

Estimation Spectrale d'un Signal Sinusoidal Multidimensionnel par le Réseau de Hopfield

A. Benchabane^{#1}, A. Bennia^{*2}, F.Charif^{#3}, N.Djedi⁺⁴

[#] *Département du Génie électrique, Université de Ouargla, Algérie*

¹abderrazak_benchabane@yahoo.com

³charifella@yahoo.fr

^{*} *Département d'Electronique*

Université Mentouri de Constantine, Constantine, Algérie

²abdelhak_bennia@yahoo.com

⁺ *Département d'informatique, Université de Biskra, Algérie*

Résumé— Dans cet article on a proposé un estimateur neuronal haute résolution basé sur le réseau de Hopfield pour l'estimation des amplitudes des raies spectrales d'un signal multidimensionnel (1D, 2D) composé d'un mélange d'harmoniques noyées dans un bruit blanc dont on connaît ses statistiques à priori. Le réseau de Hopfield qui prouve des capacités dans les problèmes d'optimisation et une simplicité d'implémentation hardware, reste très motivant pour les applications temps réel suite à son parallélisme. Pour juger ses performances, l'estimateur proposé a été comparé avec la méthode des moindres carrés et celle basée sur l'analyse de Fourier. Les résultats de simulation montrent que le réseau de Hopfield offre une performance remarquable lorsque le nombre des échantillons est inférieur au nombre d'harmoniques.

Mots clé— sinusoidal 1D/2D, estimation spectrale, moindres carrés, réseau de Hopfield.

I. INTRODUCTION

Cet article présente l'application des réseaux de neurones à l'estimation simultanée des paramètres d'un signal multidimensionnel composé d'un mélange d'harmoniques noyé dans un bruit blanc. Il représente une tentative de concevoir un réseau neuronal haute résolution capable d'estimer les composantes spectrales dont la résolution est inférieure à la limite de Fourier en fournissant des modèles mathématiques précis des signaux mesurés généralement composés des dizaines de raies dans la pratique. Cette méthode est applicable pour les signaux pratiques dont la longueur est réduite et le rapport signal sur bruit est bas.

Les méthodes d'estimation spectrale basées sur l'analyse de Fourier permettent d'estimer les composantes les plus énergétiques dans un signal. Pour le périodogramme, la limite de la résolution fréquentielle le rend incapable d'estimer des composantes étroitement espacées, de même un nombre réduit d'échantillons le rend un estimateur biaisé [10,15].

Les méthodes des sous espaces présentent une résolution plus haute que les méthodes basées sur l'analyse de Fourier, cependant, elles peuvent omettre des pics dominant dans le signal [10].

Dans cet article, l'estimation spectrale est vue dans un autre contexte comme l'estimation des amplitudes des raies spectrales constituant le signal à identifier en se basant sur la méthode des moindres carrés [10,15]. Cette dernière a été largement utilisée suite à sa simplicité d'implémentation et le temps de calcul généralement petit dans le cas d'un signal composé de quelques harmoniques et de longueur réduit. L'optimalité des résultats est obtenus dans le cas du bruit blanc d'observations [14,10].

plusieurs approches ont été développés et sont tous basées sur la méthode des moindres carrés pondérés et du banc de filtres accordés [7,8,10,14]. Bien que ces méthodes donnent des performances plus meilleures que la méthode des moindres carrés, elles présentent toujours un majeur inconvénient lorsque la limite de Fourier n'est pas vérifiée (deux raies très étroites) ou le nombre de sinusoides est important. Lorsque le nombre de sinusoides dépasse le nombre des échantillons observés, le problème de l'inversion de matrice fait défaut.

Vu les performances justifiées du réseau de Hopfield dans les problèmes d'optimisation [1,16], il a été largement utilisé dans le domaine de l'estimation spectrale. On trouve dans la littérature la modélisation AR neuronal [13], l'estimation de la position des raies spectrales [3, 11,12]. Toutes ces méthodes s'intéressent à l'estimation des fréquences sans aucune connaissance à priori sur le vecteur d'observations. Dans cet article on essaye d'appliquer le réseau de Hopfield pour l'estimation des amplitudes des sinusoides tout en connaissant les fréquences et la nature du bruit additif, une tâche qu'on la trouve souvent dans plusieurs applications dans la plus marquée est celle des radars à synthèse d'ouverture (SAR) [2,9]. L'article est organisé comme suit. Dans la section II on présente la formulation du problème, la section III présente l'estimateur neuronal de Hopfield, puis dans la section IV, on présente une extension du réseau pour les signaux 2D. Quelques applications numériques sont présentées dans la section V pour montrer l'efficacité du réseau de Hopfield et on achève cet article par quelques conclusions et observations.

