

**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**



**Faculté des mathématiques et sciences de la  
matière**

N° d'ordre :  
N° de série :

**DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**MASTER**

**Filière : Mathématiques**

**Spécialité : Modélisation et Analyse numérique**

**Par : Bouzazel Djihane**

**thème**

**Résultats d'existence et d'unicité pour un problème de  
dirichlet non homogène et application numérique par la  
méthode des éléments finis.**

**Soutenu publiquement le : 03/07/2023**

**Devant le jury composé de :**

Dr. Kasmi Lotfi	M.C.(B) Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Dr. Lemkkadem Mona	M.C.(B) Université KASDI Merbah-Ouargla	Examineur
Dr. Hichar Saliha	M.C.(B). Université KASDI Merbah Ouargla	Rapporteur

## RESUME

*Dans ce mémoire, on a présenté une introduction aux  $\mathcal{E}dp$  et aux espaces de sobolev et ensuite on a étudié l'existence et l'unicité d'un problème du dirichlet non homogène et finalement on a appliqué la méthode des éléments finis sur un cas de notre problème.*

*Les mots clé : Dirichlet non homogènes , la méthode des éléments finis, l'espace de Sobolev, formulation variationnel. In this thesis, we presented*

### الملخص بالعربية :

في هذا البحث، قدمنا مقدمة عن المعادلات التفاضلية الجزئية والفضاءات سوبوليف، ثم درسنا وجودية وحيدة لمشكلة ديريشليه غير متجانسة، وفي النهاية قمنا بتطبيق طريقة العناصر النهائية على حالة من مشكلتنا.

### الكلمات المفتاحية :

ديريشليه غير المتجانسة، طريقة العناصر المحدودة، صياغة التباين، فضاء سوبوليف،

*an introduction to  $\mathcal{E}dp$  and sobolev spaces and then we studied the existence and uniqueness of a non-homogeneous dirichlet problem and finally we applied the finite element method to a case of our problem.*

*Key words : non-homogeneous Dirichlet, finite element method, space of Sobolev, variational formulation.*

## *DÉDICACE*

*Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :*

*À mon père*

*Je te remercie du fond du coeur pour tous les sacrifices que tu as faits pour  
moi*

*À ma mère*

*ma binôme, Tu as été ma source d'inspiration, me montrant l'exemple de la  
discipline. Tu m'as enseigné les valeurs du travail acharné, et de la passion.*

*À ma soeur Amani*

*Je dédie ces mots avec une profonde gratitude pour les circonstances  
difficiles que nous avons traversées ensemble. Malgré la complexité de ces  
épreuves, nous avons réussi à les surmonter grâce à notre force et à notre  
soutien mutuel.*

*Ta présence à mes côtés pendant ces moments a été d'une valeur inestimable.*

*À chaque étape du chemin, tu as été là pour m'écouter, et m'encourager.*

*À Mahloul Salima*

*Mima , Je tiens à exprimer ma profonde gratitude pour tes prières  
constantes et tes précieux conseils. Tes paroles de sagesse et tes prières ont  
été une source de réconfort et de soutien inestimable dans ma vie.*

## REMERCIEMENT

*Je remercie tout d'abord «Allah» de m'avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire dans de bonnes conditions.*

*J'adresse mes vifs remerciements à :*

*mon encadreur docteur **Hichar Salih** pour la proposition du thème et ces orientations valeureuses.*

*au docteur **Kalich Kaltoum** pour sa patience et sa présence à toutes mes questions.*

*Et aux membres de jury pour avoir bien voulu examiner mon travail. Enfin, je ne voudrai pas non plus oublier toutes les personnes que j'ai rencontré tout long de ces années universitaire et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.*

---

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<i>Resume</i>	<i>i</i>
<i>Notation générales</i>	<i>1</i>
<i>Introduction</i>	<i>2</i>
<i>1 Préliminaire</i>	<i>4</i>
1.1 <i>Les équations aux dérivées Partielles linéaires au second ordre : [5] [6]</i> . . . . .	5
1.1.1 <i>Classification des équations aux dérivées partielles linéaires au second ordre : [5] [6]</i>	5
1.1.2 <i>Les types des équations aux dérivées partielles : [5] [6]</i> . . . . .	5
1.1.3 <i>Les conditions aux limites des équations aux dérivées partielles : [5] [6]</i> . . . . .	6
1.2 <i>Espace de Banach : [6]</i> . . . . .	6
1.2.1 <i>Suite de Cauchy : [6]</i> . . . . .	6
1.3 <i>L'espace de Hilbert : [7] [8]</i> . . . . .	7
1.4 <i>Inégalité de Poincaré : [7] [8]</i> . . . . .	8
1.5 <i>Espace de Lebesgue : [5] [6]</i> . . . . .	8

1.5.1	Espace $L^2(\Omega)$ : [5] [6]	9
1.6	Notion de dérivée faible : [5] [6]	9
1.7	Définitions et dérivées au sens des distributions :	10
1.7.1	Espace des fonctions test $D$ [7] [8]	10
1.7.2	Espace des distributions : [7] [8]	11
1.7.3	La dérivation au sens des distributions : [7] [8]	11
1.8	L'espace de Sobolev : [7] [8]	12
1.9	L'espace $H^1(\Omega)$ : [7] [8]	12
1.9.1	L'espace $H_0^1$ : [7] [8]	13
2	L'existence et l'unicité de la solution du Problème de Dirichlet non homogène	14
2.1	Position du problème :	15
2.2	Formulation variationnelle :	15
2.3	Théorème de Lax-Milgram : [7] [8]	16
2.4	Application aux Problème de Dirichlet non homogène : [12]	17
3	Méthodes des élément finis	20
3.1	Discrétisation du domaine : [3] [4]	21
3.2	La méthode de Galerkin : [3] [4]	21
3.3	Approximation interne générale : [3] [4]	22
3.4	La méthode des éléments finis : [3] [4]	24
3.4.1	La méthode des éléments finis en dimension un :	24
3.4.2	Élément fini $\mathbb{P}_1$ :	25
3.4.3	Résolution du problème du dirichlet : [9]	27
4	Applications	30
4.1	Algorithme	31
4.2	Code Matlab	31
4.3	Applications	34
4.3.1	Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x) = x(x-1)$	34

