UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

—————————————-

Faculté des Mathématiques et sciences de la matiére

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Barka Wissal

Théme

Solutions positives pour un problème aux limites d'une équation différentielle fractionnaire avec l'oprateur P-Laplacien

Soutenu publiquement le :../06/2023

Devant le jury composé de :

Mr.**Ben cheikh AbdelKerim**	M.C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.**Hechifa Abderrazak**	M.C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Mammeri Mohammed**	M.C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Kouidri Mohammed**	M.C. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2022/2023

Dédication

Je dédie le fruit de ce travail à :

Á ***MES CHERS PARENTS****,que Dieu les protège pour moi, à la source de mon bonheur et de ma réussit qui m'accompagne depuis le premier pas que j'ai fait dans mes étdes,je ne les remercierai jamais assez pour les sacrifices, la tendresse, l'amour, la supplication, la prière, l'attention et le soutien qu'ils m'ont donnés.*

Á tous mes fères et sœurs , à tout ma famille , amis et collègues.

Á tout charcheur de savoir .

Wissal Barka*.*

Remerciement

Tout d'abord, je souhaite remercier Dieu tout-puissant de m'avoir aidé et d'avoir répondu à ma prière en me permettant d'atteindre cette étape de mes études. Enfin, j'adresse mes remerciements et ma reconnaissance à tous les enseignants du département de qui ont contribué à ma formation. J'aimerais également exprimer ma gratitude particulière au encadreur ***Kouidri Mohammed*** , qui m'a conseillé et guidé dans la rédaction de ce mémoire. Je tiens également à saluer et remercier le jury d'examinassions pour leur soutien tout au long de ce travail.

Table des matières

Notations

- $\mathbb{R}$: des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$: des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_+^*$: des nombres réels strctement positifs.
- $\mathbb{N}$: des entiers naturels.
- $\mathbb{C}$: des nombres complexes.
- $C([a,b])$: l'espace des fonctions f continues sur $[a;b]$ à valeur réels.
- $\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω et $\partial\Omega$ sa frontière.
- $u'(t)$ la dérivée ordinaire par rapport à t
- Ω : un ensemble ouvert borné .
- deg : degré topologique .
- max : maximum .
- $\Gamma(.)$: la fonction Gamma.
- $\beta(.,.)$: la fonction Bêta.
- $\langle , \rangle$: produit scalaire.
- ${}^{R}D^{p}(f(t))$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$.

- ${}^{c}D^{p}(f(t))$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $p > 0$.
- $D^{n} = \dfrac{d^{n}}{dt^{n}}$: dérivée ordinaire par rapport à t d'ordre entier n.
- $I_{a_+}^{\alpha}$: intégrale fractionnaire de Riemann-Liouvilled'ordre α .

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont des équations complexes, suivies par de nombreux scientifiques et chercheurs dans l'étude du sujet de ces équations à travers les âges jusqu'à nos jours. "Marquis" a envoyé à "Leibni" une lettre lui demandant de calculer la dérivée n de la fonction f où : $f(u) = u$. En disant : " Quel est le résultat si $n = \frac{1}{2}$? " Sa réponse fut : " La question semble contradictoire, mais elle porte la vérité " en 1695, et pour cette raison ce sujet a suscité un grand intérêt de la part des chercheurs. et des érudits tels que (L.Euler, Laplace, J.B.J.Fourier, J. Liouville, G.F.B.Riemann) entre 17 et 18 siècle, Il est considéré comme un sujet moderne, mais il est apparu dans le passé car il a été acquis ces derniers temps par de nombreuses conférences spécialisées et recherches universitaires. Les équations différentielles fractionnaires sont une application mathématique importante dans de nombreuses revues scientifiques et techniques, par exemple, la physique, l'ingénierie, économie, statistiques, sciences naturelles et biologiques, mécanique, biologie, électricité...etc.

Ces équations sont un outil majeur dans la modélisation mathématique des différents phénomènes qui se produisent dans ces domaines, et leur étude contribue à la compréhension des phénomènes d'équilibre, la dynamique et la stabilité, et aide également à résoudre les problèmes de modélisation. Voir ici pour plus d'explications ([23] -[25]) , Nous nous référons également à ([16][17]).Les équations différentielles fractionnaires ont été étudiées par les auteurs sur la base de la théorie du point fixe voir ([9], [12],[13], [18] -[21]), jusqu'à et développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires utilisant l'opérateur P-Laplacien au 20 siècle voir par ([10],[11], [14], [15]).

L'objectif principal de cette note est d'étudier l'existence de solutions positives pour un problème aux limites d'une équation différentielle fractionnaire avec l'opérateur P-Laplacien en utilisant la méthode itérative monotone avec des conditions initiales appropriées.

Pour cette étude, nous considérons le problème suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{c} D^{\gamma}(\varphi_p(D^{\alpha}u(t))) = f(t,u(t)), 0 < t < 1, \\ \text{u(0)=D}^{\alpha}u(0) = 0\ , \qquad D^{\beta}u(1) = aD^{\beta}u(\xi)\ , \qquad D^{\alpha}u(1) = bD^{\alpha}u(\eta), \end{array}\right.$$

où $f \in C([0,1] \times [0,+\infty),[0,+\infty))$ est une fonction donnée et $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}; 1 < \alpha,\gamma \leq 2; \beta > 0$ et $1+\beta \leq \alpha; \xi,\eta \in (0,1)$; $a,b \in [0,+\infty); 1 - a\xi^{\alpha-\beta-1} > 0 ; 1 - b^{p-1}\eta^{\gamma-1} > 0$ et $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$, $\varphi_q = (\varphi_p)^{-1}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, D^{α} est le différenciation de Riemann-Liouville.
Ce sujet a été étudié dans les trois chapitres suivants :

* chapiter 1 : nous rappelons quelques définitions et notations et théorèmes (les différents théorèmes de poit fixe) de base utiles dans la suite du travail.

* chapiter 2 : nous rappelons les éléments de base de théorie du calcule fractionnaire.

* chapiter 3 : nous donnons les lemmes pour prouver l'existece de solution positives d'un probleme (P), et en appliquent la méthode itérative monotone établir l'existence deux solutions positives d'un problème (P), à la fin de cette chapiter, nous donnons deux exemples illustrant les résultats précédents.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Le but de ce chapitre est étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie) puis le théorème du point fixe de Schauder (qui est la "généralisation" en dimension infinie).

1.1 Théorème du point fixe

Dans cette section, nous utilisons la théorie du point fixe car c'était l'un des outiles les plus importants de l'existence, on donne quelque théories et leur définitions anisi que propriétés du point fixe de Banach, et point fixe pour des contraction non définies sur tout l'espace métrique, enfin étudier les principes de continuation.

1.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème s'appelle le principe des cartes contraction et est à la base de la théore de point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un point fixe unique pour chaque contraction d'espace métrique complet sur lui-même. Ces applications incluent l'existence des théorèmes de solutions pour des équations différentielles ou intégrales, et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Définition 1 ***(Point fixe)*** *Soit F une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $F(x) = x$.*

Définition 2 ***(Application lipschitzienne)*** *Soit (M,d) un espace métrique complet et l'application* $F : M \longrightarrow M$ *Lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geq 0$ *telle que pour tout couple d'éléments x,y de M. On a l'inégalité :*

$$d(F(x), F(y)) \leq k(d(x, y)), \forall x, y \in M \tag{1.1}$$

Remarque *:*
Le plus petit réel k qui vérifie (1.1) est appelé constante de lipschitz.
Si $k \leq 1$*, l'application F est appelée non expansive.*
Si $k < 1$*, l'application F est appelée contraction.*

Théoréme 3 *[3]* ***(Principe de contraction de Banach)*** *Soit (M,d) un espace métrique complet et soit* $F : M \longrightarrow M$ *une application contractante i.e qu'il existe* $0 < k < 1$ *telle que*

$$d(F(x), F(y)) \leq k(d(x, y)), \forall x, y \in M, \tag{1.2}$$

Alors F admet un point fixe $u \in M$ *de plus pour tout* $x \in M$ *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F^n(x) = u$$

et

$$d(F^n, u) \leq k^n (1 - k)^{-1} d(x, F(x)), \tag{1.3}$$

Preuve.
D'abord, On montrons l'unicité :
On suppose que il existe $x, y \in M$ avec $x = F(x)$; $y = F(y)$ et $d(x, y) = d(F(x), F(y) \leq kd(x, y)$.
Puisque $0 < k < 1$ alors la dernier inégalité implique que $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$, alors $\exists! x \in M$ tel que $F(x) = x$.
Maintenant, on preuve l'existence de x où $x \in M$.
On suppose que $F^n(x)$ est une suite de Cauchy où $n \in \{0, 1, ...\}$

d(F$^n(x), F^{n+1}(x)) \leq k dF^{n-1}(x), F^n(x)) \leq .... \leq k^n d(x, F(x))$
Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$\begin{aligned} d(F^n(x), F^m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) + ... + d(F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) + k^{n+1} d(x, f(x)) + ... + k^{m-1} d(x, F(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) \left[1 + k + k^2 + ...\right] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)) \end{aligned}$$

Pour $m > n; n \in \{0, 1, ...\}$ on a

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)) \tag{1.4}$$

Alors $F^n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $u \in M$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} F^n(x) = u$$

De plus par la continuité de F

$$u = \lim_{n \longrightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} F(F^n) = F(u)$$

Alor u est un point fixe de F.
Finalement, $m \longrightarrow \infty$ in (1.4), on obtient

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x))$$

■

Exemple 4 *Considérons l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par :$F(x) = \frac{x}{3}$*
Alors F est contrectante, de constante contraction $\frac{1}{3}$, $F^n(x) = (\frac{1}{3})^n$ et x converge vers 0, donc admet unique point fixe de F.