II. DEFINITION DU PROBLEME

Le problème de l'estimation spectrale s'élève à estimer la façon dont l'énergie d'un signal est répartie dans la bande des fréquences à partir d'un enregistrement fini d'une séquence de données stationnaires. Pour formuler ce problème, il est nécessaire d'abord de définir ce que voulons dire par distribution de puissance dans la fréquence. Pour un processus aléatoire stationnaire $x(n)$, nous pouvons définir la densité spectrale de puissance [15] :

$$S(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[x(n)x^H(n-k)]e^{-jwk} \quad (1)$$

où $(\cdot)^H$ dénote le complexe conjugué. D'autre part, si $x(n)$ est un signal composé de sinusoides superposées avec des amplitudes finies, noyées dans un bruit stationnaire $v(n)$ de densité spectrale de puissance finie pour toutes les fréquences.

$$x(n) = \sum_{k=1}^K a_k e^{jw_k n} + v(n) \quad (2)$$

Il est clair que le spectre d'amplitude est de la forme [15] :

$$S_a(w) = \begin{cases} a_k & w = w_k \\ 0 & w \neq w_k \end{cases} \quad (3)$$

On note ici même si dans la pratique les signaux ne sont pas nécessairement une somme de sinusoides, l'estimation des amplitudes des raies reste valable du fait que tout signal peut être approximé par une série de sinusoides.

Dans la suite de cet article, On considère N observations d'un signal 1D composé de K sinusoides complexes [14]:

$$x(n) = \sum_{k=1}^K a_k e^{jw_k n} + v(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

où a_k, w_k , l'amplitude et la fréquence de la $k^{\text{ième}}$ sinusoides à estimer; $v(n)$ est le bruit d'observation complexe, supposé stationnaire de moyenne nulle et de variance σ^2 .

La méthode des moindres carrés est la plus simple méthode du fait qu'elle représente une approche directe. Suivant le nombre de sinusoides à estimer à chaque fois, deux cas peuvent être considéré; l'estimation simultanée de toutes les sinusoides contenues dans le signal, et l'estimation d'une seule sinusoides à la fois.

En réécrivant l'équation (1) sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{jw_1} & \dots & e^{jw_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j(N-1)w_1} & \dots & e^{j(N-1)w_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ \vdots \\ v(N-1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Si on pose :

$$x = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]^T; \quad a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_K]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{jw_1} & \dots & e^{jw_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j(N-1)w_1} & \dots & e^{j(N-1)w_k} \end{bmatrix}; \quad v = [v(0) \ v(1) \ \dots \ v(N-1)]^T$$

On obtient l'expression vectorielle suivante :

$$x = Aa + v \quad (6)$$

qui est équation d'une régression linéaire dont la solution obtenue par la méthode des moindres carrés [14] :

$$\hat{a} = (A^H A)^{-1} A^H x \quad (7)$$

Cet estimateur est non biaisé ($E\{\hat{a}\} = a$), l'erreur quadratique moyenne (MSE) de \hat{a} est donnée par :

$$\begin{aligned} MSE\{\hat{a}\} &= cov\{\hat{a}\} = E\{(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)^H\} \\ &= (A^H A)^{-1} A^H W A (A^H A)^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

où : $W = E\{v v^H\} = \sigma^2 I_K$, I_K est la matrice identité $K \times K$.

Si maintenant on s'intéresse à estimer une seule amplitude à la fois, ceci est possible si on suppose que le signal est composé d'une seule sinusoides et les $K-1$ sinusoides restantes sont incluses dans le terme de bruit. Dans certaines applications du traitement du signal, les fréquences $w_k, k=1 \dots K$ peuvent être inconnues, une approche typique pour estimer les $a_k, w_k, k=1 \dots K$ consiste à estimer une seule amplitude à la fois pour toutes les fréquences. La position du pic et son amplitude déterminent la fréquence et l'amplitude du sinusoides [14].

A partir de l'équation (4), pour estimer la première amplitude, on pose :

$$a = [1 \ e^{jw_1} \ e^{jw_1} \ \dots \ e^{j(N-1)w_1}]^T$$

On trouve:

$$\hat{a}_1 = (a^H a)^{-1} a^H x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{jw_1 n} \quad (9)$$

Cette expression peut être généralisée pour n'importe quelle amplitude [14] :

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{jw_k n}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (10)$$

qui n'est autre que l'expression de la transformée de Fourier discrète DFT de la suite $x(n), n = 0 \dots N-1$. Notons que les deux estimateurs en (7) et (10) sont équivalents si la limite de

Fourier est vérifiée $|w_k - w_l| \gg \frac{2\pi}{N}, \forall k, l; k \neq l$

III. ESTIMATEUR NURONAL

Le problème de l'estimation est formulé par la minimisation de la fonction d'erreur extraite à partir de l'équation (6) est définie par

$$j(\hat{a}) = \|x - A\hat{a}\|^2 \quad (11)$$

qui est équivalent à :

$$j(\hat{a}) = \frac{1}{2} a^T A^T A a - x^T A a \quad (12)$$

L'idée d'introduire le réseau de Hopfield dans le problème d'optimisation revient à trouver un lien entre la fonction de coût à minimiser et une fonction d'énergie du réseau de Hopfield donnée par [5,6]

$$E_{hop} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K w_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^K b_i v_i \quad (13)$$

ou sous la forme matricielle

$$E_{Hop} = -\frac{1}{2} V^T W V - B^T V \quad (14)$$

Il a été démontré dans la littérature [5,6,13] que le réseau de Hopfield achève un minimum local de la fonction de Liapouov, de ce fait, pour tout problème mis sous la forme d'énergie de Hopfield, on peut obtenir une bonne solution du problème posé.