*Résumé*

---

*Conclusion* 37

*Bibliographie* 38

---

---

## TABLE DES FIGURES

---

<i>4.1</i>	.....	35
<i>4.2</i>	.....	35
<i>4.3</i>	.....	36
<i>4.4</i>	.....	36



---

# NOTATIONS ET CONVENTIONS

---

*Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :*

- ▶  $\Omega$  Ouvert de  $\mathbb{R}^n$
- ▶  $\Gamma$  Bord de  $\Omega$
- ▶  $\mathcal{D}(\Omega)$  Espace de fonctions  $C^\infty$  support compact dans  $\Omega$
- ▶  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$  Norme de l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$
- ▶  $D^\alpha$  Dérivée partielle par rapport au multi-indice  $\alpha$
- ▶  $\nabla u$   $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$  Le gradient de  $u$
- ▶  $\Delta$  Opérateur laplacien
- ▶  $\mathbb{R}$  Ensemble des nombres réels.
- ▶  $\mathbb{R}^N$  Espace euclidien de dimension  $N$ .
- ▶  $L^p$  L'espace des fonctions de puissance  $p$ -ème intégrable pour la mesure de Lebesgue.
- ▶  $\rightarrow$  Convergence .
- ▶  $W^{1,p}(\Omega)$  Espace de Sobolev des fonctions de  $L^p$  dont les dérivées partielles au sens faible

---

# INTRODUCTION

---

*Les équations aux dérivées partielles (EDP) jouent un rôle fondamental dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques et naturels [7] [8]. Elles permettent de décrire des processus dynamiques impliquant plusieurs variables indépendantes. La résolution analytique de ces équations est souvent difficile, voire impossible, dans de nombreux cas réels. C'est pourquoi les méthodes numériques, parmi ces méthodes alternatives, la méthode des différences finies consiste à discrétiser le domaine continu en un réseau de points de grille, où les dérivées partielles sont approximées par des différences finies sur ces points. Cette méthode est relativement simple à mettre en œuvre et peut fournir des résultats satisfaisants pour des problèmes simples avec des géométries régulières. Cependant, cette méthode peut être limitée, et telles que la méthode des éléments finis [1] [2] [3] [4], sont largement utilisées pour obtenir des solutions approximatives.*

*Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des problèmes de Dirichlet non homogènes, qui sont des EDP associées à des conditions aux limites spécifiques. Le problème de Dirichlet vise à trouver une solution qui satisfait une équation différentielle sur un domaine donné tout en respectant des conditions spécifiques sur les bords de ce domaine. Les conditions de Dirichlet non homogènes correspondent à des valeurs prescrites sur les frontières du domaine.*

*Pour cela, nous commencerons par un premier chapitre l'espace de Sobolev qui constitue un outil mathéma-*

---

## Introduction

---

tique fondamental dans l'étude des EDP. Nous débuterons par rappeler brièvement les EDP et les espaces de Lebesgue, afin d'établir les bases nécessaires à la compréhension des concepts avancés qui seront abordés. Ensuite, nous introduirons en détail l'espace de Sobolev, en mettant l'accent sur ses définitions, ses propriétés et son lien avec les distributions. Cette présentation de l'espace de Sobolev nous permettra de mieux appréhender les résultats théoriques exposés dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre constitue le cœur de notre étude, car il aborde l'existence et l'unicité des solutions pour un problème de Dirichlet non homogène. Nous présenterons formellement le problème et discuterons des conditions nécessaires pour garantir l'existence et l'unicité de la solution. Dans ce contexte, nous utiliserons le théorème de Lax-Milgram [7] [8], qui est un outil puissant pour établir ces résultats. Nous fournirons des démonstrations détaillées des résultats théoriques en mettant en évidence l'utilisation du théorème de Lax-Milgram dans le contexte du problème de Dirichlet non homogène.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode des éléments finis, qui est une technique numérique largement utilisée pour résoudre les problèmes d'EDP. Nous commencerons par présenter les principes de base de la méthode des éléments finis, y compris la discrétisation du domaine, la construction des éléments finis et la formulation variationnelle du problème.

Enfin, nous présenterons une application numérique spécifique dans laquelle nous appliquerons la méthode des éléments finis pour résoudre un problème de Dirichlet non homogène.

---

**CHAPITRE 1**

---

**PRÉLIMINAIRE**

---

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'espace de Sobolev, un espace fonctionnel essentiel pour l'étude des équations (EDP), l'espace de Sobolev joue un rôle fondamental dans l'analyse des solutions EDP, en fournissant une structure mathématique rigoureuse pour étudier la régularité des fonctions.

Pour bien comprendre ce que sont les espaces de Sobolev, il est important d'être familier avec la théorie des distributions et les espaces  $L^p$ .

Notons  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ . [5] [6] [7] [8]

## 1.1 Les équations aux dérivées Partielles linéaires au second ordre : [5] [6]

---

Une EDP est une relation entre les variables et les dérivées partielles de  $u$ .

$$\begin{aligned} u &: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow u(x, y) \\ F(D^2u(x, y), D^1u(x, y), x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Où  $u$  est la fonction inconnue.

### 1.1.1 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires au second ordre : [5] [6]

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + G \cdot u = F(x, y) \tag{1.2}$$

$(A, B, C, d, E, G)$  dépend uniquement de  $(x, y)$ .

### 1.1.2 Les types des équations aux dérivées partielles : [5] [6]

Le type des EDPs dépend du signe de  $B^2 - 4ac$ ,

Si  $\Delta = B^2 - 4ac > 0$ , l'EDP est dite hyperbolique.

Exemple 1.1.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si  $\Delta = B^2 - 4ac = 0$ , l'edp est dite parabolique.

Exemple 1.1.2

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si  $\Delta = B^2 - 4ac < 0$  l'edp est dite elliptique .

Exemple 1.1.3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

### 1.1.3 Les conditions aux limites des équations aux dérivées partielles : [5] [6]

Les conditions aux limites (ou les conditions du bord) des équations aux dérivées partielles, sont des conditions spécifiées sur la frontière du domaine ou les edps sont définies, elles sont nécessaires pour déterminer une solution unique.

Les conditions aux limites peuvent être de différents types tel que les conditions du Dirichlet (spécification de la valeur de la solution sur le bord), les conditions du Neumann (spécification de la dérivée normale de la solution bord).

## 1.2 Espace de Banach : [6]

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  ; un espace vectoriel normé. On dira que  $E$  est un espace de Banach S'il est complet.

### 1.2.1 Suite de Cauchy : [6]

Soit  $(U_n)$  ; une suite réelle. On dit que  $(U_n)$  est une suite de Cauchy si quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n$  tel que les inégalités  $P > n$  et  $q \geq n$  entraînent  $|u_p - u_q| < \varepsilon$ .