Exemple 5 *Soient $X = \mathbb{R}$ et l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par : $F(x) = \frac{x}{6} + 5$ vérifie $|F(x) - F(y)| < k|x - y|$ Alors F est contractante ($k = \frac{1}{6}$constante de contraction), et elle admet un seul point fixe $x = 6$.*

Remarque(contre-exemple)
Les exemples suivants montrent la nécessité de chacune des hypothèses précédentes, si on en néglige une seule, alors un point fixe n'est pas accepté :

Exemple 6 ***(Condition de fermeture)*** $T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + 2$, *est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $T([0,1]) \nsubseteq [0,1]$ *et on ne peut pas itérer :* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, *mais* x_3 *n'est pas défini.*

Exemple 7 *Sais :* $T(x) = \frac{sin(x)}{2}$ *sur* $X =]0, \frac{\pi}{4}]$
On a $T(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \dfrac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$ *et* T *est contractante, mais n'admet pas de point fixe car* X *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$.

Exemple 8 ***(Condition de contraction)*** $T : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ *;* $T(x) = x + \frac{1}{x}$ *vérifie* $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ *pour tout* $x \neq y$, *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* T *n'est pas contractante.*

1.1.2 Théorèmes du point fixe pour l'application ne soit pas une contraction sur tout l'espace métrique

Soit (M,d) un espace métrique complet, il est clair qu'une fonction définie uniqument sur un sous-ensemble de M n'aura pas nécessairement de point fixe. Des conditions supplémentaires devront être remplies pour garntir cela.

Théoréme 9 *Soient* K *un ensemble fermé dans* M *et* $f : K \longrightarrow M$ *est contractante Supposons qu'il existe* $x_0 \in K$ *et* $r > 0$ *tel que*

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K \qquad et \qquad d(x_0, f(x_0)) < (1-k)r$$

(k est constante de contracton)
Alors f *a un unique point fixe* $x^* \in B(x_0, r)$.

Théoréme 10 *Soit (M,d) un espace métrique complet,* $T : M \longrightarrow M$ *une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées* T^p *est une contraction(i,e.,vérifie :* $d(T^p(x) - T^p(y)) < kd(x - y|)$ *)* $\forall x, y \in M$, *pour certain* $p \geq 1$ *où* $0 \leq k < 1$ *, alors* T *a un seul point fixe* $x^* \in M$.

Preuve. Comme T^p est une contraction, il en résulte du théorème 9 que T^p a un unique point fixe, donc $x^* = T^p x^*$. Alors $T^p(T(x^*)) = T(T^p(x^*)) = T(x^*)$, alors $T(x^*)$ est un point fixe de T^p. Mais T^p admet un unique point fixe, d'où $T(x^*) = x^*$.Donc T a un unique point fixe (x^*), et il est unique car tout point fixe de T est également point fixe de T^p. ■

Exemple 11 *Soit M un espace métrique donné par :$M = C[a;b]$, est un espace de Banach par rapport à la norme $\|u\| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|, u \in M$. On définit $T : M \to M$ par :*

$$Tu(t) = \int_a^t u(s)ds$$

On montre que $\|T(u) - T(v)\| \leq (b-a)\|u - v\|$. On a

$$\begin{aligned}\|T(u) - T(v)\| &= \max_{t\in[a,b]} |\int_a^t u(s)ds - \int_a^t v(s)ds| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |u(s) - v(s)|ds\end{aligned}$$

D'après la majoration, on obtient

$$\begin{aligned}\|T(u) - T(v)\| &\leq \int_a^t ds\|u(s) - v(s)\| \\ &\leq (t-a)\|u(s) - v(s)\|, \qquad \forall t \in [a,b] \\ &\leq (b-a)\|u(s) - v(s)\|\end{aligned}$$

donc (b-a) est la meilleure constante de Lipschitz pour T. D'autre part, on a :

$$T^2(u)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s u(\mu)d\mu\right) ds = \int_a^t (t-s)u(s)ds$$

et par induction

$$T^m u(t) = \frac{1}{(m-1)!}\int_a^t (t-s)^{m-1}u(s)ds$$

dés lors

$$
\begin{aligned}
\|T^m u(t) - T^m v(t)\| &= \max_{t\in[a,b]} |T^m u(t) - T^m v(t)| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left| \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} u(s) ds - \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} v(s) ds \right| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left| \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} \left(u(s) - v(s)\right) ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]} \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} \left|(u(s) - v(s))\right| ds \\
&\leq \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} ds \|u(s) - v(s)\| \\
&\leq \frac{-1}{(m-1)! \times m} \left[(t-s)^m\right]_a^t \|u(s) - v(s)\| \\
&\leq \frac{1}{m!} (t-a)^m \|u(s) - v(s)\| \qquad \forall t \in [a,b] \\
&\leq \frac{1}{m!} (b-a)^m \|u(s) - v(s)\|
\end{aligned}
$$

et donc T^m serait une contraction si $\dfrac{(b-a)^m}{m!} < 1$

1.1.3 Principes de continuation

Une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation. Celui-ci consiste à déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation connue sous le nom devra vérifier certaines condition voir [1].

Définition 12 ***(Applications homotopes)*** *Soient X et Y d deux espaces topologiques et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. f et homotope à g s'il existe une application continue*

$$H : X \times I \longrightarrow Y, I = [0,1]$$

telle que : $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$.
L'application H est appelée homotopie de f vers g. On note $f \simeq g$ ou $H : f \simeq g$.

Remarque *: En d'autres termes, pour cette définition, il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \longrightarrow H(x,t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continument.*

Exemple 13 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to R^n$ l'application constante $f(x) = 0$, et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $g(x) = x$. Montrons que f et g sont homotopes. Il suffit de prendre :*

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$H(x,t) = tx.$$

Alors $H(x;0) = 0 * x = 0 = f(x)$ et $H(x,1) = x * 1 = g(x)$.

Exemple 14 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^n - \{0\}$, on considère cette fois ,$f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $g(x) = x$. On voit que f et g sont homotopes en prenant :*

$$H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

tel que : $H(x,t) = (1-t)i(x) + tp(x)$, on a

$$H(x,0) = (1-0) \times x + 0 \times \frac{x}{\|x\|} = x$$

et

$$H(x,1) = (1-1) \times x + 1 \times \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|}$$

Alors $H(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$ et $H(x,0) = g(x)$ et $H(x,1) = f(x)$.

Définition 15 ***(Équivalence d'homotopie)*** *Soit X, Y deux espace topoligique et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est une équivalence d'homotopie s'il existe un application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f \simeq id_X$ et $f \circ g \simeq id_y$.on note $X \simeq Y$.*

Remarque *: On dit que X a le même type d'homotopie que Y s'il existe une équivalence d'homotopie.*

Exemple 16 *Soit $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et S^1, on prend alors $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \longrightarrow Y = S^1$ définie par $f(x) = x/\|x\|$, et $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ l'inclusion. Alors $f \circ g \simeq id_{S^1}$, et l'exemple (14)($g(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$) montre que $g \circ f \simeq id_{\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}}$.*
Donc l'espace $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et S^1 ont même type d'homotopie .

Soit (X,d)un espace métrique complet, et U un sous ensemble ouvert de X.