Par la décomposition du vecteur d'observations en partie réelle et imaginaire:

$$\begin{aligned} x &= x_{\text{Re}}(n) + j x_{\text{Im}}(n) \\ &= \sum_{k=1}^K (a_k (\cos(nw_k) + j \sin(nw_k))) + v^{\text{Re}}(n) + j v^{\text{Im}}(n) \end{aligned} \quad (15)$$

Si on forme le nouveau vecteur d'observations :

$$\tilde{x}(n) = \begin{bmatrix} x^{\text{Re}}(n) \\ x^{\text{Im}}(n) \end{bmatrix}, \quad \tilde{v}(n) = \begin{bmatrix} v^{\text{Re}}(n) \\ v^{\text{Im}}(n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

L'expression (15) peut facilement mise sous a forme:

$$\begin{bmatrix} x^{\text{Re}}(n) \\ x^{\text{Im}}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(A) \\ \text{Im}(A) \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} v^{\text{Re}}(n) \\ v^{\text{Im}}(n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Et évidemment sous la forme :

$$\tilde{x} = \tilde{A} a + \tilde{v} \quad (18)$$

et la fonction d'erreur (12) devient :

$$j(\hat{a}) = \frac{1}{2} a^T \tilde{A}^T \tilde{A} a - \tilde{x}^T \tilde{A} a \quad (19)$$

Pour notre problème d'optimisation, en comparant l'équation (14) et l'équation (19) on peut obtenir la matrice des poids des

connections W et le vecteur des biais I du réseau de Hopfield. Le vecteur des états du réseau de Hopfield V correspond aux paramètres à estimer \hat{a} . donc l'état stable du réseau obtenu après la convergence correspond bien aux amplitudes recherchées.

$$W = -\tilde{A}^T \tilde{A}, \quad B = \tilde{A}^T \tilde{x}, \quad V = a \quad (20)$$

L'équation qui régit la dynamique du réseau de Hopfield est donnée par [5.6]

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^K w_{ij} v_j + b_i \quad (21)$$

$$v_i(t) = f(u_i(t)), \quad (=1, 2, \dots, K)$$

où K est le nombre de neurones, $f(\cdot)$ est une fonction non linéaire qui représente la relation entre l'entrée $u_i(t)$ et la sortie $v_i(t)$ du neurones i . R_i , C_i et b_i représentent la résistance, la capacité et le biais de la $i^{\text{ème}}$ neurone respectivement.

En se basant sur l'équation de la dynamique du réseau de Hopfield (21), on peut dessiner le circuit électrique équivalent au modèle du réseau de Hopfield qui peut être implémenté un hardware analogique.

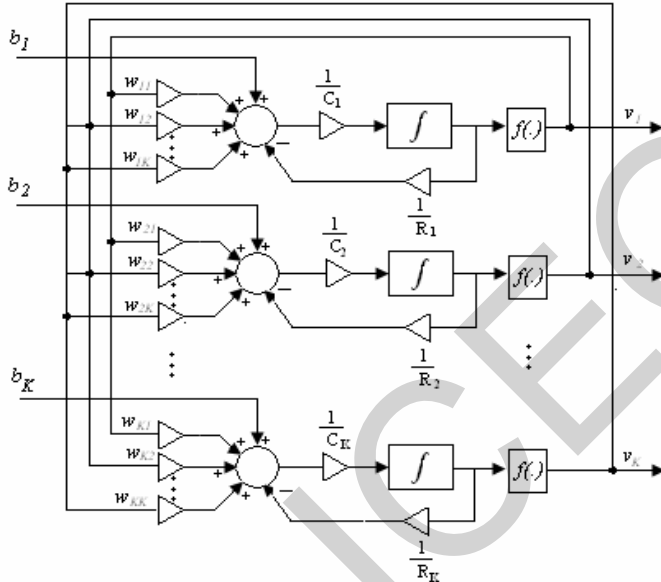


Fig.1. Architecture du réseau de Hopfield

Le temps de convergence dépend fortement des éléments R_i et C_i qui déterminent le temps de réponse du neurone i .

On note ici, pour la simulation numérique, l'expression (21) peut être approximée par :

$$\frac{u_i(k+1) - u_i(k)}{h} = \frac{1}{C_i} \left[\sum_{j=1}^K w_{ij} v_j + b_i - \frac{u_i(k)}{R_i} \right] \quad (22)$$

où h est le pas d'intégration.

Une condition nécessaire pour la convergence du réseau de Hopfield et que la fonction d'activation doit être monotone, croissante et bornée, de ce fait l'énergie du réseau ne peut que diminuer ou rester constante, la fonction sigmoïde est convenable. Or pour notre cas, on a utilisé une fonction sigmoïde modifiée de la forme :

$$v_i = \frac{2\alpha}{1 + e^{-\beta u_i}} - \alpha \quad (23)$$

La constante α est choisit arbitraire à condition que toutes les valeurs des amplitudes soient comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$

et le paramètre β représente la pente de la fonction d'activation. Le réseau est initialisé par un vecteur d'état arbitraire B .

IV. EXTENSION AUX SIGNAUX 2D

La méthode proposée a été étendue pour l'estimation des amplitudes des signaux 2D qui a un grand intérêt dans plusieurs applications dont la plus marquée est celle des radars à synthèse d'ouverture (SAR) [4].

