REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Département de mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie

MASTER
EN
MATHEMATIQUES
option : Modélisation et Analyse Numérique
par : BENREZKALLAH Nour El imane

Théme

Techniques de traitement des systèmes d'équations intégrales de Volterra et de Fredholm

Devant le jury:

Dr. HACHIFA Abdelrrazak	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Dr. MAAMARI Mohammed	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Ms. ABBASSI Hocine	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Dr. BENCHEIKH Abdelkarim	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Directeur de thése

Soutenu le :jj - 06 - 2023

شكر و عرفان

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء، ونتوكل عليه في جميع حالاتنا

ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعي

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم .

(مَنْ لَمْ يشكُر النّاس لَم يَشكُر الله)

رواه " أحمد والترمذي

نتقدم بالشكر الجزيل و العرفان "

الجميل إلى كل من علمنا علما به ينتفع و أدب به يرتفع

إلى كل من ساهم بقريب أو من بعيد في تكويننا طيلة مسارنا الدراسي الابتدائي و المتوسط و . الثانوي ،وإلى كل

من ساهم في تكويننا طيلة مسارنا الجامعي

تحية عطرة و شكر خاص للأستاذ المشرف " د.بن الشيخ عبد الكريم " .

الذي لم يبخل علينا بنضائحه و توجيهاته،

لك منا كل معاني التقدير و العرفان

و تحية طيبة إلى أعضاء اللجنة المناقشة لقبولهم مناقشة و إثراء هذه المذكرة .

الاهداء

الحمد لله الذي وهبني عقلا مفكرا، ولسانا ناطقا وأنار دربي، ويسر أمري لانهاء هذا العمل، والصلاة والسلام على رسول الله صلى الله عليه وسلم

إلى التي على بساط الأوجاع ولدتني وبأيدي الآلام ربتني وبعيون . التعب رعتني وبصدر المشقات حمتني، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي: أمي أمي أمي

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار وعلمني العطاء دون الإنتظار، . والدي حفظه الله

الى الذي لم يدخر أي جهد لتشجيعي و دفعني نحو الامام صديقي مروان

إلى من تربطني بهم أسمى علاقة في الوجود، إخوتي و أخواتي ..لقد . إلى أصدقائي وزملائي و رفقائي في هذا المشوار، .كنتم نعم السند إلى من تقاسمت معهم مر و حلو الحياة طوال خمس سنوات

إلى كل من تصفح هذه .إلى كل من يعرفني من قريب أو بعيد . المذكرة وانتفع بها وتذكرنا بدعائه.

CONTENTS

Abstract

The main objective of this work is to study some methods of solving Volterra systems of integral and differential integral equations of the first and second types.

We have also studied methods of systemic solutions of Fredholm integral and differential integral equations

Key words: Volterra Integral System, Fredholm Integral System, Analytical Methods

---

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier certaines méthodes de résolution des systèmes de Volterra d'équations intégrales et différentielles intégrales des premier et deuxième types.

Nous avons également étudié les méthodes de solutions systéme des équations intégrales et différentielles intégrales de Friedholm

Mots-Clés: Systéme intégrale de Volterra, Systéme intégrale de Fredholm, Méthodes analytiques

---

ملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة بعض طرق حل أنظمة فولتيرا للمعادلات التكاملية والتفاضلية من النوعين الأول والثاني

لقد درسنا أيضًا طرق حلول النظام للمعادلات التكاملية والتفاضلية لتكاملات فريدهولم

الكلمات المفتاحية : جملة فؤلتيرا التكاملية , جملة فريدهولم التكاملية, الطرق التحليلية

introduction

Le chevauchement entre les différentes sciences ces dernières années a conduit à leur très terrible complexité et évolution. Les scientifiques ont commencé à étudier les phénomènes naturels, qu'ils soient physiques, chimiques, biologiques ou géométriques, en interprétant ces équations intégratives de différents types. Les équations intégratives sont importantes parmi les différentes branches de la science mathématique tels que les équations différentielles partielles et ordinaires et l'analyse Dal. Des équations complémentaires, d'autre part, étaient essentielles pour comprendre de nombreuses questions physiques et mathématiques. Au début du XXe siècle, le monde italien a commencé Volterra. Le scientifique suédois Friedholm développé ces équations, c.-à-d. équations complémentaires, dans le développement et l'utilisation de la différenciation dans leur étude, qui ont été influencés par les équations complémentaires, qui a joué un rôle important dans la construction de l'analyse mathématique et dal. Bien que le dictionnaire des questions physiques est formulé avec des équations différentielles, ces équations différentielles peuvent être remplacées par des équations intégratives, linéaires ou non linéaires, de sorte que leur solution est plus efficace, précise et plus simple.

Le premier chapitre : On a référés à les équations intégrales de Fredholm de première et deuxième types , et on a étudié les formes et les types d'équations intégrales de Volterra

Le deuxième chapitre : On a étudié les équations de deux manières, et ceci pour les équations d'intégration méthode d'arithmétique directe différentielle et méthode de récurrence variable Et la méthode de résolution sous la forme d'une chaîne. Nous mentionnons la méthode de calcul direct, nous avons étudié les équations, la méthode de la transformée de Laplace et la méthode d'analyse adomienne.

Le troisième chapitre: Nous avons étudié quelques méthodes pour résoudr des systèmes d'équations intégrales par Fredholm, et elles sont une méthode d'arithmétique directe et d'itération variable

CHAPTER 1

CONCEPTS D'INTRODUCTION DE L'INTÉGRALE ÉQUATIONS

Une équation intégrale est l'équation dans laquelle la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à l'intérieur d'un signe entier [1–5]. Le type le plus standard d'équation intégrale en $u(x)$ est de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{1.1}$$

où $g(x)$ et $h(x)$ sont les bornes d'intégration, λ est un paramètre constant, et $K(x,t)$est une fonction connue, de deux variables x et t, appelée noyau ou le noyau de l'équation intégrale. La fonction inconnue $u(x)$ qui sera déterminé apparaît à l'intérieur du signe intégral. Dans bien d'autres cas, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Le les fonctions $f(x)$et $K(x,t)$ sont données à l'avance. Il est à noter que le les limites d'intégration $g(x)$ et $h(x)$ peuvent être toutes deux variables, constantes ou mixtes. Les équations intégrales apparaissent sous de nombreuses formes. Deux manières distinctes qui dépendent des limites d'intégration sont utilisées pour caractériser les équations intégrales, à savoir :

1. Si les limites d'intégration sont fixées, l'équation intégrale est appelée un Équation intégrale de Fredholm donnée sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt, \tag{1.2}$$

où a et b sont des constantes.

2. Si au moins une limite est une variable, l'équation est appelée intégrale de Volterra équation donnée sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt, \tag{1.3}$$

De plus, deux autres espèces distinctes, qui dépendent de l'apparence des fonction inconnue $u(x)$, sont définis comme suit :

1. Si la fonction inconnue $u(x)$ n'apparaît que sous le signe intégral de Équation de Fredholm ou de Volterra, l'équation intégrale est dite de première espèce Équation intégrale de Fredholm ou de Volterra respectivement.
2. Si la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral de l'équation de Fredholm ou de Volterra, l'équation intégrale est appelée a équation intégrale de l'équation de Fredholm ou de Volterra de deuxième type respectivement.

Dans toutes les équations intégrales de Fredholm ou de Volterra présentées ci-dessus, si $f(x)$ est identiquement nul, l'équation résultante :

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{1.4}$$

ou

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{1.5}$$

est appelée équation intégrale homogène de Fredholm ou homogène de Volterra respectivement.

Il est intéressant de souligner que toute équation qui comprend les deux intégrales et les dérivées de la fonction inconnue $u(x)$ est appelée intégro-différentielle équation. L'équation intégro-différentielle de Fredholm est de la forme :

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad , \quad u^{(k)} = \frac{d^{(k)}u}{dx^{(k)}}. \tag{1.6}$$

Or, l'équation intégro-différentielle de Volterra est de la forme :

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad , \quad u^(k) = \frac{d^{(k)}u}{dx^{(k)}}. \tag{1.7}$$

Les équations intégro-différentielles [6] seront définies et classées dans ce texte

1.1 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales apparaissent dans de nombreux types. Les types dépendent principalement de la limites d'intégration et le noyau de l'équation. Dans ce texte, nous serons concerné sur les types d'équations intégrales suivants.