Définition 17 ***(Les propriétés d'homotopie)*** *On considéré $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ deux contractions, on dit que F et G sont homotopes s'il existe $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow X$ vérifiant les propriétés suivantes :*

* *$H(.,0) = G$ et $H(.,1) = F$.*

* *$H(x,t) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \in [0,1]$*

* *Il existe $\alpha \in [0,1)$ tel que $d(H(x,t); H(y,t) \leq \alpha d(x,y)$ pour tout $x, y \in \overline{U}$, et $t \in [0,1]$.*

* *Il existe $M \geq 0$ tel que $d(H(x,t), H(x,s) \leq M|t-s|$ pour tout $x \in \overline{U}$, et $t, s \in [0,1]$.*

Théoréme 18 *Soit $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ deux applications homotopiquement con-tractives et G a un point fixe dans U. Alors, F admet un point fixe dans U.*

Preuve. On pose l'ensemble $Q = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x,\lambda)\}$ pour certain $x \in U$ et H est une homotopie entre F et G a décrite dans la définition (12).
noté : $Q \neq \emptyset$ (car G a un point fixe et que $0 \in Q$).
On montre que Q est à la fois ouvert et fermé dans [0,1] alors montre $Q = [0,1]$. Par conséquent F a un point fixe.

◇ Montrons que Q est un ensemble fermé dans [0,1] :
Soit $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ une suite dans Q telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = \lambda$, alors, nous devons montrer que $\lambda \in Q$. Comme $\lambda_n \in Q$ pour $n = 1, 2....$, il existe $x_n \in U$ où $x_n = H(x_n, \lambda n)$. On a pour $n, m \in \{1, 2, ...\}$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(H(x_n,\lambda_n)H(x_m,\lambda_m) \\ &\leq d(H(x_n,\lambda_n)H(x_m,\lambda_m)) + d(H(x_n,\lambda_m), H(x_m,\lambda_m) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

Alors,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|$$

Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy de X(car $\{\lambda_n\}$l'est aussi) et, puisque X est complet, il existe $x \in \overline{U}$ telle que $\lim_{x \longrightarrow \infty} x_n = x$.
Par la continuité de H,

$$x = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = lim_{n \longrightarrow \infty} H(x_n, \lambda n) = H(x, \lambda)$$

Donc $\lambda \in Q$ et Q est fermé dans $[0, 1]$.

◇ Montrons que Q est un ensemble ouvert dans [0,1] :
Soit $\lambda_0 \in Q$, alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$. Puisque, par hypothèse, $x_0 \in U$, nous pouvons trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r) = \{x \in X : (x, x_0) < r\} \subseteq U$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}$ où $r \leq dist(x_0, \partial U)$, et $dist((x_0, \partial U)) = inf\{(x_0, x) : x \in \partial U\}$. Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.
alors, pour $x_0 \in \overline{B(x_0, r)}$

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x, \lambda)) &\leq d(H(x_0, \lambda_0)H(x, \lambda_0)) + d(H(x, \lambda_0), H(x, \lambda) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda, \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha)r = r \end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ fixé

$$H(., \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}$$

Par le théorème (3), (9), on déduit que $H(., \lambda)$ un point fixe dans U. Alors, $\lambda \in Q$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Et par conséquent Q est ouvert dans [0, 1] .
donc Q=[0, 1].

■

Remarque *:Du théorème précédent, nous déduisons le résultat suivant.*

Théoréme 19 *[1] **(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)**. Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert d'un espace de Banach E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \longrightarrow E$ une contraction telle que $F(\overline{U})$ soit bornée. Alors un des deux énoncés suivant est vérifié :*

(a) F a un point fixe dans $(\overline{U})$.

(b) il existe $\lambda \in (0,1)$ et $x \in \partial U$ tells que $x = \lambda F(x)$.

Preuve. Supposons que (b) n'est pas vérifié et que F n'a pas de point fixe sur ∂U c'est à dire $x \neq \lambda F(x)$ pour tout $x \in \partial U$ et $\lambda \in [0,1]$.
Soit $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow E$ donnée par $H(x,\lambda) = \lambda F(x)$, et soit G l'application nulle(G(x)=0). Notons que G a un point fixe dans U (à savoir $(G(0) = 0)$ et que F et G sont deux applications homotopiquement con-tractives. Par le théorème (18)F a également un point fixe et donc l'annonce (a) est vérifié. ■

1.2 Théorème du point fixe topologiques

Théoréme 20 ***(Théorème de point fixe de Brouwer)*** *$f : \bar{B} \to \bar{B}$ une application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Alors f admet un point fixe c'est - à - dire : $\exists x \in \bar{B}$, telle que $f(x) = x$.*

Théoréme 21 ***(Théorème de point fixe de Schauder)*** *Soit $\bar{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \bar{B} \to \bar{B}$ compacte. Alors f a un point fixe : $\exists x \in \bar{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Théoréme 22 *[2]**(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)** Soit $\Omega \subset X$ un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach X tel que $0 \in \Omega$, et soit $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact. Alors un des deux énoncés suivants vérifié :*

(a) T a un point fixe dans Ω.

(b) il existe $\lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $Tx = \lambda x$.

Théoréme 23 ***(Brouwer)*** *Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X, \|.\|)$ et soit $A : M \to M$ une application continue, alors A admet un point fixe .*

Théoréme 24 ***(Schauder)*** *soit M une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach X et soit $A : M \to M$ une application compacte, alors A admet un point fixe.*

Maintenant Considérons $X = C([a,b])$ muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$.Si M est un sous ensemble de X .

Définition 25 *Soit P un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach E est appelé cône si P est convexe, fermé et satisfait les conditions suivantes :*

1. *$\alpha x \in P$ pour tout $x \in P$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*
2. *x, $-x \in P$ implique $x = 0$.*

Définition 26 ***(uniformément borné)*** *M est uniformément borné,alors*
$\|u\| \leqslant r, \quad \forall u \in M$ et $r > 0$ un nombre fixé.

Définition 27 ***(Ensemble équicontinu)*** *M est équicontinu, alors*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad tq \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad et \quad \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$$

Théoréme 28 ***(Ascoli-Arzela)*** *si M est uniformément borné et équicontinu alors M est relativement compact.*

Théoréme 29 ***(la convergence dominée de lebesgue)*** *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suit d'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable. Supposons qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que :*

1. *$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ existe.*
2. *pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.*
   Alors

   * *f intégrable ($f \in L^p$).*

   * *$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$.*

Chapitre 2

Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et propriétés qui ont un rôle important dans le calcul fractionnaire de la différentielle et de l'intégrale ainsi que de la dérivée fractionnaire.

2.1 Outils de base

2.1.1 Fonctions de base utilisées et importantes dans le calcul farctionnaire

La fonction Gamma :

La fonction Gamma d'euler $\Gamma(\alpha)$ est l'une des fonctions sépciale et importes dans la théorie du calcul fractionnaire, qui généralise la factorielle n ! (n est valeurs réels ou complexes).

Définition 30 *(La fonction Gamma d'Euler)*
La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ *est d'Euler de seconde espèce et définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, (Re(\alpha) > 0)$$

(qui converge pour tout complexe $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$*).*
propriétés de la fonction Gamma :

* *En utilise l'intégrale de fonction Gamma on remplace* α *par* $\alpha + 1$ *et on intégre par partie, on obtient :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), (Re(\alpha > 0))$$

* ***cas particulier :***
la relation entre la fonction $\Gamma(\alpha)$ *et la factorielle (n!) est :*

$$\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

* *On a* $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(\alpha)$ *est une fonction monotone et strictement décroissant pour* $0 < \alpha \leqslant 1$.

* *La fonction Gamma est monotone et strictemente croissante pour* $\alpha \geqslant 2$ *donc elle est convexe pour* $\alpha \in]0, +\infty[$ *, avec point de minimum égal à* $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

* *Pour tout les valeurs entières de* α, $\Gamma(\alpha)$ *est infini (* $\Gamma(-1)$,$\Gamma(-2)$,...,$\Gamma(-n)$,...*) sont ifinis.*

La fonction Bêta :

La fonction Bêta est très importante pour le calcul des dérivées fractionnares de la fonction puissance.