On considère un signal 2D composé de K sinusoïdes noyées dans un bruit 2D additif [10] :

$$x(n, \bar{n}) = \sum_{k=1}^K a_k e^{j(w_k n + \bar{w}_k \bar{n})} + v(n, \bar{n}) \quad (24)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1; \bar{n} = 0, 1, \dots, \bar{N}-1$$

a_k est l'amplitude réel ou complexe de la $k^{\text{ème}}$ 2D sinusoïde à la paire fréquentielle (f_k, \bar{f}_k) et $v(n, \bar{n})$ est un 2D bruit complexe gaussien, centré et de variance σ^2 . Le problème à poser est similaire à celui des signaux 1D vu dans la section II et consiste à estimer les amplitudes des sinusoïdes dont le couple des fréquences (f_k, \bar{f}_k) est supposé connu.

L'équation (23) peut être mise sous la forme [10]:

$$X = A \Lambda \bar{A}^T + V \quad (25)$$

Avec :

$$X = \begin{bmatrix} x(0,0) & \dots & x(0, \bar{N}-1) \\ x(1,0) & \dots & x(1, \bar{N}-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x(N-1,0) & \dots & x(N-1, \bar{N}-1) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$V = \begin{bmatrix} v(0,0) & \dots & v(0, \bar{N}-1) \\ v(1,0) & \dots & v(1, \bar{N}-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v(N-1,0) & \dots & v(N-1, \bar{N}-1) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\Lambda = \text{diag}\{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_K\} \quad (28)$$

$$A = [\alpha(w_1) \ \dots \ \alpha(w_K)] \ , \ \bar{A} = [\bar{\alpha}(\bar{w}_1) \ \dots \ \bar{\alpha}(\bar{w}_K)]$$

Le $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A et \bar{A} sont donnés par :

$$\alpha(w_k) = [1 \ \dots \ e^{j(N-1)w_k}]^T \quad (29)$$

$$\bar{\alpha}(\bar{w}_k) = [1 \ \dots \ e^{j(\bar{N}-1)\bar{w}_k}]^T \quad (30)$$

Soit le vecteur x et le vecteur v issus de l'empilement des colonnes de la matrice X et V respectivement, l'équation (24) devient [10] :

$$x = (\bar{A} \diamond A) a + v = \Psi a + v \quad (31)$$

Avec : $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_K]^T$

$$\Psi = [\bar{\alpha}(\bar{w}_1) \otimes \alpha(w_1) \ \dots \ \bar{\alpha}(\bar{w}_K) \otimes \alpha(w_K)] \quad (32)$$

\diamond désigne le produit matriciel de Khatri-Rao et \otimes dénote le produit de Kronecker [10].

La résolution de l'équation (30) par la méthode des moindres carrés donne :

$$\hat{a} = (\Psi^H \Psi)^{-1} \Psi^H x \quad (33)$$

et par la transformée de Fourier discrète 2D [10]:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{NN} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\bar{n}=0}^{\bar{N}-1} x(n, \bar{n}) e^{-j(w_k n + \bar{w}_k \bar{n})}, k = 1, 2, \dots, K \quad (34)$$

L'architecture du réseau de Hopfield pour les signaux 2D est similaire à celui des signaux 1D et ses paramètres sont déduits de la même manière vue plus haut de l'équation (31).

V. RESULTATS DES SIMULATIONS

Dans toutes les simulations qu'on a faits, le signal qu'on va estimer ses paramètres est composé d'un signal utile $s(n)$ composé d'harmoniques pures noyées dans un bruit blanc $v(n)$, centré et de variance σ^2 .

$$x(n) = s(n) + v(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (25)$$

Concernant le rapport signal/bruit, on a utilisé le SNR local qui correspond au SNR de la kème sinusoïde. Son expression est donnée par [14]

$$SNR_k \approx 10 \log_{10} \frac{N |a_k|^2}{\phi(f_k)} \quad (27)$$

Où $\phi(f_k)$ est la densité spectrale théorique du bruit qui est égale à σ^2 dans le cas du bruit blanc.

On a généré 200 simulations de Monte-Carlo pour différents SNR local et l'erreur quadratique moyenne utilisée pour tester les performances des estimateurs est donné par :

$$MSE\{a_k\} = \frac{1}{200} \sum |\hat{a}_k(i) - a_k|^2$$

Où $\hat{a}_k(i)$ est l'amplitude estimée de a_k à la ième simulation.

A. Stabilité du reseau de Hopfield

Pour tester la stabilité et la performance du réseau, nous avons utilisé 16 échantillons d'un signal composé d'une seule sinusoïde d'amplitude 1 et de fréquence 0,1 noyé dans un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 0.01$ qui correspond à un SNR de 32dB. Nous avons utilisé comme paramètres du réseau de Hopfield $\alpha = 2$ et $\beta = 0.02$.

