analytical methods. The research aims to find an accurate and correct solution for these equations, as different analytical methods have been studied due to their significant importance in the fields of physical sciences and engineering. Additionally, the research aims to obtain an accurate approximate solution by studying the available analytical techniques

---

Key words:Volterra and Fredholm integral-differential equations. Analytical methods.

Résumé

L'objectif de cette recherche est d'étudier les équations intégrales de Volterra et de Fredholm, qui revêtent une grande importance dans de nombreuses applications scientifiques et technologiques qui reposent sur ces équations pour leur résolution et leur analyse à l'aide de différentes méthodes analytiques. La recherche vise à trouver une solution précise et correcte pour ces équations, car différentes méthodes analytiques ont été étudiées en raison de leur importance significative dans les domaines des sciences physiques et de l'ingénierie. De plus, la recherche vise à obtenir une solution approximative précise en étudiant les techniques analytiques disponibles. .

Mots-Clés:Les équations différentielles intégrales de Volterra et Fredholm. Méthodes d'analyse.

ملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة معادلتي فولتيرا وفريدهولم التكاملية التفاضلية، والتي تتمتع بأهمية كبيرة في العديد من التطبيقات العلمية والتكنولوجية التي تعتمد على هذه المعادلات لحلها ودراستها بواسطة بعض الطرق التحليلية. يهدف البحث إلى إيجاد حل دقيق وصحيح لهاتين المعادلتين، حيث تم دراسة الطرق التحليلية المختلفة لحلهما بسبب الأهمية الكبيرة لهما في مجالات العلوم الفيزيائية والهندسية. يهدف البحث أيضًا إلى الحصول على حل تقريبي دقيق من خلال دراسة الأساليب التحليلية المتاحة .

الكلمات المفتاحية: معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية -معادلات فريدهولهم التكاملية التفاضلية -طرق التحليلية

الفهـــــــــــرس

مقدمة

بدأ العلماء في القرن الثامن عشر في استكشاف المعادلات التكاملية التفاضلية وأهميتها في فهم الظواهر الطبيعية المعقدة. من بين هؤلاء العلماء، يبرز الفيزيائي الفرنسي أوليمب دو فولتيرا والرياضي الألماني جوزيف فريدريش برنهارد ريشلهم. الذين أسهموا بشكل كبير في دراسة المعادلات التكاملية التفاضلية.و قدم فولتيرا مساهمات هامة في فهم تدفق الموائع وحرارتها وتوزيع الكهرباء. واستخدم المعادلات التفاضلية في تطوير نماذج رياضية لوصف تلك الظواهر. حيث ان معادلات فولتيرا وفريدهولم التكاملية التفاضلية تتيح وصف العديد من العمليات الفيزيائية والكيميائية والبيولوجية والهندسية.. وعلى الرغم من أن معظم المسائل الفيزيائية تصاغ بمعادلات تفاضلية، إلا أنه يمكن استبدال تلك بمعادلات تكاملية، سواء كانت خطية أو غير خطية، لتكون حلولها أكثر كفاءة ودقة وأبسط في الطرق في هذا المذكرة سندرس الطرق التحليلية لحل معادلتي فولتيرا وفريدهولم التكاملية-التفاضلية. التاليتين

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt,$$

وتقسيمها كمايلي :

فصل الاول

فصل تمهيدي بعنوان المفاهيم الاساسية حيث تطرقنا الى تعريف المعادلات التفاضلية .تعريف المعادلات التكاملية وتصنيفها وتريف المعادلات التكاملية -التفاضلية وتصنيفات IDEs

فصل الثاني

الفصل الثاني قمنا بدراسة طرق تحليلة لحل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية. حيث دراسنا حل معادلات من النوع ثاني من خلال طرق التالي (تحليل ادوميان .تكرار متغير .تحويل لابلاس حل على شكل سلسلة) ودرسنا حل المعادلا من النوع الاول من خلال طرق (تحويل لابلاس وتكرار متغير)

فصل الثالث

قمنا بدراسة طرق تحليلة لحل معادلات فريدهولهم التكاملية التفاضلية. حيث دراسنا حل معادلات من النوع ثاني من خلال طرق التالي (الحساب المباشر. .تكرار متغير. تحليل ادوميان .التحليل المعدل. حل على شكل سلسلة)

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1.1 المعادلات التفاضلية

نعرف المعادلة التفاضلية بأنها علاقة تساوي بين متغير مستقل و ليكن x و متغير تابع و ليكن $y(x)$ و عنصر أو أكثر من المشتقات التفاضلية حيث تأخذ العام و هو :

$$f(x, y, y', y", \dots\dots\dots) = 0$$

ونسمي هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية العادية .

ملاحظة:

إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد و لنفرض x, y مستقلان و كان $z(x, y)$ متغير تابع قابل للإشتقاق بالنسبة لكل من x, y جزئيا .. لهذا نسمي المعادلة التي تضم المتغيرات المستقلة و متغير تابع و مشتقاته الجزئية بالمعادلة التفاضلية الجزئية و تكون على الشكل التالي :

$$G(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots\dots\dots) = 0$$

2.1 المعادلات التكاملية

إن المعادلة التكاملية هي المعادلة التي تظهر فيها التابع المجهول $u(x)$ داخل علامة متكاملة $[1-5]$ و أكثر أنواع المعادلات المتكاملة شيوعاً هي ذات الصيغة التالية :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, t) u(t) dt \qquad (1.1)$$

$k(x, t)$ هي دالة معروفة ، لمتغيرين x و t ، تسمى النواة أو نواة التكامل معادلة.
يظهر المجهول $u(x)$ التي سيتم تحديدها في العديد من الحالات الأخرى يظهر داخل وخارج علامة التكامل و يتم إعطاء الدالتين $f(x)$ و $k(x, t)$ مقدما.
تجدر الإشارة إلى أن حدود التكامل $g(x)$ و $h(x)$ قد تكون متغيرات أو ثوابت أو مختلطة.