1.1.1 Équations intégrales de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm, les limites d'intégration sont fixes. De plus, la fonction inconnue $u(x)$ peut n'apparaître qu'à l'intérieur de l'équation intégrale dans former:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{1.8}$$

C'est ce qu'on appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce. Cependant, pour les équations intégrales de Fredholm du deuxième type, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Le second type est représenté par la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{1.9}$$

Des exemples des deux types sont donnés par

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \int_0^1 \sin(xt)u(t)dt, \tag{1.10}$$

et

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x-t)u(t)dt, \tag{1.11}$$

respectivement.

1.1.2 Équations intégrales de Volterra

Dans les équations intégrales de Volterra, au moins une des limites d'intégration est un variable. Pour les équations intégrales de Volterra du premier type, la fonction inconnue $u(x)$ n'apparaît qu'à l'intérieur du signe intégral sous la forme :

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt. \tag{1.12}$$

Cependant, dans les équations intégrales de Volterra de seconde espèce, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Le deuxième type est représenté par la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt. \tag{1.13}$$

Des exemples des équations intégrales de Volterra du premier type sont

$$xe^{-x} = \int_0^x e^{t-x}u(t)dt, \tag{1.14}$$

et

$$5x^2 + x^3 = \int_0^x (5+3x-3t)u(t)dt. \tag{1.15}$$

Cependant, des exemples des équations intégrales de Volterra du second type sont

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt, \tag{1.16}$$

et

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{1.17}$$

1.1.3 Équations intégrales de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm [6,7] sont issues de problèmes aux bornes paraboliques, de la modélisation mathématique de la relation spatio-temporelle développement d'une épidémie, et à partir de divers modèles physiques et biologiques. L'équation intégrale de Volterra-Fredholm formulaires, à savoir

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt \tag{1.18}$$

et

$$u(x,t) = f(x,t) + \lambda_1 \int_0^t \int_\omega F(x,t,\zeta,\tau,u(\zeta,\tau))d\zeta d\tau, (x,t) \in \omega[0,T], \tag{1.19}$$

où $f(x,t)$ et $F(x,t,\zeta,\tau,u(\zeta,\tau))$ sont des fonctions analytiques sur $D = \omega[0,T]$, et ω est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}_n, n = 1,2,3.$Il est intéressant de noter que (1.18) contient des équations intégrales disjointes de Volterra et de Fredholm, alors que (1.19) contient des équations intégrales mixtes de Volterra et de Fredholm. De plus, les fonctions inconnues $u(x)$ et $u(x,t)$ apparaissent à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale panneaux. C'est un trait caractéristique d'une équation intégrale de deuxième espèce. Si les fonctions inconnues n'apparaissent qu'à l'intérieur des signes intégraux, la résultante les équations sont de première espèce, mais ne seront pas examinées dans ce texte. Exemples des deux types sont donnés par

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt, \tag{1.20}$$

et

$$u(x,t) = x + t^3 - \frac{1}{2}t^3\frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \zeta)d\zeta d\tau. \tag{1.21}$$

1.1.4 Équations intégrales singulières

Équations intégrales de Volterra de première espèce [4,7]

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{1.22}$$

ou du second type

$$u(x) = f(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{1.23}$$

sont dits *singuliers* si l'une des limites d'intégration $g(x)$, $h(x)$ ou les deux sont infini. De plus, les deux équations précédentes sont dites singulières si le noyau $K(x,t)$ devient non borné en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration. Dans ce texte, nous concentrerons notre attention sur les équations de la forme :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.24}$$

ou du second type :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.25}$$

Les deux dernières formes standard sont appelées *équatio intégrale d'Abel généralisée* et *des équations intégrales faiblement singulières* respectivement. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ l'équation :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt \tag{1.26}$$

est appelée l'équation intégrale singulière d'Abel. Il est à noter que le noyau dans chaque équation devient l'infini à la limite supérieure $t = x$. Exemples de L'équation intégrale d'Abel, l'équation intégrale d'Abel généralisée et l'équation faiblement équation intégrale singulière sont données par

$$\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) \tag{1.27}$$

$$x^3 = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) \tag{1.28}$$

et

$$u(x) = 1 + \sqrt{x} + ze \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) \tag{1.29}$$

respectivelement.

1.2 Classification des équations intégro-différentielles

Les équations intégro-différentielles apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques, en particulier lorsque l'on convertit des problèmes aux valeurs initiales ou des problèmes aux limites aux équations intégrales. Les équations intégro-différentielles contiennent à la fois l'intégrale et les opérateurs différentiels. Les dérivées des fonctions inconnues peuvent apparaître à n'importe quel ordre. Dans la classification des équations intégro-différentielles, nous suivrons la même catégorie utilisée auparavant.

1.2.1 Équations intégro-différentielles de Fredholm

Les équations intégro-différentielles de Fredholm apparaissent lorsque nous convertissons équations aux équations intégrales. L'équation intégro-différentielle de Fredholm contient la fonction inconnue $u(x)$ et une de ses dérivées $u^{(n)}(x), n \geq 1$ respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Les limites de l'intégration dans ce cas sont fixes comme dans les équations intégrales de Fredholm. L'équation est étiqueté comme intégro-différentiel car il contient différentiel et intégral opérateurs dans la même équation. Il est important de noter que les conditions initiales doit être donnée pour les équations intégro-différentielles de Fredholm pour obtenir les solutions particulières. L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît dans la former:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{1.30}$$

où $u^{(n)}$ indique la nième dérivée de $u(x)$. Autres dérivés de moindre ordre peut apparaître avec $u(n)$ sur le côté gauche. Des exemples de l' équation différentielle intégro de Fredholm sont donnés par

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^x xu(t)dt, \quad u(0) = 0, \tag{1.31}$$

et

$$u"(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \tag{1.32}$$

1.2.2 Équations intégro-différentielles de Volterra

Les équations intégro-différentielles de Volterra apparaissent lorsque nous convertissons des problèmes de valeur initiale en équations intégrales. L'équation intégro-différentielle de Volterra contient la fonction inconnue $u(x)$ et une de ses dérivées $u^{(n)}(x), n \geq 1$ à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Au moins une des limites de l'intégration dans ce cas est une variable comme dans les équations intégrales de Volterra. L'équation est appelé intégro-différentiel parce que les opérateurs différentiels et intégraux sont impliqués dans la même équation. Il est important de noter que les conditions initiales doit être donnée pour les équations intégro-différentielles de Volterra afin de déterminer la solutions particulières. L'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît dans la former:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{1.33}$$

où $u^{(n)}$ indique la nième dérivée de $u(x)$. Autres dérivés de moindre ordre peut apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche. Des exemples des équations différentielles de Volterra integro sont donnés par

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = 0, \tag{1.34}$$

et

$$u''(x) + u'(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = -1, \quad u'(0) = 1. \tag{1.35}$$

1.2.3 Équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm

Les équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm apparaissent de la même manière que les équations intégrales de Volterra-Fredholm avec une ou plusieurs des équations ordinaires. dérivées en plus des opérateurs intégraux. Le Volterra-Fredholm les équations intégro-différentielles apparaissent dans la littérature sous deux formes, à savoir

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt, \tag{1.36}$$

et

$$u^{(n)}(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_\omega F(x,t,\zeta,\tau, \quad u(\zeta,\tau))d\zeta d\tau, (x,t) \in \omega[0,T], \tag{1.37}$$

où $f(x,t)$ et $F(x,t,\zeta,\tau,u(\zeta,\tau))$ sont des fonctions analytiques sur $D = \omega[0,T]$, et ω est un sous-ensemble fermé de$\mathbb{R}^n, n = 1,2,3$. Il est intéressant de noter que (1.36) contient des équations intégrales disjointes de Volterra et de Fredholm, alors que (1.37) contient des intégrales mixtes. D'autres dérivés de moindre ordre peuvent également apparaître. De plus, les fonctions inconnues $u(x)$ et $u(x,t)$ apparaissent à l'intérieur et à l'extérieur les signes intégraux. C'est un trait caractéristique d'une intégrale de deuxième espèce équation. Si les fonctions inconnues n'apparaissent qu'à l'intérieur des signes intégraux, les équations résultantes sont de première espèce. Les conditions initiales doivent être données à déterminer la solution particulière. Des exemples des deux types sont donnés par

$$u'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x-t)u(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt, \quad u(0) = 0, \tag{1.38}$$

et

$$u'(x,t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \zeta)d\zeta d\tau, u(0,t) = t^3. \tag{1.39}$$