Remarque 1.2.1 Un espace de Banach est complet si toute suite de Cauchy de  $E$  converge dans  $E$ .

### 1.3 L'espace de Hilbert : [7] [8]

---

Un espace vectoriel  $E$  est un Hilbert, s'il est normé et complet dont la norme est issue d'un produit scalaire

C'est-à-dire :

soit  $\|\cdot\|$  la norme de  $E$

$$\exists \varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$$

Sur  $E$  est un espace vectoriel réel, on dira que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$  si,

i)  $\varphi$  est bilinéaire .

ii)  $\varphi$  est symétrique :  $\forall (x, y) \in E^2 : \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

iii)  $\varphi$  est définie. positive :

$$\begin{cases} \text{positive : } \forall x \in E : \varphi(x, x) \geq 0 \\ \text{définie : } \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Notation :  $\varphi(x, y) = ((x, y)) = \langle x, y \rangle$

Remarque 1.3.1 Un espace de Hilbert est un espace complet .

Théorème 1.3.1 ( de riez) [5] [6]

Soit  $H$  ; un espace de Hilbert, et  $L$  une forme linéaire continue définie sur  $H$  ,

Alors :  $\exists ! u \in H : L(v) = \langle u, v \rangle, \forall v \in H$

Théorème 1.3.2 (Formule de Green)[5] [6] :

Soit  $\Omega$  un ouvert borné pour des fonctions de classe  $C^1$ . Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , elle vérifient :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) ds$$

ou  $n = (n_i) 1 \leq i \leq N$  est la normale unité extérieure à  $\partial\Omega$ .

#### 1.4 Inégalité de Poincaré : [7] [8]

---

Soit  $\Omega$  ; un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$  tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

*Théorème 1.4.1 (de trace) [7] [8]*

Soit  $\Omega$  ; un ouvert borné de classe  $C^1$ , alors On définit l'application  $\gamma_0$  par :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v) = v |_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

$\gamma_0$  Permet de définir la valeur d'une fonction  $v \in H^1(\Omega)$  sur le bord.

*Théorème 1.4.2 (Trace au bord) [5] [6] :*

L'ensemble des traces au bord des fonctions de  $H^1(\Omega)$  forme un sous-espace de  $L^2(\Gamma)$  noté  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  Plus succinctement, on a :

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

#### 1.5 Espace de Lebesgue : [5] [6]

---

Soit  $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ . On appelle espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  l'espace :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ - mesurable et } |f|^p \text{ intégrable. } (|f|^p \in L^1(\Omega)) \right\}$$



Pour toute fonction  $f \in L^p(\Omega)$ , on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

### 1.5.1 Espace $L^2(\Omega)$ : [5] [6]

Pour  $p = 2$  on note  $L^2(\Omega)$  l'ensemble des fonction de carré sommable c'est-à-dire :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |u|^2 dx < \infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$  Est un espace fonctionnel linéaire.

Lemme 1.5.1 L'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

Théorème 1.5.1 [5] [6]

L'espace  $D(\Omega)$  est dense dans  $L^2$  lorsque :

$$\forall v \in L^2(\Omega), (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(\Omega) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Corollaire 1.5.1 Soit  $v \in L^2(\Omega)$ , si  $\int v \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$

Alors :

$$v = 0 \quad (p \cdot p) \text{ dans } \Omega$$

### 1.6 Notion de dérivée faible : [5] [6]

Soit  $V \in L^2(\Omega)$  on appelle la dérivée partielle faible  $w$  la fonction appartenant à  $L^2(\Omega)$  tel que :

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \int_{\Omega} w_i \varphi \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

on note  $w_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$

*Exemple 1.6.1*  $\Omega = ]-1; 1[$ ,  $f(x) = |x| \in L^2(]-1; 1[)$ ,  $f$  admet une dérivée faible dans  $L^2(]-1; 1[)$  :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]-1; 1[) \int_{-1}^1 f \varphi' dx = \int_{-1}^0 -x \varphi' dx + \int_0^1 x \varphi' dx$$

Avec intégration par partie :

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 1 \varphi dx - \left[ x \varphi \right]_{-1}^0 - \int_0^1 1 \varphi dx + \left[ x \varphi \right]_0^1 \\ &= \int_{-1}^0 1 \varphi dx - \int_0^1 1 \varphi dx \\ &= - \left[ \int_{-1}^0 -1 \varphi dx - \int_0^1 1 \varphi dx \right] \end{aligned}$$

Si on pose :

$$H(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Et on note :

$$\int_{-1}^1 f \varphi' = \int_{-1}^1 H \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Alors :

$$H = f' \in L^2(\Omega)$$

*Proposition 1.6.1* Soit  $V \in L^2(\Omega)$

La dérivée faible est unique.

## 1.7 Définitions et dérivées au sens des distributions :

---

### 1.7.1 Espace des fonctions test $\mathcal{D}$ [7] [8]

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^N$  ; on appelle  $\mathcal{D}$  l'espace des fonctions test et on note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \mid \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \}$$

### 1.7.2 Espace des distributions : [7] [8]

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle distribution  $D'$  toute forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ , L'espace de toutes les distributions définies sur  $\Omega$  est noté  $D'(\Omega)$  ou simplement  $D'$ .

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$$

- Linéarité :

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle,$$

$$\langle T, \lambda\varphi \rangle = \lambda\langle T, \varphi \rangle, \lambda \in \mathbb{R},$$

- Continuité :

$$\text{Si } \varphi_n \rightarrow \varphi, n \rightarrow \infty \text{ (dans } \mathcal{D}\text{),}$$

$$\text{La suite } \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, n \rightarrow \infty$$

Et nous obtenons cela à travers la convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \exists K \subset \Omega, \text{ supp } \varphi_n \subset K \\ ii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha \varphi_n \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad \text{supp } |D^\alpha \varphi_n| < \epsilon$$

### 1.7.3 La dérivation au sens des distributions : [7] [8]

Soit  $T \in D'(\Omega)$  on appelle la dérivée partielle au sens des distributions, la distribution notée  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

De proche en proche, on a également :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \text{ on a : } \left\langle \frac{\partial^m T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle T, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\rangle$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$$

## 1.8 $\mathcal{L}$ 'espace de Sobolev : [7] [8]

---

On dit que  $w^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Sobolev si :

$w^{1,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que :}$

$$\int_{\Omega} v \varphi' = - \int_{\Omega} g \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Pour  $v \in g = w^{1,p}(\Omega)$  on note  $v' = g$

Posons  $H^1(\Omega) = w^{1,2}(\Omega)$

## 1.9 $\mathcal{L}$ 'espace $H^1(\Omega)$ : [7] [8]

---

$$H^1(\Omega) : \begin{cases} v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, & v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \\ & i = 1, 2 \end{cases}$$

$H^1(\Omega)$  est un espace de Sobolev .

