UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

y.PNG

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par :Zahmi Oumaima

Théme

Soutenu publiquement le : 15/06/2023
Devant le jury composé de :

Mr.**Bencheikh AbdelKerim**	M.C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.**Hchifa Abderrzak**	M.C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Mammeri Mohammed**	M.C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Kouidri Mohammed**	M.C. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2022/2023

Dédication

Je dédie ce travail à

À ma chère mère Rachida

À mon cher père Mohammed

que dieu prolonge leur vie,qui m'ont aide a affronter les difficultés.

À toutes mes sœurs "Hind, Foufa"

et mes frères "saad, Anour"

et mes deux cousines"khdouj, Hadjer" .

Qui étaient toujours à mes cotés pour me soutenir et m'aider dans les moments difficiles.

Àtoute ma précieuse famille.

À tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

À mes chéres amis.

À tous la promo 2023 de $2^{ème}$ master mathématique de l'université KASDI MERBAH OUARGLA.

À tous.

Remerciement

Je remercie **mon Dieu** qui m'aidé pour finir mon mémoire.

Ensuite , je tiens à remercie **ma famille** pour le soutien nécessaire qu'elle m'a apporté tout au long de mon parcours de thèse.

Je remercie ma encadreuse **Kouidri.Mohamed**, qui m'a dirigé et m'a dit touts les conseils importants et les indications utiles..

Je tiens a exprimer ma gratitude envers les membres de jury.

Merci **Mr. Bencheikh AbdelKerim** et **Mr.Mammeri Mohammed** et **Hchifa Abderrzak** qui ont accepte d'évaluer mon travail.

Je remercie tous les membres du département de mathématiques, y compris les professeurs, les administrateurs et les travailleurs, d'avoir fourni les conditions nécessaires pour terminer le travail.

Je remercie tous ceux qui ont contribué avec moi pour terminer ce travail.

Enfin, mes derniers mots de remerciement vont à mes amis, en particulier à **ma cousine et amie d'enfance *khadouj*** pour son soutien de toute une vie.

Table des matières

Notations

On utilise les notations suivantes tout au long du travail :

— $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

— $\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs.

— $\mathbb{R}_+^*$: ensemble des nombres réels strctement positifs.

— $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.

— $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

— $C([a,b])$: l'espace des fonctions f continues sur $[a;b]$ à valeur réels.

— $\bar{C}^k$:l'espace des fonction à valeurs dans R, K fois différentiable dans Ω.

— (M,d) : espace métrique.

— $d(.,.)$: application de distance.

— Ω : un ensemble ouvert borné .

— $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$: c'est la fermeture de Ω.

— $u'(t)$ la dérivée ordinaire par rapport à t.

— U : un ensemble ouvert

— $\deg$: Degré topologique .

— $\deg_B$: Degré topologique de Brouwer.

— $\deg_L S$: Degré topologique de Leray-Schauder.

— $\bar{B}$: La boule unité fermée.

— $\max$: Maximum .

— $\Gamma(.)$: La fonction Gamma.

— $\beta(.,.)$: La fonction Bêta.

— $\langle , \rangle$: Produit scalaire.

— $I_{a_+}^{\alpha}$: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

— ${}^{R}D^{\alpha}(f(t))$: Déviée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

— ${}^{c}D^{\alpha}(f(t))$: Dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

— $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$: Dérivée ordinaire par rapport à t d'ordre entier n.

— Im : Image d'une application.

— Ker : Noyau.

— P, Q : Deux projections continues.

— $\oplus$: La somme direct.

— L : L'opérateur de Fredholm.

— dom : Domaine.

— ind : Indice.

— dim : Dimension.

— $codim$: Codimension.

— $coker$: Conoyau.

— Kp : l'opérateur linéaire.

— N : L-compact surΩ.

— $\|.\|_{\infty} = max|.|$.

Introduction

Dans cette mémoire, nous étudions le problème aux limites d'une équation différentielle fractionnaire avec l'opérateur p-Laplacien.

$$(P)\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{0+}\varphi_p(D^{\beta}_{0+}u(t)) = f(t,u(t),D^{\beta}_{0+}u(t)), \\ u(0)=0, D^{\beta}_{0+}u(0) = D^{\beta}_{0+}u(1), \end{cases}$$

Où ${}^cD^{\alpha}_{0+}, {}^cD^{\alpha}_{0+}$ désignent les dérivées fractionnaires de Caputo, $0<\alpha,\beta\leq 1$,$1<\alpha+\beta\leq 2$. f est une fonction continue. Le problème aux limites (P) est un problème de résonance, car son problème aux limites homogène associé.

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{0+}\varphi_p(D^{\beta}_{0+}u(t)) = 0, \\ u(0)=0, D^{\beta}_{0+}u(0) = D^{\beta}_{0+}u(1), \end{cases}$$

admet une solution non triviale $u(t)=ct^{\beta}, c\in\mathbb{R}$.
Les équations avec l'opérateur p-Laplacien

$$\Big(\varphi_p(u(t))\Big)' = f(t,u(t),u(t)')$$

apparaissent dans la modélisation de différents phénomènes physiques et naturels, par exemple, la mécanique non newtonienne, l'élasticité non linéaire et la glaciologie, la biologie des populations, la théorie de la combustion, les lois d'écoulement non linéaires, le système de différentielle partielle de Monge-Kantorovich équations **voir([33]-[37])**.
Ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires ont reçu de plus en plus attention. Les équations différentielles fractionnaires apparaissent dans de nombreux domaines d'ingénierie et scientifiques. disciplines comme la modélisation mathématique des systèmes et des processus dans les domaines de physique, chimie, biologie, économie, théorie du contrôle, traitement du signal et des images, biophysique, phénomènes de circulation

sanguine, aérodynamique, ajustement de données expérimentales, etc. implique des dérivées d'ordre fractionnaire. Les équations différentielles fractionnaires servent également comme un excellent outil pour la description des propriétés héréditaires de divers matériaux et processus **voir([16] -[17])**. Récemment, de nombreuses personnes ont établi l'existence de solutions ou solutions positives d'équations différentielles fractionnaires à la non-résonance et à la résonance, les lecteurs peuvent **voir([21]-[23])** et **voir([38]-[39])** et les références qui y sont citées. Par exemple, Agarwal et al **(voir[18])** .

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'existence des solutions pour une classe de problème aux limites en résonance pour les équations différentielles implicites non linéaire à dérivée fractionnaire au sens de Caputo . Un problème aux limites est dit en résonance si le problème homogène linéaire correspondant a une solution non triviale. La technique utilisée pour les résultats présenter sont basés sur la théorie du degré de coïncidence de Mawhin pour examiner l'existence des solutions. La théorie de Mawhin permet l'utilisation d'une approche de type degré topologique à des problèmes qui peuvent être écrits comme une équation d'opérateur abstrait de la forme $Lx = Nx$, où L est un opérateur linéaire non inversible et N est un opérateur non linéaire agissant sur un espace de Banach donné. En 1972, Mawhin a développé une méthode pour résoudre cette équation dans son célèbre article (Problèmes de degrés topologiques et aux limites pour les équations différentielles non linéaires [25], il a supposé que L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Par conséquent, il a développé une nouvelle théorie du degré topologique connue sous le nom de degré de coïncidence pour (L, N) ; qui est égale connue sous le nom de théorie de degré de coïncidence de Mahwin.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans **Le premier chapitre** Nous présentons les notions préliminaires utiles, qui sont utilises dans les autres chapitres.on présente une revue sur quelques théorèmes de point fixe,notamment le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray Schauder, et on introduit également une notion importante sur l'homotopie . Aussi on discute le concept du degré topologique et ses propriétés, on définit deux degré : le degré de Brouwer en dimension finie puis le degré de Leray Schauder en dimension infinie.

Dans **La deuxième chapitre** , nous commençons par présenter quelques fonctions spéciales de la théorie des équations différentielles fractionnaires, et on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo et leurs propriétés „ ainsi que la relation et la différence entre les deux.

Dans **le troisième chapitreo** on définit la théorème de degré coïncidence de Mawhin, où du moins le construire. On aura besoin d'identifier une classe importante d'opérateurs : les opérateurs de Fredholm d'indice zéro. Ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections. Enfin , on preuve le théorème.

Dans **le quatrième chapitre** nous présentons une brève introduction de quelques notations et certains résultats fondamentaux intervenant dans la reformulation du problème ainsi que le théorème principal soit celui d'existence de la solution obtenu a partir du théorème de coïncidence de Mawhin . Avec un exemple illustratif.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Le but de ce chapitre est étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie) puis le théorème du point fixe de Schauder (qui est la "généralisation" en dimension infinie).Voir([1]-[14])

1.1 Théorème du point fixe

Dans cette section, nous présentons quelque théories et caractéristiques du point fixe de Banach, et aussi point fixe pour l'application ne soit pas une contraction sur tout l'espace métrique , avec étudier les principes de continuité .

1.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver , qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Définition 1.1.1. ***(Espace métrique)***

Un espace métrique $(X; d)$ *est un ensemble* X *muni d'une application* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés qui suivent :*

i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ *(la symétrie).*

iii) $\forall x, y \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 1.1.2. ***(Espace métrique complet)***

L'espace métrique (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *converge dans* X.

Suite de Cauchy :

On dit que la suite $(x_n)_n$ *dans l'espace métrique* $(X; d)$ *est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ N_\epsilon > 0 \text{ tel que } n, m > N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

On Écrit alors

$$d(x_n, x_m) \to 0, \text{ quand } n, m \to +\infty.$$

Définition 1.1.3. ***(Point fixe)***

Soit $F : X \longrightarrow X$ *une application. On appelle point fixe tout point* $x \in X$ *tel que* $F(x) = x$.

Définition 1.1.4. ***(L'application lipschitzienne)***

Soit (X,d) un espace métrique complet et l'application $F : X \longrightarrow X$, *On dit que F est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geq 0$ *telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments* x, y *de* X, *l'inégalité :*

$$d(F(x), F(y)) \leq k(d(x, y)), \forall x, y \in M \tag{1.1}$$

Si $k \leq 1$, *l'application F est appelée non expansive.*
Si $k < 1$, *l'application F est appelée contraction.*

Théorème 1.1.1. *(Théorème du point fixe de Banach(1922))[1].*

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $F : X \longrightarrow X$ une application contractante de constante de contraction k, alors :

(a) *F admet un unique point fixe $\alpha \in X$.*

(b) *Pour tout $x \in X$, $\alpha = \lim_{n\longrightarrow\infty} F^n(x)$ ou $F^0(x) = x$ et $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$.*

(c) *La vitesse de convergence peut être estimée par :*

$$d(F^n, \alpha) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x, F(x)) \qquad n \geq 1 \tag{1.2}$$

Démonstration.

(1) l'unicité du point fixe :

On suppose que il esiste $x, y \in X$ avec $x = F(x)$;$y = F(y)$

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y) \quad 0 < k < 1.$$

Alors l'inégalité dernier est correctement dans le cas

$$d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Alors $\exists! x \in X$ tel que $F(x) = x$.

(2) l'existence du point fixe :

On suppose que $F^n(x)$ est un suite de cauchy pour $n \in N$.

Ou

$$d(F_n(x), F_{n+1}(x)) \leq kd(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq .... \leq k^n d(x, F(x))$$

Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$, on obtient

$$\begin{aligned} d(F_n(x), F_m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) + ... + d(F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) + k^{n+1}d(x, F(x)) + k^{m-1}d(x, F(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x))[1 + k + k^2 + ...] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Pour $m > n; n \in \{0, 1, ...\}$, on a

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \tag{1.3}$$

Alors F^n est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $\alpha \in X$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} F^n = \alpha.$$

De plus par la continuité de F

$$\alpha = \lim_{n \longrightarrow \infty} (F^{n+1}(x)) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (F(F^n(x))) = F(\lim_{n \longrightarrow \infty} (F^n(x))) = F(\alpha).$$

Donc α est un point fixe de F.

Finalement, $m \longrightarrow \infty$ in (1.3), on obtient

$$d(F^n(x), x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)).$$

□

Exemple 1.1.1.

Considérons l'application $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *défini par* $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, *alors* T *une contraction avec* $0 < k = \frac{1}{2} < 1$, *et admet comme point fixe* $x = 1$ *de plus* $\lim\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 1$.

Remarque 1.1.1.

Les conditions du cette théorème sont nécessaires, considérons les exemples suivants

Exemple 1.1.2. ***(Condition de fermeture)***

(1) *Si* X *n'est pas stable par* F : $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0, 1]$. *On a a* X *est fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc il est complet (car* $\mathbb{R}$ *est complet).*
De plus $F'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, *ce qui implique que* $\sup_{x\in[0,1]} |F'(x)| < 1$, *donc* F *est contractante sur* $[0, 1]$.
Mais F *n'admet pas de point fixe car* $F([0, 1]) = [1, \sqrt{2}] \subset [0, 1]$, *i.e* X *n'est pas stable par* F.

(2) *$F :]0,1] \longrightarrow]0,1]$, $F(x) = \frac{x}{2}$, est contractante et vérifie $F(]0,1]) \subset]0,1]$ mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que $]0,1]$ n'est pas fermé $\lim x_n = 0$ n'est pas contenue dans $]0,1]$.*

Exemple 1.1.3. ***(condition de contraction)***

(1) *$F(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, +\infty[$.*

On a $F([0,+\infty[) \subset ([0,+\infty[)$et Xest un fermé dans $\mathbb{R}$.Alors X est complet. Mais F n'a pas de point fixe car $\sup_{x\in X} |F'(x)| = 1$ i.e F n'est pas contractante.