CHAPTER 2

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA

2.1 introduction

Les systèmes d'équations intégrales, linéaires ou non linéaires, apparaissent dans des complications scientifiques dles modèles de croissance de l'ingénierie, de la physique, de la chimie et des populations [1–4]. Des études sur les systèmes d'équations intégrales ont suscité beaucoup de préoccupations sciences appliquées. Les idées générales et les caractéristiques essentielles de ces systèmes sont d'une large applicabilité. Les systèmes d'équations intégrales de Volterra apparaissent en deux types Pour les systèmes des équations intégrales de Volterra du premier type, les fonctions inconnues n'apparaît que sous le signe intégral de la forme:

$$F_1(x) = \int_0^x (k_1(x,t)u(t) + \tilde{k}v(t) + ...)dt \tag{2.1}$$

$$F_2(x) = \int_0^x (k_2(x,t)u(t) + \tilde{k}v(t) + ...)dt$$

Or, dans les systèmes d'équations intégrales de Volterra de seconde espèce, les fonctions inconnues apparaissent à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral de la forme :

$$u(x) = F_1(x) + \int_0^x (k_1(x,t)u(t) + \tilde{k}v(t) + ...)dt \tag{2.2}$$

$$v(x) = F_2(x) + \int_0^x (k_2(x,t)u(t) + \tilde{k}v(t) + ...)dt$$

Les noyaux $K_i(x,t)$ et $\tilde{K}_i(x,t)$, et les fonctions $f_i(x), i = 1, 2, ..., n$ sont fonctions à valeurs réelles données.

Une variété de méthodes analytiques et numériques sont utilisées pour manipuler les systèmes des équations intégrales de Volterra. Les techniques existantes rencontraient quelques difficultés en termes de taille de calcul implique plusieurs équations intégrales. Pour éviter les difficultés qui surviennent habituellement des méthodes traditionnelles, nous utiliserons certaines des méthodes présentées dans ce texte. La méthode de décomposition adomienne, l'itération variationnelle méthode, et la méthode de la transformée de Laplace constitueront une base raisonnable pour étudier les systèmes d'équations intégrales. L'accent sera mis dans ce texte sur l'utilisation de ces méthodes plutôt que de prouver des concepts théoriques de convergence et d'existence que l'on peut trouver dans d'autres textes.

2.2 Systèmes d'équations intégrales de Volterra des Deuxième type

Nous étudierons d'abord les systèmes d'équations intégrales de Volterra de seconde espèce donné par

$$u(x) = F_1(x) + \int_0^x (k_1(x,t)u(t) + \tilde{k}v(t) + ...)dt \tag{2.3}$$

$$v(x) = F_2(x) + \int_0^x (k_2(x,t)u(t) + \tilde{k}v(t) + ...)dt$$

Les fonctions inconnues $u(x)$,$v(x)$, ..., qui seront déterminées, apparaissent à côté et à l'extérieur du signe intégral. Les noyaux $K_i(x,t)$ et $\tilde{k}_i(x,t)$, et les fonction $f_i(x)$ reçoivent des fonctions à valeurs réelles. Dans ce qui suit nous présenterons
les méthodes, nouvelles et traditionnelles, qui seront utilisées pour gérer ces systèmes.

2.2.1 La méthode de décomposition adomienne

méthode de décomposition adomienne [5–7] a été présentée auparavant. La méthode décompose chaque solution en une somme infinie de composants, où ces composants sont déterminés de manière récurrente. Cette méthode peut être utilisée dans sa norme forme, ou combiné avec le phénomène des termes de bruit. De plus, la modification méthode de décomposition sera utilisée chaque fois que cela est approprié. Il est intéressant de souligner que la méthode VIM peut également être utilisée, mais nous devons transformer le système d'équations intégrales en un système d'équations intégro-différentielles équations qui seront présentées plus loin dans ce chapitre.

Exemple 2.1

Utilisez la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre le système suivant de équation intégrale de Volterra

$$u(x) = x^1 - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x \big((x-t)^2u(t) + (x-t)v(t)\big)dt, \tag{2.4}$$

$$u(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \int_0^x ((x-t)^3u(t) + (x-t)^2v(t))dt,$$

La méthode de décomposition adomienne suggère que les termes linéaires $u(x)$ et $v(x)$se décompose en une série infinie de composantes

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad , v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \tag{2.5}$$

où $u_n(x)$ et$v_n(x)$,$n \geq 0$ sont les composantes de $u(x)$ et $v(x)$ qui être élégamment déterminé de manière récursive.
La substitution de (2.5) dans (2.4) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = x - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x \big((x-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\big)dt, \tag{2.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5 \int_0^x \big((x-t)^3 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (x-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\big)dt,$$

Les composantes zéro $u_0(x)$ et $v_0(x)$ sont définies par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral. Suite à l'analyse d'Adomian, le système (2.6) est transformé en un ensemble de relations récursives donné par

$$u_0(x) = x - \frac{1}{6}x^4 \tag{2.7}$$

$$u_{k+1} = \int_0^x ((x-t)^2 u_k(t) + (x-t)v_k(t))dt \quad , \quad k \geq 0$$

et

$$v_0(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5 \tag{2.8}$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x ((x-t)^3 u_k(t) + (x-t)^2 v_k(t) \quad , \quad k \geq 0$$

Cela donne à son tour

$$u_0(x) = x - \frac{1}{6}x^2, \quad u_1(x) = x - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{280}x^7 \tag{2.9}$$

et

$$v_0(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5, \quad v_1(x) = \frac{1}{12}x^5 - \frac{11}{10080}x^8 \tag{2.10}$$

Il est évident que les termes de bruit $\mp\frac{1}{6}x^4$ apparaissent entre $u_0(x)$ et $u_1(x)$. De plus, les termes de bruit $\mp\frac{1}{12}x^5$ apparaissent entre $v_0(x)$ et$v_1(x)$. En annulant ces termes de bruit à partir de $u_0(x)$ et $v_0(x)$, les termes non annulés de $u_0(x)$ et $v_0(x)$ donnent les solutions exactes

$$(u(x), v(x)) = (x, x^2) \tag{2.11}$$

Exemple 2.2

Utilisez la méthode de décomposition adomienne pour résoudre le système suivant de Équations intégrales de Volterra

$$u(x) = \cos(x) - x\sin(x) + \int_0^x \big(\sin(x-t)u(t) + cos(x-t)v(t)\big)dt, \tag{2.12}$$

$$v(x) = \sin(x) - x\cos(x) + \int_0^x \big(\cos(x-t)u(t) + \sin(x-t)v(t)\big)dt,$$

On décompose d'abord les termes linéaires $u(x)$ et $v(x)$ par une suite infinie de Composants

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad , \quad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \tag{2.13}$$

où $u_n(x)$ et $v_n(x)$,$n \geq 0$ sont les composantes de$u(x)$ et $v(x)$ qui être élégamment déterminé de manière récursive.

La substitution de (2.13) dans (2.12) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(x) = \cos(x) - x\sin(x) + \int_0^x (\sin(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} u(t) + cos(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)dt, \tag{2.14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(x) = \sin(x) - x\cos(x) + \int_0^x (\cos(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} u(t) + \sin(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)dt,$$

Les composantes zéro $u_0(x)$ et $v_0(x)$ sont définies par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral. Pour cet exemple, nous utiliserons la modification méthode de décomposition, donc nous définissons la relation récursive

$$u_0(x) = \cos(x) \tag{2.15}$$

$$u_{k+1}(x) = -x\sin(x) + \int_0^x (\sin(x-t)u_k(t) + cos(x-t)v_k(t))dt \quad , \quad k \geq 0$$

$$v_0(x) = \sin(x) \tag{2.16}$$

$$v_{k+1}(x) = -x\cos(x) + \int_0^x (\cos(xt)u_k(t) + sin(x-t)v_k(t))dt, k \geq 0$$

Cela donne à son tour

$$u_0(x) = \cos(x), \quad u_1(x) = 0, \quad u_{k+1}(x) = 0 \quad , \quad k \geq 1 \tag{2.17}$$

$$v_0(x) = \sin(x), \quad v_1(x) = 0 \quad , \quad v_{k+1}(x) = 0 \quad , \quad k \geq 1 \tag{2.18}$$

Cela donne les solutions exactes

$$(u(x), v(x)) = (\cos(x), \sin(x)) \tag{2.19}$$

qui satisfont le système (2.12).