*Proposition 1.9.1* Si on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v \, dx_1 dx_2$$

$$\forall (u, v) \in [H^1(\Omega)]^2, \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

Alors :

$H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert par  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

### 1.9.1 L'espace $H_0^1$ : [7] [8]

Soit  $\Omega$  un ouvert « régulier » et borné dans  $\mathbb{R}^2$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

*Théorème 1.9.1* [7] [8]  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la norme induite  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

---

**CHAPITRE 2**

---

**L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE LA SOLUTION  
DU PROBLÈME DE DIRICHLET NON  
HOMOGÈNE**

---

On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet; c'est à dire on spécifie les valeurs de la solution sur la frontière.

### 2.1 Position du problème :

---

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma := \partial\Omega$ , on considère le problème suivant : étant donné une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\Omega)$ , trouver une fonction  $u$  définie dans  $\Omega$  et solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ dans } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.2 Formulation variationnelle :

---

Pour se ramener au problème de Dirichlet homogène, on va construire un relèvement, c'est à dire une fonction  $r_g \in H^1(\Omega)$  telle que  $\gamma_0(r_g) = g$  ou  $\gamma_0$  est l'application trace.

Si  $g \in H^{1/2}(\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$  qui est un sous-espace de  $L^2(\Gamma)$ , on sait qu'il existe  $r_g \in H^1(\Omega)$  telle que  $g = \gamma_0(r_g)$ .

On cherche donc  $u$  sous la forme  $u = \hat{u} + r_g$  avec  $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$  et  $r_g \in H^1(\Omega)$  tel que  $\gamma_0(r_g) = g$ . Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on multiplie la première équation de (2.1) par la fonction test  $v$  et on intègre sur  $\Omega$  on obtient :

$$\int_{\Omega} -(\Delta u) \cdot v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

Par la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

Comme  $u = \hat{u} + u_g$  on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla(\hat{u} + r_g) \nabla v dx + \int_{\Omega} (\hat{u} + r_g) \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\Omega} \nabla r_g \nabla v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$(Fv) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \nabla v dx + \int_{\Omega} \hat{u} \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\Omega} \nabla r_g \nabla v dx \end{array} \right.$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \nabla v dx + \int_{\Omega} \hat{u} \cdot v dx$$

$$L_g(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\Omega} \nabla r_g \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} r_g \cdot v dx$$

### 2.3 Théorème de Lax-Milgram : [7] [8]

**Théorème 2.3.1 Théorème de Lax-Milgram [7] :**

Cette section est consacrée au théorème de Lax-Milgram qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions de la formulation variationnelle dans un espace de Hilbert.

On note  $V$  un espace de Hilbert réel de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de norme  $\|\cdot\|$ .

Nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V, \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

On se donne :

1 )  $L(\cdot)$  est une forme linéaire continue sur  $V$ , c'est-à-dire que  $v \rightarrow L(v)$  est linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ , et il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|L(v)| \leq C \|v\|, \quad \forall v \in V$$

2 )  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire sur  $V$ , c'est-à-dire que  $u \rightarrow a(u; v)$  est une forme linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $v \in V$ , et  $v \rightarrow a(u; v)$  est une forme linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $u \in V$ .

3 )  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $V \times V$ . c'est-à-dire, qu'il existe une constante  $M > 0$  tel que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$



4 )  $a(., .)$  est  $V$ -elliptique (coercive), c'est-à-dire, qu'il existe une constante strictement positive tel que :

$$|a(v, v)| \geq a \|u\|_v^2 \quad \forall v \in V$$

#### 2.4 Application aux Problème de Dirichlet non homogène : [12]

On rappelle qu'il s'agit de trouver  $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{u} \nabla v dx + \int_{\Omega} \hat{u} \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\Omega} \nabla r_g \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} \nabla r_g \cdot v dx$$

- La forme bilinéaire  $a(., .)$  est continue sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , en effet :

$$|a(\hat{u}, v)| = |(\hat{u}, v)_{H^1(\Omega)}|$$

Alors :

$$a(\hat{u}, v) \leq \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

En utilisant l'inégalité du Poincaré :  $\exists C > 0$  tel que :

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

Or on a :

$$\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} &= \sqrt{\|\hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2} \\ &\leq \sqrt{c^2 \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2} \\ &\leq \sqrt{c^2 + 1} \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} |a(\hat{u}, v)| &\leq \sqrt{c^2 + 1} \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \sqrt{c^2 + 1} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (c^2 + 1) \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (c^2 + 1) \|\hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Donc  $a(.,.)$  est continue .

D'autre part,  $a(.,.)$  est coercive, en effet :

$\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ , on doit montrer que  $\exists C > 0$  tel que :

$$|a(\hat{u}, \hat{u})|_{H^1(\Omega)} \geq c \|\hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

On a :

$$|a(\hat{u}, \hat{u})|_{H^1(\Omega)} \geq |a(\hat{u}, \hat{u})|_{H_0^1(\Omega)}$$

D'où :

$$\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} \geq \|\hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Avec  $C = 1$

Alors  $a(.,.)$  est coercive .

$L(.)$  est continue, en effet :  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int (f \cdot v dx - r_g \cdot v)_{H^1(\Omega)} \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré :  $\exists C > 0$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On obtient :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (c^2 + 1) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Alors :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (c^2 + 1) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \cdot (c^2 + 1) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot c + \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \cdot (c^2 + 1)) \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Alors  $L(v)$  est continue .

Le théorème (2.3.1) de Lax-Milgram nous assure donc l'existence et l'unicité de la solution de formulation variationnelle sur  $H_0^1(\Omega)$ .