(2) *$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ vérifie $|F(x) - F(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$, mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que T n'est pas contractante, et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on obtient $x_n \longrightarrow +\infty$.*

1.1.2 Théorèmes du point fixe pour l'application ne soit pas une contraction sur tout l'espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique complet, les fonctions définie seulement sur un sous-ensemble de X n'aura pas forcément un point fixe. Des conditions supplémentaires seront nécessaires, Pour assurer cela.

Théorème 1.1.2.

Soient K un ensemble fermé dans X et $F : K \longrightarrow X$ une k-contraction. Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ et $r > 0$ tel que

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K \qquad et \qquad d(x_0, F(x_0)) < (1-k)r.$$

Alors F a un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Dans certaines applications, il y'a des cas ou F est lipschitzienne sans être une contraction, alors qu'une certaine puissance de F est une contraction voir[1]. Dans ce cas nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.1.3.

Soit (X, d) *un espace métrique complet,* $F : X \longrightarrow X$ *une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction)*

$$d(T^n(x), T^m(y) \leq kd(x, y), x, y \in M.$$

Pour un certain $m > n$ *ou* $0 < k < 1$ *, alors* T *admet un unique fixe* $x^* \in M$*.*

Démonstration.

Comme T^p est une contraction, il en résulte du théorème (1.1.2) que T^p a un unique point fixe, donc $x^* = T^p x^*$.
Alors

$$T^p(T(x^*)) = T(T^p(x^*)) = T(x^*),$$

alors $T(x^*)$ est un point fixe de T^p.
Mais T^p admet un unique point fixe, d'où $T(x^*) = x^*$. Donc T a un unique point fixe (x^*), et il est unique car tout point fixe de T est également point fixe de T^p. □

Exemple 1.1.4.

soit M *un espace métrique donné par* $M = C[a; b]$*, est un espace de Banach par rapport à la norme* $\|u\| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|, u \in M$*.*
On définit $T : M \to M$ *par :*

$$Tu(t) = \int_a^t u(s)ds.$$

On montre que $\|T(u) - T(v)\| \leq (b - a)\|u - v\|$*, on a*

$$\begin{aligned}\|T(u) - T(v)\| &= \max_{t\in[a,b]} |\int_a^t u(s)ds - \int_a^t v(s)ds| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |u(s) - v(s)|ds.\end{aligned}$$

D'après la majoration, on obtient

$$\begin{aligned}\|T(u) - T(v)\| &\leq \int_a^t ds\|u(s) - v(s)\| \\ &\leq (t - a)\|u(s) - v(s)\|, \qquad \forall t \in [a, b] \\ &\leq (b - a)\|u(s) - v(s)\|.\end{aligned}$$

Donc $(b-a)$ est la meilleure constante de Lipschitz pour T.

D'autre part, on a :

$$T^2(u)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s u(\mu)d\mu \right) ds = \int_a^t (t-s)u(s)ds.$$

Et par induction

$$T^m u(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} u(s)ds.$$

Dés lors

$$\begin{aligned}
\|T^m u(t) - T^m v(t)\| &= \max_{t\in[a,b]} |T^m u(t) - T^m v(t)| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left| \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} u(s)ds - \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} v(s)ds \right| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left| \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} \left(u(s) - v(s)\right) ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]} \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} \left|(u(s) - v(s))\right| ds \\
&\leq \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} ds \|u(s) - v(s)\| \\
&\leq \frac{-1}{(m-1)! \times m} \left[(t-s)^m\right]_a^t \|u(s) - v(s)\| \\
&\leq \frac{1}{m!}(t-a)^m \|u(s) - v(s)\| \qquad \forall t \in [a,b] \\
&\leq \frac{1}{m!}(b-a)^m \|u(s) - v(s)\|.
\end{aligned}$$

Et donc T^m serait une contraction si $\dfrac{(b-a)^m}{m!} < 1$.

1.1.3 Principes de continuation

Une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation . Celui-ici consiste à déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation connue sous le nom devra vérifier certaines condition .

Définition 1.1.5. ***(Les application homotopes)***

Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y,$$

telle que : $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$.

Remarque 1.1.2.

En d'autres termes, il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \longrightarrow H(x, t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continument. On note $f \simeq g$.

Exemple 1.1.5.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application constante $f(x) = 0$, et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $g(x) = x$. Montrons que f et g sont homotopes. Il suffit de prendre :

$$H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n,$$

tel que

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

On a

$$H(x, 0) = (1 - 0) \times 0 + 0 \times x = 0,$$

et

$$H(x, 1) = (1 - 1) \times 0 + 1 \times x = x.$$

Alors $H(x; t) = tx$ et $H(x, 1) = g(x)$ et $H(x, 0) = f(x)$.

Exemple 1.1.6.

Soit $X = Y = \mathbb{R}^n - \{0\}$, on considéré cette fois , $p(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $q(x) = x$. On voit que p et q sont homotopes en prenant :

$$H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Tel que : $H(x, t) = (1 - t)q(x) + tp(x)$, on a

$$H(x, 0) = (1 - 0) \times x + 0 \times \frac{x}{\|x\|} = x,$$

et
$$H(x,1) = (1-1)\times x + 1\times \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|}.$$
Alors $H(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$ *et* $H(x,0) = q(x)$ *et* $H(x,1) = p(x)$.

Définition 1.1.6. ***(Équivalence d'homotopie)***

Soit $f : X \longrightarrow Y$ *une application continue. On dit que f est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe* $g : Y \longrightarrow X$ *telle que* $\begin{cases} g\circ f = id_X, \quad \text{et} \quad f\circ g = id_y \end{cases}$.
On dit que X *et* Y *sont du même type d'homotopie, et on note* $X \simeq Y$.

Exemple 1.1.7.

Soit $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ *et* $Y = S^{n-1}$, *on prend alors* $f : X \longrightarrow Y$ *définie par* $f(x) = x/\|x\|$, *et* $g : Y \longrightarrow X$ *l'inclusion. Alors* $f\circ g = id_Y$, *et l'exemple (1.1.6) montre que* $g\circ f \simeq id_X$. *Donc* $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *a le même type d'homotopie que la sphère* S^{n-1}.

Définition 1.1. ***(Les propriétés d'homotopie)***

Soit (X,d) un espace métrique complet, et U *un sous ensemble ouvert de* X.
On considéré $F : \overline{U} \longrightarrow X$ *et* $G : \overline{U} \longrightarrow X$ *deux contractions, on dit que* F *et* G *sont homotopes s'il existe* $H : \overline{U}\times[0,1] \longrightarrow X$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

- **(a)** $H(.,0) = G$ *et* $H(.,1) = F$.
- **(b)** $H(x,t) \neq x$ *pour tout* $x \in \partial U$ *et* $t \in [0,1]$.
- **(c)** *Il existe* $\alpha \in [0,1)$ *tel que* $d\Big(H(x,t); H(y,t)\Big) \leq \alpha d(x,y)$ *pour tout* $x,y \in \overline{U}$, *et* $t \in [0,1]$.
- **(d)** *Il existe* $M \geq 0$ *tel que* $d\Big(H(x,t), H(x,s)\Big) \leq M|t-s|$ *pour tout* $x \in \overline{U}$, *et* $t,\ s \in [0,1]$.

Théorème 1.1.4.

Soit $F : \overline{U} \longrightarrow X$ *et* $G : \overline{U} \longrightarrow X$ *deux applications homotopiquement contractives et* G *a un point fixe dans* U. *Alors,* F *admet un point fixe dans* U.

Démonstration.

On pose l'ensemble $Q = \{\lambda \in [0,1], x = H(x,\lambda)\}$ pour certain $x \in U$ et H est une homotopie entre F et G a décrite dans la définition (1.1.5). Notons que Q est non vide puisque G a un point fixe et que $0 \in Q$.

On montre que Q est à la fois ouvert et fermé dans $[0,1]$ alors montre $Q = [0,1]$. Par conséquent F a un point fixe.

(i) Montrons que Q est un ensemble fermé dans [0,1] :

Soit $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ une suite dans Q telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = \lambda$, alors nous devons montrer que $\lambda \in Q$.

Comme $\lambda_n \in Q$ pour $n = 1, 2, ...$, il existe $x_n \in U$ où $x_n = H(x_n, \lambda n)$.

On a pour $n, m \in \{1, 2, ...\}$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d\Big(H(x_n, \lambda_n), H(x_m, \lambda_m)\Big) \\ &\leq d\Big(H(x_n, \lambda_n), H(x_m, \lambda_m)\Big) + d\Big(H(x_n, \lambda_m), H(x_m, \lambda_m)\Big) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m). \end{aligned}$$

Alors

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|.$$

Donc $\{x_n\}$est une suite de Cauchy de X (car $\{\lambda_n\}$ l'est aussi) et, puisque X est complet, il existe $x \in \overline{U}$ telle que $\lim_{x\longrightarrow\infty} x_n = x$.

Par la continuité de H

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = lim_{n\longrightarrow\infty} H(x_n, \lambda n) = H(x, \lambda)$$

Donc $\lambda \in Q$ et Q est fermé dans $[0,1]$.

(ii) Montrons que Q st un ensemble ouvert dans [0,1] :

Soit $\lambda_0 \in Q$, alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$.

Puisque, par hypothèse $x_0 \in U$, nous pouvons trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r) = \{x \in X : (x, x_0) < r\} \subseteq U$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}$ où $r \leq dist(x_0, \partial U)$,

et

$$dist(x_0, \partial U) = inf\{(x_0, x) : x \in \partial U\}.$$

Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$.

Alors, pour $x_0 \in \overline{B(x_0, r)}$

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x,\lambda)) &\leq d(H(x_0,\lambda_0)H(x,\lambda_0)) + d(H(x,\lambda_0), H(x,\lambda) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda, \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha) r = r. \end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ fixé

$$H(.,\lambda) : \overline{B(x_0, r)} \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}.$$

Par le théorème (1.1.1), (1.1.2), on déduit que $H(.,\lambda)$ un point fixe dans U.

Alors $\lambda \in Q$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$. Et par conséquent Q est ouvert dans $[0,1]$. Donc Q=[0, 1].

$\square$

Du théorème précédent, nous déduisons le résultat suivant :

Théorème 1.1.5. ***(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)***

Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert d'un espace de Banach E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \longrightarrow E$ une contraction telle que $F(\overline{U})$ soit bornée.
Alors un des deux énoncés suivant est vérifié :

(a) *F a un point fixe dans $(\overline{U})$.*

(b) *il existe $\lambda \in (0,1)$ et $x \in \partial U$ tells que $x = \lambda F(x)$.*

Démonstration.

Supposons que (b) n'est pas vérifié et que F n'a pas de point fixe sur ∂U c'est à dire $x \neq \lambda F(x)$ pour tout $x \in \partial U$ et $\lambda \in [0,1]$.

Soit $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow E$ donnée par $H(x,\lambda) = \lambda F(x)$, et soit G l'application nulle(G(x)=0).

Notons que G a un point fixe dans U (à savoir $(G(0) = 0)$) et que F et G sont deux applications homotopiquement contractives. Par le théorème (1.1.4) F a également un point fixe et donc l'annonce (a) est vérifié. $\square$

1.2 Degré topologique

Dans cette section, nous donnons un bref aperçu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, $deg(f, \Omega, y)$ de f dans Ω par rapport à y donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset X$, où $f : X \longrightarrow X$ est continue, $y \notin f(\partial\Omega)$ et X est un espace topologique métrique la plupart du temps.

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Considérons un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}$.
$\overline{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désignera l'espace des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^n$, k fois différentiables dans Ω qui sont continues sur $\overline{\Omega}$. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.

Définition 1.2.1. ***(Jacobien)***

Soit $x_0 \in \Omega$, si f est différentiable en x_0, on note par $J_f(x_0) = det f'(x_0)$ le Jacobien de f en x_0.

Définition 1.2.2. ***(Le point critique)***

Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω. Notons par $J_f(x_0)$le Jacobien de f en un point x_0 de Ω. Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$. Sinon, x_0 est dite point régulier.

On pose $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques.
C'est à dire :

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}.$$

Définition 1.2.3. ***(Valeur régulière)***

Considérons y Un élément dans $\mathbb{R}^n$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$. Sinon, y est dit valeur singulière.

Définition 1.2.4. ***(Degré topologique)***

Soit $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f.
On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y le nombre entier

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} Sgn\ J_f(x).$$

Où Sgn $Jf(x)$ Représente le signe de $J_f(x)$, défini par :

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & si\ t>0, \\ -1 & si\ t<0. \end{cases}$$

Avec l'ajout de ces deux notes

1) *si* $f^{-1}(y) = \emptyset, deg(f, \Omega, y) = 0.$

2) $f^{-1}(y)$ *contient un nombre fini d'éléments.*

Remarque 1.2.1.

Dans le cas où $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq 0$, Nous passons à le lemme suivant

Lemme 1.1. ***(Lemme de Sard)***

Soit une fonction $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Alors l'ensemble $f(S_f)$ des valeurs critiques de f est de mesure nulle.

Démonstration.