2.2.2 La méthode de la transformée de Laplace

La méthode de la transformée de Laplace est une technique puissante qui peut être utilisée pour résolution de problèmes de valeur initiale et d'équations intégrales. Le Laplace La méthode de transformation a été présentée au chapitre 1 et a été utilisée dans d'autres chapitres de ce texte. Avant de commencer à appliquer cette méthode, nous résumons certains des concepts présentés à la section 1.5. Dans le théorème de convolution pour la transformée de Laplace, il a été dit que si le noyau $K(x,t)$de l'intégrale équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{2.20}$$

dépend de la différence xt, alors on l'appelle un noyau de différence. Exemples du noyau de différence sont $e^x t$, $\cos(xt)$et xt. L'équation intégrale peut ainsi s'exprimer comme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)u(t)dt, \tag{2.21}$$

Considérons deux fonctions $f_1(x)$ et$f_2(x)$ qui possèdent les conditions nécessaires pour l'existence de la transformée de Laplace pour chacun. Laissez le Laplace se transformer pour les fonctions $f_1(x)$ et$f_2(x)$ soit donnée par

$$\mathcal{L}\{f_1(x)\} = F_1(s) \quad , \quad \mathcal{L}f_2(x) = F_2(s). \tag{2.22}$$

Le produit de convolution de Laplace de ces deux fonctions est défini

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt \tag{2.23}$$

ou

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt \tag{2.24}$$

Rappeler que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x) \tag{2.25}$$

On peut facilement montrer que la transformée de Laplace du produit de convolution $(f_1 * f_2)(x)$ est donné pa

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\Big\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\Big\} = F_1(s)F_2(s). \tag{2.26}$$

Sur la base de ce résumé, nous examinerons les équations intégrales spécifiques de Volterra où le noyau est un noyau de différence. La méthode de la transformée de Laplace pour résoudre les systèmes de Volterra les équations intégrales seront illustrées par l'étude des exemples suivants

Exemple 2.3

Résoudre le système d'équations intégrales de Volterra en utilisant la transformée de Laplace méthode

$$u(x) = 1 - x^2 + x^3 + \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t)v(t))dt, \tag{2.27}$$

$$v(x) = 1 - x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \int_0^x ((x-t)u(t) - (x-t)v(t))dt.$$

Remarquons que les noyaux $K_1(x-t) = K_2(x-t) = x-t$. Prendre Laplace transformée des deux côtés de chaque équation dans (2.27) donne

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{1 - x^2 + x^3\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(x) + (x-t) * v(x)\}, \tag{2.28}$$

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\} = \mathcal{L}\left\{1 - x^3 - \frac{1}{10}x^5\right\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(x) - (x-t) * v(x)\}.$$

Cela donne à son tour

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2}U(s) + \frac{1}{s^2}V(s) \tag{2.29}$$

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{6}{s^4} - \frac{12}{s^6} + \frac{1}{s^2}U(s) - \frac{1}{s^2}V(s)$$

ou équivalent

$$\left(1-\frac{1}{s^2}\right)U(s)-\frac{1}{s^2}V(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^4} \tag{2.30}$$
$$\left(1+\frac{1}{s^2}\right)V(s)-\frac{1}{s^2}U(s)=\frac{1}{s}-\frac{6}{s^4}-\frac{12}{s^6}$$

La résolution de ce système d'équations pour $U(s)$et $V(s)$ donne

$$U(s)=\frac{1}{s}+\frac{3!}{s^4} \tag{2.31}$$
$$V(s)=\frac{1}{s}+\frac{3!}{s^4}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de chaque équation dans (2.31), les solutions exactes sont données par

$$(u(x),v(x))=(1+x^3,1-x^3). \tag{2.32}$$

Exemple 2.4

Résoudre le système d'équations intégrales de Volterra en utilisant la transformée de Laplace méthode

$$u(x)=\cos x-\sin x+\int_0^x(\cos(x-t)u(t)+\sin(x-t)v(t))dt, \tag{2.33}$$
$$v(x)=\sin x-x\sin x+\int_0^x(sin(x-t)u(t)+cos(x-t)v(t))dt.$$

Prendre la transformée de Laplace des deux côtés de chaque équation dans (2.33) donne

$$U(s)=\mathcal{L}\{u(x)\}=\mathcal{L}\{cosx-\sin x\}+\mathcal{L}\{\cos(x-t)*u(x)+\sin(x-t)*v(x)\}, \tag{2.34}$$
$$V(s)=\mathcal{L}\{u(x)\}=\mathcal{L}\{\sin x-x\sin x\}+\mathcal{L}\{\cos(x-t)*u(x)+sin(x-t)*v(x\},$$

Cela donne à son tour

$$U(s)=\frac{s}{1+s^2}-\frac{1}{1+s^2}+\frac{s}{1+S^2}U(s)-\frac{1}{1+s^2}V(s) \tag{2.35}$$
$$v(s)=\frac{1}{1+s^2}-\frac{2s}{(1+s^2)^2}+\frac{1}{1+S^2}U(s)-\frac{s}{1+s^2}V(s)$$

ou équivalent

$$\left(1-\frac{s}{1+s^2}\right)U(s)-\frac{1}{1+s^2}V(s)=\frac{s}{1+s^2}+\frac{1}{1+s^2} \tag{2.36}$$
$$\left(1-\frac{s}{1+s^2}\right)V(s)-\frac{1}{1+s^2}U(s)=\frac{1}{1+s^2}-\frac{2s}{(1+s^2)^2}$$

La résolution de ce système d'équations pour $U(s)$et $V(s)$ donne

$$U(s) = \frac{s}{1+s^2} \quad , \quad V(S) = \frac{1}{1+s^2} \tag{2.37}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de chaque équation dans (2.49), les solutions exactes sont données par

(u(x), v(x)) = $(\cos x, \sin x)$.(2.38)

2.3 Systèmes d'équations intégrales de Volterra de la première Type

La forme standard des systèmes d'équations intégrales de Volterra du premier est donné par

$$f_1(x) = \int_0^x \Big(K_1(x,t)u(t) + \tilde{k}_1(x,t)v(t) + \Big) dt \tag{2.39}$$

$$f_2(x) = \int_0^x \Big(K_2(x,t)u(t) + \tilde{k}_2(x,t)v(t) + \Big) dt$$

où les noyaux $K_i(x,t)$ et $\tilde{k}_i(x,t)$, et les fonctions $f_i(x)$ sont fonctions réelles, et $u(x), v(x), ...$sont les fonctions inconnues qui être déterminé. Rappelons que les fonctions inconnues apparaissent à l'intérieur de l'intégrale signe pour les équations intégrales de Volterra de première espèce. Dans cette section, nous aborderons deux méthodes principales couramment utilisées pour manipuler les équations intégrales de Volterra du premier type. Autres méthodes sont disponibles dans la littérature mais ne seront pas présentées dans ce texte.

2.3.1 La méthode de la transformée de Laplace

Nous commençons par utiliser la méthode de transformée de Laplace. Rappelons que le La transformée de Laplace du produit de convolution $(f_1 * f_2)(x)$ est donnée par

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\bigg\{ \int_0^x f_1(x-t) f_2(t) dt \bigg\} = F_1(s)F_2(s). \tag{2.40}$$

en procédant comme dans la section précédente, nous examinerons des systèmes spécifiques de Équations intégrales de Volterra où le noyau est un noyau de différence. Nous allons appliquer la méthode de la transformée de Laplace et l'inverse de la transformée de Laplace La méthode de la transformée de Laplace pour résoudre systèmes d'équations intégrales de Volterra seront illustrés en étudiant les exemples suivants.