*Il nous reste de vérifier que  $u$  ne dépend pas du relèvement  $r_g$ .*

*Soit  $r_1, r_2$  deux relèvement de  $g$ , donc  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  seront les solution du  $(F.v)_1, (F.v)_2$  respectivement.*

$$u_1 = \hat{u}_1 + r_1, \quad u_2 = \hat{u}_2 + r_2,$$

*Deux solutions de notre problème de Dirichlet non homogène.*

*On pose :*

$$\psi = u_1 + u_2$$

*Avec  $\psi$  la solution du problème de Dirichlet homogène.*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{sur } \Omega \\ u = 0 \Gamma, \end{cases}$$

*Admet une solution unique à savoir 0.*

*D'où :*

$$\psi = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

*Alors :*

*Le relèvement  $n$  influence pas la solution du problème  $u$ .*

*Le théorème (2.3.1) de lax-Milgran nous assure donc l'existence et l'unicité de la solution  $u \in H_0^1$  du problème (2.1) de Dirichlet non homogène.*

---

**CHAPITRE 3**

---

**MÉTHODES DES ÉLÉMENT FINIS**

---

Dans ce chapitre nous présentons la méthode des éléments finis qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites elliptiques. Le principe de cette méthode est directement issu de l'approche variationnelle, que nous avons vu dans le chapitre précédent. L'idée de base est de remplacer l'espace de Hilbert, sur lequel est posée la formulation variationnelle, par un sous-espace  $V_h$  de dimension finie. Le problème approché posé sur  $V_h$  se ramène à la simple résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée matrice de rigidité. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de  $V_h$  de manière à ce que le sous-espace  $V_h$  soit une bonne approximation de  $V$ , et que la solution  $u_h$  dans  $V_h$  de la formulation variationnelle, soit proche de la solution exacte  $u$  dans  $V$ . [1] [2] [3] [4]

### 3.1 Discrétisation du domaine :[3] [4]

---

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de noeuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets.

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

- 1 ) Aucun triangle ne doit pas être plat .
- 2 ) Aucun noeud d'un triangle ne doit appartenir au segment d'un triangle mitoyen .

### 3.2 La méthode de Galerkin : [3] [4]

---

La méthode de Galerkin est une approche mathématique utilisé pour résoudre des problème d'approximation . elle consiste a approximer la fonction  $u$  par une combinaison linéaire de fonction de base .Ces fonctions de base sont choisies de manière a satisfaire certaines propriétés , tel que la continuité.

### 3.3 Approximation interne générale :[3] [4]

---

Nous considérons à nouveau le cadre général de la formulation variationnelle introduit dans le Chapitre (2). Étant donné un espace de Hilbert, une forme bilinéaire continue et coercive  $a(u, v)$ , et une forme linéaire continue  $L(v)$ , on considère la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V \end{cases} \quad (3.1)$$

dont on sait qu'elle admet une unique solution par le Théorème (2.3.1). L'approximation interne de (3.1) consiste à remplacer l'espace de Hilbert  $V$  par un sous-espace de dimension finie  $V_h$ , c'est-à-dire à chercher la solution de :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3.2)$$

La résolution de l'approximation interne (3.2) est facile comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1** [3] [4] : Soit  $V$  un espace de Hilbert réel, et  $V_h$  un sous-espace de dimension finie. Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $V$ , et  $L(v)$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Alors l'approximation interne (3.2) admet une unique solution. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive et symétrique si  $a(u, v)$  est symétrique.

*Preuve.* L'existence et l'unicité de  $u_h \in V_h$ , solution de (3.2), découle du théorème (2.3.1) de Lax-Milgram appliqué à  $V_h$ . Pour mettre le problème sous une forme plus simple, on introduit une base :

$$(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_h} \text{ de } V_h. \text{ Si } u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j,$$

on pose  $U = (u_1, \dots, u_{N_h})$  le vecteur dans  $\mathbb{R}^{N_h}$  des coordonnées de  $u_h$ .

Le problème (3.2) est équivalent à :

$$\text{Trouver } U \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tel que } a \left( \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j, \varphi_i \right) = L(\varphi_i) \forall i = 1, \dots, N_h.$$

Ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire :

$$AU = b \quad (3.3)$$

avec, pour  $1 \leq i, j \leq N_h$   $(A)_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ , et  $(b)_i = L(\varphi_i)$

Dans les applications mécaniques la matrice  $A$  est appelée matrice de rigidité. La proposition suivante permet de montrer que la matrice  $A$  est inversible. ■

*Proposition 3.3.1* La matrice  $\mathcal{A}$  est définie positive c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall U \in \mathbb{R}^{N_h} - \{0\} \quad \langle AU, U \rangle > 0$$

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons pourquoi elle implique l'inversibilité de la matrice  $\mathcal{A}$ . En effet, si  $\mathcal{A}$  n'est pas inversible, alors il existe un vecteur  $U \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^{N_h}$  tel que  $AU = 0$ . Ceci implique en particulier que  $\langle AU, U \rangle = 0$  avec  $U \neq 0$ , ce qui contredit le fait que  $\mathcal{A}$  est définie positive.

*Preuve.* [3] [4] Soit  $U = (u_1, \dots, u_{N_h}) \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^{N_h}$ . Le vecteur  $AU$  a pour coordonnées

$$\left( \sum_{j=1}^{N_h} A_{1j}u_j, \dots, \sum_{j=1}^{N_h} A_{N_h j}u_j \right) = \left( \sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_1), \dots, \sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_{N_h}) \right)$$

On a donc

$$\langle AU, U \rangle = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} u_i u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = a \left( \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i \right) = a(u_h, u_h) = \int_0^1 |u'_h|^2 dx,$$

où  $u_h(x)$  est une fonction de  $V_h$  définie par :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(x)$$

Comme les  $(u_1, \dots, u_{N_h})$  sont tous non nuls, on vérifie aisément que  $u_h$  est non nulle, ce qui implique que  $\int_0^1 |u'_h|^2 > 0$

Nous allons maintenant comparer l'erreur commise en remplaçant l'espace  $V$  par son sous espace  $V_h$ . Plus précisément, nous allons majorer la différence  $\|u - u_h\|$  où  $u$  est la solution dans  $V$  de (3.1) et  $u_h$  elle dans  $V_h$  de (3.2) Le lemme suivant du Jean Cea, montre que la distance entre la solution exacte  $u$  et la solution approchée  $u_h$  est majorée uniformément par rapport au sous-espace  $V_h$  par la distance entre  $u$  et  $V_h$ . ■

*Lemme 3.3.1* :(lemme de Cea) [1] [2] [3]

Soit  $u$  une solution du problème (3.1) et un une solution du problème (3.2). Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  tel que :

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{u_h \in V_h} \|u - u_h\|_V$$