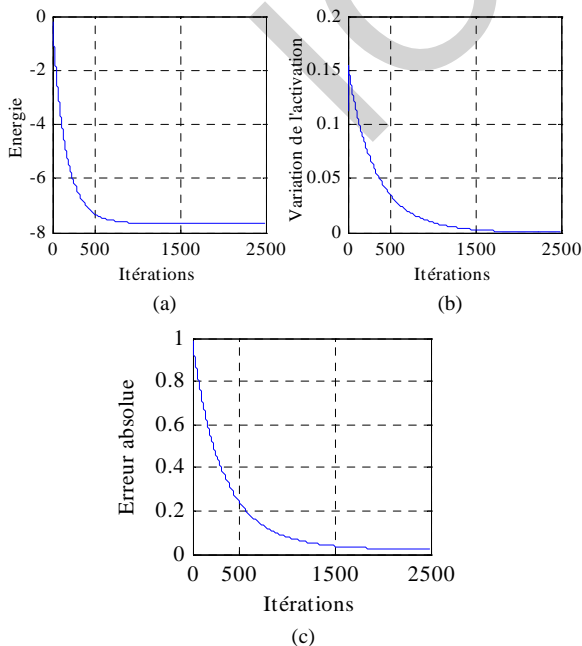


Fig. 2. La convergence du réseau de Hopfield: la descente de l'énergie (a), l'activation (b) et l'erreur absolue $a - \hat{a}$

La figure 2.a montre que la décroissance de l'énergie est garantie ($\Delta E < 0$). La dynamique du réseau est montrée sur la figure 2.b, on constate qu'après un nombre d'itérations, la variation de l'activation devient insignifiante et le réseau devient de plus en plus dynamique, donc on peut arrêter la mise à jour du réseau. Pour le cas présent, on a arrêté le réseau après 2500 itérations qui correspond à une différence d'activation $\Delta u = 2.39.10^{-4}$.

La figure 2.c montre la variation de l'erreur absolue entre l'amplitude exacte a et l'autre estimée \hat{a} . Elle confirme la descente de l'énergie est équivalente à une diminution de l'erreur entre le paramètre réel et celui estimé. La valeur de l'amplitude obtenue après 2500 itérations est de 0.9781 qui correspond à une erreur de 0.0219.

B. Performance du réseau pour un signal 1D

Pour juger les performances du réseau, deux cas ont été envisagés : $K < N$ et $K > N$. Dans tous les cas le nombre des échantillons est fixé à 16, le SNR varie entre 5 et 50dB, et les amplitudes des sinusoïdes dont les fréquences normalisées sont uniformément réparties entre 0 et 1 sont prises aléatoirement entre 0 et 1.

Cas 1 : $K = 10$

Dans ce premier cas, on a supposé que le signal est composé de 10 sinusoïdes qui rend le système surdimensionné et accepte une infinité de solutions. Les amplitudes utilisées sont : 0.7870, 0.5279, 0.5303, 0.8583, 1.0000, 0.3290, 0.7564, 0.1500, 0.2999, 0.6023 et les fréquences des sinusoïdes sont uniformément réparties entre 0 et 1Hz et espacées de 0.01 Hz (la limite de Fourier est vérifiée $\Delta f < 1/16 = 0.0625$).

La figure (3) montre l'erreur (MSE) pour la 5^{ème} sinusoïde en fonction du SNR, on remarque que l'estimateur neuronal présente un peu plus de performance que l'estimateur par les moindres carrés, mais les deux estimateurs sont consistants. Par contre l'estimateur par la transformée discrète présente une erreur suite à son biais.

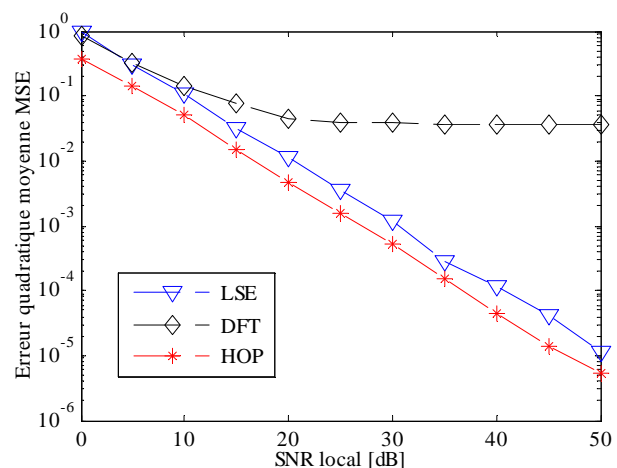


Fig. 3. MSE des estimateurs en fonction de SNR pour $a_5 = 1$

Dans la figure 4.a on trace les amplitudes obtenues dans le cas d'un SNR de 5dB pour la 5^{ème} sinusoïde. On constate que la méthode des moindres carrés et le réseau de Hopfield donnent des estimations voisines des vraies valeurs, par contre la méthode de la DFT donne des résultats non satisfaisants.

Pour un SNR de 30dB (fig. 4.b), la situation s'améliore pour les trois estimateurs et on constate toujours une légère erreur de la DFT suite à son biais.