تصنيف المعادلات التكاملية

1. إذا تم إعطاء حدود التكامل ، فإن المعادلة الكاملية تسمى معادلة فريدهولم التكاملية و صيغتها العامة هي :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x, t) u(t) dt \qquad (2.1)$$

حيث a و b ثوابت.

2. إذا كان هناك حد واحد على الأقل متغيرً فإن المعادلة تسمى معادلة فولتيرا التكاملية و صيغتها العامة هي :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \tag{3.1}$$

تعرف معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية بالصيغة :

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_0^x K_2(x,t)u(t)dt \tag{4.1}$$

أو

$$u(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_\omega F(x,t,\xi,\tau u((\xi,\tau))d\tau, (x,t) \in \omega \times [0,T]) \tag{5.1}$$

حيث $F(x,t,\xi\tau,u(\xi,\tau))$و$f(x,t)$ توابع تحليلية على $D = \omega \times [0,T]$ وω و هي مجموعة جزئية مغلقة من $\mathbb{R}^n$.

3.1 المعادلات التكاملية- التفاضلية

المعادلات التكاملية-التفاضلية IDEs مادة أساسية في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية. ففي مطلع القرن العشرين شرع كل من العالم الإيطالي فولتيرا (V.Volterra) والعالم السويدي فريدهولم (I.Fredholm) في وضع هذه المعادلات أي المعادلات التكاملية-التفاضلية واستخدامها في دراستهما، فكان أثرهما كبيراً في تطوير المعادلات التكاملية-التفاضلية و التي كان لها دور بارز في بناء التحليل الرياضي والدالي . و بالرغم ان معظم المسائل الفيزيائية تصاغ بمعادلات تفاضلية إلا أننا يمكن إستبدال تلك المعادلات التفاضلية الى معادلات تكاملية سواءا كانت خطية أو غير خطية كي يكون حلها أكثر كفاءة و دقة و بطرق أبسط .

تعريف 1.3.1 المعادلة التفاضلية-التكاملية *(integro-differential equation)* هي معادلة تحتوي على التفاضل و التكامل، وتكون من الشكل:

$$\mathsf{y}^{(n)}(x) = \mathsf{F}\Big(x, \mathsf{y}(x), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(x), \lambda \int_\Omega \mathsf{k}\big(x,t,\mathsf{y}(t),\ldots,\mathsf{y}^{(n-1)}(t)\big)dt\Big) \tag{6.1}$$

أو من الشكل:

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_\Omega \mathsf{k}(x,t)M_t(\mathsf{y})dt + \mathsf{g}(x) \tag{7.1}$$

حيث:

1. $\mathsf{k}(x,t)$ دالة معلومة، تسمى نواة المعادلة التفاضلية التكاملية.
2. Ω و مجموعة جزئية مفتوحة من R.
3. $L_x(\mathsf{y}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\mathsf{y}^{(i)}(x)$ و $M_t(\mathsf{y}) = \sum_{j=0}^{m} d_j(t)\mathsf{y}^{(j)}(t)$
4. $a_i(x), d_j(x), \mathsf{g}(x)$ دوال معلومة محتواة في $L^2(\Omega)$.

و بما أن هذه المعادلة تحتوي على التفاضل فإنه من الضروري وجود الشروط الإبتدائية التالية:

$$\mathsf{y}(\alpha) = \beta_0, \quad \mathsf{y}'(\alpha) = \beta_1, \quad \mathsf{y}''(\alpha) = \beta_2, \quad \dots \quad \mathsf{y}^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

حيث $\alpha \in \Omega$ و β_i $i = 0, \dots, n-1,$ ثوابت.

1.3.1 تصنيفات IDEs

تصنف المعادلات التفاضلية التكاملية من حيث:

1.1.3.1 طرفي التكامل:

إذا كان طرفي التكامل عبارة عن ثابتين فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم وهي تأخذ الشكل التالي

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_a^b \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) dt + \mathsf{g}(x) \tag{8.1}$$

و إذا كان أحد أطراف التكامل عبارة عن متغير x فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفلتيرا و تكون على الشكل التالي :

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_a^x \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) dt + \mathsf{g}(x) \tag{9.1}$$

و إذا وجد كل من تكامل فريدهولم و تكامل فلتيرا في نفس المعادلة، فإن المعادلة التفاضلية-التكاملية لفريدهولم-فولتيرا و شكلها كما يلي :

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda_1 \int_a^b \mathsf{k}_1(x,t) M_t(\mathsf{y}) dt + \lambda_2 \int_a^x \mathsf{k}_2(x,t) M_t(\mathsf{y}) dt + \mathsf{g}(x) \tag{10.1}$$

2.1.3.1 رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية:

رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية هي رتبة أعلى مشتق في المعادلة.

3.1.3.1 خطية أو غير خطية

يقال عن المعادلة التفاضلية- التكاملية أنها خطية إذا كانت من الشكل

$$L_x(\mathsf{y}) = \lambda \int_\Omega \mathsf{k}(x,t) M_t(\mathsf{y}) dt + \mathsf{g}(x) \tag{11.1}$$

و غير خطية إذا كانت من الشكل

$$\mathsf{y}^{(n)}(x) = \mathsf{F}\Big(x, \mathsf{y}(x), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(x), \lambda \int_\Omega \mathsf{k}\Big(x, t, \mathsf{y}(t), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(t)\Big) dt\Big) \tag{12.1}$$

4.1.3.1 من النوع الأول أو الثاني:

إذا كان الجزء التفاضلي معدوم تكون المعادلة التفاضلية التكاملية من النوع الأول أما إذا كان غير معدوم تكون المعادلة من النوع الثاني

5.1.3.1 متجانسة أو غير متجانسة:

إذا كانت $\mathsf{g}(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية التكاملية متجانسة، أما إذا كانت $\mathsf{g}(x)$ غير معدومة تكون المعادلة غير متجانسة.

6.1.3.1 شاذة أو غير شاذة:

يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها شاذة إذا تحقق على الأقل أحد الشرطين التاليين:

1. أحد طرفي التكامل أو كلاهما يساوي ∞.
2. النواة غير منتهية بجوار نقطة أو أكثر من مجال التكامل.