Définition 31 *(La fonction Bêta d'Euler)*
la fonction Bêta est d'Euler de premier espèce et définit par l'intégrale suivante :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 s^{p-1}(1 - s)^{q-1} ds$$

(telle que en définie pour tous nomberes positive $(Re(p > 0)), (Re(q > 0))$
la relation entre les fonction Γ ***et*** β ***:***

$$\forall p > 0, q > 0, \ on \ a \ \beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)},$$

2.1.2 L'opérateur P-Laplacien

Définition 32 *[22]*
L'opérateur P-Laplacien φ_p, $p \in (1, +\infty)$ est défini sur $\mathbb{R}$ comme

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} |x|^{p-2}x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Lemme 1 *[22]*
L'opérateur P-Laplacien $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un homeomorphism et strictement monotone augmentant, et $\varphi_p^{-1}(.)$ est continu, envoie les ensembles délimités aux ensembles délimités, et est se ned par

$$\varphi_p(x) = \varphi_q(x) = \begin{cases} |x|^{q-2}x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

2.2 L'intégrale fractionnaire

Voici quelques définitions des intégrale fractionnaires.

2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I^{(1)}f(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ I^{(2)}f(x) &= \int_a^x I^{(1)}f(u)du \\ &= \int_a^x (\int_a^u f(t)dt)du \end{aligned}$$

On obtient

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt, n \in \mathbb{N}^*$$

plus généralement le n^{ime} itéré de l'opérateur I peut s'écrire pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt \tag{2.3}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riémann rendu compte que la second membre de (2.3) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non entière, il a définit l'intégrale fractionnaire comme suite suivante :

2.2.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 33 *si $f \in C[a,b], \alpha \in \mathbb{R}_+$ est définie l'intégrale*

$$I^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \text{ telle que } x \succ a$$

est appelée intégrale fractionnaire (á gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α.

$$I^{\alpha}_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \text{ tel que } x \prec b$$

est appelée intégrale fractionnaire (á droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Fonction définies sur $(0, +\infty)$

Définition 34 *[23] L'itégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction $x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est donné par*

$$I^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds,$$

à condition que le côté droit soit défini ponctuellement sur $(0, \infty)$.

Cas spéciaux :
$I^0_{a^+} f(x) = f(x)$ (i.e. $I^0_{a^+}$ est l'opérateur identité)

Théoréme 35 *[8]*
Pour $f \in C[a,b]$,lintégrale de Riemann-Liouville on a :

$$I^{\alpha}_{a^+}[I^{\beta}_{a^+} f(x)] = I^{(\alpha+\beta)}_{a^+} f(x), \alpha, \beta > 0$$

Preuve.
la preuve découle directement de la définition

$$[I^{\alpha}_{a^+}[I^{\beta}_{a^+}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha))\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{1}{(s-t)^{\alpha-1}}\int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta})du}$$

Or $f \in C[a,b]$, d'après le théorème de Fubini on et par le changement $t = u + s(x-u)$ on obtient

$$[I^{\alpha}_{a^+}[I^{\beta}_{a^+}f(x)] = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}}du = I^{(\alpha+\beta)}_{\alpha_+}f(x)$$

Ou $B(\alpha,\beta)$ désigne la fonction Bêta. ■

Exemple 36 .
On a $f(t) = (t-a)^m$.
A l'aide de changement de variable $\tau = a + x(t-a)$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}(t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^m d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^m dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m}\beta(m+1,\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{\alpha+m}
\end{aligned}$$

pour $\alpha = 0.5, m = 1$ *et* $a = 0$, *on aura*

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}$$

2.3 La dérivation fractionnaire

Voici quelques définitions des dérivés fractionnaires

2.3.1 Dérivées fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

En généralement, la dérivée d'ordre entier p d'une fonction f et donné par :

$$D^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh), avec \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)..(p-(k-1))}{k!}$$

Cett formule pour p non entier(avec $0 \leqslant n-1 < p < n$) et comme

$$(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(1-p)..(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}$$

nous obtenons

$$^G D^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh)^G D^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh)$$

si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$^G D^{-p} f(t) = \frac{f^k(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau\tau$$

aussi

$$^G D^{p} f(t) = \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau\tau$$

2.3.2 Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 37 *[6]*
Soit F une fonction intégrable sur $[a;t[$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} {}^R_a D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)). \end{aligned}$$

Fonction définies sur $(0, +\infty)$

Définition 38 *[23] La dérive fractionnaire d'ordre de Riemann-Liouville d'une fonction $\alpha > 0$ d'une fonction continue $x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est donné par*

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dt})^n \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds,$$

où $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre α, à condition que le côté droit soit défini ponctuellement sur $(0, \infty)$.

Exemple 39 .

1. ***La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de constante.***
   la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais :

$$ {}_a^R D^p C = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} $$

   cas pariculier : Si $\boldsymbol{c = 1}$ *:*

$$ {}_a^R D^p 1 = \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} $$

2. ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Riemann-Liouville d'ordre p.***
   Soit p *non entier et* $0 \leq n-1 < p < n$ *et* $\alpha > -1$ *alors an a :*

$$ {}_a^R D^p (t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha} d\tau $$

   En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ *on aura :*

$$ \begin{aligned} {}_a^R D^p (t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\beta(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p-1)}(t-a)^{\alpha-p} \end{aligned} $$

Par exemple : ${}_0^R D^{0.5} t^{0.5} = \dfrac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$

Proposition 40 *[7]*

Composition avec l'intégrale fractionnaire

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

$$ {}^R D^p (I^p f(t)) = f(t), $$

en général on a

$$^{R}D^{p}(I^{q}f(t)) =^{R} D^{p-q}f(t)$$

et si $p-q<0,^{R}D^{p-q}f(t)=I^{q-p}f(t)$

- En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$^{R}D^{-p}(^{R}_{a}D^{q}_{t}f(t)) =^{R} D^{q-p}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[^{R}D^{q-k}_{t}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}$$

avec $m-1 \leqslant q < m$

Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si :$f^{k}(a)=0$ *pour tout* $k=0,1,2,...,n-1$.

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}(^{R}D^{p}f(t)) =^{R} D^{n+p}f(t)$$

mais

$$^{R}D^{p}(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)) =^{R} D^{n+p}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}$$

Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n-1 \leqslant p < n$ *et* $m-1 \leqslant q < m$*,alors*

$$^{R}D^{p}(^{R}D^{q}_{t}f(t)) =^{R} D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(q-k+1)}$$

$$^{R}D^{p}(^{R}D^{q}_{t}f(t)) =^{R} D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-q-k+1)}$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^{R}D^{p}$ *et* ${}^{R}D^{q}(p = q)$*, ne commutent que si et*

$[{}^{R}D^{p-k}f(t)]_{t=a} = 0$
pour tout $k = 1, 2, .., n,$ *et*$[{}^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=a}$ *pour tout* $k = 1, 2, .., m$

2.3.3 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Définition 41 *[6]*
Soit $p > 0$ *avec* $n - 1 < p < n$ $(n \in \mathbb{N}^{*})$*, et une fonction* f *donnée sur l'intervalle* $[a, b]$*, la dérivées fractionnaire d'ordre* p *de* f *au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p} \frac{d^{n}}{dt^{n}}(f(t)) \end{aligned}$$

Remarque *:La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $]n-1, n[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* $n-\alpha$ *suivit d'une dérivation classique d'ordre* n*, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 42 .

1. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo***
   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle
   $${}^{c}D^{p}C = 0$$
2. ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Caputo***
   Soit p *un entier et* $0 \leq n - 1 < p < n$ *avec* $\alpha > n - 1$*, alors on a*
   $$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau - a)^{\alpha-n}$$

d'où

$$
{}^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \qquad (2.4)
$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ *on obtient*

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_{0}^{1} (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p},
\end{aligned}
$$

2.4 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo :

Théoréme 43 *Soit* $p \geq 0, n = [p]+1$, *si* f *posséde* $n-1$ *dérivée en* a *et si* ${}^{R}D_{a}^{p}$ *existe alors :*

$$
{}^{c}D_{a}^{p} f(x) = {}^{R}D_{a}^{p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}]
$$

pour presque tout $x \in [a,b]$.

Preuve. D'après la définition on a :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_a^p[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] &={}^R D^n I_a^{n-p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-p-1}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]dt \\
&= \frac{-1}{\Gamma(n-p+1)}[(x-t)^{n-p}(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)]_a^x \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-p+1)} \int_a^x (x-t)^{n-p}[D(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)]dt \\
&= I_a^{n-p+1}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]
\end{aligned}$$

de même façon pour n fois alors :

$$I_a^{n-p}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] = I_a^{n-p}I_a^n D^n[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$ alors :

$$\begin{aligned}
I_a^{n-p}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] &= I_a^{n-p}I_a^n D^n f(x) \\
&= D^n I_a^{n-p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] \\
&= D^n I_a^n I_a^{n-p} D^n f(x) \\
&= I_a^{n-p} D^n f(x) \\
&={}^c D_a^p f(x)
\end{aligned}$$

■

Remarque *: d'apres le relation on remarque que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire de reste dans le développement de Taylor de f.*

2.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Théoréme 44 *(Linéarité)[6] L'opérateur de dérivée fractionnaire est un opérateur linéaire*

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t), t > 0.$$

Théoréme 45 *(Règle de Leibniz)[6] On soit que de la règle de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit de deux fonction f(t),g(t), ce qui est donné par la relation suivante :*

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t). \tag{2.5}$$

En remplaçant l'entier n par paramètre réel p, dans le membre à droit de (2.5) on obtient la formule :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p, n \geq p+1,$$

telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n^p(t) = 0.$$

Alors on a une généralisation de la règle de liebinz d'ordres fractionnaires.