*Preuve.* Soit  $u_h \in V_h$  quelconque, et  $w_h = v_h - u_h \in V_h \subset V$  Comme  $w_h$  est dans  $V$  et  $v_h$  c'est une fonction test valide dans (3.1) et (3.2) On a donc :

$$a(u_h, w_h) = L(w_h),$$

Et :

$$a(u, w_h) = L(w_h),$$

D'où :

$$a(u - u_h, w_h) = 0,$$

Par coercitive et continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h), \\ &= a(u - u_h, u - v_h + w_h), \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, w_h), \\ &\leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\| \\ \|u - u_h\| &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\| \end{aligned}$$

Donc :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|$$

et ceci pour tout  $v_h$ , d'ou le résultat, avec  $C = \frac{M}{\alpha}$ . ■

### 3.4 La méthode des éléments finis : [3] [4]

---

#### 3.4.1 La méthode des éléments finis en dimension un :

Nous choisissons le domaine  $\Omega = [0, 2]$ . En dimension 1 un maillage est simplement constitué d'une collection de points  $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$  tels que :

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq x_{N+1} = 2$$



Le maillage sera dit uniforme si les points  $x_j$  sont équidistants, c'est-à-dire que :

$$x_j = jh, \text{ avec } h = \frac{2}{N+1}, 0 \leq j \leq N+1.$$

Les points  $x_j$  sont aussi appelés les sommets (ou noeuds) du maillage.

Nous considérons le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans } [0, 2] \\ u(0) = \alpha \\ u(2) = \beta \end{cases} \quad (3.4)$$

dont nous savons qu'il admet une solution unique dans  $H_0^1(\Omega)$  si  $f \in L^2(\Omega)$ . Dans ce qui suit on notera  $\mathbb{P}_k$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à  $k$  :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ \left( p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j, a_j \in \mathbb{R} \right) \right\}$$

Remarque 3.4.1 : Généralement, le sous-espace  $V_h$  de  $V$  est noté :

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\Omega) \text{ tel que } v_{h|K} \in \mathbb{P}_k(K)\}$$

Sa dimension est égale à :

$$\dim V_h^k = (k+1)(N+1) - N$$

### 3.4.2 Élément fini $\mathbb{P}_1$ :

Pour  $k = 1$  et en notant  $V_h^k = V_h$  on a :

$$V_h = \left\{ v \in C^0([0, 2]), v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq j \leq n, v(0) = v(2) = 0 \right\} \quad (3.5)$$

La méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  est alors simplement une méthode d'approximation variationnelle interne appliquée à l'espaces  $V_h$  définis par (3.5).

On peut représenter les fonctions de  $V_h$ , affines par morceaux, à l'aide d'une fonctions de base très simple. Introduisons la "fonction chapeau"  $\varphi_j$  définie par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Lemme 3.4.1 [1] [4] : L'espace  $V_h$ , défini par (3.5), est un sous-espace de  $H^1([0, 2])$  de dimension finie , et toute fonction  $v_h \in V_h$  est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets  $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$  :*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) (\varphi_j)(x) \quad \forall x \in [0, 2].$$

*Preuve. [1] [4] : Les fonctions continues et de classe  $C^1$  par morceaux appartiennent  $H^1(\Omega)$ . Donc  $V_h$  est bien un sous-espaces de  $H^1([0, 2])$ . Le reste de la preuve est immédiat en remarquant que  $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ , où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon.*

■

*Corollaire 3.4.1 Les  $\{\varphi_j\}_{0 \leq j \leq N+1}$  constituent une base de  $V_h$ .*

*Preuve. : Puisque la famille  $\{\varphi_j\}_{0 \leq i \leq N+1}$  est de dimension finie, et sa dimension est égale à la dimension de  $V_h$ , on montre seulement que cette famille est libre. Soient donc  $\alpha_j$  des scalaires dans  $\mathbb{R}$ , avec  $j \in \{0, \dots, N+1\}$*

*On suppose que :*

$$\sum_{j=0}^{N+1} \alpha_j \varphi_j(x_i) = 0 \text{ avec } i \in \{0, \dots, N+1\}.$$

*Pour  $i = 0$ , on a :*

$$\alpha_0 \varphi_0(x_0) + \alpha_1 \varphi_1(x_0) + \dots + \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 \varphi_0(x_0) = 0.$$

*d'où :*

$$\alpha_0 = 0$$

*Pour  $i = 1$ , on a :*

$$\alpha_0 \varphi_0(x_1) + \alpha_1 \varphi_1(x_1) + \dots + \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \varphi_1(x_1) = 0,$$

*d'où :*

$$\alpha_1 = 0$$

Pour  $i = N + 1$ , on a :

$$\alpha_0 \varphi_0(x_{N+1}) + \alpha_1 \varphi_1(x_{N+1}) + \dots + \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_{N+1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_{N+1}) = 0$$

d'où :

$$\alpha_{N+1} = 0$$

Donc :  $\forall j \in \{0, \dots, N + 1\}, \alpha_j = 0$  Ainsi,  $\{\varphi_j\}_{0 \leq i \leq N+1}$  est une famille libre. ■

### 3.4.3 Résolution du problème du dirichlet : [9]

Décrivons la résolution pratique du problème de Dirichlet (3.4) par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  – La formulation variationnelle (3.2) de l'approximation interne devient ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_0^2 u'_h(x) v'_h(x) dx + \int_0^2 u \cdot v_h dx = \int_0^2 f \cdot v_h \end{array} \right. \quad (3.6)$$

On décompose  $u_h$  sur la base des  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$  et on prend  $v_h = \varphi_i$ , ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^N u_h(x_j) \left( \int_0^2 \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) dx + \int_0^2 \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \right) = \int_0^2 f(x) \varphi_i(x) dx$$

En notant  $\mathbf{U} = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq N}$ ,  $\mathbf{b} = \left( \int_0^2 f(x) \varphi_i(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ , et en introduisant la matrice de rigidité :

$$\mathbf{A} = \left( \int_0^2 \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) dx \right)$$

la formulation variationnelle dans  $V_h$  revient à résoudre dans  $\mathbb{R}^n$  le système linéaire suivant :

$$\mathbf{AU} = \mathbf{b}$$

Comme les fonctions de base  $\varphi_j$  ont un "petit" support, l'intersection des supports de  $\varphi_j$  et  $\varphi_i$  est souvent

vide et la plupart des coefficients de  $A$  sont nuls. Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$A_{i,i-1} = -\frac{1}{h}$$

$$A_{i,i} = \frac{2}{h}$$

$$A_{i,i+1} = -\frac{1}{h}$$

D'où :

$$A_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{h} & \text{si } j = i - 1 \text{ ou } j = i + 1, \\ \frac{2}{h} & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \notin \{i - 1, i, i + 1\} \end{cases} \quad (3.7)$$

Finalemnt, la matrice de rigidité est une matrice tridiagonale :

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La matrice de masse :

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Pour obtenir le second membre  $b$ , il faut calculer l'intégrale :

$$b = \left( \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx \right) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N$$

L'évaluation exacte du second membre  $b$  peut être difficile ou impossible si la fonction  $f$  est compliquée. En pratique on a recours à des formules de quadrature (ou formules d'intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales définissant  $b$ . on trouve :

$$b = h \times f(x_i)$$

Ainsi, le système à résoudre s'écrit :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice  $A$  est tridiagonale, symétrique et définie positive, alors le système ci-dessus admet une unique solution.