Exemple 2.5

Résoudre le système d'équations intégrales de Volterra de première espèce en utilisant le Méthode de transformée de Laplace

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 = \int_0^x ((x-t-1)u(t) + (x-t+1)v(t))dt, \tag{2.41}$$
$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 = \int_0^x ((x-t+1)u(t) + (x-t-1)v(t))dt.$$

Prendre la transformée de Laplace des deux côtés de chaque équation dans (2.41) donne

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right\} = \mathcal{L}\{(x-t-1) * u(x) + (x-t+1) * v(x)\}, \tag{2.42}$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right\} = \mathcal{L}\{(x-t+1) * u(x) + (x-t-1) * v(x)\}$$

Cela donne à son tour

$$\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)U(s) + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)V(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s^4} + \frac{2}{s^5}$$
$$\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)U(s) + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)V(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^4} + \frac{2}{s^5} \tag{2.43}$$

La résolution de ce système d'équations pour $U(s)$et $V(s)$donne

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}, \quad V(s)\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} \tag{2.44}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de chaque équation dans (2.44), les solutions exactes sont données par

$$(u(x), v(x)) = (1 + x, 1 + x^2). \tag{2.45}$$

Exemple 2.6

Utilisez la méthode de la transformée de Laplace pour résoudre les systèmes suivants d'intégrale de Volterra équations

$e^x - 1 = \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t+1)v(t))dt,$

$e^{-x} - 1 = \int_0^x ((x-t-1)u(t) + (x-t)v(t))dt.$
(2.46)

Prendre la transformée de Laplace des deux côtés de chaque équation dans (2.46) donne

$$\mathcal{L}\{e^x - 1\} = \mathcal{L}\{(x-t) * u(x) + (x-t+1) * v(x)\}, \tag{2.47}$$
$$\mathcal{L}\{e^{-x} - 1\} = \mathcal{L}\{(x-t-1) * u(x) + (x-t) * v(x)\}.$$

Cela donne à son tour

$$\frac{1}{s^2}U(s) + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)V(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}, \tag{2.48}$$

$$\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)U(s) + \frac{1}{s^2}V(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s},$$

La résolution de ce système d'équations pour $U(s)$ et $V(s)$donne

$$U(s) = \frac{1}{s-1}, V(s) = \frac{1}{s+1} \tag{2.49}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de chaque équation dans (2.49), les solutions exactes sont données par

$$(u(x), v(x)) = (e^x, e^{-x}). \tag{2.50}$$

2.3.2 Conversion en un système Volterra de la seconde Type

La technique de conversion fonctionne efficacement en utilisant la règle de Leibnitz . En différenciant les deux membres de chaque équation dans (2.39), et en utilisant la règle de Leibnitz, on obtient

$$f_1' = K_1(x,x)u(x) + \tilde{K}_1(x,x)v(x) + \int_0^x \left(K_{1x}(x,t)u(t) + \tilde{K}_{1x}(x,t)v(t) + ...\right)dt, \tag{2.51}$$

$$f_2' = K_2(x,x)u(x) + \tilde{K}_2(x,x)v(x) + \int_0^x \left(K_{2x}(x,t)u(t) + \tilde{K}_{2x}(x,t)v(t) + ...\right)dt,$$

Trois remarques peuvent être faites ici :

1. Si au moins un parmi $K_i(x,x)$ et $\tilde{K}_i(x,x), i = 1,2,...,n$ dans chacun des les équations ci-dessus ne s'annulent pas, alors le système se réduit à un système de équations intégrales de Volterra de seconde espèce. Dans ce cas, nous pouvons utiliser n'importe quel méthode que nous avons étudiée auparavant.

2. Si $K_i(x,x) = 0$ et $\tilde{K}_i(x,x) = 0, i = 1,2,...,n$, pour toute équation, et si $\tilde{K}_{ix}(x,x) = 0$ et $\tilde{K}_{ix}(x,x) = 0$, alors on différencie à nouveau cette équation.

3. Les fonctions $f_i(x)$ doivent satisfaire des conditions spécifiques pour garantir une solution continue unique pour chacune des solutions inconnues. La détermination de ces conditions particulières sera laissée en exercice

2.4 Systèmes d'équations intégro-différentielles de Volterra

Volterra a étudié les influences héréditaires lorsqu'il examinait un modèle de croissance démographique. Le travail de recherche a abouti à un sujet spécifique, où les opérateurs différentiels et intégraux apparaissaient ensemble dans la même équation. Ce nouveau type d'équations a été appelé Volterra intégro-différentielles équations, données sous la forme

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{2.52}$$

où $u(i)(x) = \dfrac{d^n x}{dx^i}$. parce que l'équation résultante combine la différentielle opérateur et l'opérateur intégral, alors il faut définir les conditions initiales $u(0), u(0), ..., u_{(i1)}(0)$ pour la détermination de la solution particulière $u(x)$ de l'équation intégro-différentielle de Volterra.. Dans cette section, nous étudierons des systèmes d'équations intégro-différentielles de Volterra de seconde espèce données par

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x) &= f_1(x) + \int_0^x \Big(K_1(x,t)u(t) + \tilde{k}_1(x,t)v(t) + \Big)dt \\ v^{(i)}(x) &= f_2(x) + \int_0^x \Big(K_2(x,t)u(t) + \tilde{k}_1(x,t)v(t) + \Big)dt \end{aligned} \tag{2.53}$$

Les fonctions inconnues $u(x), v(x), ...,$ qui seront déterminées, apparaissent à l'intérieur le signe intégral alors que les dérivées de $u(x), v(x), ...$ apparaissent le plus souvent en dehors du signe intégral. Les noyaux $K_i(x,t)$ et $\tilde{K}_i(x,t)$, et la fonction $f_i(x)$ reçoivent des fonctions à valeurs réelles. Il existe une variété de méthodes numériques et analytiques qui seront utilisées pour résoudre le système d'équations intégro-différentielles. Cependant, dans cette section, nous ne présenterons que deux méthodes, nouvelle et traditionnelle, qui seront utilisées pour cette étude.

2.4.1 La méthode d'itération variationnelle

la méthode d'itération variationnelle (VIM) a été utilisée auparavant dans cette texte. La méthode fournit des approximations successives rapidement convergentes de la solution exacte si une telle solution de forme fermée existe, et non des composants comme dans la méthode de décomposition d'Adomian. La méthode d'itération variationnelle [8] traite les problèmes linéaires et non linéaires de la même manière sans aucun besoin à des restrictions spécifiques telles que les soi-disant polynômes adomiens que nous besoin de termes non linéaires. Les fonctionnelles de correction pour le système de Volterra d'intégro-différentiel les équations (2.53) sont données par

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n + \int_0^x \lambda(t)\Big(u_n^i(t) - f_1 - \int_0^t K(t,r)\tilde{u}_n(r)dr \Big)dt \\ v_{n+1}(x) &= v_n + \int_0^x \lambda(t)\Big(v_n^i(t) - f_2 - \int_0^t K(t,r)\tilde{v}_n(r)dr \Big)dt \end{aligned} \tag{2.54}$$

Comme présenté précédemment, la méthode d'itération variationnelle est utilisée en appliquant deux étapes essentielles. Il faut d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui peut être identifié de manière optimale par intégration par parties et en utilisant une variante restreinte. Ayant λ déterminé, une formule d'itération, sans variation restreinte, doit être utilisé pour la détermination des approximations $u_{n+1(}x)$, $n \geq 0$ et $v_{n+1}(x)$, $n \geq 0$ des solutions $u(x)$ et $v(x)$. Les approximations zéro $u_0(x)$ et $v_0(x)$ peuvent être n'importe les fonctions. Cependant, les conditions initiales sont de préférence utilisées pour sélectionner ces approximations $u_0(x)$ et$v_0(x)$comme on le verra plus loin. En conséquence, les solutions sont donnés par

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x), \\ v(x) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} v_n(x). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Le VIM sera illustré par l'étude des exemples suivants.