Chapitre 3

Application de méthode itérative monotone

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode itérative monotone pour étude l'existence de solutions positives de problème aux limites d'une équation différentielle fractionnaire avec l'opérateur P-Laplacien.
On considére le problème suivante :

$$(P)\begin{cases} D^{\gamma}(\varphi_p(D^{\alpha}u(t))) = f(t,u(t)), 0 < t < 1, \\ u(0)=D^{\alpha}u(0) = 0 \ , \qquad D^{\beta}u(1) = aD^{\beta}u(\xi) \ , \qquad D^{\alpha}u(1) = bD^{\alpha}u(\eta), \end{cases}$$

où $f \in C([0,1] \times [0,+\infty), [0,+\infty))$ est une fonction donnée et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; 1 < \alpha, \gamma \leq 2; \beta > 0$ et $1 + \beta \leq \alpha; \xi, \eta \in (0,1)$; $a, b \in [0,+\infty); 1 - a\xi^{\alpha-\beta-1} > 0$;$1 - b^{p-1}\eta^{\gamma-1} > 0$ et $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$, $\varphi_q = (\varphi_p)^{-1}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, D^{α} est le différenciation de Riemann-Liouville.
Nous montrons que pour conditions prédéfinies (P) admet des solutions positives.

3.1 Préliminaires :

Dans cette section, nous fournirons des lemmes de base qui nous amènent à prouver les résultats, avec les définitions de l'étude mentionnées précédemment ([34]) et ([38]).

Lemme 2 *[23]*

(1) Si $x \in L(0,1), \rho > \sigma > 0$*, Alors*

$$D^{\sigma} I^{\rho} x(t) = I^{\rho-\sigma} x(t), \quad D^{\sigma} I^{\sigma} x(t) = x(t)$$

.

(2) Si $\rho > 0, \lambda > 0$*, Alors*

$$D^{\rho} t^{\lambda-1} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\rho)} t^{\lambda-\rho-1}$$

.

Lemme 3 *[23] Supposons que* $x \in C(0,1) \cap L(0,1)$ *avecune dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *appartenant à* $C(0,1) \cap L(0,1)$*. Alors*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} x(t) = x(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_N t^{\alpha-N}, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, N,$$

Où N *est le plus petit entier supérieur ou égal à* α*.*

3.2 Résultats d'existences

Dans cette section, nous étude d'existence et l'unicité d'une solution positive au problème (P).

Lemme 4 *Si* $h \in C[0,1], \alpha \in (1,2], \beta > 0$ *et* $1 + \beta \leq \alpha, \xi \in (0,1), a \in [0,+\infty), \mathcal{A} := a\xi^{\alpha-\beta-1}$*, Alors le valeur aux limites problème*

$$D^{\alpha} u(t) + h(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.2}$$

$$u(0) = 0, \quad D^{\beta} u(1) = a D^{\beta} u(\xi), \tag{3.3}$$

a une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) h(s) ds$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-\mathcal{A})(t-s)^{\alpha-1} - a t^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, s \leq \xi \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-\mathcal{A})(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}, & 0 < \xi \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - a t^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}, & 0 \leq t \leq s \leq \xi < 1, \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \xi \leq s \end{cases} \tag{3.4}$$

Preuve. *En appliquant le lemmme (3), nous pouvons réduire eq (3.2) à une équation intégrale équivalente.*

$$u(t) = -I^{\alpha}h(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}$$

Pour certains $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, noter que $u(0) = 0$, on a $c_2 = 0$. par conséquent la solution générale de l'eq (3.2) est

$$u(t) = -I^{\alpha}h(t) + c_1 t^{\alpha-1}. \tag{3.5}$$

Par(3.5) et lemme (2), on a

$$D^{\beta}u(t) = -D^{\beta}I^{\alpha}h(t) + c_1 D^{\beta}t^{\alpha-1} = -I^{\alpha-\beta}h(t) + c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)}t^{\alpha-\beta-1}$$

Donc,

$$D^{\beta}u(1) = -\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}h(s)ds + c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \tag{3.6}$$

$$D^{\beta}u(\xi) = -\int_0^{\xi} \frac{(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}h(s)ds + c_1\frac{\tau(\alpha)}{\tau(\alpha-\beta)}^{\alpha-\beta-1} \tag{3.7}$$

Par $D^{\beta}u(1) = aD^{\beta}u(\xi)$, en combinant avec (3.7) et (3.6), on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\left\{\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}h(s)ds - a\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}h(s)ds\right\}$$

Donc, l'unique solution du problème (3.2), (3.3) est

$$\begin{aligned}
u(t) = &-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\left\{\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}h(s)ds\right. \\
&\left. -a\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}h(s)ds\right\} \\
= &\int_0^1 G(t,s)h(s)ds.
\end{aligned}$$

■

Lemme 5 *Si* $h \in C[0,1], \phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1, \phi_q = (\phi_p)^{-1}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, 1 < \alpha,$ $\gamma \leq 2, \beta > 0$ *et* $1 + \beta \leq \alpha, 0 < \xi, \eta < 1, a, b \in [0, +\infty), \mathcal{B} =: b^{p-1}\eta^{\gamma-1}$, *Alors le problème*

$$D^{\gamma}\left(\phi_p\left(D^{\alpha}u(t)\right)\right) = h(t), \quad 0 < t < 1, \tag{3.8}$$

$$u(0) = D^{\alpha}u(0) = 0, \quad D^{\beta}u(1) = aD^{\alpha}u(\xi), \quad D^{\alpha}u(1) = bD^{\alpha}u(\eta), \tag{3.9}$$

a une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)h(\tau)d\tau\right)ds$$

où

$$H\left(t,s\right) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\gamma-1} - b^{p-1}[t(\eta-s)]^{\gamma-1} - (1-\mathcal{B})(t-s)^{\gamma-1}}{(1-\mathcal{B})\Gamma(\gamma)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, s \leq \eta; \\ \frac{[t(1-s)]^{\gamma-1} - (1-\mathcal{B})(t-s)\gamma^{\gamma-1}}{(1-\mathcal{S})\Gamma(\gamma)}, & 0 < \eta \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{[t(1-s)]^{\gamma-1} - b^{p-1}[t(\eta-s)]^{\gamma-1}}{(1-\mathcal{B})\Gamma(\gamma)}, & 0 \leq t \leq s \leq \eta < 1; \\ \frac{[t(1-s)]^{\gamma-1}}{(1-\mathcal{B})\Gamma(\gamma)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \eta \leq s \end{cases}$$

G(t,s) est défini par (3.4).

Preuve. à partie de l'eq (3.8) et du lemme (3), nous avons

$$\phi_p\left(D^{\alpha}u(t)\right) = I^{\gamma}h(t) + d_1t^{\gamma-1} + d_2t^{\gamma-2}$$

Pour certains $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Noter que $D^{\beta}u(0) = 0$, on a $d_2 = 0$, Alors

$$\phi_p\left(D^{\alpha}u(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}h(\tau)d\tau + d_1t^{\gamma-1}$$

Donc,

$$\phi_p\left(D^{\alpha}u(1)\right) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1 (1-\tau)^{\gamma-1}h(\tau)d\tau + d_1, \tag{3.10}$$

$$\phi_p\left(D^{\alpha}u(\eta)\right) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^{\eta} (\eta-\tau)^{\gamma-1}h(\tau)d\tau + d_1\eta^{\gamma-1}. \tag{3.11}$$

par $D^{\alpha}u(1) = bD^{\alpha}u(\eta)$, combinant avec (3.10) et (3.11) , On a

$$d_1 = -\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}h(\tau)d\tau + \int_0^{\eta} \frac{b^{p-1}(\eta-\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}h(\tau)d\tau$$

Donc, l'uniqe solution du problème (3.2), (3.3), est

$$\begin{aligned}\phi_p\left(D^\alpha u(t)\right) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}h(\tau)d\tau - \int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}(1-\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}h(\tau)d\tau \\ &+ \int_0^\eta \frac{b^{p-1}t^{\gamma-1}(\eta-\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}h(\tau)d\tau \\ &= -\int_0^1 H(t,\tau)h(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Donc,

$$D^\alpha u(t) + \phi_q\left(\int_0^1 H(t,\tau)h(\tau)d\tau\right) = 0$$

En combinant avec les conditions aux limites $u(0)=0, D^\beta u(1) = aD^\alpha u(\xi)$, par Lemme (4), On obtient l'unique solution du problème (3.8), (3.9).