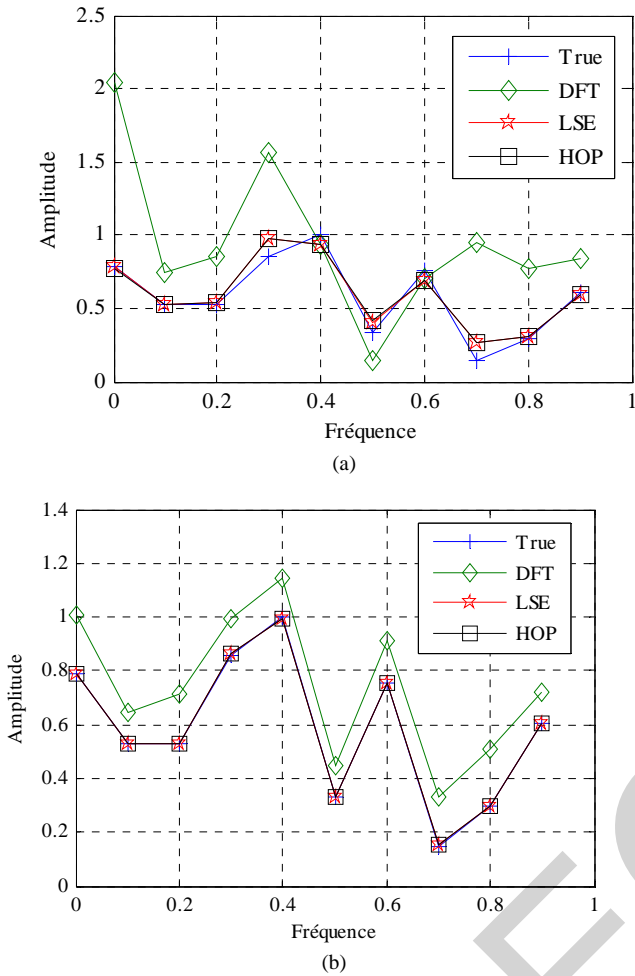


Fig. 4. 10 Amplitudes estimées pour (a) $\sigma^2 = 5$ et (b) $\sigma^2 = 0.016$
Cas 2 : $K = 24$

Maintenant on considère une situation plus difficile, un signal est composé de 16 échantillons et consiste en 24 sinusôides ce qui rend le système sous dimensionné et mathématiquement n'admet pas de solution. De plus la limite de Fourier n'est plus vérifiée ($\Delta f = 0.0417 < 0.0625$). Comme dans l'exemple précédent les amplitudes sont tous inférieures à 1 sauf la 10^{ème} elle est prise égale à 1 et présente ainsi un SNR local le plus élevé.

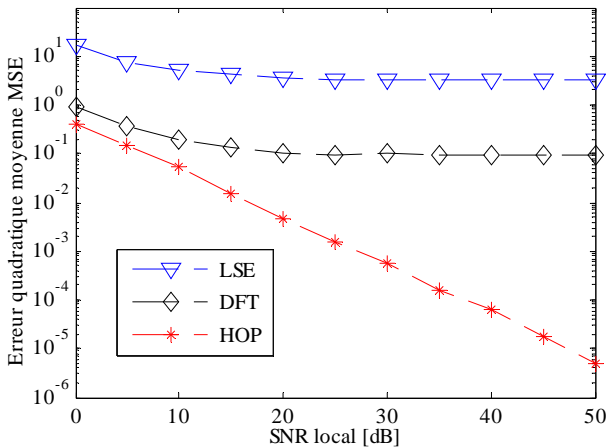


Fig. 5. MSE des estimateurs en fonction de SNR pour $a_{10} = 1$

La figure (5) prouve les meilleures performances du réseau de Hopfield par rapport aux autres estimateurs, la méthode de la DFT donne une erreur pas moins de 0.1 dans les meilleurs cas suite à la non éloignement des rais spectraux, la méthode des moindres carrés est plus pire suite au non conditionnement de la matrice. Le réseau de Hopfield reste très performant même pour les bas SNRs.

Dans les figures 6.a et 6.b on présente les amplitudes obtenues dans le cas d'un SNR local de 5dB et 30dB pour la 10^{ème} sinusoïde. On constate que le réseau de Hopfield donne des estimations voisines des vraies valeurs, par contre la méthode de la DFT donne des résultats non satisfaisants, alors la méthode des moindres carrés n'est plus considérée comme un estimateur.