Exemple 2.7

Utiliser le VIM pour résoudre le système d'équations intégro-différentielles de Volterra

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t+1)v(t))dt \\ v'(x) &= -1 - 3x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x ((x-t+1)u(t) + (x-t)v(t))dt, \end{aligned} \tag{2.56}$$

où $u(0) = 1, v(0) = 1$. Les fonctionnelles de correction pour ce système sont données par

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) - \int_0^x \left(u'_n(t) - 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - I_1(t)\right)dt \\ v_{n+1}(x) &= v_n(x) - \int_0^x \left(v'_n(t) - 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - I_2(t)\right)dt \end{aligned} \tag{2.57}$$

où

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^x ((t-r)u_n(r) + (t-r+1)v_n(r))dr, \\ I_2(t) &= \int_0^x ((t-r+1)u_n(r) + (t-r)v_n(r))dr, \end{aligned} \tag{2.58}$$

et $\lambda = 1$ pour l'équation intégro-différentielle du premier ordre. Nous pouvons utiliser le conditions initiales pour choisir$u_0(x) = u(0) = 1$ et $v_0(x) = v(0) = 1$. En utilisant cette sélection dans les fonctionnelles de correction donne les approximations

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, \\ v_0(x) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_1(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 \\ v_1(x) = 1 - x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_2(x) = 1 + x + x^2 + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3\right) + \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^4\right) + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{360}x^6 \\ v_2(x) = 1 - x - x^2 + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3\right) + \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^4\right) + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{360}x^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3(x) = 1 + x + x^2 + \left(\frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{120}x^4\right) + \left(\frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{360}x^6\right) + ... \\ v_3(x) = 1 - x - x^2 + \left(\frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{120}x^4\right) + \left(\frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{360}x^6\right) + ... \end{cases}$$

et ainsi de suite. En annulant les termes de bruit, les solutions exactes sont données par

$$(u(x), v(x)) = (1 + x + x^2, 1 - x - x^2). \tag{2.59}$$

Exemple 2.8

Utiliser le VIM pour résoudre le système d'équations intégro-différentielles de Volterra

$$u'(x) = 1 - x2 + e^x + \int_0^x (u(t) + v(t))dt, u(0) = 1, v(0) = 1, \tag{2.60}$$

$$v'(x) = 33e^x + \int_0^x (u(t) - v(t))dt.$$

Les fonctionnelles de correction pour ce système sont données par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n'(t) - 1 + t2 - e^t - \int_0^t (u_n(r) + v_n(r))dr\right)dt \tag{2.61}$$

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) - \int_0^x \left(v_n'(t) - 3 + 3e^t - \int_0^t (u_n(r) + v_n(r))dr\right)dt$$

Nous utilisons les conditions initiales données pour sélectionner les approximations zéro $u_0(x) = u(0) = 1$ et$v_0(x) = v(0) = 1$. L'utilisation de cette sélection dans le fonctionnelles de correction donne les approximations successives suivantes

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ v_0(x) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left(u_0'(t) - 1 + t2 - e^t - \int_0^t (u_0(r) + v_0(r))dr\right)dt = 1\frac{1}{3}x^3 \\ v_1(x) = v_0(x) - \int_0^x \left(v_0'(t) - 3 + 3e^t - \int_0^t (u_0(r) + v_0(r))dr\right)dt \\ = 2 + 3x3e^x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(x) = u_2(x) - \int_0^x \left(u_1'(t) - 1 + t2 - e^t - \int_0^t (u_1(r) + v_1(r))drdt \right.\\ = x + \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...\right) \\ v_2(x) = v_2(x) - \int_0^x \left(v_1'(t) - 1 + t2 - e^t - \int_0^t (u_1(r) + v_1(r))dr\right)dt \\ = x + \left(1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5}x^5...\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = x + \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!} + ...\right) \\ v(x) = x - \left(1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 ...\right) \end{cases}$$

et ainsi de suite. Les solutions exactes sont donc données par

$$(u(x), v(x)) = (x + e^x, x - e^x). \tag{2.62}$$

CHAPTER 3

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM

Introduction
Les systèmes d'équations intégrales de Volterra et de Fredholm ont beaucoup attiré préoccupation en sciences appliquées. Les systèmes d'équations intégrales de Fredholm apparaissent en deux sortes. Le système des équations intégrales de Fredholm de première espèce

$$f_1(x) = \int_a^b \Big(K_1(x,t)u(t) + \tilde{K}_1(x,t)v(t) + ...\Big)\, dt, \tag{3.1}$$

$$f_2(x) = \int_a^b \Big(K_2(x,t)u(t) + \tilde{K}_2(x,t)v(t) + ...\Big)\, dt,$$

où les fonctions inconnues$u(x)$et $v(x)$ n'apparaissent que sous l'intégrale signe, et a et b sont des constantes. Cependant, pour les systèmes d'intégrale de Fredholm équations de seconde espèce, les fonctions inconnues $u(x)$et $v(x)$ apparaissent à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Le second type est représenté par le former

$$u(x) = f_1(x) + \int_a^b \Big(K_1(x,t)u(t) + \tilde{K}_1(x,t)v(t) + ...\Big)\, dt, \tag{3.2}$$

$$v(x) = f_2(x) + \int_a^b \Big(K_2(x,t)u(t) + \tilde{K}_2(x,t)v(t) + ...\Big)\, dt,$$

Les systèmes d'équations intégro-différentielles de Fredholm ont également attiré un taille considérable d'intérêt. Ces systèmes sont donnés par

$$u^{(i)}(x) = f_1(x) + \int_a^b \Big(K_1(x,t)u(t) + \tilde{K}_1(x,t)v(t) + ...\Big)\, dt, \tag{3.3}$$

$$v^{(i)}(x) = f_2(x) + \int_a^b \left(K_2(x,t)u(t) + \tilde{K}_2(x,t)v(t) + ... \right) dt,$$

où les conditions initiales pour le dernier système doivent être prescrites

3.1 Systèmes d'équations intégrales de Fredholm

Dans cette section, nous étudierons les systèmes d'équations intégrales de Fredholm des deuxième espèce donnée par

$$u(x) = f_1(x) + \int_a^b \left(K_1(x,t)u(t) + \tilde{K}_1(x,t)v(t) + ... \right) dt, \tag{3.4}$$

$$v(x) = f_2(x) + \int_a^b \left(K_2(x,t)u(t) + \tilde{K}_2(x,t)v(t) + ... \right) dt,$$

Les fonctions inconnues $u(x)$,$v(x)$, ... qui sera déterminé, apparaissent à l'intérieur et en dehors du signe intégral. Les noyaux $K_i(x,t)$ et $\tilde{K}_i(x,t)$, et la fonction $f_i(x)$ reçoivent des fonctions à valeurs réelles. Dans ce qui suit nous présenterons les méthodes, nouvelles et traditionnelles, qui seront utilisées. Rappelons que le Fredholm équations intégrales ont été présentées dans le chapitre où une variété de méthodes, nouvelles et traditionnelles, ont été appliquées. Dans cette section, nous focaliserons notre étude que sur deux méthodes, à savoir la méthode de décomposition adomienne et la méthode de calcul direct.

3.1.1 La méthode de décomposition adomienne

La méthode de décomposition adomienne [6–7], telle que présentée précédemment, décompose chaque solution comme une somme infinie de composants, où ces composants sont déterminé de manière récurrente. Cette méthode peut être utilisée sous sa forme standard, ou combiné avec le phénomène des termes de bruit. De plus, la décomposition modifiée méthode sera utilisée chaque fois que cela sera approprié.