Il suffit de considérer le cas où $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et Ω est un cube de côté a. Pour $k \geq 1$ entier, on divise le cube en k^N cubes C_i de côté $\frac{a}{k}$ (avec $1 \leq i \leq k^N$). Si i est tel que $S \cap C_i \neq \varnothing$, soient $x \in S \cap C_i$ et$y \in C_i$.Comme $J_f(x) = 0$, cela signifie que $f'(x)(\mathbb{R}^n)$ est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, soit H_x.
En d'enseignant par ε le module d'uniforme continuité de f' sur Ω, on a :

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| &\leq |y-x|\, \varepsilon(|y-x|), \\ &\leq \frac{a\sqrt{N}}{k} \varepsilon(|y-x|). \end{aligned}$$

Donc

$$d\Big(f(y), f(x) + H_x\Big) \leq \frac{a\sqrt{N}}{k} \varepsilon\Big(\frac{a\sqrt{N}}{k}\Big).$$

Par ailleurs, en posant $L = max_{x \in \Omega} \|f'\|$, le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Big|f(y) - f(x)\Big| &\leq |y-x|\, sup\, |f'(x + t(y-x))| \\ &\leq L \frac{a\sqrt{N}}{k} \end{aligned}$$

Ce qui implique finalement que si $C_i \cap S \neq \varnothing$, alors $f(C_i)$ est contenu dans un pavé d'épaisseur $2\varepsilon(a\sqrt{N}/k)a\sqrt{N}/k$ et dont la base a des côtés de longueur $2La\sqrt{N}/k$.
On en déduit l'estimation :

$$mes(f(c_i)) \leq 2\varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k})\frac{a\sqrt{N}}{k}(2L\frac{a\sqrt{N}}{k})^{N-1},$$

et, puisqu'il y a k^N cubes C_i, on en déduit que pour tout $k \geq 1$ on a

$$mes(f(c_i)) \leq 2^N L^{N-1}(a\sqrt{N})^N \varepsilon(a\sqrt{N}/k).$$

En faisant tendre $k \longrightarrow +\infty$, on voit que $mes\Big(f(S)\Big) = 0$. $\square$

Nous verrons maintenant qu'on peut étendre la notion de degré au cas où la1fonction f est est seulement continue.

Définition 1.2.5.

Soient $\Omega \subset R^n$ un ouvert borné, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$. On définit le degré topologique de f dans Ω par rapport y par

$$deg(f, \Omega, y) = [\lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega, y)].$$

Où $\{f_n\}_{n \in N^*}$ est une suite de fonction $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ qui converge uniformément vers f dans $\overline{\Omega}$.

Théorème 1.2.1. ***(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer)[7]***

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et posons

$$A(\Omega) = \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega))\}.$$

L'application $deg(f, \Omega, y) : A(\Omega) \to \mathbb{Z}$ satisfait les propriété suivantes :

(1) ***(Normalisation)*** *$deg(I, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$ et $deg(I, \Omega, y) = 0$ si $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ où I désigne l'application identité sur $\overline{\Omega}$.*

(2) ***(Solvabilité)*** *Si $deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω.*

(3) ***(Invariance par homotopie)*** *Pour tout* $h : [0,1]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ *et tout* $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *continues telles que* $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ *pour tout* $t \in [0,1]$, $deg(h(t,.), \Omega, y(t))$ *est indépendant de* t.

(4) ***(Additivité)*** *Supposons que* Ω_1 *et* Ω_2 *sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de* Ω *et* $y \notin f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1 \bigcup \Omega_2))$. *Alors*

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y).$$

(5) $deg(f, \Omega, y)$ *est constant sur toute composante connexe de* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

(6) $deg(f, \Omega, y) = deg(f - y, \Omega, 0)$.

(7) *Soit* $g : \overline{\Omega} \to F_m$ *une application continue où* F_m *est un sous espace de* $\mathbb{R}^n$, $dimF_m = m$, $1 \leq m \leq n$. *Supposons que* y *est tel que* $y \notin (I - g)\partial\Omega$.
Alors

$$deg(f, \Omega, y) = deg((I - g)_{\overline{\Omega}\cap F_m}, \Omega \cap F_m, y)$$

Remarque 1.2.2.

Dans le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, *la propriété* (2) *du théorème ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérêt principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes, elles ont le même degré.*

Exemple 1.2.1. *Soit* $\Omega = (-1; 1)$ *et considérons*

$$h : (t; x) \in [0,1] \times \overline{\Omega} \to h(t,x) = (1-t)x + txe^x$$

Il est clair que cette application satisfait :

1) h *est continue sur* $[0; 1] \times \overline{\Omega}$

2) $h(0; x) = x$ *et* $h(1; x) = xe^x$

3) *Pour tout* $t \in [0; 1]$, *la fonction* $h(t; x)$ *ne s'annule pas en* $\{-1, 1\}$ *,Donc si* $f(x) = xe^x$. *ALors*

$$deg\Big(f, (-1,1), 0\Big) = deg\Big(I, (-1,1), 0\Big) = 1$$

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $\Omega \subset X$ un ensemble ouvert et borné, $f : \bar{\Omega} \to X$ une fonction continue et $y \in X$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$ .Dans la section précédente, nous avons vu qu'en dimension finie, $C(\bar{\Omega}, X)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré, le degré de Brouwer, satisfaisant les propriétés $1, 2et3$ du théorème. Malheureusement, en dimension infinie, $C(\bar{\Omega}, X)$ ne l'est pas. En effet, un exemple du à Leray montre qu'il faut restreindre la classe des fonctions pour laquelle il y a existence et unicité d'une fonction degré de Leray-Schauder, a un ensemble strictement contenu dans $C(\bar{\Omega}, X)$.

Définition 1.2.6.

Soient X un espace de Banach et Ω une partie fermé de X. Si $T : \Omega \to X$ est un opérateur continu, on dit que T est compact si pour toute partie bornée B de Ω, $T(B)$ est relativement compact dans X.

Remarque 1.2.3.

On notera en particulier que si T est compact, alors T est borné sur les parties bornées de X.

Définition 1.2.7.

Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. On dit que l'application T : $\Omega \to X$ est de rang fini si $dim(Im(T)) < \infty$, autrement dit, si $Im(T)$ est un sous-espace de dimension finie de X.

Lemme 1.2.1.

Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$. un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension fini noté F et une application continue $T_\varepsilon : \bar{\Omega} \to F$ telle que :

$$\|T_\varepsilon x - Tx\| < \varepsilon \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Définition 1.2.8.

Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$. un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le degré de Brouwer $deg(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0)$ est bien défini comme dans le ***lemme (1.2.1)****. Par conséquent, nous définissons le degré de Leray-Schauder par :*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0).$$

Remarque 1.2.4.

Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $Y \in X$ est tel que $y \notin (I - T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à y est défini comme étant

$$deg(I - T, \Omega, y) = deg(I - T - y, \Omega, 0).$$

Théorème 1.2.2. ***(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Leray-Schauder)***

Soit X un espace de Banach et

$$A = \Big\{(I - T, \Omega, 0)\,,\ \Omega \ \textbf{un ouvert borné de } \boldsymbol{X},\ T : \overline{\Omega} \to X \quad compacte \quad , 0 \notin (I - T)\,(\partial\Omega)\Big\},$$

alors, il existe une unique application $deg(f, \Omega, y) : A \to \mathbb{Z}$ appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :

(1) ***(Normalité)*** *Si $0 \in \Omega$, alors $deg(I, \Omega, 0) = 1$.*

(2) ***(Solvabilité)*** *Si $deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$, alors existe $x \in \Omega$ tel que $(I - T)x = 0$.*

(3) ***(Invariance par homotopie)*** *Soit $H : [0, 1] \times \bar{\Omega}$ une homotopie compacte, telle que $0 \notin (I - H(t, .))(\partial\Omega)$.*
Alors

$$deg\Big(I - H(t, .), \Omega, 0\Big) \ ne\ dépend\ de\ t \in [0, 1].$$

(4) ***(Additivité)*** *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous-ensembles disjoints ouverts de* Ω *et*

$$0 \notin (I - T)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

Alors,

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T, \Omega_1, 0) + deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brouwer. Pour finir et comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques en particulier l'alternative non linéaire de Leray-Schauder

1.3 Théorème du point fixe topologiques

Théorème 1.3.1. ***(Brouwer)***

Soit $\bar{B}$ *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \bar{B} \to \bar{B}$ *continue. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \bar{B}$ *tel que* $f(x) = x$.

Démonstration.

On va montrer l'existence de la solution de $f(x) = x$ sur $\bar{B}$:

(i) S'il existe un $x \in \partial B$, alors il n'y a rien à prouver.

(ii) Sinon considérons l'application continue $h(t, x) = x - tf(x)$.

Alors

$$h(0, x) = x - 0 * f(x) = x,$$

et

$$h(1, x) = x - 1 * f(x) = x - f(x).$$

Si on suppose que $h(t, x_0) = 0$ comme $x_0 \in \partial B$, alors on obtient $x_0 = tf(x_0)$ ce qui implique comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, que $f(x_0) \in \partial B$, contradiction.

Comme est une homotopie admissible entre $I - f$ et I.

Donc

$$deg(I - f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

En conclusion $\exists x \in B$ tel que $x - tf(x) = 0$ i.e $f(x) = x$.

$\square$

Théorème 1.3.2. ***(Schauder)***

Soit $\bar{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \bar{B} \to \bar{B}$ compacte. Alors f a un point fixe $\exists\ x \in \bar{B}$ tel que $f(x) = x$.

Démonstration.

Soit $h(t, x) = tf(x)$ fonction compacte sur $[0, 1] \times \bar{B}$.
Si pour $t \in [0, 1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - h(t, x) = 0$, alors $tf(x) = x$; comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$ donc un point fixe sur ∂B situation que l'on a exclue.
On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne

$$deg(I - f, B, 0) = deg(I, B, 0) = 1.$$

Puisque $h(0, .) = 0$ et $h(1, 0) = f$ donc l'existence d'un point fixe. $\square$

Théorème 1.3.3. ***(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)[4]***

Soit $\Omega \subset X$ un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach X tel que $0 \in \Omega$, et soit $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact. Alors un des deux énoncés suivants vérifié :

(1) *T a un point fixe dans Ω.*

(2) *il existe $\lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $Tx = \lambda x$.*

Démonstration.

Si (2) est vraie alors on a rien à prouver. Sinon on définit l'homotopie

$$H(t, x) = tTx \quad \forall\ t \in [0, 1].$$

Ainsi défini $H(t, x)$ est compacte $H(0, x) = 0$ et $H(1, x) = Tx$.

Supposons que $H(t, x_0) = x_0$ pour un certain $t \in [0, 1]$ et $x_0 \in \partial\Omega$. Alors on a $tTx_0 = x_0$. Si $t = 0$ ou $t = 1$ on a (1) ; Sinon $Tx_0 = \dfrac{1}{t}x_0$ *pour un certain* $t \in (0, 1)$, Et alors on a (2). Sinon, on a

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

Et alors T a un point fixe dans Ω. $\square$

Théorème 1.3.4. ***(Brouwer)***

Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X, \|.\|)$ et soit $A : M \to M$ une application continue, alors A admet un point fixe .

Théorème 1.3.5. ***(Schauder)***

Soit M une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach X et soit $A : M \to M$ une application compacte, alors A admet un point fixe.

Théorème 1.3.6. ***(Ascoli-Arzela)***

Considérons $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si M est un sous ensemble de X tel que :

(i) *M est borné, il existe une constante $r > 0$ tel que*

$$\|u\| \leqslant r, \quad \forall u \in M.$$

(ii) *M est équicontinu, alors*

$$\forall \varepsilon > 0\ , \exists\ \delta > 0 \quad tq \quad , |t_1 - t_2| < \delta \quad et \quad \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon.$$

Alors, ***M est relativement compact****.*

Chapitre 2

Fractionnaire

Dans ce chapitre,
nous présentons d'abord deux fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire : la fonction Gamma, la fonction Béta.En suite, nous présenterons la définition d'intégrale fractionnaire et étudie les dérivées fractionnaire de Riemann Liouville et de Caputo ainsi que leurs propriétés. Voir([4]-[9]), ([14]-[22])

2.1 Fonctions spécifiques utiles

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés de la fonction Gamma Euler et la fonction Bêta qui liée a cette fonction .

2.1.1 Fonctions Gamma d'Euler [3]

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la fonction factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe a parties réelles positives).

Définition 2.1.1. *Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{2.1}$$

Cette intégrale convergente pour tout les réels positifs .

Exemple 2.1.1. *Calculons* $\Gamma(1)$ *et* $\Gamma(\frac{1}{2})$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1}e^{-t}dt = 1$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-(1/2)}e^{-t}dt$$

Posons $t = x^2$ *;* $dt = 2xdx$ *.Donc*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Prenons

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx, \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \end{aligned}$$

Le calcul est plus simple a réaliser qu'on effectue les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} re^{(-r^2)}drd0 \\ &= \frac{\pi}{4} \\ A &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Proposition 2.1.1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ *,*$t > 0$ *,*$n \in \mathbb{N}$ *, on a*

(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(2) $\Gamma(n+1) = (n)!$.

(3) $\Gamma(0) = \infty$.

(4) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{(\pi)}}{4^n n!}$.

Démonstration.

1) Représentons $\Gamma(x+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^{(x+1)-1}e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt \\
&= \Big[-t^x e^{-t}\Big]_0^{\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{(x-1)}e^{-t}dt \\
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

D'ou la relation dite de récurrence .

(2) La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car

$$\Gamma(n+1) = (n)!.$$

En effet , $\Gamma(1) = 1$; et en utilisant la propreté (1) nous obtenons :

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.\Gamma(n-1)! = n!$$

(3) De (1) on a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \Gamma(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \Gamma(x) = \infty.$$

(4) On va démontrer la formule $Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{(\pi)}}{4^n n!}$, par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$; on a $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Supposons que la formule est vérifie pour $(n-1)$ et considérons n .C'est a dire que

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{1}{2}\Big), \\
&= \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\frac{2(n-1)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}, \\
&= \Big(\frac{2n-1}{2}\Big)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}, \\
&= \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}, \\
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4n}.
\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifie pour n.

□

2.1.2 Fonction Bêta [4] (ou la fonction de Bessel de second espèce)

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec La fonction Gamma.

Définition 2.1.2.

La fonction Betaest dèfinie par :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{y-1}dt \quad ;\forall x, y > 0. \tag{2.2}$$

Théorème 2.1.1.

La fonction Bêta est raccordée avec la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \forall x, y > 0.$$

Démonstration.