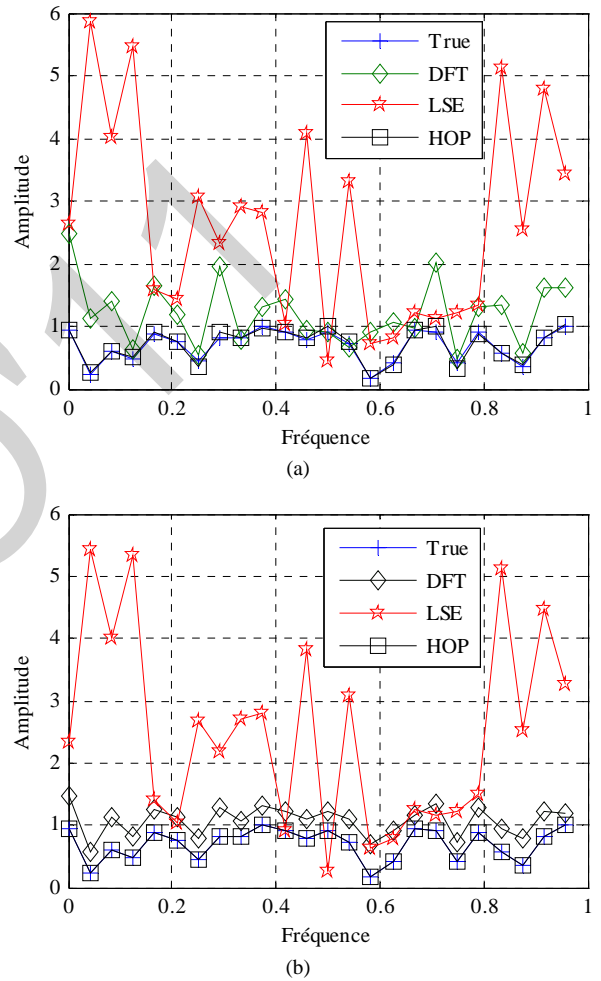


Fig. 6. 24 Amplitudes estimées pour (a) $\sigma^2 = 5$ et (b) $\sigma^2 = 0.016$

C. Performance du réseau pour un signal 2D

Dans le premier exemple, on considéré un signal 2D composé de 16x16 échantillons et consiste en somme de $K = 18$ sinusôides d'amplitude 1.0 et dont les fréquences f et \bar{f} sont uniformément réparties entre 0 et 1 sur la diagonale du plan formé par f et \bar{f} de façon que $\Delta f = \Delta \bar{f} = 1/18$

La figure (7) montre l'erreur quadratique moyenne des trois estimateurs. On remarque que les deux estimateurs, neuronal et LSE sont identiques et plus le SNR augmente, plus les deux estimateurs donnent des bons résultats et peuvent atteindre une erreur de 0.00000067 pour un SNR de 50dB, par contre, l'estimateur DFT se dégrade dans les hauts SNR.

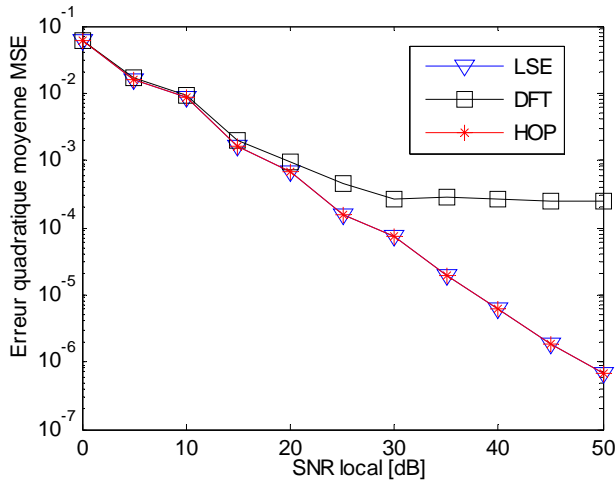


Fig. 7. MSE des 2D estimateurs en fonction de SNR pour $a_{10} = 1$, $N = 16$ et $K = 18$

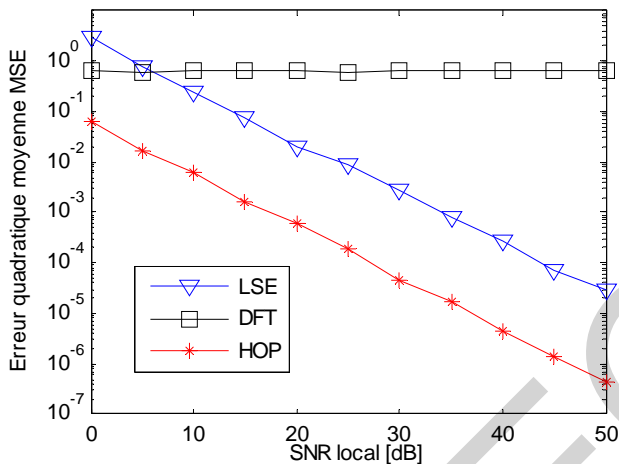
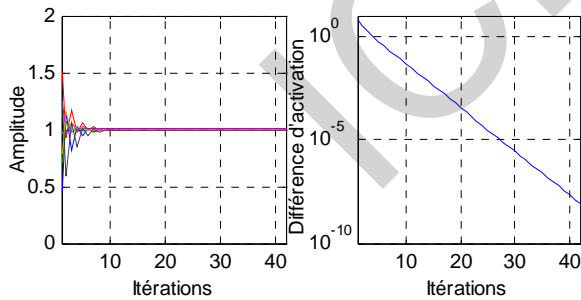
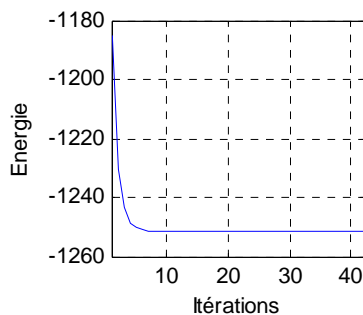


Fig. 8. MSE des 2D estimateurs en fonction de SNR pour $a_5 = 1$, $N = 16$ et $K = 7$



(a)

(b)



(c)

Fig. 9. Performance du réseau de Hopfield: l'évolution des estimés (a), l'activation (b) et l'énergie (c)

La figure (8) montre les résultats obtenus dans le cas d'un signal composé de 7 sinusoides d'amplitude 1.0 et fréquence très proches ($\Delta f = 0.03 < 1/16$). On constate que le réseau de Hopfield prouve une grande robustesse même pour les bas SNRs, par exemple pour un SNR de 0dB, une erreur inférieure à 0.1 peut être obtenue.