Exemple 3.1

$$u(x) = \sin x - 2 - 2x - \pi x + \int_0^\pi (1 + xt)u(t) + 1(1 - xt)v(t).) \, dt, \tag{3.5}$$

$$v(x) = \cos x - 2 - 2x + \pi x + \int_0^\pi (1 - xt)u(t) - 1(1 + xt)v(t).) \, dt,$$

La méthode de décomposition adomienne suggère que les termes linéaires $u(x)$ et $v(x)$ se décompose en une série infinie de composantes

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \tag{3.6}$$

où $u_n(x)$ et $v_n(x)$, $n \geq 0$ sont les composantes de $u(x)$et $v(x)$ qui être élégamment déterminé de manière récursive. Remplacer (1.6) par (1.5)donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sin x - 2 - 2x - \pi x + \int_0^\pi \left((1 + xt) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \cos x - 2 - 2x + \pi x + \int_0^{\pi} \left((1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) - (1 + xt) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt$$

La méthode de décomposition modifiée sera utilisée ici, nous fixons donc la relation récursive

$u_0(x) = \sin x - 2$

$v_0(x) = \cos x - 2$

$u_1(x) = -2x - \pi x + \int_0^{\pi} (1 + xt)u_0(t) + 1(1 - xt)v_0(t).)\, dt,$

$v_1(x) = -2x + \pi x + \int_0^{\pi} (1 - xt)u_0(t) - 1(1 + xt)v_0(t).)\, dt,$

$u_{k+1}(x) = \int_0^{\pi} (1 - xt)u_k(t) - 1(1 + xt)v_k(t).)\, dt, k \geq 1$

$v_{k+1}(x = \int_0^{\pi} (1 - xt)u_k(t) - 1(1 - xt)v_k(t).)\, dt, k \geq 1$
(3.8)

Cela donne à son tour

$$(u(x), v(x)) = (\sin x, \cos x) \tag{3.9}$$

Exemple 3.2

Utilisez la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre le système suivant de Équations intégrales de Fredholm

$$u(x) = x + \sec^2 x - \frac{\pi^3}{96} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tu(t) + tv(t))dt \tag{3.10}$$

$$v(x) = x - \sec^2 x - \frac{\pi^2}{16} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tu(t) + tv(t))dt$$

En procédant comme précédemment on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = x + \sec^2 x - \frac{\pi^3}{96} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(t \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + t \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt \tag{3.11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = x - \sec^2 x - \frac{\pi^2}{16} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(t \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + t \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \right) dt$$

La méthode de décomposition modifiée sera utilisée ici, nous fixons donc la relation récursive

$$u_0(x) = x + \sec^2 x \quad , \quad v_0(x) = x - \sec^2 x$$

$$u_1(x) = -\frac{\pi^3}{96} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tu_0(t) + tv_0(t))dt$$

$$v_1(x) = -\frac{\pi^2}{16} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tu_0(t) + tv_0(t))dt \tag{3.12}$$

$$u_{k+1}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tu_k(t) + tv_k(t))dt, k \geq 1$$

$$v_{k+1}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tu_k(t) + tv_k(t))dt, K \geq 1$$

Cela donne à son tour

$$u_0(x) = x + \sec^2 x \quad , \quad u_1(x) = 0 \tag{3.13}$$

$$v_0(x) = x - \sec^2 x \quad , \quad v_1(x) = 0 \tag{3.14}$$

En conséquence, les composants restants $u_k(x)$et $v_k(x)$ pour $k \geq 2$ disparaissent. Le les solutions exactes sont données par

$$(u(x), v(x)) = (x + \sec^2 x, x \sec^2 x) \tag{3.15}$$

3.1.2 La méthode de calcul direct

Il a été indiqué précédemment que toutes les méthodes que nous avons utilisées dans le chapitre pour gérer Les équations intégrales de Fredholm peuvent être utilisées ici pour résoudre des systèmes de Fredholm équations intégrales. Dans la section précédente, nous avons sélectionné la décomposition adomienne méthode. Dans cette section, nous utiliserons le calcul direct méthode. Les autres méthodes telles que la méthode des itérations variationnelles, successives méthode de substitution, et d'autres peuvent également être utilisées. La méthode de calcul direct sera appliquée pour résoudre les systèmes de Équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. La méthode était utilisée avant dans ce texte, nous résumons donc les étapes nécessaires. La méthode sera appliquée pour les grains dégénérés ou séparables de la forme

$$K_1(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t), \tag{3.16}$$

$$K_2(x,t) = \sum_{k=1}^{n} r_k(x)s_k(t).$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1. Nous substituons d'abord dans le système d'équations intégrales de Fredholm la forme

$$u(x) = f_1(x) + \int_a^b \left(k_1(x,t)u(t) + \tilde{K}_1(x,t)v(t)+\right) dt, \tag{3.17}$$

$$v(x) = f_2(x) + \int_a^b \left(K_2(x,t)u(t) + \tilde{K}_2(x,t)v(t)+\right) dt,$$

2. Cette substitution donne

$$u(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \int_a^b h_k(t)u(t) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_k(x) + \int_a^b \tilde{h}_k(t)v(t)dt, \tag{3.18}$$

$$v(x) = f_2(x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(x) \int_a^b s_k(t)u(t) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{r}_k(x) + \int_a^b \tilde{s}_k(t)v(t)dt,$$

3. Chaque intégrale du côté droit ne dépend que de la variable t avec limites constantes d'intégration pour t. Cela signifie que chaque intégrale est équivalente à une constante. Sur cette base, l'équation (3.18) devient

$$u(x) = f_1(x) + \alpha_1 g_1(x) + ... + \alpha_n g_n(x) + \beta_1 \tilde{g}_1(x) + ... + \beta_n \tilde{g}_n(x), \tag{3.19}$$
$$v(x) = f_2(x) + \gamma_1 r_1(x) + ... + \gamma_n r_n(x) + \delta_1 \tilde{r}_1(x) + ... + \delta_n \tilde{r}_n(x)$$

$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n,$

$\beta_i = \int_a^b \tilde{h}_i(t)v(t)dt, 1 \leq i \leq n,$

$\gamma_i = \int_a^b s_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n,$

$\delta_i = \int_a^b \tilde{s}_i(t)v(t)dt, 1 \leq i \leq n,$
(3.20)

4. La substitution dans donne un système de n équations algébriques qui peut être résolu pour déterminer les constantes α_i , β_i,γ_i et δ_i. Faciliter le travail de calcul, nous pouvons utiliser les systèmes symboliques informatiques tels comme Maple et Mathematica. En utilisant les valeurs numériques obtenues de ces constantes dans , les solutions $u(x)$ et$v(x)$ du système de Fredholm les équations intégrales suivent immédiatement.

Exemple 3.3

Résolvez le système suivant d'équations intégrales de Fredholm en utilisant la relation directe méthode de calcul

$$u(x) = \sin x + \cos x - 4x + \int_0^\pi (xu(t) + xv(t))dt, \tag{3.21}$$
$$v(x) = \sin x - \cos x + \int_0^\pi (u(t) - v(t))dt.$$

Suite à l'analyse présentée ci-dessus, ce système peut être réécrit comme

$$u(x) = \sin x + \cos x + (\alpha - 4)x), \tag{3.22}$$
$$v(x) = \sin x - \cos x + \beta,$$

où

$$\alpha = \int_0^\pi (u(t) + v(t))dt \quad , \quad \beta = \int_0^\pi (u(t) - v(t))dt. \tag{3.23}$$

Pour déterminer α, et β, on remplace (3.30) par (3.31) pour obtenir

$$\alpha = (4 - 2\pi^2) + \frac{\pi^2}{2}\alpha + \pi\beta \quad , \quad \beta = 2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\alpha - \pi\beta \tag{3.24}$$

La résolution de ce système donne

$$\alpha = 4 \quad , \quad \beta = 0 \tag{3.25}$$

Remplacer les pistes par les solutions exactes

$$(u(x), v(x)) = (\sin x + \cos x, \sin x - \cos x) \tag{3.26}$$

Exemple 3.4

Résolvez le système suivant d'équations intégrales de Fredholm en utilisant la relation directe méthode de calcul

$$u(x) = \sec x - 2 + \int_0^{\pi/3} (\tan t u(t) + \sec t v(t))dt, \tag{3.27}$$

$$v(x) = -(1 + \sqrt{3} + \tan x + \int_0^{\pi/3} (\sec t u(t) + \sec t v(t))dt.$$

Suite à l'analyse présentée ci-dessus, ce système peut être réécrit comme

$$u(x) = \sec x - 2 + \alpha_1 + \beta_1, \tag{3.28}$$

$$v(x) = \tan x - (1 + \sqrt{3}) + +\alpha_1 - \beta_1.$$

où

$$\alpha_1 = \int_0^{\pi/3} \tan t u(t)dt \quad , \quad \alpha_2 = \int_0^{\pi/3} \sec t u(t)dt \quad , \quad \beta_1 = \int_0^{\pi/3} \sec t v(t)dt. \tag{3.29}$$