أما إذا لم يتحقق أي شرط من الشرطين السابقين، تكون المعادلة غير شاذة.

7.1.3.1 عدد المتغيرات للدالة المجهولة

يقال عن المعادلة التفاضلية-التكاملية أنها عادية إذا كانت الدالة المجهولة متعلقة بمتغير مستقل واحد، أما إذا كانت متعلقة بمتغيرين مستقلين أو أكثر تكون المعادلة التفاضلية التكاملية جزئية

الفصل الثاني

طرق تحليلية لحل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية

درس فولتيرا التأثيرات الوراثية عندما كان يدرس نموذج النمو السكاني. حيث ظهر كل من العوامل التفاضلية والتكاملية معًا في نفس المعادلة. سمي هذا النوع الجديد من المعادلات كمعادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية، في الشكل

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt \quad (1.2)$$

1.2 حل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الثاني

فيما يلي سوف نقدم الطرق التي تم تطويرها مؤخرًا ، وهي طريقة تحليل ادومان و طريقة تكرار المتغير التي سيتم استخدامها للتعامل مع معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الثاني. علاوة على ذلك ، سيتم أيضا دراسة بعض الطرق التقليدية ، مثل طريقة تحويل لابلاس ، وطريقة الحل على شكل سلسلة . ومع ذلك ، سيتم دراسة لمعادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الأول. باستخدام طريقة تحويل لابلاس وطريقة تكرار المتغير .

1.1.2 طريقة تحليل أدوميان

طريقة التحلل أدوميان تعطي الحل في سلسلة لا نهائية من المكونات التي يمكن تحديدها بشكل متكرر. قد تعطي السلسلة التي تم الحصول عليها الحل الدقيق في حالة وجود مثل هذا الحل. خلاف ذلك ، تعطي السلسلة تقريبًا للحل الذي يعطي مستوى دقة عالية. بدون فقدان العمومية ، قد نفترض معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الثاني المعطى من قبل .

$$u''(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt, u(0) = a_0, u'(0) = a_1 \quad (2.2)$$

نكامل طرفي المعادلة من 0 إلى x مرتين يؤدي إلى

$$u(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u(t)dt\right) \tag{3.2}$$

يتم استخدام الشروط الابتدائية و L^1 عامل متكامل و باستعمال سلسلة الصحيحة التالية :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x \tag{4.2}$$

يتم الحصول عل

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x = a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\sum_{n=0}^{\infty} u_n t dt\right) \tag{5.2}$$

و هذا مكافئ لـ :

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... = a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)) + \tag{6.2}$$

$$L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_0(t)dt\right) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_1(t)dt\right) ......$$

لتحديد الحدود $... , u_3(x), u_2(x), u_1(x), u_0(x)$، للحل $u(x)$ ، قمنا بتعيين علاقة التراجعية

$$u_0(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)) \tag{7.2}$$

$$u_{k+1}(x) = L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_k(t)dt\right) \tag{8.2}$$

1.1.1.2 مثال

استخدم طريقة أدوميان لحل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt, \;\; u(0) = 0 \tag{9.2}$$

باستخدام عامل التكامل L^{-1}والشروط الابتدائية

$$L^{-1}(.) = \int_0 (.)dx, \tag{10.2}$$

نكامل طرفي المعادلة من 0 إلى x مرة واحدة يؤدي إلى

$$u(x) = x - L^{-1}\left(\int_0^x u(t)dt\right) \tag{11.2}$$

لتحديد الحدود ... $u_3(x), u_2(x), u_1(x), u_0(x), \dots$ للحل $u(x)$ ، قمنا بتعيين علاقة التراجعية

$$u_0(x) = x \tag{12.2}$$

$$u_1(x) = -L^{-1}\left(\int_0^x u_0(t)dt\right) = -\frac{1}{3!}x^3 \tag{13.2}$$

$$u_2(x) = L^{-1}\left(\int_0^x u_1(t)dt\right) = \frac{1}{5!}x^5, \tag{14.2}$$

$$u_3(x) = L^{-1}\left(\int_0^x u_2(t)dt\right) = \frac{1}{7!}x^7 \tag{15.2}$$

هدا يعطي الحل في شكل سلسة

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \tag{16.2}$$

ومنه يتم إعطاء الحل الدقيقة

$$u(x) = \sin(x) \tag{17.2}$$

2.1.2 طريقة تكرار المتغير

لتكن المعادلة :

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)u(t)dt \tag{18.2}$$

حيث $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$, $u(0)$, $u'(0)$,$u^{(i-1)}$.... شروط الأولية
العلاقة التراجعية بطريقة تكرار المتغير للمعادلة التكاملية التفاضلية هي :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)\left(= u_n^i(x)(\xi) - f(\xi) - \int_0^\xi k(\xi,r)\tilde{u}_n(r)dr\right)d\xi \tag{19.2}$$

لتطبيق هذه الطريقةبفعالية ينبغي اتباع خطوتين أساستين :
1- أنه مطلوب اولا تحديدλ مضاعف لاغرانج الذي يمكن تحديده على نحو امثل عن طريق التكامل بالتجزئة باستخدام تباين.مضاعف لاغرانج λيمكن ان يكون ثابت او دالة
2- بعد تحديدλ ينبغي استخدام تكرار بدون تباين . لتحديد التقريب المتتالي $u_{n+1}(x) \succeq 0$من حل $u(x)$ - التقريب الصفري يمكن ان يكون دالة اختيارية ومع ذلك يفضل ان نستخدام القيم الاولية وبالتالي يعطي الحل بواسطة

$$u(x) = \lim u_{nn\to\infty}(x) \tag{20.2}$$

سيتم توضيح ذلك من خلال دراسة مثال:

1.2.1.2 مثال

استخدم طريقة التكرار المتغير لحل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية

$$u'(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(t)dt, u(0) = 1 \tag{21.2}$$

العلاقة التراجعية بطريقة تكرار المتغير للمعادلة التكاملية التفاضلية هي

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n^{'}(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_n(r)dr \right) d\xi \tag{22.2}$$