---

**CHAPITRE 4**

---

**APPLICATIONS**

---

Le but de ce chapitre est la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour les deux problèmes modèles suivants :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ sur } ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ sur } ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Nous allons ensuite pour les deux problèmes, comparer la solution obtenue par approximation, et la solution exacte. Nous utilisons le logiciel de calcul scientifique Matlab pour illustrer la méthode des éléments finis.

#### 4.1 Algorithme

---

Etape 1 : Discrétisation du domaine selon le degré de liberté fourni par l'utilisateur (Maillage).

Etape 2 : Calcul de la matrice de masse et de rigidité.

Etape 3 : Calcul du second membre.

Etape 4 : Prise en compte des conditions aux limites.

Etape 5 : Résolution du système linéaire.

Etape 6 : Représentation graphique de la solution approchée.

#### 4.2 Code Matlab

---

————— On cherche à résoudre ::  $-u''(x) + u(x) = f(x)$  sur  $[0, 1]$  —————  
 ————— La fonction  $u$  est donnée, deux fois dérivable et  $f$  continue —————  
 ————— On fait d'abord le grand ménage —————

`cle`

`close all clear all`

`dbstop if error;`

————— On demande à l'utilisateur de saisir le nombre de nœuds désirés —————

```
nddl=input('donner le nombre de degre de liberte nddl : ');
```

————— On saisit notre second membre  $f(x) = -u''(x) + u(x)$  —————

```
f=@('NOTRE SECON(D MEMBRE f)');
```

————— On saisit notre solution exacte —————

```
sln = inline('ON SAISIT LE u');
```

————— On discretise notre intervalle  $[0,1]$  —————

```
xx=linspace(0,1,nddl+1)
```

————— On définit le pas de chaque maille —————

```
for i=1:nddl-1
```

```
h(i)=xx(i+1)-xx(i); end
```

```
h;
```

————— On définit les conditions aux limites —————

```
x0=0;
```

```
xL=1;
```

```
ua=0;
```

```
ub=0;
```

————— On définit notre matrice de rigidite —————

```
A=zeros(nddl-2);
```

```
for i=1:nddl-2
```

```
for j=1:nddl-2
```

```
if(abs(i-j)>1)
```

```
A(i,j)=0;
```

```
elseif(abs(i-j)==0)
```



```
A(i,j)=(1./h(i))+(1./h(i+1))+(1./3)*(h(i)+h(i+1));
```

```
else
```

```
A(i,j)=(-1./h(i))+h(i)/6;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

————— On calcule le second membre du problème approché —————

```
Bb = [];
```

```
for i = 1 :ndd-2
```

```
Bb = [Bb 0.5 * ( h(i) + h(i + 1)) * f(xx(i + 1))];
```

```
B = [Bb];
```

```
end
```

————— On calcule la solution approchée —————

```
u = [ua; A\B'; ub]
```

————— On dessine la solution exacte avec un  
graphie de couleur noire et d'épaisseur 3 —————

```
figure (140);
```

```
plot(0 :0.01 :1,sn(0 :0.01 :1),'-k','LineWidth',3);
```

```
hold on;
```

————— On dessine la solution approchée en marron —————

```
plot(xx,u,'o-','Color',8.7059e-0014.9020e-0010], 'LineWidth',2);
```

————— On définit la légende et on nomme les axes —————