Soit $D = [0, +1[\times[0, +1[$,on a

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx \int_0^{+\infty} e^{-y}y^{q-1}dy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy\end{aligned}$$

On pose$y = u - x; dy = du$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{u} e^{-u}x^{p-1}(u-x)^{q-1}dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{u} x^{p-1}(u-x)^{q-1}dxdy\end{aligned}$$

On pose $x = tu; dx = udt$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{1} t^{p-1}(u)^{p-1}(1-t)u^{q}dxdy$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$$

Par conséquent

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

Exemple 2.1.2. *Calculons* $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
D'après l'exemple de $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,*alors*

$$\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Proposition 2.1.2.

1. $B(p,q) = B(q,p)$.
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.
3. $B(p,q+1) = \frac{p}{q}B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$.
4. $B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = 2\int_0^{\pi/2}(sint)^{2p-1}(cost)^{2q-1}dt$.

2.2 L'intégrale et les dérivée Fractionnaire

Cette section contient les définitions et quelques propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires du type de Riemann-Liouville et Caputo.

2.2.1 L'intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville [16][17]

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ou intégrable et :
Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned}
I^{(2)}f(x) &= \int_a^x I^{(1)}f(u)du \\
&= \int_a^x \int_a^u (f(y)dy)du \\
&= \int_a^t f(u)du \int_a^x dt \\
&= \int_a^x (x-t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

Et pour une primitive troisième on aura :

$$\begin{aligned}
I^{(3)}f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x1} dx_2 \int_a^{x2} f(x_3)dx_3 \\
&= \int_a^x dx_1 \int_a^{x1} (x_1 - x_2)f(x_2)dx_2 \\
&= \frac{1}{(3-1)!} \int_a^x (x-t)^{(3-1)} f(t)dt \\
&= \frac{1}{(2)!} \int_a^x (x-t)^{(2)} f(t)dt \\
&= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^{(2)} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Dans le cas général pour tout entier n et par récurrence on a la formule de Cauchy :

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n, \tag{2.3}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt. \tag{2.4}$$

Pour tout entier n.

Depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que la second membre de (2.4) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non entier, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suite :

Définition 2.2.1.

soit$f(x) \in C[a;b]$ et $x \in [a;b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $I^{\alpha}_{a^+}f(x)$ (á gauche) et $I^{\beta}_{a^+}f(x)$ (á droite) d'ordre $\alpha > 0$ sont défini par :

$$I^{\alpha}_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt.$$

$$I^{\alpha}_{b^-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_b^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt.$$

Proposition 2.2.1.

(i) $I^{0}_{a^+}f(x) = f(x)$.

(ii) *l'opérateur intégral I^{α}_{0} est linéaire.*

Théorème 2.2.1.

Pour $f \in C[a,b]$ intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :

$$I^{\alpha}_{a^+}[I^{\beta}_{a^+}f(x)] = I^{(\alpha+\beta)}_{a^+}f(x), \quad \alpha, \beta > 0$$

.

Démonstration.

De la définition nous trouvons :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a^+}[I^{\beta}_{a^+}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} I^{\beta}_{a^+}f(y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^y \frac{f(t)}{(y-t)^{1-\beta}}dtdy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}}\int_a^y \frac{f(t)}{(y-t)^{1-\beta}}dtdy.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)dt\int_t^x (x-y)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}dy.$$

Par le changement de variable $y = t + (x-t)s$, alors $dy = (x-t)ds$.
On obtient

$$\begin{aligned}
\int_t^x (x-y)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}dy &= \int_0^1 \left[\left[x - \left(t + (x-t)s\right)\right]^{\alpha-1}\left[\left(t + (x-t)s\right) - t\right]^{\beta-1}\right](x-t)ds \\
&= \int_0^1 \left[\left((x-t) - (x-t)s\right)^{\alpha-1}\left((x-t)s\right)^{\beta-1}\right](x-t)ds \\
&= \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}(x-t)^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}s^{\beta-1}(x-t)ds \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\beta(\alpha,\beta) \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)dt(x-t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}$$

telle que $B(\alpha,\beta)$ est la fonction Bêta. □

Lemme 2.2.1.

L'opérateur d'intégrale fractionnal I_a^{α} *avec* $\alpha > 0$ *est borné dans* $L^P([a,b]), 0 \leq p \leq +\infty$

$$\|I_a^{\alpha}f\|_p \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_p.$$

2.2.2 Dérivées fractionnaire au sens Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires.Dans cette partie on va présenter la dérivée de Riemann-Liouville, qu'est la plus utilisée.

Définition 2.2.2.

Soit f une fonction intégrable sur $[a;b[$ alors dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n-1 \leq \alpha < n; n \neq 0$) au sens de Riemann-Liouville définie par :

$$\begin{aligned} {}^{R}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) \end{aligned}$$

Ou $n = [\alpha] + 1$.

***En particulier** pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = n$ on a :*

$$ {}_{a^+}^{R}D^0 f(t) = f(t)$$

$$ {}_{a^+}^{R}D^n f(t) = f^{(n)}(t)$$

Exemple 2.2.1.

1. ***La dérivée non entiére d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville.***

   En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a

$$\begin{aligned} {}^{R}D_{a+}^{\alpha} C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t C(t-\tau)^{n-\alpha-1} \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \Big[\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big]_a^t \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \Big[\frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big] \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{1-\alpha} (t-a)^{-\alpha} \\ {}^{R}D_{a+}^{\alpha} C &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

2. ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Riemann-Liouville.***

Soit α *non entier et* $0 \leq n-1 < \alpha < n$ *et* $\alpha > -1$ *alors an a :*

$$^{R}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ *on a* $d\tau = (t-a)ds$ *et alors :*

$$^{R}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\beta(n-\alpha,\beta+1)$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$^{R}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Par exemple $^{R}D_0^{0.5}t^{0.5} = \dfrac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$

Proposition 2.2.2. *[20]*

1) ***Composition avec l'intégrale fractionnaire***

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$$^{R}D^{\alpha}(I^{\alpha}f(t)) = f(t),$$

en général on a

$$^{R}D^{\alpha}(I^{\beta}f(t)) =^{R} D^{\alpha-\beta}f(t)$$

et si $\alpha-\beta < 0,^{R} D^{\alpha-\beta}f(t) = I^{\beta-\alpha}f(t)$

- En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$^{R}D^{-\alpha}({}_a^RD_t^{\beta}f(t)) =^{R} D^{\beta-\alpha}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[^{R}D_t^{\beta-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

avec $m-1 \leqslant \beta < m$

2) *Composition avec les dérivées d'ordre entier*

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si :$f^k(a) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

$$\frac{d^n}{dt^n}({}^R D^\alpha f(t)) = {}^R D^{n+\alpha} f(t)$$

mais

$${}^R D^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = {}^R D^{n+p} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}$$

3) *Composition avec les dérivées fractionnaires*

Soit $n-1 \leqslant \alpha < n$ *et* $m-1 \leqslant \beta < m$,*alors*

$${}^R D^\alpha({}^R D_t^\alpha f(t)) = {}^R D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [{}^R D^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(q-k+1)}$$

$${}^R D^\alpha({}^R D_t^\beta f(t)) = {}^R D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [{}^R D^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^R D^\alpha$ *et* ${}^R D^\beta(\alpha = \beta)$*, ne commutent que si et*

$$[{}^R D^{\beta-k} f(t)]_{t=a} = 0.$$

pour tout $k = 1, 2, .., n,$ *et* $[{}^R D^{\beta-k} f(t)]_{t=a}$ *pour tout* $k = 1, 2, .., m.$

2.2.3 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

La dérivation partielle dans le sens de Riemann-Liouville a joué un rôle actif dans le développement de micro-calcul en mathématiques pures et appliquées a la fin les années 1960 ont nécessite une révision qui a conduit de nombreux auteurs, dont Caputo, a trouver une nouvelle définition de la dérivation fractionnaire en raison de problèmes applique a la flexibilité optique et la mécanique.

Définition 2.2.3. *[19]*

Soit f une fonction intégrable sur $[a;b[$ alors dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ (avec $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$) au sens de Caputo définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha_{a^+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \\ &= I^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n}(f(t)) \end{aligned}$$

avec $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ désigne la partie entière.

Remarque 2.2.1. *a dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $]n-1, n[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $n-\alpha$ suivit d'une dérivation classique d'ordre n, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 2.2.2.

1. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo***

   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$ {}^cD^\alpha C = 0$$

2. ***La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo***

   Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}.$$

D'où

$$ {}^cD^p(t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau.$$

Effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p},
\end{aligned}
$$

2.3 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo :[15]

Théorème 2.3.1.

Soit $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$, si f posséde $n-1$ dérivée en a et si ${}^{R}D_a^{\alpha}$ existe alors :

$$
{}^{c}D_a^{\alpha} f(x) = {}^{R}D_a^{\alpha}\Big[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big].
$$

Pour presque tout $x \in [a, b]$.

Démonstration.

D'après la définition on a :

$$
\begin{aligned}
{}^{R}D_a^{\alpha}\Big[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big] &={}^{R} D^n I_a^{n-\alpha}\Big[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big]\\
&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\Big[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big]dt\\
&=\frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\Big[(x-t)^{n-\alpha}(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)\Big]_a^x\\
&+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha}\Big[D(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)\Big]dt\\
&=I_a^{n-\alpha+1}D\Big[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big].
\end{aligned}
$$

De même façon pour n fois alors :

$$
I_a^{n-\alpha}D\Big[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big]=I_a^{n-\alpha}I_a^nD^n\Big[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big].
$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$ alors :

$$
\begin{aligned}
I_a^{n-p}D[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] &= I_a^{n-p}I_a^nD^nf(x)\\
&=D^nI_a^{n-p}[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]\\
&=D^nI_a^nI_a^{n-p}D^nf(x)\\
&=I_a^{n-p}D^nf(x)\\
&={}^{c} D_a^pf(x).
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2.3.1.

D'après le relation on remarque que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire de reste dans le développement de Taylor de f.

2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

2.4.1 Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t).$$

2.4.2 La règle de Leibniz

Pour$n$ entier on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = f^{(k)}(t)g^{n-k}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^{\alpha}\Big(f(t)g(t)\Big) = f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t) + R_n^{\alpha}(t).$$

Ou $n > \alpha + 1$ et

$$R_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)d\tau \int_{\tau}^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi.$$

Avec

$$lim R_n^{\alpha}(t) = 0.$$

Sif et g sont continues dans $[a;t]$ ansi que toutes leurs dérivées la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t).$$

2.5 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.5.1. ***[16][21]***

Soit $\alpha > 0$ alors l'équation différentielles

$$^cD_{0+}^{\alpha} f(t) = 0.$$

Admet les solutions

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1.$$

Démonstration.

Supposons que

$$ {}^{c}D^{\alpha}_{0+}f(t) = 0. $$

D'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$ I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) = 0 $$

C'est à dire

$$ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)ds = 0. $$

Puisque $\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0$, on a

$$ \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)ds = 0, $$

et par suite

$$ I^{n-\alpha-1} * f^{(n)}(s) = 0. $$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$ L\Big(I^{n-\alpha-1} * f^{(n)}(t)\Big)(\alpha) = L(0)(\alpha) = 0. $$

Posant $F(\alpha) = L(f)(\alpha)$ on obtient

$$ \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\alpha^{n-\alpha}}\left(\alpha^n F(\alpha) - \sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k} f(k-1)(0)\right) = 0, $$

alors

$$ \alpha^n F(\alpha) - \sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k} f^{(k-1)}(0) = 0. $$

Donc

$$ F(\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\alpha^{-k} f^{(k-1)}(0). $$

Pliquant maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$ L^{-1}(f(\alpha))(t) = L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha^{-k} f^{(k-1)}(0)\right)(t), $$

il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) L^{-1}(\alpha^{-k})(t), \\
&= \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)},
\end{aligned}
$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ on trouve

$$
f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i.
$$

Pour $c_i = \dfrac{f^i(0)}{i!}$ on a

$$
f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i.
$$

Supposons maintenant que

$$
f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i
$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo au deux membres de l'égalité

$$
\begin{aligned}
{}^c D_{0+}^{\alpha} f(t) &=^c D_{0+}^{\alpha} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^c D_{0+}^{\alpha} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^i
\end{aligned}
$$

puisque $(0 \leq i \leq n - 1 < n)$ on a

$$
{}^c D_{0+}^{\alpha} f(t) = 0
$$

ce qui achève la démonstration. □

Lemme 2.5.2.

Soit $\alpha > 0$, alors

$$
I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}.
$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, ..., n - 1, n = [\alpha] + 1.$

Démonstration.

On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha} f(t) = I_{0+}^{n-\alpha} f^{(n)}(t), $$

On applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha} f(t) &= I^{\alpha} I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\
&= I^{nR}D_{0+}^{n} f(t) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t\to 0} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I^{n-n} f(t) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} f(t)\right)(0) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} f^{(n-j)}(0)
\end{aligned}
$$

Par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_{0+}^{\alpha}\, {}^{c}D^{\alpha} f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) t^{k}}{k!} \\
&= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^1 t^k}{k!} \\
&= f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k t^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

□

Chapitre 3

Théorème de continuation de Mawhin

Dans ce chapitre, on fait la présentation du théorème de continuation de Mawhin.Mais avant de faire la présentation plus détaillée du théorème, faisons brièvement l'état de l'art sur les opérateurs de Fredholm ainsi que les principales notions qui s'y rapportent. En revanche comme nous le verrons par la suite, ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections, alors nous y consacrons une autre section.Voir([23]-[32])

3.1 Supplémentaire topologique

Soit E et F deux sous-espaces fermés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé X. On dit que E est un supplémentaire topologique de F si X est la somme directe de F et E c-à-d

$$X = F \oplus E.$$

3.2 Projection

Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si $P(P(x)) = P(x), \quad \forall x \in X \quad (c - \text{à} - d \ si \quad P^2 = P)$.