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)h(\tau)d\tau\right)ds$$

■

3.2.1 Existence des solutions positions

la fonction de Green : Soit G la fonction de Green, Donc

(1) $G(t,s) \geq 0$ pour tout $0 < s \leq t < 1$.

(2) $\max_{0\leq t\leq 1} G(t,s) = G(s,s), s \in [0,1]$.

(3) $G(s,s)$ a unique maximum.

(4) $\int_0^1 G(t,s) \leq \frac{s^{\gamma-1}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$.

Alors,

Lemme 6 *Suposons $1-\mathcal{A} > 0, 1-\mathcal{B} > 0$. Les fonctions $G(t,s)$ et $H(t,s)$ ont* ***les propriétés*** *suivantes :*

(1) $G(t,s), H(t,s) \in C([0,1]\times[0,1])$ *et* $G(t,s) > 0, H(t,s) > 0$ *pour* $t, s \in (0,1)$.

(2) Il existe deux fonctions positives $\omega, \omega_1 \in C((0,1),(0,+\infty))$ *telles que*

$$\omega(s) \geq \max_{0\leq t\leq 1} G(t,s), \quad \omega_1(s) \geq \max_{0\leq t\leq 1} H(t,s)$$

où

$$\begin{aligned}
g(t,s) &= \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\\
g_1(t,s) &= \frac{[t(1-s)]^{\gamma-1} - (t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)},\\
\omega(s) &= g(s,s) + \frac{\mathcal{A}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}, \quad \omega_1(s) = g_1(s,s) + \frac{\mathcal{B}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}, \quad s \in (0,1).
\end{aligned}$$

Preuve. Il est vident que $g(t,s) > 0, g_1(t,s) > 0$ pour $s,t \in (0,1)$. on remarque que $g(t,s), g_1(t,s)$ sont décroissantes par rapport à t pour $s \leq t$ et croissantes par rapport à t pour $t \leq s$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq t\leq 1} g(t,s) = g(s,s) &= \frac{s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad s \in (0,1);\\
\max_{0\leq t\leq 1} g_1(t,s) = g_1(s,s) &= \frac{s^{\gamma-1}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}, \quad s \in (0,1).
\end{aligned}$$

♢ Nous démontrons d'abord l'énoncé(1) :

D'après les définitions de $G(t,s)$ et $H(t,s)$, il est clair que $G(t,s), H(t,s) \in C([0,1]\times[0,1])$.

Pour $0 < s \leq t < 1, s \leq \xi$, On a

$$
\begin{aligned}
G(t,s) =& \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(1-\mathcal{A})(t-s)^{\alpha-1}-at^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\\
=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{\mathcal{A}}{1-\mathcal{A}}\right)t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\
&-\frac{at^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\\
=&\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\
&+\frac{at^{\alpha-1}\left[\xi^{\alpha-\beta-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(\xi-s)^{\alpha-1}\right]}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\\
\geq& g(t,s)+\frac{at^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}g(\xi,s)\\
>&0.
\end{aligned}
$$

En utilisant un argument analogue, nous avons $G(t,s)>0$ pour $0<\xi\leq s\leq t<1$ ou $0<t\leq s\leq\xi<1$ ou $0<t\leq s<1,\xi\leq s$

Ainsi, $G(t,s)>0$ pour $t,s\in(0,1)$. Pour $0<s\leq t<1, s\leq\eta$, On a

$$
\begin{aligned}
H(t,s) &= \frac{[t(1-s)]^{\gamma-1}-b^{p-1}[t(\eta-s)]^{\gamma-1}-(1-\mathcal{B})(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}\\
&=\left(1+\frac{\mathcal{B}}{1-\mathcal{B}}\right)\frac{[t(1-s)]^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\frac{(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}-\frac{b^{p-1}[t(\eta-s)]^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{[t(1-s)]^{\gamma-1}-(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}+\frac{b^{p-1}t^{\gamma-1}\left[\eta^{\gamma-1}(1-s)^{\gamma-1}-(\eta-s)^{\gamma-1}\right]}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}\\
&=g_1(t,s)+\frac{b^{p-1}t^{\gamma-1}}{1-\mathcal{B}}g_1(\eta,s)\\
&>0.
\end{aligned}
$$

De même $H(t,s)>0$ pour $0<\eta\leq s\leq t<1$ ou $0<t\leq s\leq\eta<1$ ou $0<t\leq s<1,\eta\leq s$. Ainsi, $H(t,s)>0$ pour $t,s\in(0,1)$.

◇ Suit maintenant la prouve de l'énoncé(2) :

Pour , $0\leq s\leq t\leq 1, s\leq\xi$ On a

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le t\le 1} G(t,s)\\
&\quad = \max_{0\le t\le 1}\left(g(t,s)+\frac{at^{\alpha-1}\left[\xi^{\alpha-\beta-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(\xi-s)^{\alpha-1}\right]}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\right)\\
&\quad \le g(s,s)+\frac{\mathcal{A}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}=\omega(s).
\end{aligned}$$

Pour $0<\xi\le s\le t\le 1$, On a

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le t\le 1} G(t,s)\\
&\quad = \max_{0\le t\le 1}\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(1-\mathcal{A})(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\\
&\quad = \max_{0\le t\le 1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{\mathcal{A}}{1-\mathcal{A}}\right)t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\\
&\quad \le g(s,s)+\frac{\mathcal{A}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}=\omega(s).
\end{aligned}$$

Pour $0\le t\le s\le \xi<1$,

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le t\le 1} G(t,s)\\
&\quad = \max_{0\le t\le 1}\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-at^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\\
&\quad = \max_{0\le t\le 1}\left(\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{at^{\alpha-1}\left[(\xi-\xi s)^{\alpha-\beta-1}-(\xi-s)^{\alpha-1}\right]}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\right)\\
&\quad \le g(s,s)+\frac{\mathcal{A}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}=\omega(s)
\end{aligned}$$

Pour $0\le t\le s\le 1, \xi\le s$

$$\begin{aligned}
\max_{0\le t\le 1} G(t,s) &= \max_{0\le t\le 1}\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}\\
&= \max_{0\le t\le 1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{\mathcal{A}}{1-\mathcal{A}}\right)t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}\right)\\
&\le g(s,s)+\frac{\mathcal{A}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\mathcal{A})}=\omega(s).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\max_{0\le t\le 1} G(t,s)\le\omega(s),\quad s\in(0,1)$$

Pour $0 \leq s \leq t \leq 1, s \leq \eta$, On a

$$\begin{aligned}\max_{0\leq t\leq 1} H(t,s) &\leq \max_{0\leq t\leq 1}\left(g_1(t,s) + \frac{b^{p-1}t^{\gamma-1}}{1-\mathcal{B}}g_1(\eta,s)\right)\\ &\leq g_1(s,s) + \frac{\mathcal{B}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})} = \omega_1(s).\end{aligned}$$

Pour $0 < \eta \leq s \leq t \leq 1$, On a

$$\begin{aligned}&\max_{0\leq t\leq 1} H(t,s)\\ &\quad= \max_{0\leq t\leq 1}\frac{[t(1-s)]^{\gamma-1} - (1-\mathcal{B})(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}\\ &\quad= \max_{0\leq t\leq 1}\left(g_1(t,s) + \frac{\mathcal{B}t^{\gamma-1}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}\right)\\ &\quad\leq g_1(s,s) + \frac{\mathcal{B}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})} = \omega_1(s).\end{aligned}$$

Pour $0 \leq t \leq s \leq \eta < 1$,

$$\begin{aligned}\max_{0\leq t\leq 1} H(t,s) &= \max_{0\leq t\leq 1}\frac{[t(1-s)]^{\gamma-1} - b^{p-1}[t(\eta-s)]^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}\\ &= \max_{0\leq t\leq 1}\left(\frac{[t(1-s)]^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \frac{b^{\gamma-1}t^{\gamma-1}}{1-\mathcal{B}}g_1(\eta,s)\right)\\ &\leq g_1(s,s) + \frac{\mathcal{B}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})} = \omega_1(s).\end{aligned}$$

Pour $0 \leq t \leq s \leq 1, \eta \leq s$

$$\begin{aligned}\max_{0\leq t\leq 1} H(t,s) &= \max_{0\leq t\leq 1}\frac{[t(1-s)]^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}\\ &= \max_{0\leq t\leq 1}\left(\frac{[t(1-s)]^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\mathcal{B}[t(1-s)]^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})}\right)\\ &\leq g_1(s,s) + \frac{\mathcal{B}(1-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)(1-\mathcal{B})} = \omega_1(s).\end{aligned}$$

Donc,

$$\max_{0\leq t\leq 1} H(t,s) \leq \omega_1(s), \quad s \in (0,1)$$

Il est évident que $\omega(s), \omega_1(s) \in C((0,1),(0,+\infty))$.