```
Texte...legend('\ bf sol exacte','\ bf sol approchée pour n = 40' ');
```

```
xlabel('\ fontsize14 bf x','Color',[ 8.7059e-001 4.9020e-001 0]);
```

```
ylabel('\ fontsize14 \ bf u(x)', 'Color',[8.7059e-0014.9020e-0010]);
```

```
grid;
```

————— On définit les couleurs de l'interface graphique —————

```
set(gcf,'Color',[ 9.5294e-001 8.7059e-001 7.3333e-001]);
```

```
whitebg([ 9.5294e-001 8.7059e-001 7.3333e - 001]);
```

### 4.3 Applications

---

Dans ce paragraphe, nous traitons les deux problèmes

$-u''(x) + u(x) = f(x)$  et  $-u'''(x) = f(x)$  sur  $[0, 1]$  pour chacun des exemples suivants :

Exemple 4.3.1

$$\begin{cases} u(x) = x(x - 1) \text{ sur } ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Nous traçons la solution exacte et approchée de l'exemple, et regardons la convergence pour chacune à partir du graphe.

#### 4.3.1 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis en dimension

**1** pour  $u(x) = x(x - 1)$

pour :  $n = 3$

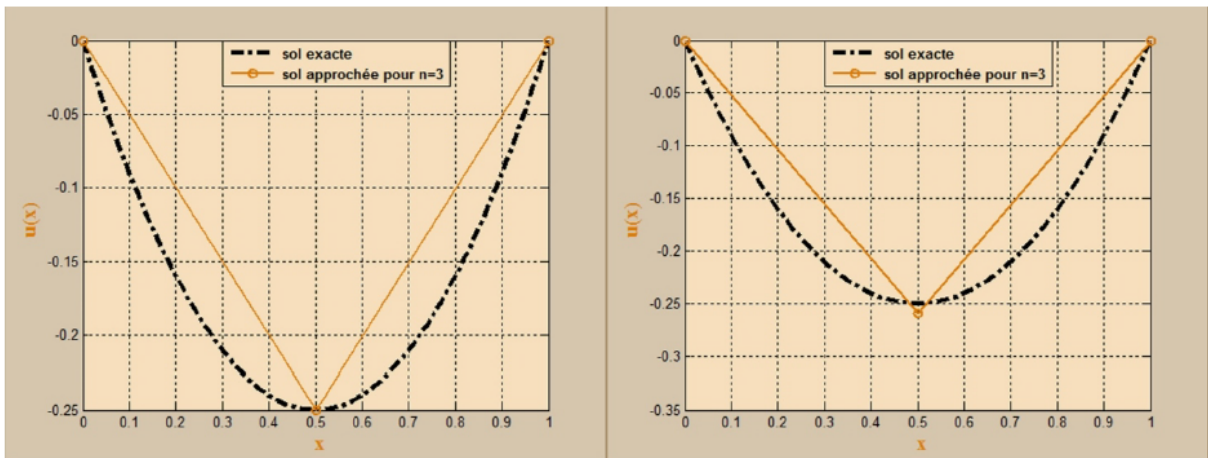


FIGURE 4.1 –

Figure 4.1 - Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de  $-u''(x) = f(x)$  (à gauche) et  $-u''(x) + u(x) = f(x)$  (à droite) pour  $n = 3$  et  $u(x) = x(x - 1)$  pour :  $n = 10$

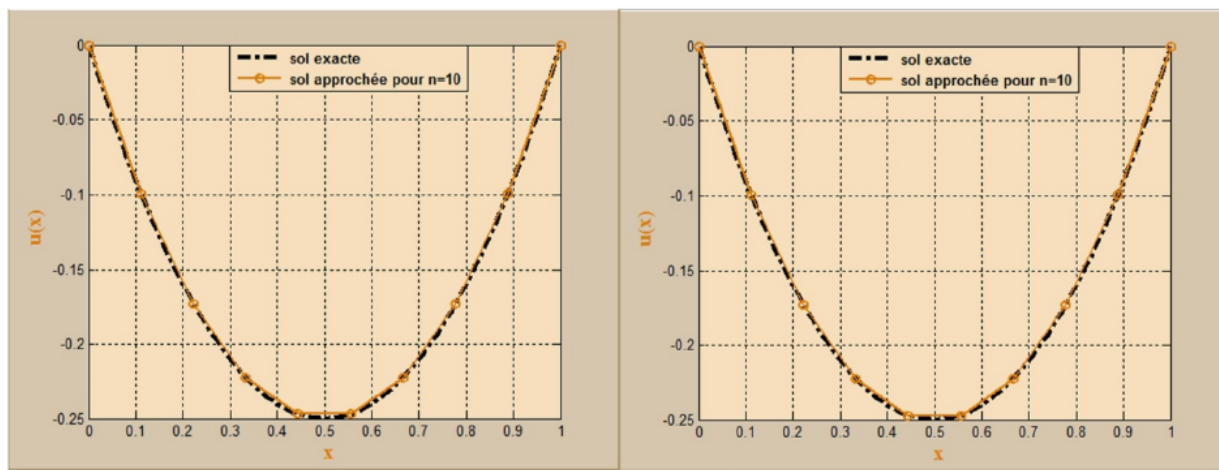


FIGURE 4.2 –

Figure 4.2 - Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de  $-u''(x) = f(x)$  (à gauche) et  $-u''(x) + u(x) = f(x)$  (à droite) pour  $n = 10$  et  $u(x) = x(x - 1)$  pour :  $n = 100$

Figure 4.3 - Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments

FIGURE 4.3 –

finis de  $-u''(x) = f(x)$  (à gauche) et  $-u''(x) + u(x) = f(x)$  (à droite) pour  $n = 100$  et  $u(x) = x(x - 1)$

On sait que l'erreur vaut :

$$\|Err\|_{C^2} = \left( \int_{x_0}^{x_{n+1}} |u(x) - u_h|^2 dx \right)^{1/2}$$

avec

$$u_h = \sum_{i=0}^{n+1} \varphi_i(x) u_i$$

Done :

$$\|Err\|_{C^2} = \left( \int_{z_0}^{z_{n+1}} \left| u(x) - \sum_0^n \varphi_1(x) u_4 \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

Et on a :

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{z-1x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x \in [I_{i-1}, I_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{si } x \in [I_i, I_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Done :

$$\int_{x_0}^{x_{n+1}} \sum_{1=0}^n \varphi_1(x) u_1 dx = \sum_{1=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_1(x) u_1 + \varphi_{1+1}(x) u_{1+1} dx.$$

On se sert de cette formule pour calculer l'erreur pour ces exemples et on a :

FIGURE 4.4 –

Figure 4.4 - Graphe représentant respectivement l'erreur pour  $-u''(x) = f(x)$  et  $-u''(x) + u(x) = f(x)$  avec  $u(x) = x(x - 1)$

---

---

## CONCLUSION

---

*En conclusion, ce mémoire a contribué à approfondir notre compréhension des problèmes de Dirichlet non homogènes et de la méthode des éléments finis. Il a permis d'explorer les aspects théoriques et numériques de ces problèmes, en mettant en évidence les conditions de compatibilité, l'existence et l'unicité des solutions, ainsi que l'application pratique de la méthode des éléments finis. Ces connaissances sont précieuses pour la résolution efficace et précise des EDP et ouvrent la voie à de nouvelles avancées dans le domaine de la modélisation mathématique et de l'ingénierie.*

---

---

## **BIBLIOGRAPHIE**

---

## Bibliographie

---

- [1] Aide-mémoire *Éléments finis* Alexandre Ern , A.ERN, dunod, paris , 2005.
- [2] A.Ern : *Éléments finis* , Dunod,2005
- [3] Alfio Quarteroni : *Introduction a la méthode des éléments finis* , école polytechnique fédération de lausanne,2013-2014
- [4] A.Fortin :*André Garon les éléments finis : de la théorie a la pratique*,école polytechnique de Montréal ,1997-2006
- [5] H.BREZIS.*Function analysis,Sobolev spaces and parcial differential equations* .Springer Science and business média , 2010
- [6] P.jean Hormière , *Introduction aux distributions*, Ann. Math. Pura Appl. 2013
- [7] A.Lesfari, *Introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP)*,2014
- [8] M.Thérèse L.Sonrier , *Distributions et Espace De Sobolev Application* , ellipses,édition marketing S,A,1998
- [9] *la méthode des éléments finis et ses applications aus EDP* , F.BOUDJENANE -tiaret ,2020
- [10] M,CHOULLI .*analyse fonctionnel : équations aux dérivées partielles,cours et exercices corrigés* .2017.
- [11] H. Morel, *Introduction de poids dans l'étude des problèmes aux limites*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 12 (1962), 299-414.
- [12] *Développement d'une méthode d'éléments finis multi-échelles pour les écoulements incompressibles dans un milieu hétérogène* , Q,Feng; Université paris , 2019