Proposition 3.2.1.

Soit X, un espace vectoriel . Un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continue si et seulement si $(I - P)$ est continue.

Démonstration.

1) On montre que : P projection $\Leftrightarrow (I - P)$ projection.

($\Rightarrow$) P une projection, alors :

$$\begin{aligned}(I-P)^2 &= (I-P)[(I-P)(x)]x \\ &= (I-P)[x-P(x)] \\ &= I(x-P(x)) - P(x-P(x)) \\ &= x - P(x) - P(x) + P^2(x) \\ &= x - 2P(x) + P(x) \\ &= x - P(x) \\ &= (I-P)(x).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $(I - P)$ est une projection,alors :

$$I - (I - P) = I - I + P = P.$$

Est aussi une projection.

2) On montre que :P est continue $\Leftrightarrow$ $(I - P)$ est continue.

($\Rightarrow$) P est continue et I est continue , alors (I-P) continue.

($\Leftarrow$)(I-P) est continue ,alors p est continue .

Pour le cadre topologique, comme l'identité est une application continue et que la somme.

□

Proposition 3.2.2.

Si P est une projection dans X, alors :

$$\begin{cases} Ker(P) = Im(I - P), \\ Im(P) = Ker(I - P). \end{cases}$$

Démonstration.

1 On montre que $Ker(P) = Im(P)$.

(i) $Ker(P) \subset Im(I - P)$

Si $x \in Ker(P) \Rightarrow P(x) = 0$. En remplaçant P par $(I - P)$

$$\begin{aligned} (I - P)(x) &= x - P(x) = x - 0 = x \\ &\Rightarrow x \in Im(I - P) \\ &\Rightarrow Ker(P) \subset Im(I - P). \end{aligned}$$

(ii) $Ker(P) \supset Im(I - P)$

Si $x \in Im(I - P)$,on définie l'application :

$$\begin{aligned} P\Big((I - P)(x)\Big) &= P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in Ker(P) \\ &\Rightarrow Ker(P) \supset Im(I - P). \end{aligned}$$

Donc

$$Ker(P) = Im(I - P).$$

2 On montre que $Im(P) = Ker(I - P)$.

(i) $Im(P) \subset Ker(I - P)$

Si $x \in Im(P) \Rightarrow P(x) = x$, on remplaçant P par $(I - P)$. Alors

$$\begin{aligned} (I - P)(x) &= x - P(x)x - x = 0 \\ &\Rightarrow x \in Ker(I - P) \\ &\Rightarrow Im(P) \subset Ker(I - P). \end{aligned}$$

(ii) $Im(P) \supset Ker(I-P)$

Si $x \in Ker(I-P)(x)$

$$\begin{aligned}(I-P)(x)=0 \quad &\Leftrightarrow x-P(x)=0\\ &\Leftrightarrow x=P(x)\\ &\Rightarrow Im(P)\supset Ker(I-P).\end{aligned}$$

Donc

$$Im(P)=Ker(I-P).$$

□

Définition 3.2.1. ***(Un espace de Hausdorff)***

Un espace topologique X est séparé (ou de Hausdorff) si

$$\forall x \neq y \in X, \exists x \in U_x, y \in U_y \text{ ouverts tel que } U_x \cap U_y = \emptyset$$

.

Corollaire 3.2.1.

Toute projection continue dans un espace de Hausdorff est à image fermée. En particulier, les projections continues des espaces de Banach sont à images fermées.

Théorème 3.2.1.

Si P est une projection continue dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff X, alors X est la somme directe de $Im(P)$ et $Ker(P)$, $\big($c-à-d $X = Im(P) \oplus Ker(P)\big)$.

Démonstration.

Par le corollaire précédant , $Im(P)$ et $Ker(P)$ sont fermé dans X, où

$$Ker(P)=\{x\in X, P(x)=0\},$$

$$Im(P)=\{x\in X, P(x)=x\}.$$

On pose $x = P(x) + (I - P)(x)$

1- i) $P(x) \in Im(P)$ car $P(P(x)) = P^2(x) = P(x)$.

ii) $(I-P)(x) \in Ker(P)$ car $P((I-P)(x)) = P(x)-P^2(x) = P(x)-P(x) = 0$.

Alors

$$X = Im(P) + Ker(P).$$

2- i) $P(x) \in Im(P) = Ker(I - P) \Rightarrow P(x) = (I - P)P(x) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$

ii) $(I - P)(x) \in Ker(P) \Rightarrow (I - P)(x) = 0$.

Alors $x \in Im(P) \cap Ker(P) = \{0\}$.

D'après (1) et (2)

$$X = Im(P) \oplus Ker(P).$$

$\square$

3.3 Sous-espace de dimension et de codimension finie

Lemme 3.3.1. ***(Projection sur un sous-espace de dimension finie)***

Si E est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un projection P continu sur X tel que $Im(P) = E$.

Démonstration.

On choisit une base $e_1, ..., e_n$ de E, et on désigne par $e_j^*, j = 1, ..., n$ les formes linéaires coordonnées sur E c'est à dire

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger ces formes linéaire sur E en formes linéaires continues $x_1^*, ..., x_n^*$ sur X . On obtient que l'application P définie par :

$$\forall x \in X, \quad P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j.$$

Est un projection continue de Xsur E que répond au problème. $\square$

Corollaire 3.3.1.

Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, il existe un sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ tel que $X = E \oplus Y$

Définition 3.3.1. ***(Codimension d'un sous-espace vectoriel).***

Si l'espace quotient X/Y est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ est de codimension finie dans X qu'on écrit

$$codim(Y) = dim(X/Y)$$

Lemme 3.3.2.

Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espace vectoriel fermé de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $dim(M) = codim(N) < \infty$, alors $E = M \oplus N$.

Démonstration.

Soit $\pi = \pi_{|N}$ la surjection canonique de E sur E/N. Comme $M \cap N = \{0\}$, l'application π_M est injective.D'où

$$dim(\pi(M)) = dim(M) = codim(N) = dim(E/N).$$

Ainsi $\pi(M) = E/N = \pi(E)$. Maintenant si $x \in E$ quelconque, alors $\pi(x) \in \pi(E) = \pi(M)$.

Ainsi il existe x_M tel que $\pi(x) = \pi(x_M)$. D'où $\pi(x - x_M) \in Ker\pi = N$. On en déduit donc que $x \in M + N$. Ceci prouve que $E = M + N$ et donc finalement $E = M \oplus N$. $\square$

3.4 Opérateur de Fredholm

Définition 3.4.1.

Soient X et Y deux $\mathbb{R}$-espace vectoriels normés, on dit qu'une application linéaire $L : dom(L) \subset X \to Y$ est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes :

1 $Ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ *est de dimension finie.*

2 $Im(L) = L(dom(L))$ *est fermée et de codimension finie.*

Rappelons que la codimension de $Im(L)$ est la dimension de $coKer(L) = dim(Y/Im(L))$.

Définition 3.4.2. ***(L'indice)***

Si L est un opérateur de Fredholm, alors son indice est l'entier

$$ind(L) = dim(Ker(L)) - codim(Im(L)).$$

Exemple 3.4.1.

1. *Si X et Y sont de dimensions finies, alors tout application linéaire $L : X \to Y$ est de Fredholm avec*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dimcoKer(L) \\ &= dim(Ker(L)) - (dim(Y) - dim(Im(L))) \\ &= dim(Ker(L)) + dim(Im(L)) - dim(Y) \\ &= dim(X) - dim(Y). \end{aligned}$$

2. *l'identité $I : X \to X$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(I)) - codim(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dimcoKer(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dim\left(\frac{X}{Im(I)}\right) \\ &= dim\{0\} - dim\{0\} = 0. \end{aligned}$$

3. *Si X et Y sont des espaces de Banach et $L : X \to Y$ est une application linéaire bijective alors L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. En effet, il découle de la bijective que $Ker(L) = \{0\}_X$, dont la dimension est nulle, et $Im(L) = Y$ et sa codimension est nulle, ainsi*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dim\left(\frac{Y}{Im(Y)}\right) \\ &= dim\{0\}_X - dim\{0\} = 0. \end{aligned}$$

Théorème 3.4.1.

Si L est un opérateur de Fredholm, K st une application linéaire compacte, alors $L+K$ est de Fredholm et

$$ind(L+K) = ind(L).$$

En particulier,toute perturbation compacte de l'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 3.4.1.

Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, alors L est surjectif si et seulement si L est injectif.

Démonstration.

Si L est surjective, alors $Im(L) = Y = Y + \{0\}$ et par suite , $dim\{0\} = dim(Ker(L)) = 0$, donc $Ker(L) = \{0\}$, d'où L est injective. □

Dans tout ce qui suit (sauf mention de contraire) $L : om(L) \subset X \to Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0. Si L est de Fredholm, alors d'aprés ce qui précède, il existe deux projections continues, $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ tel que

$$Im(P) = Ker(L), \quad Ker(Q) = Im(L).$$

On pose

$$X_1 = Im(I - P) = Ker(P) \quad et \quad Y_1 = Im(Q)$$

alors on eut écrire

$$X = Ker(L) \oplus X_1; \quad Y = Im(L) \oplus Y_1,$$

Considérons un isomorphisme

$$J : Ker(L) \to Im(Q).$$

dont l'existence est assurée par le fait que $dimker(L) = dimIm(Q) = n$.
Remarquons que

$$dom(L) = Ker(L) \oplus (dom(L) \cap X_1).$$

Et que la restriction de L à $dom(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur $Im(L)$, notons par L_p cette restriction c'est à dire $Lp : dom(L) \cap X_1 \to Im(L)$, alors

Lemme 3.4.1.

L_p est un isomorphisme algébrique.

Démonstration.

1- Montrons que L^p est injective :

Soit $x \in Ker(Lp) \subset Ker(L) = Im(P)$, alors il existe un $y \in Dom(P)$ tel que $x = Py$.
Comme P est une projection, on obtient

$$x = Py = P^2 y = P(Py) = Px = 0.$$

Par conséquent, $x = 0$, et donc $Ker(L_p) = \{0\}$, ce qui signifie l'injection de L^p.

2- la surjection de L^p :

puisque P est une projection , alors nous pouvons écrire l'espace vectoriel X comme somme directe :

$$X = Ker(P) \oplus Im(P) = Ker(P) \oplus Ker(L).$$

Prenons $z \in Im(L)$, donc il existe $x \in dom(L) \subset X$ tel que $Lx = z$.
Comme $X = Ker(P) \oplus Ker(L)$, alors il existe deux éléments uniques

$$\begin{cases} e \in Ker(P) \quad et \;\; f \in Ker(L) \quad telsque \;\; x = e + f. \end{cases}$$

On a

$$z = Lx = L(e + f) = Le + Lf = Le + 0 = Le$$

, ainsi $e \in dom(L)$.
Finalement, on obtient $e \in dom(L), e \in Ker(P)$ et $L_p e = z$, d'où L_p est bien surjective.

□

Soit $Kp : Im(L) \subset Y \to dom(L) \cap Ker(P)$ est bijectif, défini par $K_p := L_p^{-1}$, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés.

Lemme 3.4.2.

1 *Sur $Im(L)$, on a $LK_p = I$.*

2 *Sur $dom(L)$, on a $K_pL = (I - P)$.*

Démonstration.

(1) Prenons $x \in Im(L)$, alors $LK_px = L(K_p(x)) = L_p(K_p(x)) = Ix$.

(2) Comme $Im(P) = Ker(L)$, alors $LP = 0$, et par suite $K_pL = K_pL(I - P)$.

Donc montrer (2), revient à vérifier que $K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P)$.
Si on a $Im(I - P) \subseteq dom(L_p) = dom(L) \cap Ker(P)$, alors le résultat s'ensuit.
Prenons $x \in dom(L)$ Comme $P(x) \in Ker(L) \subset dom(L)$ et $dom(L)$ est un sous espace vectoriel de X, on a

$$(x - Px) \in dom(L).$$

Puisque

$$P(x - Px) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0.$$

Alors $(x - Px) \in Ker(P)$ et par conséquent $(x - Px) \in dom(L) \cap Ker(P)$.
D'ici obtient $Im(I - P) \subset dom(L) \cap Ker(P)$. D'où en utilisant (1) :

$$K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P).$$

s'ensuit. □

Définition maintenant l'opérateur $K_{P;Q} : Y \to X$,avec $K_{P;Q} = L_p^{-1}(I - Q)$.

Lemme 3.4.3.

L'opérateur $L + JP : dom(L) \to Y$ est un isomorphisme et

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q.$$

En particulier,

$$(L + JP)^{-1}x = J^{-1}x \quad \textit{pour tout} \quad x \in Im(Q).$$

Démonstration.

Pour l'injectivité de $L + JP$, soit $x \in dom(L)$ tel que

$$(L + JP)x = 0. \tag{3.1}$$

De cette égalité on en déduit que

$$Lx \in Im(L) \cap Im(J) = Ker(Q) \cap Im(Q) = \{0\},$$

d'où $x \in Ker(L)$. Par conséquence, $Px = x$ et compte tenu de (3.1) où $0 < t < 1$, $Jx = 0$, par suite $x = 0$. Pour la surjectivité de $L + JP, y \in Y$.
Affirmons que

$$x = (K_{P,Q} + J^{-1}Q)y,$$

est une solution de

$$(L + JP)x = y.$$

En effet, comme $J^{-1}Qy \in Ker(L)$, il en résulte que

$$\begin{aligned} Lx &= LK_{P,Q}. \\ &= LL_p^{-1}(I - Q)y \\ &= (I - Q)y. \end{aligned}$$

Comme $K_{P,Q}y \in dom(L) \cap Ker(P)$, il en s'ensuit que

$$JPx = JJ^{-1}Qy = Qy,$$

conséquemment

$$(L + JP)x = (I - Q) = Qy,$$

et

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q.$$

$\square$

Lemme 3.4.4.