حيث يمكن استخدام الشروط الابتدائية$\lambda = -1$ و$u_0 = (x) = u(0) = 1$ الشروط الابتدائية واستخدام هدا التحديد في التصحيح الدالي يعطي القيم التقريبية كالتالي

$$u_0(x) = 1 \tag{23.2}$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left(u_0^{'}(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_0(r)dr \right) d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \tag{24.2}$$

$$u_2(x) = u_2(x) - \int_0^x \left(u_2^{'}(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_2(r)dr \right) d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \tag{25.2}$$

$$u_3(x) = u_3(x) - \int_0^x \left(u_2^{'}(\xi) - 1 - \int_0^{\xi} u_3(r)dr \right) d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 \quad (26.2)$$

ومنه باستخدام

$$u(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x) \quad (27.2)$$

يعطي الحل الدقيق من الشكل

$$u(x) = e^x \quad (28.2)$$

3.1.2 طريقة تحويل لابلاس

سوف نأخذ بعين الإعتبار النواة $K(x\ t)$ للمعادلة التكاملية

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt \quad (29.2)$$

كنواة الفرق الذي يعتمد على الفرق $x-t$ و بالتالي يمكن التعبير عن المعادلة التكاملية التفاضلية كالتالي :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t)u(t)dt \quad (30.2)$$

نضع في اعتبارنا التابعين $f1(x)$و$f2(x)$ تمتلكان الشروط اللازمة لوجود تحويل لابلاس لكل منهما. دع تحويلات لابلاس للتوابع $f1(x)$ و $f2(x)$ يتم إعطاؤها كالتالي : $Lf1(x) = F1(s)$، $Lf2(x) = F2(s)$. يتم تحويل لابلاس لهاتين الدالتين بواسطة :

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt \quad (31.2)$$

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt \quad (32.2)$$

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x) \quad (33.2)$$

يمكننا أن نظهر بسهولة أن تحويل لابلاس للدالة $(f_1 * f_2)(x)$ يعطى بالشكل

$$L\{(f_1 * f_2)(x)\} = L\left\{ \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt \right\} = F_1(s)F_2(s) \quad (34.2)$$

1.3.1.2 مثال

استخدم طريقة تحويل لابلاس لحل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, u(0) = 1 \tag{35.2}$$

من اجل $k(x,t) = 1$ اخدتحويل لابلاس لطرفي المعادلة (2.32) نجد

$$L(u'(x)) = L(1) + L(1 * u(x)) \tag{36.2}$$

لهدا السبب

$$u_s(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}u(s) \tag{37.2}$$

باستخدام الشروط الاولية وحل $u(s)$ نجد

$$u(s) = \frac{1}{s-1} \tag{38.2}$$

ومنه باستخدام تحوي لابلاس نعطي الحل الدقيق

$$u(x) = e^x \tag{39.2}$$

4.1.2 طريقة الحل على شكل سلسلة

تسمى الدالة الحقيقية$u(x)$بالتحليلية و يكون لديها مشتقات من جميع الدرجات مثل سلسلة تايلور في أي نقطةbمن مجالها

$$u_k(x) = \sum_{k=0}^{k} \frac{u^n(b)}{n!}(x-b)^n \tag{40.2}$$

تتقارب إلى$u(x)$بجوار b ومنه الشكل العام لسلسلة تايلورلما $x = 0$ من الشكل

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_a x^n \tag{41.2}$$

نستخدم طريقة الحل المتسلسل لحل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الثاني. سنفترض أن الحل $u(x)$ لمعادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)dt, u^k(0) = k!a_k; 0 \leq k \leq (n-1) \qquad (42.2)$$

هي معادلة تحليلة و لذلك يملك تايلور سلسلة من الشكل المعطى(2.42) ومنه تحديد المعاملات بشكلn متكرر باستخدام الشروط الأولية

$$a_0 = u(0), a_1 = u'(0), a_2 = \frac{1}{2!}u''(0), a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0) \qquad (43.2)$$

المعاملات المتبقيةa_kمن المعادلة(2.42) سيتم تحديدهاباستخدام طريقة حل المتسلسل للمعادلة التكاملية - التفاضلية لفولتيراوبتعويض (2.42) في طرفي المعادلة(2.43) نجد

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^x k(x,t)(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k)dt, \qquad (44.2)$$

1.4.1.2 مثال

استخدم طريقة الحل المتسلسل لحل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \qquad (45.2)$$

لدينا

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (46.2)$$

بتعويض المعادلة (2.46) في(2.45) نجد

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n)' = 1 + \int_0^x (\sum_{k=0}^{\infty} a_n t^n)dt, \qquad (47.2)$$

بالإشتقاق طرف مرة واحدة بالنسبة ل x نجد

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n - 1^{x^n} \qquad (48.2)$$

بتوحيد الأسس, واستخدام شروط الا ولية$a_{0=0}$ نكتب علاقة تكرار كتالي

$$a_0 = 0, a_1, a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} a_{n-}, n \succeq 1 \qquad (49.2)$$

ومنه

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \qquad (50.2)$$

بتعويض (50.2) في (46.2) نجد

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad (51.2)$$

ومنه يعطى الحل الدقيق من الشكل

$$u(x) = \sinh x \qquad (52.2)$$

2.2 معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الأول

الشكل العام لمعادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الأول تم تقديمه بواسطة

$$\int_0^x k_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x), k_2(x,t) \neq 0 \qquad (53.2)$$

حيث يتم تحديد الشروط الأولية. يمكن تحويل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الأول إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ، من أجل $n = 1$ ، من خلال دمج التكامل الثاني بالتجزئة سيتم التعامل مع معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الأول في هذا القسم من خلال طريقة تحويل لابلاس وطريقة تكرار المتغير.