■

3.3 Méthode itérative monotone

Dans ce section, nous établir l'existence de solutions positives pour le problème aux limites d'une équation différentielle fractionnaire avec l'opérateur P-Laplacien (P) en utilisant cette méthode monotont, de sorte que le princpe de cette méthode est basé sur la recherche de deux suites monotones et qui convergent respectivement vers les solutions minimum u^* etet maximum v^* de problème (P).
Soit $E = C[0,1]$ un espace de Banach de norme maximal $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$. Définir le cône $P \subset E$ en $P = \{u \in E \mid u(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}$.

Définition 46 ***(Sous-ensemble relativement compact)*** *Un sous ensemble P d'un espace topologique E est relativement compact si et seulement si toute suite dans P a une sous-suit convergente dans E.*

Définition 47 ***(Complètement continu)*** *l'application est dit complètement continu s'il est continu et pour tout sous-ensembles bornés en ensembles précompacts(relativement compact).*

Lemme 7 *Soit $T : P \to E$ l'opérateur défini par*

$$(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau\right)ds.$$

Alor $T : P \to P$ est complètement continu.

Preuve. L'opérateur $T : P \to P$ est continu en vue de la continuité non négative de $G(t,s), H(t,s)$ et $f(t,u)$. De plus, il est facile de voir par le théorème de(28) et (29) que $T : P \to P$ est complètement continu (voir,par exemple [4]). ■
Pour plus de commodité, nous introduisons la notation suivante :

$$L = \left[\int_0^1 \omega(s)\phi_q\left(\int_0^s \omega_1(\tau)d\tau\right)ds\right]^{-1}$$

3.3.1 Existence deux solutions positions

Théoréme 48 *Soit* $f \in C([0,1] \times [0,+\infty),[0,+\infty))$, *Supposons qu'il existe une constante* $\lambda > 0$ *telle que*
$(C_1)\, f\,(t, x_1) \leq f\,(t, x_2)$ *pour tout* $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \lambda$ *;*
$(C_2)\, \max_{0 \leq t \leq 1} f(t, \lambda) \leq \phi_p(\lambda L)$ *;*
$(C_3)\, f(t, 0) \neq 0$ *pour* $0 \leq t \leq 1$.
Alors le problème (P) a deux solutions positives u^* *et* v^* *, telle que*

$$0 < \|u^*\| \leq \lambda \text{ et } \lim_{n\to\infty} T^n u_0 = u^*, \text{ où } u_0(t) = \lambda,$$
$$0 < \|v^*\| \leq \lambda \text{ et } \lim_{n\to\infty} T^n v_0 = v^*, \text{où } v_0(t) = 0.$$

Preuve. Définir $P_\lambda = \{u \in P \mid \|u\| \leq \lambda\}$. Dans ce qui suit, nous d'abord $TP_\lambda \subseteq P_\lambda$. Soit $u \in P_\lambda$, puis $0 \leq u(t) \leq \|u\| \leq \lambda$. par hypothèse (C_1) et (C_2), nous avons

$$0 \leq f(t, u(t)) \leq f(t, \lambda) \leq \phi_p(\lambda L)$$

pour tout $u \in P_\lambda$, par lemme (7) , on sait que $Tu \in P$, et pour conséquent

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \omega(s)\phi_q\left(\int_0^s \phi_p(\lambda L)\omega_1(\tau)d\tau\right) ds \\
&= \lambda L \int_0^1 \omega(s)\phi_q\left(\int_0^s \omega_1(\tau)d\tau\right) ds \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Donc $Tu \in P_\lambda$. Ainsi, on obtient $TP_\lambda \subseteq P_\lambda$.

Soit $u_0(t) = \lambda, 0 \leq t \leq 1$, alors $\|u_0\| = \lambda$ et $u_0 \in P_\lambda$. Soit $u_1(t) = Tu_0(t)$, alors $u_1 \in P_\lambda$. Définir

$$u_{n+1} = Tu_n = T^{n+1}u_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Puisque $TP_\lambda \subseteq P_\lambda$, on a $u_n \in P_\lambda$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). D'après le Lemme (6) , T est compact ;

on affirme que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a une sous suite convergente $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ et il existe $u^* \in P_\lambda$ tel que $u_{n_k} \to u^*$.
D'après la définition de T et (C_1), pour toute $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= (Tu_0)(t) \\
&= \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s H(s,\tau) f(\tau, u_0(\tau))\, d\tau\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \omega(s)\phi_q\left(\int_0^s \phi_p(\lambda L)\omega_1(\tau) d\tau\right) ds \\
&= \lambda L \int_0^1 \omega(s)\phi_q\left(\int_0^s \omega_1(\tau) d\tau\right) ds \\
&= \lambda \\
&= u_0(t).
\end{aligned}$$

Donc,

$$u_2(t) = Tu_1(t) \leq Tu_0(t) = u_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Donc, par induction on a

$$u_{n+1} \leq u_n, \quad 0 \leq t \leq 1, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ainsi, il existe $u^* \in P_\lambda$ tel que $u_n \to u^*$. En appliquant la continité de T et $u_{n+1} = Tu_n$, on obtient $Tu^* = u^*$.
Soit $v_0 = 0, 0 \leq t \leq 1$, alors $v_0 \in P_\lambda$. Soit $v_1 = Tv_0$, alors $v_1 \in P_\lambda$.
Définir

$$v_{n+1} = Tv_n = T^{n+1}v_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Puisque $T : P_\lambda \to P_\lambda$, on a $v_n \subseteq P_\lambda, n = 0, 1, 2, \ldots$. Comme T est complètement continu, on affirme $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ est ensemble séquentiellement compact.

Puisque $v_1(t) = Tv_0(t) = (T0)(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1$, on a

$$v_2(t) = Tv_1(t) \geq (T0)(t) = v_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Donc, par induction on a

$$v_{n+1} \geq v_n, \quad 0 \leq t \leq 1, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ainsi, il existe $v^* \in P_\lambda$ tel que $v_n \to v^*$. En appliquant la continuité de T et $v_{n+1} = Tv_n$, on obtient $Tv^* = v^*$.
Il est bien connu que chaque point fixe de l'opérateur T dans P est une solution du problème (P). De plus, si $f(t, 0) \neq 0, 0 \leq t \leq 1$, alors la fonction nulle n'est pas la solution du problème (P).
On a, donc $\|u^*\| > 0, \|v^*\| > 0$. Alors u^* et v^*sont deux solutions positives du problème (P). ■

En appliquant le théorème (48), on obtient le corollaire suivant

Corollaire 49 *Supposons que (C_3) est satisfaite, et que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(C_4) $f(t, x_1) \leq f(t, x_2)$ *Pour tout* $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x_1 \leq x_2$
(C_5) $\lim_{x\to\infty} \max_{0\leq t\leq 1} \frac{f(t,x)}{x^{p-1}} \leq \phi_p(L)$ *(en particulier* $\lim_{x\to\infty} \max_{0\leq t\leq 1} \frac{f(t,x)}{x^{p-1}} = 0\Big)$.
Alors le problème (P) a deux solutions positives u^* et v^*.