Si $N : \triangle \subset X \to X$ est une application, le problème

$$x \in dom(L) \cap \triangle \quad , Lx = Nx.$$

Est équivalent au problème de point fixe

$$x \in \triangle, x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx.$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned}
&[x \in dom(L) \cap \triangle \ \ , Lx = Nx] \\
\Leftrightarrow &[x \in dom(L) \cap \triangle \ \ , (L + JP)x = (N + JP)x] \\
\Leftrightarrow &[x \in \triangle \ \ , x = (L + JP)^{-1}(N + JP)x].
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le lemme (**??**) :

$$\begin{aligned}
(L + JP)^{-1}(N + JP) &= (K_{P,Q} + J^{-1}Q)(N + JP) \\
&= K_{P,Q}N + K_{P,Q}JP + J^{-1}QN + J^{-1}QJP.
\end{aligned}$$

Puisque $Im(J) = Im(Q) = Ker(I - Q)$, il en résulte que

$$K_{P,Q}JP = L_p^{-1}(I - Q)JP = 0.$$

Puisque $Q|_{Im(Q)} = I|_{Im(Q)}$ et $Im(J) = Im(Q)$, on en déduit que

$$J^{-1}QJP = J^{-1}JP = P.$$

Par conséquent, $(L + JP)^{-1}(N + JP) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$. □

Soient X, Y deux espaces de Banach et $L : dom(L) \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Définition 3.4.3. ***(l'application L-compacte)***

Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \to Y$ est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si

1. *$QN(\overline{\Omega})$ est borné.*
2. *$K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$ est compacte.*

Comme conséquence des lemmes (3.4.3) et (3.4.4) on a la définition suivant :

Définition 3.4.4. ***(le degré de Mawhin)***

Si les opérateur L et N satisfont les propriétés mentionnées ci dessus,alors le degré de coïncidence de L et N sur Ω est définit par

$$deg[(L, N), \Omega] = deg_{LS}(I - M, \Omega, 0).$$

Où M désignera la quantité donnée par :

$$M(P, J, Q) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N.$$

3.5 Preuve du théorème de Mawhin

Théorème 3.5.1.

Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est L-compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) *$Lx \neq Nx$ pour tout $[(x, \lambda) \in [(dom(L) \setminus Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0, 1[$.*

(ii) *$QNx \neq 0$ pour tout $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.*

(iii) *$deg_B(J^{-1}QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$ où $Q : Y \to Y$ est la projection définie ci dessus avec $Im(L) = Ker(Q)$.*

Alors l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solution dans $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration.

Pour $\lambda \in [0,1]$, considérons la famille de problèmes

$$x \in dom(L) \cap \overline{\Omega}, Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)QNx \tag{3.2}$$

Soit $M : [0,1] \times \overline{\Omega} \to Y$ une homotopie définie par

$$M(\lambda, x) = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx$$

En vertu du lemme (3.4.4), le problème (3.2) est équivalent à un problème de point fixe $x \in \overline{\Omega}$ et

$$\begin{aligned} x &= Px + J^{-1}Q(\lambda N + (1-\lambda)QN)x + K_{P,Q}(\lambda N + (1-\lambda)QN)x \\ &= Px + J^{-1}QNx + (1-\lambda)J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx + (1-\lambda)K_{P,Q}QNx \\ &= M(\lambda, x). \end{aligned}$$

Donc, cette dernière équation est équivalente à un problème de point fixe

$$x \in \overline{\Omega} \quad , x = M(\lambda, x) \tag{3.3}$$

S'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que $Lx = Nx$, alors nous avons terminé. Maintenant supposons que

$$Lx \neq Nx \quad \textit{pour tout} \quad x \in dom(L) \cap \Omega, \tag{3.4}$$

et d'autre part

$$Lx \neq \lambda Nx + (1-\lambda)QNx. \tag{3.5}$$

Pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (dom(L) \cap \Omega)$. Si

$$Lx = Nx + (1-\lambda)QNx.$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (dom(L) \cap \Omega)$, on obtient par application de Q aux deux membres de l'égalité précédente

$$QNx = 0, \quad Lx = Nx.$$

La première de ces égalités et la condition (ii) impliquent que $x \notin Ker(L) \cap \partial\Omega$, i.e $x \in \partial\Omega \cap dom(L) \setminus Ker(L)$ et donc la seconde égalité contredit (i).En utilisant une nouvelle fois (ii), il s'ensuit que

$$Lx \neq QNx \quad pour\ tout \quad x \in dom(L) \cap \partial\Omega. \tag{3.6}$$

En vertu de (3.4) , (3.5) et (3.6) on déduit que

$$x \neq M(\lambda, x) \quad pour\ tout \ \ (\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega. \tag{3.7}$$

Il est facile de vérifier que $M(\lambda, x)$ est compacte car N est L-compacte sur $\overline{\Omega}$, dés lors en utilisant la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, on obtient

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = degLS(I - M(1,.), \Omega, 0). \tag{3.8}$$

D'autre part on a

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0). \tag{3.9}$$

Mas le rang de $P + J^{-1}QN$ est contenu dans $Ker(L)$, d'où en utilisant la propriété de reduction du degré de Leray-Schauder et le fait que $P|_{Ker(L)} = I|_{Ker(L)}$, (car $Ker(L) = Im(P) = Ker(I - P)$) on obtient

$$deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0) = deg_B(I - (P + J^{-1}QN), \Omega \cap Ker(L), 0) \tag{3.10}$$

$$= deg_B(J^{-1}QN, \Omega \cap Ker(L), 0). \tag{3.11}$$

En vertu de (3.8) (3.9) (3.11),il s'ensuit que $deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0) \neq 0$, et donc la propriété d'existence du degré de Leray-Schauder implique l'existence d'un $x \in \overline{\Omega}$ tel que

$$x = M(1, x) \ \ i.e \ \ x \in dom(L) \cap \ \Omega \ \ , \ \ Lx = Nx.$$

□

Chapitre 4

Application de théorème

4.1 Introduction

Dans cette section, nous étudions d'abord l'existence de solutions pour la frontière en deux points problème de valeur pour l'équation différentielle p-Laplace fractionnaire à la résonance, qui est basé sur la théorie du degré de coïncidence. Ensuite, nous donnerons un exemple pour illustrer la validité et la praticabilité de nos principaux résultats.Maintenant, nous commençons avec quelques théorèmes ci-dessous

$$(P)\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{0+}\varphi_p(D^{\beta}_{0+}u(t)) = f(t, u(t), D^{\beta}_{0+}u(t)) \\ u(0) = 0, D^{\beta}_{0+}u(0) = D^{\beta}_{0+}u(1) \end{cases} \tag{4.1}$$

Où ${}^cD^{\alpha}_{0+}, {}^cD^{\alpha}_{0+}$ **désignent les dérivées fractionnaires de Caputo,** $0 < \alpha, \beta \leq 1$ **,**$1 < \alpha + \beta \leq 2$**. Par la théorème de Mawhin et de théorème et des lemmes auxiliaire. On dit que le problème à valeur aux limites (4.1) est en résonance si l'équation linéaire** $Lx = Nx$**, sous les conditions aux limite possède une solution non triviale i.e ,**$L \geqslant 1$ **.**

4.2 Resultat d'existence .

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et théorèmes que nous utiliserons pour la preuve des principaux résultats.

Nous commençons par présenter au lecteur les outils fondamentaux de la calcul et théorie des degrés de coïncidence dans les chapitre précédents.
Maintenant, nous rappelons brièvement quelques notations et un résultat d'existence abstrait du Mawhin .

1- Soient X ,Ydeux espaces de Banach réels et $L : domL \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire qui est une application Fredholm de l'indice zéro ,et $N : X \longrightarrow Y$ une application continue non linéaire.Si

(i) $kerL = dim(Y/ImL) < \infty$

(ii) ImL est un ensemble fermé de Y

Alors L est un application de Fredholm d'indice zéro .

2- Si L est une application de Fredholm d'indice zéro $P : X \longrightarrow X$ et $Q : Y \longrightarrow Y$ deux projections continues tels que

$$\begin{cases} ImP = kerL, \\ kerQ = ImL, \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} X = kerL \oplus kerP, \\ Y = ImL \oplus ImQ \end{cases}$$

Il en suit que $L_p = L|_{domL \cap kerP} : domL \cap kerP \longrightarrow ImL$ est inversible.

Notons par K_p son application inverse.

3- Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X et $domL \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \longrightarrow Y$ est dite L-compact sur $\overline{\Omega}$ si :

(i) l'application $QN(\overline{\Omega})$ est bornée.

(ii) $K_P(I - Q)N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte.

Théorème 4.2.1. *Soient X, Y des espaces de Banach réels, $L : domL \subset X \to Y$ un Opérateur de Fredholm d'indice zéro et $N : X \to Y$ soit L-compact sur Ω. Suppose que les conditions suivantes sont remplies*

(i) $Lx \neq \lambda Nx$ *pour tout* $(x, \lambda) \in [(dom(L) \backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0, 1[$.

(ii) $Nx \notin ImL$ *pour tout* $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.

(iii) $deg_B(QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$, *où* $Q : Y \longrightarrow Y$ *est la projection définie ci dessus avec* $Im(L) = Ker(Q)$

Alors l'équation $Lu = Nu$ *admet au moins une solution dans* $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Théorème 4.2.2. ***(Ascoli-Arzela)***

Considérons $X = C([a, b])$ *muni de la norme* $\|u\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t)|$, *avec* $-\infty < a < b < +\infty$. *Si* M *est un sous ensemble de* X *tel que :*

(i) M *est borné :*

$$\|u(t)\| \leqslant r, \quad \forall u \in M \ \ et \ \ r > 0$$

(ii) M *est équicontinu :*

$$\forall \epsilon > 0 \ , \exists \ \delta > 0 \ \ tq \ \ , |t_1 - t_2| < \delta \ \ et \ \ \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$$

Alors, ***M est relativement compact .***

Dans ce qui suit , On prend $Y = C[0, 1]$ avec la norme $\|y\|_Y = \max\limits_{t \in [0,1]} |y(t)|$ et $X = \{x | x, D^{\beta}_{0+} x \in Y\}$ on définit la norme $\|x\|_X = max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$ ou $\|x\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$. En utilisant le théorème de l'analyse fonctionnelle linéaire,on peut prouver que Xest un espace de Banach (voir[21]).Définissez l'opérateur $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ par :

$$Lx = D^{\alpha}_{0+} \varphi_p(D^{\beta}_{0+} x), \tag{4.2}$$

Ou

$$dom(L) = \{x \in X | D^{\alpha}_{0+} \varphi_p(D^{\beta}_{0+} x) \in Y \ , x(0) = 0 \ , D^{\beta}_{0+} x(0) = D^{\beta}_{0+} x(1)\}.$$

Soit l'opérateur $N : X \longrightarrow Y$ défini par :

$$Nx = f(t, u(t), D^{\beta}_{0+} x(t)), \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{4.3}$$

Alors le problème aux limites (4.1) sera équivalent :

$$Lx = Nx, \quad x \in dom(L).$$

Nous donnons à présent le théorème principale de ce chapitre, soit celui d'existence de solution du problème (4.1)

Lemme 4.2.1.

Soit L est défini par (4.2) *.Alors*

$$kerL = \Big\{x \in X | x(t) = ct^{\beta} \ , c \in \mathbb{R} \ , \forall t \in [0,1]\Big\}, \tag{4.4}$$

$$ImL = \Big\{y \in Y | \int_0^1 (1-s)^{\alpha} - 1y(s)ds = 0\Big\}. \tag{4.5}$$

Démonstration.

On a par lemme (2.5.1) , $Lx(t) = 0$ admet une solution

$$\begin{aligned} Lx(t) = 0 &\Longleftrightarrow D^{\alpha}_{0+}\varphi_p(D^{\beta}_{0+}x(t)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \varphi_p(D^{\beta}_{0+}x(t)) = I^{\alpha}_{0+}(0) = c_1 \\ &\Longleftrightarrow D^{\beta}_{0+}x(t) = \varphi_q(c1) \\ &\Longleftrightarrow x(t) = c_0 + I^{\beta}_{0+}\varphi_q(c1). \end{aligned}$$

Alors

$$x(t) = c_0 + I^{\beta}_{0+}\varphi_q(c_1) = c_0 + \frac{\varphi_q(c_1)}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta}, \ c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

En combinant avec la condition aux limites x(0)=0

$$x(0) = c_0 + \frac{\varphi_q(c_1)}{\Gamma(\beta+1)}0^{\beta} = 0 \Rightarrow c_0 = 0.$$

Donc

$$x(t) = \frac{\varphi_q(c_1)}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta} = ct^{\beta}, \qquad c = \frac{\varphi_q(c_1)}{\Gamma(\beta+1)}.$$

On a que (4.4).

Pour $y \in ImL$, il exits $x \in domL$ tq $y(t) = Lx$.

D'aprés le Lemme (2.5.2), nous avons

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(t)\Big) &= y(t) \\ \varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(t)\Big) &= I^{\alpha}_{0+}y(t) + c. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D^{\beta}_{0+}x(t) &= \varphi_q\Big(I^{\alpha}_{0+}y(t) + c\Big) \\ &= \varphi_q\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds + c\Big), \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De la condition $D^{\beta}_{0+}x(0) = D^{\beta}_{0+}x(1)$,on obtient que

$$\begin{aligned} D^{\beta}_{0+}x(0) &= \varphi_q\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^0 (0-s)^{\alpha-1}y(s)ds + c\Big) = \varphi_q(c). \\ Et \qquad D^{\beta}_{0+}x(1) &= \varphi_q\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds + c\Big) \\ &= \varphi_q\Big(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds + c\Big). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D^{\beta}_{0+}x(0) = D^{\beta}_{0+}x(1) &\Longleftrightarrow \varphi_q(c) = \varphi_q\Big(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds + c\Big), \\ &\Longleftrightarrow c = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds + c. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds = 0. \tag{4.6}$$

Ainsi ,on obtient (4.5).