1.2.2 طريقة تحويل لابلاس

سيركز التحليل على المعادلات التي تكون فيها النواة $K_1(x\ t)$و$K_2(x\ t)$ ل هي نواة الفرق . هذا يعني أن كل نواة تعتمد على الفرق $(x-t)$. أخذ تحويل لابلاس لكلا الجانبين يعطي

$$L(K_1(x-t)u(x)) + L(K_2(x-t)u(n)(x)) = L(f(x)) \tag{54.2}$$

لدينا

$$k_1(s)u(s) + k_2(s)(s^n u(s) - s^{n-2}u'(0) - ... - u^{(n-1)}(0) = f(s) \tag{55.2}$$

ومنه

$$U(s) = L(u(x))\ K_1(s) = L(K1(x))\ K_2(s) = L(K_2(x))\ F(s) = L(f(x)). \tag{56.2}$$

باستخدام الشروط الأولية المعطاة وحل $U(s$ نجد

$$u(s) = \frac{f(s) + f_2(s)(s^{n-1}u(0) + s^{n-2}u'(0) + ... - u^{(n-1)}(0))}{k1(s) + s^n k_2(s)} \tag{57.2}$$

حيث

$$k1(s) + s^n k_2(s) \neq 0 \tag{58.2}$$

بأخذ معكوس تحويل لابلاس لكلا جانبي(57.2) ، يتم الحصول على الحل الدقيق بسهولة. يمكن شرح التحليل المقدم أعلاه باستخدام الأمثلة التوضيحية التالية.

1.1.2.2 مثال

حل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية التالية من النوع الأول

$$K1(x\ t) = \cos(x-t)K2(x\ t) = \ sin(x-t). \tag{59.2}$$

باستخدام تحويلات لابلاس في طرفي المعادلة نجد

$$\frac{1}{s_2}u(s) + \frac{2}{s^3}(su(s) - u(0)) = \frac{3}{s^2} - \frac{3}{1+s^2}, \tag{60.2}$$

وباستخدام الشروط الأولية المعينة وحل $u(s)$ نحصل عليها

$$u(s) = \frac{1}{1+s^2} \tag{61.2}$$

باستخدام معكوس تحويل لابلاس لطرفي المعادلة

$$u(x) = \sin x. \tag{62.2}$$

2.2.2 طريقة تكرار المتغير

يعرف الشكل العام لمعادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الأول بالشكل التالي

$$\int_0^x k_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x), k_2(x,t) \neq 0 \tag{63.2}$$

استخدام قاعدة لا يبنتز في تمييز التكاملات في الجانب الأيسر ،نجد

$$u^{(n)}(x) = \frac{f'(x)}{k_2(x,x)} - \frac{k_1(x,x)}{k_2(x,x)}u(x) - \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^{\Pi} \frac{\partial(k_1(x,t))}{\partial x}u^n(t)dt \tag{64.2}$$

$$-(\frac{1}{k_2(x,x)})\int_0^{\Pi} \frac{\partial(k_2(x,t))}{\partial x}u^n(t)dt; k_2(x,x) \neq 0$$

لاستخدام طريقة التكرار المتغير ، يجب أولاً تحديد مضاعف لاغرانجλ. يمكن تحديد مضاعف لاغرانج λ بناء على المعادلات التفاضلية التكاملية الناتجة ، حيث القاعدة التالية لـ

$$u^{(n)}+f(u(t),u'(t),u''(t),....u^{(n)}(t) = 0, \lambda = (-1)^n\frac{1}{(n-1)!}(t-x)^{(n-1),} \tag{65.2}$$

باستخدام صيغة التكرار لتحديد حدود المتتالية للحل $u_{n+1}(x), n \geq 0$. يمكن أن يكون التقريب الصفري u_0 أي دالة انتقائية. ومع ذلك . وبالتالي ، يتم إعطاء الحل بواسطة

$$u(x) = \lim u_n(x)) \tag{66.2}$$

سيتم توضيح من خلال دراسة مثال التالية:

1.2.2.2 مثال

حل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الأول

$$\int_0^{\pi}(x-t+1)u'(t)dt = e^{\pi}+\frac{1}{2}x^2-1, u(0)=1 \qquad (67.2)$$

اشتقاق طرفي مرة واحدة بالنسبة إلى x

$$u'(x) = e^{\pi}+x-\int_0^{x} u'(t)dt. \qquad (68.2)$$

وهي معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الثاني
حيث استخدمنا $\lambda(t)=-1$. يمكن تحديد التقريب الصفري $u_0(x)$ بواسطة $u_0(x)=1$. وهذا يعطي حدود المتتالية

$$u_0(x) = 1,$$
$$u_1(x) = e^{\pi}+\frac{1}{2!}x^2,$$
$$u_2(x) = 1+x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^{3,} \qquad (69.2)$$
$$u_3(x) = e^{\pi}+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4,$$
$$u_4(x) = 1+x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{5!}x^5,$$
$$u_4(x) = 1+x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6,$$

ومنه

$$u_n(x) = x+(1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\ldots) \qquad (70.2)$$

لذلك يتم إعطاء الحل الدقيق بواسطة

$$u(x) = x+\cosh x \qquad (71.2)$$

المراجع العلمية

1. L.G. Chambers, Integral Equations, A Short Course, International Textbook Company, London, (1976).
2. R.F. Churchhouse, Handbook of Applicable Mathematics, Wiley, New York, (1981).
3. B.L. Moiseiwitsch, Integral Equations, Longman, London and New York, (1977).
4. V. Volterra, Theory of Functionals of Integral and Integro-Differential Equations, Dover, New York, (1959).
5. G. Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego, (1986).
6. G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method, Kluwer, Boston, (1994).
7. G. Adomian and R. Rach, Noise terms in decomposition series solution, Comput. Math. Appl., 24 (1992) 61–64.
8. A.M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, HEP and Springer, Beijing and Berlin, (2009).
9. A.M.Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World Scientific, Singapore, (1997).
10. A.M. Wazwaz, The variational iteration method; a reliable tool for solving linear and nonlinear wave equations, Comput. Math. Appl., 54 (2007) 926–932.
11. P. Linz, A simple approximation method for solving Volterra integro-differential equations of the first kind, J. Inst. Math. Appl., 14 (1974) 211–215.
12. P. Linz, Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations,

SIAM, Philadelphia, (1985).