Le tableau I montre les amplitudes estimées par les trois méthodes pour un SNR de 5dB et un SNR de 30dB. On remarque que les estimés obtenus par la méthode de Hopfield sont très voisins et ceux obtenus par le réseau de Hopfield sont très voisins, reste l'avantage majeur du réseau de Hopfield dans son parallélisme et le temps de réponse très réduit, à titre d'exemple (voir figure 9), pour le cas du SNR=30dB, le réseau de Hopfield atteint un état presque stable avec une différence d'activation $\Delta u = 63.10^{-10}$ et une erreur d'estimation 3.10^{-5} dans 42 itérations seulement. On constate d'après cette figure qu'on peut arrêter la mise à jour du réseau à la dixième itération qui prouve une efficacité et la rapidité du réseau proposé.

TABLEAU I
Amplitudes estimées par les différentes méthodes

SNR	w	\bar{w}	DFT	LSE	HOP
5dB	0.1000	0.1000	0.8603	0.9545	0.9720
	0.1000	0.1300	1.7115	0.8861	0.9947
	0.1000	0.1600	1.7263	1.0278	1.0064
	0.1000	0.1900	1.1699	1.0679	1.0035
	0.1000	0.2300	1.1412	1.0308	1.0122
	0.1300	0.1000	1.8039	1.0093	1.0184
	0.1300	0.1300	1.3814	1.0128	1.0048
30dB	0.1000	0.1000	0.8886	1.0006	1.0006
	0.1000	0.1300	1.7116	1.0008	1.0012
	0.1000	0.1600	1.7148	0.9974	0.9986
	0.1000	0.1900	1.1673	1.0017	1.0001
	0.1000	0.2300	1.1300	1.0012	1.0007
	0.1300	0.1000	1.7899	1.0002	0.9994
	0.1300	0.1300	1.3597	1.0016	1.0013

VI. CONCLUSIONS

Dans cet article, le problème de l'estimation des amplitudes d'harmoniques des signaux sinusoidaux multidimensionnels (1D et 2D) noyés dans un bruit blanc a été étudié en utilisant le réseau de Hopfield. Cet estimateur a justifié sa robustesse, stabilité et efficacité par rapport aux autres estimateurs, cependant le majeur avantage du réseau de neurones proposé est sa rapidité de convergence qui lui a permis d'être qualifié à des applications en temps réel. Comme perspectives, on peut utiliser notre méthode pour l'estimation des amplitudes des images SAR [2] et une extension pour les signaux trois dimensions.

REFERENCES

- [1] K. Chakraborty, K. Mehrotra, C.K. Mohan, S. Ranka, "An Optimization Network for Solving a Set of Simultaneous Linear Equations," *IJCNN., International Joint Conference on Neural Networks*, vol. 4 pp. 516-521, Jun 1992 .
- [2] S. R. DeGraaf, " SAR imaging via modern 2-D spectral estimation methods," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 7, pp. 729-761, May 1998.
- [3] H.M. El-Bakary, "A novel Hopfield Neural Network for Perfect Calculation of Magnetic Resonance Spectroscopy," *International Journal of Biological and Medical Sciences*, pp. 63-75, 2008.
- [4] I. J. Gupta, "High-resolution radar imaging using 2-D linear prediction," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 42, pp. 31-37, January 1994.
- [5] A. Hirose, *Complex-Valued Neural Networks: Theories and Applications*, Ed. World Scientific, 2004.
- [6] J.J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities," *Proceeding of National Academic of Science in USA: Vol. 79*, pp. 2554-2558 , 1982.
- [7] A. Jakobsson, S. L. Marple, Jr., and P. Stoica, "Two-dimensional CAPON spectral analysis," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, pp. 2651{2661, Sept. 2000.
- [8] E. G. Larsson and P. Stoica, "Fast implementation of two-dimensional APES and CAPON spectral estimators," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 13, pp. 35-54, Jan. 2002.
- [9] E. G. Larsson, P. Stoica, and H. Li, "Amplitude spectrum estimation for two dimensional gapped data," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, pp. 1343{1354, June 2002.
- [10] H. Li , W. Sun , P. Stoica , J. Li, "2-D Sinusoidal Amplitude Estimation With Application To 2-D System Identification" *ICASSP, International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol 3. pp. 1921-1924, 2001.
- [11] G. Mathew, V.U. Reddy, "Development and Analysis of a Neural Network Approach to Pisarenko's Harmonic Retrieval Method," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, pp. 663-667, Mar 1994.
- [12] N. Morita, O. Konishi, "A Method of Estimation of Magnetic Resonance Spectroscopy Using Complex-Valued Neural Networks," *Systems and Computers in Japan*, vol. 35, no. 10, pp. 14-22, 2004.
- [13] S.K. Park, "Hopfield Neural Network for AR Spectral Estimator," in *Proc. IEEE'1990*, pp. 487-490. 1990.
- [14] P. Stoica, L. Hongbin, and L. Jian, "Amplitude Estimation of Sinusoidal Signals: Survey, New Result and an Application," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 48, pp. 338-352, Feb. 2000.
- [15] H. Yingbo, A. B. Gershman, and Q. Cheng , "High-Resolution and Robust Signal Processing" , Ed. CRC Press, 2004.
- [16] Y. Zhang, Z. Li, K. Chen, and B. Cai, "Common Nature of Learning Exemplified by BP and Hopfield Neural Networks for Solving Online a System of Linear Equations", *IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, vol. pp. 832-836, April 2008.