D'autre part, supposons $y \in Y$ et satisfait (4.6).

Soit $x(t) = I^{\beta}_{0+}\varphi_q(D^{\alpha}_{0+}y(t))$, alors $x \in dom(L)$, et

$$Lx(t) = D^{\alpha}_{0+}\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(t)\Big) = y(t).$$

Par conséquent ,$y \in ImL$, donc

$$ImL = \Big\{y \in Y | \int_0^1 (1-s)^{\alpha} - 1y(s)ds = 0\Big\}.$$

$\square$

Lemme 4.2.2.

Soit L défini par (4.2). alors L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et les opérateurs de projecteurs linéaires continus $P : X \longrightarrow X$ et $Q : Y \longrightarrow Y$ peuvent être défini comme :

$$Px(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} D^{\beta} x(0) t^{\beta}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$Qy(t) = \alpha \int_0^1 (1 - s)^{\alpha - 1} y(s) ds, \ \forall t \in [0, 1].$$

De plus, l'opérateur $K_P : ImL \longrightarrow domL \cap Ker_P$ peut s'écrire :

$$K_P y(t) = I_{0+}^{\beta} \varphi_q \Big(I_{0+}^{\alpha} y(t) \Big) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta - 1} \varphi_q \Big(\int_0^1 (1 - s)^{\alpha} - 1 y(s) ds \Big).$$

Démonstration.

Clairement , $ImP = KerL$ et $P^2 x = Px$.

Il s'ensuite que pour chaque $x \in X,\ x = (x - Px) + Px$,c'est $X = KerP + KerL$.

Un simple calcul montre que $KerP \cap KerL = 0$.

Par conséquent

$$X = KerL \oplus KerP.$$

Pour tout $y \in Y$ nous avons

$$Q^2 y(t) = Q.Qy(t) = \alpha \int_0^1 (1 - s)^{\alpha - 1} ds.Qy(t) = Qy(t). \tag{4.7}$$

Soit $y_1 = y - Qy$,d'après (4.7) obtient ce qui suit

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha - 1} y_1(s) ds &= \int_0^1 (1 - s)^{\alpha - 1} y(s) ds - \int_0^1 (1 - s)^{\alpha - 1} Qy(s) ds \\ &= \frac{1}{\alpha} Qy - \frac{1}{\alpha} Q^2 y(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui impliques $y_1 \in ImL$. Donc $Y = ImL + ImQ$.

Comme $ImL \cap ImQ = 0$ .On $Y = ImL \oplus ImQ$. Ainsi

$$dimKerL = dimImQ = codimImL = I.$$

Cela signifie que L est un opérateur Fredholm d'indice zéro.

D'après les définition de P ,K_P ,il est facile de voir que l'inverse généralisé de L est K_P.En effet, pour $y \in ImL$, on a

$$L_P k_P y = D^{\alpha}_{0+}\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}I^{\beta}_{0+}\varphi_q(I^{\alpha}_{0+}y)\Big) = y. \tag{4.8}$$

De plus , pour $x \in domL \cap KerP$, on obtient $x(0) = D^{\beta}_{0+}x(0) = D^{\beta}_{0+}x(1) = 0$.
lemme(2.5.1) , on obtient que

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{0+}L_P x &= I^{\alpha}_{0+}D^{\alpha}_{0+}\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(t)\Big) \\ &= \varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(t)\Big) + c_0 \qquad , c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ce qui,avec $D^{\alpha}_{0+}x(0) = 0$,donne que

$$I^{\alpha}_{0+}L_P x = \varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(t)\Big).$$

Ainsi , nous avons

$$I^{\beta}_{0+}\varphi_q\Big(I^{\alpha}_{0+}L_P x\Big) = I^{\beta}_{0+}D^{\beta}_{0+}x(t) = x(t) + c_1 \qquad , c_1 \in \mathbb{R}.$$

Ce qui,avec $x(0) = 0$,donne que

$$K_P L_P x = x. \tag{4.9}$$

En combinant (4.8) avec (4.9), nous savons que K_p est l'inverse de L_P. □

Lemme 4.2.3.

Supposons que $\Omega \subset X$ est un sous ensemble ouvert borné tel que $domL \cap \bar{\Omega} \neq 0$, alors N est L-compact.

Démonstration.

Notons $K_{P,Q} = K_P(I-Q)N$.Par la continuité de f , on obtient que $QN(\bar{\Omega})$ et $K_{P,Q}\,(\Omega)$ sont bornés. De plus, il existe une constante $M > 0$ tel que $|I^{\alpha}_{0+}(I-Q)Nx| \leq M, \forall x \in \bar{\Omega}, t \in [0,1]$.Ainsi, compte tenu de la Théorème d'Arzela-Ascoli, il suffit de prouver que $K_P, Q(\bar{\Omega}) \subset X$ est équicontinu.

Pour $0 \leq t1 < t2 \leq 1$, $x \in \bar{\Omega}$ on a

$$\begin{aligned}
|(K_{P,Q}\,x)(t_2) - (K_{P,Q}\,x)(t_1)| &= |K_P(I-Q)Nx(t_2) - K_P(I-Q)Nx(t_1)| \\
&= \left| I^{\beta}_{0+}\varphi_q\Big(I^{\alpha}_{0+}(I-Q)Nx(t_2)\Big) - I^{\beta}_{0+}\varphi_q\Big(I^{\alpha}_{0+}(I-Q)Nx(t_1)\Big) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\beta-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-u)^{\alpha-1}(I-Q)Nx(u)du\right)ds \right. \\
&\left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\beta-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-u)^{\alpha} - 1(I-Q)Nx(u)du\right)ds \right| \\
&\leq \frac{\varphi_q(M)}{\Gamma(\beta)} \left| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\beta-1}ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}ds \right| \\
&\leq \frac{\varphi_q(M)}{\Gamma(\beta)} \left\{ \Big[\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1} - \int_0^{t_1}(t_2-s)^{\beta-1}ds \Big] + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}ds \right\} \\
&\leq \frac{\varphi_q(M)}{\Gamma(\beta+1)} \Big[t_1^{\beta} - t_2^{\beta} + 2(t_1-t_2)^{\beta} \Big] \\
&\leq \frac{\varphi_q(M)}{\Gamma(\beta+1)} \Big[t_2^{\beta} - t_1^{\beta} + 2(t_1-t_2)^{\beta} \Big].
\end{aligned}$$

Comme t^{β} est uniformément continue sur $[0,1]$, on peut obtenir que $K_{P,Q}\,(\bar{\Omega}) \subset C[0,1]$ est équicontinu.

Une preuve similaire peut montrer que $I^{\alpha}_{0+}(I-Q)N(\bar{\Omega}) \subset C[0,1]$ est équicontinu.

Ceci, ajouté à la continuité uniforme de $\varphi(s)$ sur $[-T,T]$, donne que :

$$D^{\beta}_{0+}\Big(K_{P,Q}\Big)(\bar{\Omega}) = D^{\beta}_{0+}\Big(K_P(I-Q)N\Big)(\bar{\Omega}) = \varphi_q\Big(I^{\alpha}_{0+}(I-Q)N\Big)(\bar{\Omega}) \subset C[0,1]).$$

Est aussi équicontinue.

Ainsi, nous avoir que $K_P(I-Q)N : \bar{\Omega} \to X$ est compact . $\square$

Lemme 4.2.4.

Supposons que $(H1)$ *et* $(H2)$ *tiennent, alors l'ensemble :*

$$\Omega_1 = \Big\{ x \in domL\ KerL | Lx = \lambda Nx, \lambda \in (0,1) \Big\}$$

est délimité.$(H1)$ *et* $(H2)$ *seront donnés dans (4.3.1).*

Démonstration.

Soit $x \in \Omega_1$, alors $Lx = \lambda Nx$ et $Nx \in ImL$ .D'après (4.5) ,on a

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), D^\beta_{0+}x(s)\Big) = 0.$$

Alors, par le théorème de la valeur moyenne intégrale, il existe une constante $\varepsilon \in (0,1)$ telle que

$$f\Big(\varepsilon, x(\varepsilon), D^\beta_{0+}x(\varepsilon)\Big) = 0.$$

Donc, à partir de $(H2)$, on obtient $|D^\beta_{0+}x(\varepsilon)| \leq D$. De $x \in domL$, on obtient $x(0) = 0$. Donc

$$|x(t)| = \Big|x(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} D^\beta_{0+}x(s)\Big| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \|D^\beta_{0+}x\|_\infty.$$

C'est

$$\|x(t)\|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \|D^\beta_{0+}x\|_\infty. \tag{4.10}$$

Par $Lx = \lambda Nx$, on a

$$\begin{aligned}
&D^\alpha_{0+}\varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(t)\Big) = \lambda Nx,\\
&I^\alpha_{0+}\varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(t)\Big) = I^\alpha_{0+}\lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), D^\beta_{0+}x(s)\Big) ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(t)\Big) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), D^\beta_{0+}x(s)\Big) ds + \varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(0)\Big), \quad t \in [0,1]. \tag{4.11}$$

Prenons $t = \varepsilon$, on obtient

$$\varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(\varepsilon)\Big) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon (\varepsilon-s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), D^\beta_{0+}x(s)\Big) ds + \varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(0)\Big). \tag{4.12}$$

Avec $|D^\beta_{0+}x(\varepsilon)| \leq D$, (H_1) et (4.9) , on a

$$\begin{aligned}
\Big|\varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(0)\Big)\Big| &= \Big|\varphi_p\Big(D^\beta_{0+}x(\epsilon)\Big) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\epsilon (\epsilon-s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), D^\beta_{0+}x(s)\Big) ds\Big|\\
&\leq D^{p-1} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \Big[a(s) + b(s)|x(s)|^{p-1} + c(s)|D^\beta_{0+}x(s)|^{p-1}\Big] ds\\
&\leq D^{p-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Big[\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|^{p-1}_\infty + \|c\|_\infty \|D^\beta_{0+}x\|^{p-1}_\infty\Big]\\
&\leq D^{p-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Big[\|a\|_\infty + \Big(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty\Big) \|D^\beta_{0+}x\|^{p-1}_\infty\Big].
\end{aligned}$$

Donc , nous avons

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(t)\Big)\right| &\leq \Big|\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), D^{\beta}_{0+}x(s)\Big)|ds + \varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(0)\Big)\Big| \\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big|f\Big(s, x(s), D^{\beta}_{0+}x(s)\Big)\Big|ds + \Big|\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(0)\Big)\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Bigg[a(s) + b(s)|x(s)|^{p-1} + c(s)|D^{\beta}_{0+}x(s)|^{p-1}\Bigg]ds + \Big|\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(0)\Big)\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg[\|a\|_\infty + \|b\|_\infty\|x(s)\|^{p-1}_\infty + \|c\|_\infty\|D^{\beta}_{0+}x\|^{p-1}_\infty\Bigg] + \Big|\varphi_p\Big(D^{\beta}_{0+}x(0)\Big)\Big|. \\
&\leq D^{p-1} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg[\|a\|_\infty + \Big(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty\Big)\|D^{\beta}_{0+}x\|^{p-1}_\infty\Bigg].
\end{aligned}
$$

Ainsi, de $\Gamma(\alpha+1) - 2\Big(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty\Big) > 0$ on obtient que

$$\|D^{\beta}_{0+}\|_\infty \leq M_1, \tag{4.13}$$

et

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{\beta+1}\|D^{\beta}_{0+}\|_\infty \leq M_2. \tag{4.14}$$

En combinant (4.13) avec (4.14) , on a

$$\|x\|_X = \max\Big\{\|x\|_\infty, \|D^{\beta}_{0+}\|_\infty\Big\} \leq \max\Big\{M_1, M_2\Big\} := M.$$

Par conséquent, Ω_1 est borné. □

Lemme 4.2.5.

Supposons que $(H3)$ *tienne, alors l'ensemble*

$$\Omega_2 = \Big\{x | x \in KerL, Nx \in ImL\Big\}.$$

Est délimité. $(H3)$ *sera donné en Sect 4.*

Démonstration.

Pour $x \in \Omega_2$,on a $x(t) = ct^\beta$,$c \in \mathbb{R}$ et $Nx \in ImL$.

Ensuite on obtient
$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\Big(s, cs^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) ds = 0.$$
Qui avec $(H3)$ implique $|c| \leq D^*$. Ainsi, nous avons
$$\|x\|_X \leq D^*.$$
Par conséquent, Ω_2 est borné. □

Lemme 4.2.6.

Supposons que $(H3)$ tienne, alors l'ensemble
$$\Omega_3 = \Big\{x | x \in KerL, \pm\lambda x + (1-\lambda)QNx = 0, \lambda \in [0,1]\Big\}.$$
Est délimité. $(H3)$ sera donné en Sect.4

Démonstration.

La preuve divisée en deux cas par les relations de $f(t,u,v)$ et v.

Cas 1 : Il existe une constante $D^* > 0$ telle que pour tout $c \in \mathbb{R}$ avec $|c| > D^*$,
$$cf\Big(t, ct^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) > 0. \tag{4.15}$$
Dans ce cas $\Omega_3 = \Big\{x | x \in KerL, \lambda x + (1-\lambda)QNx = 0, , \lambda \in [0,1]\Big\}$.

pour $x \in \Omega_3$, on a $x(t) = ct^\beta$, $c \in \mathbb{R}$, et
$$\lambda ct^\beta + \alpha(1-\lambda)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} cf\Big(s, cs^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) = 0. \tag{4.16}$$
Si $\lambda = 0$, alors $|c| \leq D^*$.si $\lambda \in [0,1]$, on peut aussi obtenir $|c| \leq D^*$.