الفصل الثالث

طرق تحليلية لحل معادلات فريدهولم التكاملية التفاضلية

تم تقديم تحويل مشاكل القيمة الحدية إلى معادلات فريدهولم التكاملية. ومع ذلك ، أدى العمل البحثي في هذا المجال إلى موضوع جديد محدد ، حيث ظهر كل من العوامل التفاضلية والتكاملية معًا في نفس المعادلة.الى انه يختلف في حدود التكامل وتكون ثابثة .حيث تعرف بمعادلات فريدهولم التكاملية التفاضلية ،بالشكل التالي

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)dt, u^k(0) = b - k; 0 \leq k \leq n-1 \quad (1.3)$$

1.3 معادلات فريدهولم التكاملية التفاضلية من النوع الثاني

في هذا الفصل ، سنركز دراستنا على المعادلات التي تتضمن نواة قابلة للفصل حيث يمكن التعبير عن النواة $K(x,t)$ كمجموع محدود من من الشكل التالي

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n(x)h_k(t) \quad (2.3)$$

دون فقدان العمومية ، سنقوم بتحليلنا على نواة مصطلح واحد$K(x\ t)$ من النموذج

$$K(x\ t) = g(x)h(t). \quad (3.3)$$

يمكن فحص الحالات الأخرى بطريقة مماثلة. يمكن اختزال النواة غير القابلة للفصل إلى نواة قابلة للفصل باستخدام توسعة تايلور للنواة المعنية. ومع ذلك ، سيتم تقديم النوى القابلة للفصل فقط في هذا النص. تم تقديم الطرق التي سيتم استخدامها من قبل بالتفصيل ، ولكن هنا سنحدد الخطوات الرئيسية لكل طريقة لتوضيح استخدامها.

1.1.3 طريقة الحساب المباشر

يعرف الشكل العام لمعادلة فريدهولم التكاملية التفاضلية كالتالي

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b u(t)dt, u^k(0) = b_k; 0 \leq k \leq (n-1) \qquad (4.3)$$

حيث $(u^{(n)}(x))$ يشير الى مشتق n مرةمن $u(x)$ و b_k هي من الشروط الاولية

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_a^b h(t)u(t)dt, u^k(0) = b_k; 0 \leq k \leq (n-1) \qquad (5.3)$$

بوضع

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt \qquad (6.3)$$

نجد المعادلة.التالية

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x). \qquad (7.3)$$

نكامل طرفي المعادلة n مرة من 0 إلى x، وباستخدام الشروط الأولية ، نجد

$$u(x) = v(x; \alpha), \qquad (8.3)$$

بالتعويض معادلة(8.3)في الجانب الأيمن من (6.3)، وإيجاد التكامل ، وحل المعادلة الناتجة ، نحدد قيمة عددية للثابت α يؤدي هذا إلى الحل الدقيق $u(x)$ الذي تم الحصول عليه عند استبدال القيمة الناتجة لـ α . من المهم أن نتذكر أن هذه الطريقة تؤدي دائمًا إلى الحل الدقيق وليس إلى مكونات السلاسل. تم استخدام الطريقة للتعامل مع معادلات فريدهولم التكاملية. سيتم توضيح الطريقة من خلال دراسة الأمثلة التالية.

1.1.1.3 مثال

حل معادلة فريدهولم التكاملية التفاضلية التالية

$$u'(x) = 3 + 6x + x\int_0^1 tu(t)dt, u(0) = 0 \qquad (9.3)$$

من اجل

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt \qquad (10.3)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة كالتالي

$$u'(x) = 3 + 6x+, u(0) = 0 \qquad (11.3)$$

بتكامل من 0 إلى x، وباستخدام الشرط الأولي المحدد نحصل عليه

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 \qquad (12.3)$$

بالتعويض (12.3) في (10.3) نجد

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha \qquad (13.3)$$

ومن هنه نجد $\alpha = 2$
يتم إعطاء الحل الدقيق بواسطة

$$u(x) = 3x + 4x^2.$$

(14.3)

2.1.3 طريقة تكرار المتغير

استخدامنا سابقاطريقة التكرار المتغير ،حيث توفر طريقة تقاربات متتالية سريعة التقارب للحل الدقيق وفي حالة وجود مثل هذا الحل المغلق.

حيث نعرف معادلة فريدهولم التكاملية التفاضلية من الدرجة الأولى من الشكل

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad (15.3)$$

حيث $u^i(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$ و; $u(0), u'(0).....u^{(i-1)}(0)$هي الشروط الأولية.
التصحيح الدالي للمعادلة التكاملية التفاضلية هو

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)(u_n^i(\xi) - f(\xi) - \int_a^b k(\xi,r)u_n(r)dr)d\xi \qquad (16.3)$$

يتم استخدام طريقة التكرار المتغير من خلال تطبيق خطوتين أساسيتين:

1/ مطلوب أولاً تحديد مُضاعِف لاغرانج) الذي يمكن تحديده على النحو الأمثل من خلال التكامل بالأجزاء وباستخدام تباين

2/ بعد تحديد λ ، يجب استخدام صيغة التكرار ، بدون تباين، لتحديد التقريب المتتالي $u_{n+1}(x), n \geq 0$ و$u(x)$.

-يمكن أن يكون التقريب الصفري $u(0)$أي دالة اختياري.