3.4 Example 1

Soit $p = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{4}{3}, \gamma = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{4}, \xi = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{4}, a = b = \frac{1}{2}$. Nous considérons le problème de valeur limite suivant :

$$
\left\{\begin{array}{l}
D^{\frac{3}{2}}\left(\phi_{\frac{3}{2}}\left(D^{\frac{4}{3}}x(t)\right)\right)=f(t,x(t)), \quad 0<t<1 \\
x(0)=D^{\frac{4}{3}}x(0)=0, \quad D^{\frac{1}{4}}x(1)=\frac{1}{2}D^{\frac{1}{4}}x\left(\frac{1}{3}\right), \quad D^{\frac{4}{3}}x(1)=\frac{1}{2}D^{\frac{4}{3}}x\left(\frac{1}{4}\right),
\end{array}\right. \tag{3.12}
$$

où

$$
f(t,x)=\frac{1}{24}\left(1+xe^{t}+x^{\frac{3}{2}}\right)
$$

Il est évident que

$$
1-a\xi^{\alpha-\beta-1}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{12}}>0, \quad 1-b^{p-1}\eta^{\gamma-1}=1-\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}>0
$$

Par calcul, nous pouvons obtenir $L \approx 0.2318$. choisissons $\lambda=5$. Donc, $f(t,x)$ satisfait

(1) $f\left(t,x_1\right) \leq f\left(t,x_2\right)$ pour tout $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 5$

(2) $\max_{0 \leq t \leq 1} f(t,\lambda)=f(1,5) \approx \frac{25.7703}{24} \approx 1.0738<\phi_{\frac{3}{2}}(\lambda L) \approx 1.0766$;

(3) $f(t,0)=\frac{1}{24} \neq 0$ pour $0 \leq t \leq 1$.

En suite, Théorème (48), problem (3.4) a deux solutions positives u^* et v^* telles que

$$
\begin{aligned}
&0<\|u^*\| \leq 5 \text{ et } \lim_{n \to \infty} T^n u_0=u^*, \text{ où } u_0(t)=5, \\
&0<\|v^*\| \leq 5 \text{ et } \lim_{n \to \infty} T^n v_0=v^*, \text{ où } v_0(t)=0.
\end{aligned}
$$

3.5 Example 2

Soit $p=\frac{3}{2}, \alpha=\gamma=\frac{3}{2}, \beta=\frac{1}{4}, \xi=\eta=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}$. Nous considérons le problème de valeur limite suivant :

$$
\left\{\begin{array}{l}
D^{\frac{3}{2}}\left(\phi_{\frac{3}{2}}\left(D^{\frac{3}{2}}x(t)\right)\right)=f(t,x(t)), \quad 0<t<1 \\
x(0)=D^{\frac{3}{2}}x(0)=0, \quad D^{\frac{1}{4}}x(1)=\frac{1}{4}D^{\frac{1}{4}}x\left(\frac{1}{2}\right), \quad D^{\frac{3}{2}}x(1)=\frac{1}{2}D^{\frac{3}{2}}x\left(\frac{1}{2}\right),
\end{array}\right. \tag{3.13}
$$

où

$$
f(t,x)=\frac{x^2}{15}+\frac{tx}{12}+\frac{1}{20}
$$

Il est évident que

$$1 - a\xi^{\alpha-\beta-1} = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,8 > 0, \quad 1 - b^{p-1}\eta^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,5 > 0$$

Par calcul, nous pouvons obtenir $L \approx 3,2218$. choisissons $\lambda = 8$. Donc, $f(t,x)$ satisfait

(1) $f(t, x_1) \leq f(t, x_2)$ pour tout $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 8$

(2) $\max_{0\leq t\leq 1} f(t,\lambda) = f(1,8) \approx \frac{17940}{3600} \approx 4.9833 < \phi_{\frac{3}{2}}(\lambda L) \approx 5.0768$;

(3) $f(t,0) = \frac{1}{20} = 0.05 \neq 0$ pour $0 \leq t \leq 1$.

En suite, Théorème (48), problème (3.5) a deux solutions positives u^* et v^* telles que

$$\begin{aligned} &0 < \|u^*\| \leq 8 \text{ et } \lim_{n\to\infty} T^n u_0 = u^*, \text{ où } u_0(t) = 8, \\ &0 < \|v^*\| \leq 8 \text{ et } \lim_{n\to\infty} T^n v_0 = v^*, \text{ où } v_0(t) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous prouvons l'existence des solutions positives du problème aux limites d'un équation différentielle fractionnaire avec l'opérateur P-Laplacien (P) en appliquant la méthode monotone, ces résultats obtenus dans cette méthode monotone sont basés sur diverses théories fixes. Au final, obtenons qu'il existe deux solutions positives au problème, en donnant un exemple appliqué pour cela.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[2] R. P. Agarwal, Focal boundary value problems for differential and difference equations, Kluwer Academic Publ., 1998.

[3] V. IS. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.

[4] Yan.F.Zuo.M.HAO.X, Positive solution for a fractional singular boundray value problem with P-Laplacian operator. Bound. Value Probl.2018, 51 (2018).

[5] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques Applications. Springer-Verlag, 1993.

[6] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.

[7] S. Q. Zhang, The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 804-812.

[8] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[9] R.P. Agarwal, D. O, Regan, P.J.Y. Wong, Positive Solutions Of Differential Difference and Integral Equations, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[10] Wang, Y., Hou, C, Existence of multiple positive solutions for one dimensional p-Laplacian. J. Math. Anal. Appl. 315, 144–153 (2006).

[11] Zhang, X., Ge, W. : Impulsive boundary value problems involving the one-dimensional p-Laplacian. Nonlinear Anal. 70, 1692–1701 (2009).

[12] A. Ashyralyev, Y.A. Sharifov, Existence and uniqueness of solutions for the system of non- linear fractional differential equations with nonlocal and integral boundary conditions, Abstr. Appl. Anal. 2012, Article ID 594802, 14pp.

[13] R.I. Avery, A.C. Peterson, Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Comput. Math. Appl. 42 (35) (2001), 313-322.

[14] Zhang, X., Ge, W, Impulsive boundary value problems involving the one-dimensional p-Laplacian. Nonlinear Anal. 70, 1692–1701 (2009).

[15] Su, H., Wei, Z., Wang, B. : The existence of positive solutions for a nonlinear four-point singular boundary value problem with a p-Laplacian operator. Nonlinear Anal. 66, 2204–2217 (2007).

[16] Chai, G, Positive solutions for boundary value problems of fractional differential equation with p-Laplacian operator. Bound. Value Probl. 2012, 18 (2012).

[17] Tian, Y., Li, X, Existence of positive solution to boundary value problem of fractional differential equations with p-Laplacian operator. J. Appl. Math. Comput. (2015).

[18] Z. Bai, H. Lu, Positive solutions for boundary value problem of a nonlinear fractional differ- ential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2) (2005), 495-505.

[19] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodriguez-Germa, J.J. Trujillo, Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations, Appl. Math. Comput. 187 (1) (2007), 79-88.

[20] M. El-Shahed, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differ- ential equation, Abstr. Appl. Anal. 2007, Article ID 10368, 8 pages.

[21] L.J. Grimm, Existence and continuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 525-536.

[22] Q. Zhang, Y,Wang, Z, Qiu, Existence of solutions and boundary asymptotic Behavior of p(t)-Laplacian equation multipoint boundary valeur problems. Nonlinear Anal. 72, 2950-2973 (2010).

[23] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[24] K.S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and differential equations, John Wiley, New York, 1993.

[25] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, 198 Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

الملخــــــص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو إثبات وجود حلول موجبة لمسالة قيم حدية لمعادلة تفاضلية كسرية تتضمن مؤثر لابلاس الحسابي (P-Laplacian)، من خلال تطبيق طريقة التكرار الرتيب هذه الطريقة مفيدة بشكل خاص للمعادلات التفاضلية غير الخطية التي لا يمكن حلها تحليليًا، وباستخدام دالة غرين (Green's function)، يمكن بناء الحل التكراري لاستخدامه في سلسلة متقاربة.

الكلمات المفتاحية: حلول موجبة ، طريقة التكرارالرتيب، معادلات تفاضلية كسرية ، دالة غرين ، حل تكراري.

Abstract

The primary objective of this dissertation is to establish the existence of positive solutions to a boundary value problem involving a fractional differential equation with the P-Laplacian operator. To achieve this, we employ the monotone iterative method. This approach is particularly valuable for nonlinear differential equations that cannot be solved analytically. By utilizing the (Green's function) , an iterative solution is constructed, which leads to a convergent series.

Keywords : Positive solutions, monotone iterative method, fractional differential equations, Green's function, iterative solution.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'établir l'existence de solutions positives à un problème aux limites impliquant une équation différentielle fractionnaire avec l'opérateur P-Laplacien. Pour ce faire, nous utilisons la méthode itérative monotone. Cette approche est particulièrement précieuse pour les équations différentielles non linéaires qui ne peuvent pas être résolues de manière analytique. En utilisant la fonction de Green, une solution itérative est construite, conduisant à une série convergente.

Mots-clé : Solutions positives, méthode itérative monotone, équations différentielles fractionnaires, fonction de Green, solution itérative.