Sinon, si $|c| > D^*$ d'après (4.15), on a
$$\lambda c^2 t^\beta + \alpha(1-\lambda)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} cf\Big(s, cs^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) > 0.$$
Ce qui contredit (4.16). Par conséquent, Ω_3 est borné.

Cas 2 : Il existe une constante $D^* > 0$ telle que pour tout $c \in \mathbb{R}R$ avec $|c| > D^*$,

$$cf\Big(t, ct^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) < 0. \tag{4.17}$$

Dans ce cas $\Omega_3 = \Big\{x|x \in KerL, -\lambda x + (1-\lambda)QNx = 0, , \lambda \in [0,1]\Big\}$.
pour $x \in \Omega_3$, on a $x(t) = ct^\beta$, $c \in \mathbb{R}$, et

$$-\lambda ct^\beta + \alpha(1-\lambda)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} cf\Big(s, cs^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) = 0. \tag{4.18}$$

Si $\lambda = 0$, alors $|c| \leq D^*$.si $\lambda \in (0,1]$, on peut aussi obtenir $|c| \leq D^*$.
Sinon, si $|c| > D^*$ d'après (4.17), on a

$$-\lambda c^2 t^\beta + \alpha(1-\lambda)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} cf\Big(s, cs^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) < 0.$$

Ce qui contredit (4.16). Par conséquent, Ω_3 est borné. D'après les cas 1 et 2 ci-dessus, nous pouvons savoir que Ω_3 est borné.

□

4.3 Preuve du théorème et exemple

Dans cette section, nous étudions d'abord l'existence de solutions pour la frontière en deux points problème de valeur pour l'équation différentielle p-Laplace fractionnaire (4.1) à la résonance, qui est basé sur la théorie du degré de coïncidence.
Ensuite, nous donnerons un exemple pour illustrer la validité et la praticabilité de nos principaux résultats.
Maintenant, nous commençons avec quelques théorèmes ci-dessous

Théorème 4.3.1.

Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$continue. Suppose que

(H1) *Il existe des fonctions positives $a, b, c \in Y$ telles que*

$$|f(t,u,v)| \leq a(t) + b(t)|u(t)|^{p-1} + c(t)|v|^{p-1}, \quad \forall t \in [0,1], (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(H2) *Il existe une constante $D > 0$ telle que soit*

$$v|f(t,u,v)| > 0 \ \forall \ t \in [0,1], u \in \mathbb{R}, |v| > D^*.$$

Or

$$v|f(t,u,v)| < 0 \forall t \in [0,1], u \in \mathbb{R}, |v| > D^*.$$

(H3) *Il existe une constante $D* > 0$ telle que soit*

$$cf\Big(t, ct^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) > 0, \forall t \in [0,1], c \in \mathbb{R}, |c| > D^*.$$

Or

$$cf\Big(t, ct^\beta, \Gamma(\beta+1)c\Big) < 0, \forall t \in [0,1], c \in \mathbb{R}, |c| > D^*.$$

Alors (P) (1.1) admet au moins une solution, pourvu que $\dfrac{2\Big(\|b\|_\infty \|c\|_\infty\Big)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1.$

Démonstration.

Ensemble $\Omega = \Big\{x \in X | \|x\|_\infty < \max\{M, D*\} + 1\Big\}.$

Évidemment, $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \subset \Omega$. Il découle des Lemmes (4.2.2) et (4.2.3) que L (défini par (4.2)) est un opérateur de Fredholm d'indice zéro et N (défini par (4.3)) est L-compact sur Ω. Par les lemmes(4.2.4) et (4.2.5), on obtient que les deux conditions suivantes sont satisfaites

(i) $Lx \neq Nx, \forall (x,\lambda) \in [(dom(L) \setminus KerL \cap \partial\Omega] \times]0,1[.$

(ii) $Nx \notin ImL, \forall x \in Ker(L) \cap \partial\Omega.$

Il reste à vérifier la condition *(iii)* du théorème (4.2.1). Pour ce faire, laissez

$$H(x,\lambda) = \pm\lambda + (1-\lambda)QNx.$$

En nous basant sur le lemme (4.2.6), nous avons

$$H(x,\lambda) \neq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \cap Ker(L).$$

Ainsi, par la propriété d'homotopie de degré, on a

$$\begin{aligned} deg_B\Big(QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0\Big) &= deg\Big(H(.,0), \Omega \cap Ker(L), 0\Big) \\ &= deg\Big(H(.,0), \Omega \cap Ker(L), 0\Big) \\ &= deg\Big(\pm I, \Omega \cap Ker(L), 0\Big) \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la condition *(iii)* du théorème (4.2.1) est satisfaite. Par conséquent, en utilisant le théorème (4.2.1) , l'équation d'opérateur $Lx = Nx$ a au moins une solution dans $domL \cap \Omega$. A savoir,(4.1) a au moins une solution dans X. □

Théorème 4.3.2.

Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continue. Supposons que les conditions* $(H2)$ *et* $(H3)$ *tiennent. De plus, supposons que*

(H4) *il existe des fonctions positives* $r \in Y$ *telles que*

$$\lim_{|u|+|v| \longrightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{|f(t,u,v)|}{|u|^{p-1} + |v|^{p-1}} \leq r(t).$$

Alors (4.1) a au moins une solution, pourvu que $\dfrac{4\|r\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} < 1.$

Démonstration.

Notez $\dfrac{4\|r\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$ alors il existe une constante $\epsilon > 0$ tel que $\dfrac{(4\|r\|_\infty + \varepsilon)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$. D'après $(H4)$, il existe $H > 0$ tel que

$$|f(t,u,v)| \leq \Big(\|r\|_\infty + \varepsilon\Big)\Big(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\Big), |u| + |v| \geq H, t \in [0,1].$$

Soit $M^* = \max_{t \in [0,1], |u|+|v| \leq H} |f(t,u,v)|$

$$|f(t,u,v)| \leq M^* + \Big(\|r\|_\infty + \varepsilon\Big)\Big(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\Big), \forall t \in [0,1], (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

D'après le théorème (4.3.1) admet au moins une solution dans X. □

Corollaire 4.3.1.

Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*continue. Supposons que les conditions* (H_2) *et* (H_3) *prise. De plus, supposons que* (H_5)*Il existe des fonctions positives* $r \in Y$ *telles que*

$$\lim_{|u|+|v| \to +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{|f(t,u,v)|}{|u|^{p-1}} \leq r(t),$$

Or

$$\lim_{|u|+|v| \to +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{|f(t,u,v)|}{|v|^{p-1}} \leq r(t).$$

Alors (4.1) *admet au moins une solution, pourvu que* $\dfrac{2\|r\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} < 1.$

Nous allons maintenant donner un exemple pour illustrer notre résultat principal.

Exemple 4.3.1. *Considérez le problème de valeur limite suivant*

$$(P)\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}\varphi_p(D^{\beta}_{0+}u(t)) = -\dfrac{25}{4} + \dfrac{t}{2}e^{-|x(t)|} + \dfrac{1}{4}\Big(D^{\beta}_{0+}u(t)\Big)^2 \\ x(0) = 0, D^{\beta}_{0+}x(0) = D^{\beta}_{0+}x(1) \end{cases} \tag{4.19}$$

où $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{5}{8}$, $p = 3$ *et*

$$f\Big(t, x(t), D^{\beta}_{0} + x(t)\Big) = -\frac{25}{4} + \frac{t}{2}e^{-|x(t)|} + \frac{1}{4}\Big(D^{\frac{5}{8}}_{0+}x(t)\Big)^2.$$

Choisissez $a(t) = 7$, $b(t) = 0$,$c(t) = \dfrac{1}{4}$,$D = 5$. *Par simple calcul, on obtient que* $\|b\|_\infty = 0$, $\|c\|_\infty = \dfrac{1}{4}$, *et*

$$\frac{2\Big(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty\Big)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1.$$

Évidemment,(4.18) *satisfait toutes les conditions du théorème* (4.3.1)*. Il a donc au moins une solution.*

Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire est d'appliquer le degré de coïncidence de Mawhin pour l'étude de l'existence d'une solution d'un problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire non linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo sur un intervalle borné, avec des conditions aux limites. En utilisant le théorème de coïncidence de Mawhin, nous présentons les résultats d'existence de solution pour ce problème aux limites. Nous obtenons un résultat sur l'existence de solution pour le problème aux limites fractionnaire mentionné. Ce résultat étend ceux obtenus pour les équations différentielles ordinaires d'ordre entier. Nous donnons un exemple pour illustrer nos principaux résultats.

Bibliographie

[1] V. IS. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.

[2] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[3] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques Applications. Springer-Verlag, 1993.

[4] Brahim Tellab (2018). Résolution des Équations différentielles fractionnaires. Thèse de Doctorat. Université des Frères Mentouri Constantine1.

[5] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[6] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques and Applications. Springer-Verlag, 1993.

[7] J. R. Graef, B. Yang, Positive solutions of a third order eigenvalue problem, Dynam. Systems Appl. 15 (2006), 97-110.

[8] D. OíRegan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman and Hall/CRC,(2006).

[9] R. P. Agarwal, D. OíRegan and D. R. Sahu, Fixed point theory for lipschitzian-type mapping with applications, Vol 6. Cambridge university Press Springer, 2000.

[10] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. OíRegan, Fixed point theory and applications, Combridge Tracts in Mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press 2001.

[11] S. Banach, Sur les opÈrations dans les ensembles abstraits et leur application, Fund.Math.3(1922).

[12] E. Hairer and G. Wanner, Analysis by its history, Springer Verlag, Berlin, 1997

[13] R. P. Agarwal, D. OíRegan and D. R. Sahu, Fixed point theory for lipschitzian-type mapping with applications, Vol 6. Cambridge university Press Springer, 2000

[14] A. Sirma, S. Sevgin, A Note on Coincidence Degree Theory, Int. J. Math. Math. Sc, Volume 2012Article ID 370946, 18 pages.

[15] Tidjani Menacer (2014). Synchronisation des SystËmes Dynamiques Chaotiques a Dérivées Fractionnaires. Thèse de Doctorat. Université Mentouri-Constantine1.

[16] I.Oldham, K.B, Spanier, J. : The Fractional Calculus. Academic Press, New York(1974).

[17] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[18] Agarwal, R.P., O'Regan, D., Stanek, S. : Positive solutions for Dirichlet problems of singular nonlinear fractional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 371, 57–68 (2010).

[19] A.Ouhab, Calcul fractionnaire. Laboratoire de Mathématiques, Université de Sidi-Bel-Abbés B.P. 89, 22000 Sidi-Bel-Abbés, Algerie.

[20] S. Q. Zhang, The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation, J.Math. Anal. Appl. 252 (2000), 804-812.

[21] Bai, Z., Lu, H. : Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl. 311, 495–505 (2005) .

[22] Bai, Z., Zhang, Y. : Solvability of fractional three-point boundary value problems with nonlinear growth. Appl. Math. Comput. 218, 1719–1725 (2011)

[23] J. Mawhin Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, Conference Board of the Mathematical Sciences (040), AMS, 1979.

[24] J. Mawhin, Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory, J. Differential Equations 12 (1972), 610-636.

[25] J. Mawhin, Topological degree and boundary value problems for non linear differential equations. In : Furi M., Zecca P. (eds) Topological Methods for Ordinary Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol 1537. Springer, Berlin, Heidelberg.

[26] J. Mawhin, Leray-Schauder degree : A half century of extensions and applications, J.of the J. Schauder Center, Vol.14 (1999), 195-228.

[27] D. O.Regan, M. Zima, Leggett.Williams norm-type theorems for coincidences, Arch. Math. 87 (2006) 233-244.

[28] S. Zahang ,Solutions for boundary-value of fractional diffrential equations. Electron.J.Differential Equations ,No. 36,pp.1-12.

[29] J. Mawhin, Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds, in Topological Methods in Nonlinear Analysis., J. of the Schauder Center, Vol. 9, 1997, 179-200.

[30] D. O'Regan, Y. J. Chao, Y. Q. Chen ; Topological Degree Theory and Application, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2006.

[31] Christine Poirier ; Université de Versailles-Saint Quentin Licence de Mathématiques - Cours d'Analyse Numérique - Année - 2016/2017.

[32] Kilbas, A.A., Trujillo, J.J. : Differential equations of fractional order : methods, results and problems II. Appl. Anal. 81, 435–493 (2002).

[33] Leibenson, , L.S. : General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium. Izv. Akad. Nauk Kirgiz. SSR 9, 7–10 (1983) (in Russian).

[34] Jiang, D., Gao, W. : Upper and lower solution method and a singular boundary value problem for the one-dimensional p-Laplacian. J. Math. Anal. Appl. 252, 631–648 (2000).

[35] Liu, B., Yu, J. : On the existence of solutions for the periodic boundary value problems with p-Laplacian operator. J. Syst. Sci. Math. Sci. 23, 76–85 (2003).

[36] Lian, L., Ge, W. : The existence of solutions of m-point p-Laplacian boundary value problems at resonance. Acta Math. Appl. Sin. 28, 288–295 (2005) (in Chinese).

[37] Zhang, J., Liu, W., Ni, J., Chen, T. : Multiple periodic solutions of p-Laplacian equation with one-side Nagumo condition. J. Korean Math. Soc. 45, 1549–1559 (2008).

[38] , W. : Solvability for a coupled system of fractional differential equations at resonance. Nonlinear Anal., Real World Appl. 13, 2285–2292 (2012).

[39] Chen, T., Liu, W., Hu, Z. : A boundary value problem for fractional differential equation with p-L.