، باستخدام القيم الأولية $u(0), u'(0).....u^{i-1}(0)$ حيث يفضل استخدامها لتقريب الصفرالاختياريu_0

وبالتالي ، يتم إعطاء الحل بواسطة

$$u(x) = \lim u_n(x). \qquad (17.3)$$

سيتم توضيح ذلك خلال دراسةمثال التالي :

1.2.1.3 مثال

استخدم طريقة التكرار المتغير لحل معادلة فريدهولم التكاملية التفاضلية

$$u'(x) = -1 + cosx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu(t)dt, u(0) = 0 \qquad (18.3)$$

يتم إعطاء التصحيح الدالي لهذه المعادلة

$$u_{n+1} = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(\xi) + 1 - \cos\xi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} r u_n(r)dr)d\xi, \quad (19.3)$$

حيث استخدمنا $\lambda = -1$ و كايمكن استخدام الشروط الأولية لتحديد $u_0(x) = u(0) = 0$.
استخدام هذا التحديد لتصحيح الدالي حيث يعطي القيم التقريبية التالية:

$$u_0(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^{\pi} (u_0'(\xi) + 1 - \cos\xi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} r u_0(r)dr)d\xi \\ &= \sin x - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^{\pi} (u_1'(\xi) + 1 - \cos\xi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} r u_1(r)dr)d\xi \\ &= (\sin x - x) + (x - \frac{\pi^3}{24}x) \qquad (20.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^{\pi} (u_2'(\xi) + 1 - \cos\xi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} r u_2(r)dr)d\xi \\ &= (\sin x - x) + (x - \frac{\pi^3}{24}x) - (\frac{\pi^3}{24}x - \frac{\pi^6}{576}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_4(x) &= u_3(x) - \int_0^{\pi} (u_3'(\xi) + 1 - \cos\xi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} r u_3(r)dr)d\xi \\ &= (\sin x - x) + (x - \frac{\pi^3}{24}x) - (\frac{\pi^3}{24}x - \frac{\pi^6}{576}x) - (\frac{\pi^6}{576}x + ...) \end{aligned}$$

باستخدام

$$u(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} u_n(x) \qquad (21.3)$$

ومنه يعطي الحل الدقيق التالي:

$$u(x) = \sin x \qquad (22.3)$$

3.1.3 طريقة تحليل أدوميان

تم تقديم طريقة تحليل أدوميان من قبل واستخدمت بدقة في الفصول السابقة. تم استخدام هذه الطريقة في شكلها القياسي للحصول على الحل في سلسلة لا نهائية من المكونات التي يمكن تحديدها بشكل متكرر. بالإضافة إلى ذلك ،تم تطوير نموذج معدل لتسهيل العمل الحسابي. قد تعطي السلسلة التي تم الحصول عليها الحل الدقيق في حالة وجود مثل هذا الحل. خلاف ذلك ، تعطي السلسلة تقريباً للحل الذي يعطي مستوى دقة عالية. سيتم التركيز الرئيسي في هذا الفصل في تحويل معادلة فريدهولم التكاملية التفاضلية إلى معادلة تكامل فريدهولم مكافئةوطرق حلها بطرق مختلفة مثل طريقة الحساب المباشر وطريقة التكرار متغير وغيرها. ومع ذلك ، في هذا الفصل ، سوف نستخدم طريقة تحليل ادوميان لحل معادلة فريدهولم التفاضلية التكاملية عن طريق تحويلها أولاً إلى معادلة تكاملية.حيث تم التفصيل في طرق الحل خلال الفصول السابقة ، قد نفترض رتبة ثانية فريدهولم المعادلة التكاملية التفاضلية التي قدمها

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, u(0) = a_0, u'(0) = a_1. \qquad (23.3)$$

بتكامل طرفي المعادلة من0إلى xمرتين

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}(\int_a^b k(x,t)u(t)dt), \qquad (24.3)$$

حيث تم استخدام الشروط الأولية $u(0) = a_0 u'(0) = a_1;$

L^{-1}هو عامل متكامل من شقين. طريقة التحلل ادومان تسمح باستخدام سلسلة التحلل التالية

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \qquad (25.3)$$

بالتعويض (25.3) في (24.3) نجد

(26.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}(\int_a^b k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt)$$

أو مكافئ

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... = a_0 + a_1(x) + L^{-1}(f(x)) \quad (27.3)$$

$$+L^{-1}(\int_a^b k(x,t)u_0(t)dt)$$

$$+L^{-1}(\int_a^b k(x,t)u_1(t)dt) + L^{-1}(\int_a^b k(x,t)u_2(t)dt)$$

وبالتالي ، لتحديد المكونات $u_0(x)$، $u_1(x)$، $u_2(x)$، $u_3(x)$، ... للحل $u(x)$ ، قمنا بتعيين علاقة التكرار

$$u_0(x) = a_0 + a_1(x) + L^{-1}(f(x)) \quad (28.3)$$

$$+L^{-1}(\int_a^b k(x,t)u_k(t)dt), k \geq 0$$

حيث يتم تعريف المكون الصفري $u_0(x)$ بجميع المصطلحات غير المدرجة داخل علامة التكامل . بعد تحديد المكونات $u_i(x), i \geq 0$ ، يتم الحصول على الحل $u(x)$ لـ في شكل سلسلة.حيث تتقارب السلسلة التي تم الحصول عليها إلى الحل الدقيق إذا كان هذا الحل موجودًا. حيث الشكل الأكثر استخدامًا هو النموذج الذي تم تطويره في $[5-6]$ في ما يلي ، نلخص الخطوات الرئيسية لهذا النموذج المعدل.

4.1.3 التحليل المعدل

توفرطريقة تحليل أدوميان الحلول في سلسلة لا نهائية من المكونات. تستبدل الطريقة سلسلة التحلل لـ$u(x)$ المعطاة بواسطة

$$u(x) = \sum_{0}^{\infty} u_n(x) \tag{29.3}$$

ولدينا

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{30.3}$$

تقدم طريقة تحليل أدوميان القياسية إعادة التكرار

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_0(x) = f(x) \tag{31.3}$$

$$u_{(k+1)}(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_k(t)dt, k \geq 0$$

حيث$u_n(x), n \geq 0$. لتحديد مكونات$u(x)$ بطريقة أسهل وأسرع. في كثير من الحالات ، يمكن تعيين الدالة$f(x)$ كمجموع وظيفتين جزئيتين ، وهما$f_1(x)$و$f_2(x)$. بعبارة أخرى

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{32.3}$$

، قمنا بإدخال تغيير نوعي في تكوين علاقة التكرار . تحدد طريقة التحلل المعدلة المكون الصفري$u_0(x)$بجزء واحد من$f(x)$، أي $f_1(x)$ أو$f_2(x)$. يمكن إضافة الجزء الآخر من$f(x)$ إلى المكون$u_1(x)$ الموجود في علاقة التكرار القياسية. طريقة التحلل المعدلة تسمح باستخدام علاقة التكرار المعدلة

$$u_0(x) = f_1(x)$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt \tag{33.3}$$

$$u_{(k+1)}(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_k(t)dt, k \geq 1$$

من الواضح أن الفرق بين علاقة التكرار المعيارية وعلاقة التكرار المعدلة يكمن فقط في تكوين المكونين الأولين $u_0(x)$ و $u_1(x)$ فقط. تظل المكونات الأخرى كما هي في علاقات التكرار.

5.1.3 طريقة الحل على شكل سلسلة

تم استخدام طريقة الحل التسلسلي من قبل ، حيث تم استخدام الشكل العام لسلسلة $Taylor$ لمحلول تحليلي $u(x)$ عن $x = 0$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (34.3)$$

سيتم استخدام طريقة الحل المتسلسل لحل معادلات فريدهولم التكاملية التفاضلية. سنفترض أن الحل $u(x)$ لمعادلة فريدهولم التكاملية التفاضلية

$$u^{(k)} = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, u^{(j)})0) = a_j, 0 \leq (k-1) \qquad (35.3)$$

هو تحليلي ، وبالتالي يمتلك سلسلة تايلور بالشكل الوارد في ، حيث يتم تحديد المعاملات n بشكل متكرر . التعويض في طرفي يعطينا

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt \qquad (36.3)$$

أو من أجل البساطة التي نستخدمها

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b \sum_{n=0} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...)dt \qquad (37.3)$$

حيث $T(f(x))$ هي سلسلة $Taylor$ لـ $f(x)$ سيتم تحويل المعادلة التكاملية إلى تكامل تقليدي في أو حيث بدلاً من دمج الدالة غير المعروفة $u(x)$، سيتم

دمج مصطلحات النموذج 0. لاحظ أنه نظراً لأننا نبحث عن حل متسلسل ، فعندئذٍ إذا كانت$f(x)$ تتضمن وظائف أولية مثل الدوال المثلثية ، والوظائف الأسية ، وما إلى ذلك ، فيجب استخدام توسعات تايلور للوظائف المتضمنة في$f(x)$ علاوة على ذلك ، يجب استخدام المعادلات الأولية المحددة في افتراض السلسلة. ندمج أولًا الجانب الأيمن من التكامل في ، ونجمع معاملات قوى x المتشابهة . نساوي بعد ذلك معاملات قوى متشابهة لـxفي كلا جانبي المعادلة الناتجة للحصول على علاقة تكرار في سيؤدي حل علاقة التكرار إلى تحديد كامل للمعاملات. بعد تحديد المعاملات يتبع الحل المتسلسل مباشرة بعد استبدال المعاملات المشتقة في . يمكن الحصول على الحل الدقيق في حالة وجود مثل هذا الحل الدقيق. إذا لم يتم الحصول على حل دقيق ، فيمكن استخدام السلسلة التي تم الحصول عليها للأغراض العددية. في هذه الحالة ، كلما زاد عدد المصطلحات التي قمنا بتقييمها ، زاد مستوى الدقة الذي نحققه. تجدر الإشارة إلى أن استخدام طريقة الحل المتسلسل لحل معادلات فريدهولم التكاملية التفاضلية يعطي حلولاً دقيقة إذا كان الحل$u(x)$ متعدد الحدود. ومع ذلك ، إذا كان الحل هو أي دالة أولية أخرى مثل ex $\sin x$ إلخ ، فإن طريقة المتسلسلة تعطي الحل الدقيق بعد تقريب عدد قليل من المعاملات . سيتم توضيح ذلك من خلال دراسة الأمثلة التالية.

1.5.1.3 مثال

حل معادلة فريدهولم التكاملية-التفاضلية باستخدام طريقة حل المتسلسلة

$$u'(x) = 4 + 4x + \int_{-1}^{1} (1 - xt)u(t)dt, u(0) = 1. \qquad (38.3)$$

لدينا

$$u'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' \qquad (39.3)$$

بتعويض (3.38) في (3.39) نجد

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 4 + 4x + \int_{-1}^{1} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt. \qquad (40.3)$$

لدينا من الشروط الابتدائية $a_0 = 1$ نحسب التكامل

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \dots = 6 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{2}{7}a_6 + \frac{2}{9}a_8 + (4 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{5}a_3 - \frac{2}{7}a_5 - \frac{2}{9}a_7)x \qquad (41.3)$$

معادلة معاملات قوى x المتشابهة في كلا طرفي (3.41) نحصل على

$$a_1 = 6; a_n = 0, n \geq 2. \qquad (42.3)$$

يتم إعطاء الحل الدقيق بواسطة

$$u(x) = 1 + 6x; \qquad (43.3)$$

حيث استخدمنا الشروط الابتدائية $a_0 = 1$

خاتمة

في هذه الدراسة، تم عرض بعض الطرق التحليلية لحل المعادلتين فريدهولم وفولتيرا من النوع التكاملي الثاني. تمت مناقشة مفاهيم المعادلات التكاملية وتصنيفها وفقًا للنواة، وتم تطبيق بعض الطرق التحليلية لإيجاد الحل الصحيح. واستنتجنا أن حلول المعادلات التكاملية لها أهمية كبيرة في العديد من التطبيقات العلمية، حيث يعتمد حل المعادلات التكاملية على النواة. وأظهرت الطرق التحليلية وجود وحدانية الحل لهذه المعادلات.

المراجع العلمية

1. H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover,New York, (1962).
2. R.P. Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, (1997).
3. G. Micula and P. Pavel, Differential and Integral Equations through Practical Problems and Exercises, Kluwer, Boston, (1992).
4. J.H. He, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, Appl. Math. Comput., 114(2/3) (2000) 115–123.
5. A.M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, HEP and Springer, Beijing and Berlin, (2009).
6. A.M. Wazwaz, A reliable modification of the Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput., 102 (1999) 77–86.
7. G. Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego, (1986).
8. G. Adomian, and R. Rach, Noise terms in decomposition series solution, Comput. Math. Appl., 24 (1992) 61–64.