Pour déterminer α_1, α_2 et β_1, nous substituons et résolvons le système obtenu que nous trouvons

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = \sqrt{3}, \qquad \beta_1 = 1 \tag{3.30}$$

Substitution en pistes aux solutions exactes

$$(u(x), v(x)) = (\sec x, \tan x). \tag{3.31}$$

3.2 Systèmes d'équations intégro-différentielles de Fredholm

Les équations intégro-différentielles de Fredholm ont été étudiées. L'équations intégro-différentielles de Fredholm, ont été données sous la forme

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt, \tag{3.32}$$

où $u_{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$. Parce que l'équation résultante combine la différentielle et l'opérateur intégral, alors il faut définir des conditions initiales $u(0)$, $u'(0)$, . . . ,$u^{(i1)}(0)$ pour la détermination de la solution particulière $u(x)$ de l'équation intégro-différentielle de Fredholm .
Dans cette section, nous étudierons des systèmes d'équations intégro-différentielles de Fredholm du second type donné par

$$u^{(i)}(x) = f_1(x) + \int_a^b \Big(K_1(x,t)u(t) + \tilde{K}_1(x,t)v(t) + ...\Big)\, dt, \tag{3.33}$$

$$v^{(i)}(x) = f_2(x) + \int_a^b \Big(K_2(x,t)u(t) + \tilde{K}_2(x,t)v(t) + ...\Big)\, dt,$$

Les fonctions inconnues$u(x)$,$v(x)$, ..., qui sera déterminé, se produisent à l'intérieur le signe intégral alors que les dérivées de $u(x)$, $v(x)$, ... apparaissent surtout à l'extérieur le signe intégral. Les noyaux $K_i(x,t)$ et $\tilde{K}_i(x,t)$, et la fonction $f_i(x)$ reçoivent des fonctions à valeurs réelles. , quatre méthodes analytiques ont été utilisées pour résoudre le Fredholm équations intégro-différentielles. Ces méthodes sont l'itération variationnelle méthode (VIM), la méthode de décomposition adomienne (ADM), le direct

méthode de calcul et la méthode de résolution en série. Le susdit méthodes peuvent gérer efficacement les systèmes de Fredholm intégro-différentiel équations. Cependant, dans cette section, nous n'utiliserons que deux de ces méthodes, à savoir la méthode de calcul direct et l'itération variationnelle méthode. Le lecteur peut appliquer les deux autres méthodes pour montrer qu'il peut être utilisé pour gérer le système .

3.2.1 La méthode de calcul direct

La méthode de calcul direct est une technique fiable qui était utilisée auparavant pour manipuler les équations intégrales de Fredholm , intégrodifférentiel de Fredholm équations et systèmes d'équations intégrales de Fredholm dans ce chapitre. La méthode de calcul direct sera appliquée pour résoudre les systèmes d'équations intégro-différentielles de Fredholm de seconde espèce dans d'une manière parallèle à notre traitement qui était utilisé auparavant. La méthode approche toute équation de Fredholm de manière directe et donne la solution en une forme exacte et non sous une forme sérielle. La méthode sera appliquée pour la noyaux dégénérés ou séparables de la forme

$$K_1(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t), \tilde{K}_1(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}k(x)\tilde{h}_k(t), \tag{3.34}$$

$$K_2(x,t) = \sum_{k=1}^{n} r_k(x)s_k(t), \tilde{K}_2(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{r}_k(x)\tilde{s}_k(t).$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1.On substitue d'abord dans le système de Fredholm intégro-différentiel équations pour obtenir

$$u^{(i)}(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \int_a^b h_k(t)u(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_k(x) \int_a^b \tilde{h}_k(t)v(t)dt, \tag{3.35}$$

$$v^{(i)}(x) = f_2(x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(x) \int_a^b s_k(t)u(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \tilde{r}_k(x) \int_a^b \tilde{s}_k(t)v(t)dt.$$

2. Chaque intégrale du côté droit ne dépend que de la variable t avec limites constantes d'intégration pour$t$. Cela signifie que chaque intégrale est équivalente à une constante. Sur cette base, l'équation (devient)

$$u^{(i)}(x) = f_1(x) + \alpha_1 g_1(x) + ... + \alpha_n g_n(x) + \beta_1 \tilde{g}_1(x) + ... + \beta_n \tilde{g}_n(x), \qquad (3.36)$$

$$v^{(i)}(x) = f_2(x) + \gamma_1 r_1(x) + ... + \gamma_n r_n(x) + \delta_1 \tilde{r}_1(x) + ... + \delta_n \tilde{r}_n(x),$$

où

$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n,$

$\beta_i = \int_a^b \tilde{h}_i(t)v(t)dt, 1 \leq i \leq n,$

$\gamma_i = \int_a^b s_i(t)u(t)dt, 1 \leq i \leq n,$

$\delta_i = \int_a^b \tilde{s}_i(t)v(t)dt, 1 \leq i \leq n.$
(3.37)

Exemple 3.5

Résolvez le système suivant d'équations intégro-différentielles de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct

u'(x) $= \sin x + x\cos x + (2-\pi^2) + \int_0^\pi (tu(t) - v(t))dt, \quad u(0) = 0,$
(3.38)

$$v'(x) = \cos x - x\sin x - 3\pi + \int_0^\pi (u(t)tv(t))dt, \quad v(0) = 0.$$

Suite à l'analyse présentée ci-dessus, ce système peut être réécrit comme

$$u'(x) = \sin x + x\cos x + (2 - \pi^2 + \alpha), \quad v'(x) = \cos x - x\sin x + (\beta - 3\pi), \qquad (3.39)$$

où

$\alpha = \int_0^\pi (tu(t) - v(t))dt,$

$\beta = \int_0^\pi (u(t) - tv(t))dt.$
(3.40)Intégrer les deux côtés de once de 0 à x, et utiliser l'initiale conditions que nous trouvons

u(x) = x $\sin x + (2 - \pi 2 + \alpha)x,$

v(x) = x $\cos x + (\beta - 3\pi)x.$
(3.41)

Intégrer les deux côtés de once de 0 à x, et utiliser l'initiale conditions que nous trouvons

$$\alpha = \pi^2 - 2, \beta = 3\pi. \tag{3.42}$$

Remplacer les pistes par les solutions exactes

$$(u(x), v(x)) = (x \sin x, x \cos x). \tag{3.43}$$

Exemple 3.6

Résolvez le système suivant d'équations intégro-différentielles de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct

u'(x) = -1+ $\sinh x + \int_0^{\ln 2} (u(t) + v(t))dt, \quad u(0) = 1,$
(3.44)

$$v'(x) = 1 - 2\ln 2 + \cosh x + \int_0^{\ln 2} (tu(t) + tv(t))dt, \quad v(0) = 0. \tag{3.45}$$

Ce système peut être réécrit comme

$$u'(x) = \sinh x + \alpha - 1, \tag{3.46}$$

$$v'(x) = \cosh x + 1 - 2\ln 2 + \beta,$$

où

$\alpha = \int_0^{\ln 2} (u(t) + v(t))dt,$
$\beta = \int_0^{\ln 2} (tu(t) + tv(t))dt.$
(3.47)

En intégrant les deux côtés de (3.44) une fois de 0à x, et en utilisant l'initiale conditions que nous trouvon

u(x) = $\cosh x + (\alpha - 1)x,$

v(x) = $\sinh x + (1 - 2ln2 + \beta)x.$(3.48)

Pour déterminer α, etβ , nous substituons (3.46) dans (3.45) et résolvons le système résultant on obtient

$$\alpha = 1, \beta = 2\ln 2 - 1. \tag{3.49}$$

La substitution de (3.47) dans (3.46) conduit aux solutions exactes

$$(u(x), v(x)) = (\cosh x, \sinh x). \tag{3.50}$$

3.2.2 Itération tonale de la méthode Variati

la méthode d'itération variationnelle a été utilisée pour traiter les Équations intégrales de Fredholm et équations intégro-différentielles de Fredholm respectivement. La méthode fournit des approximations successives rapidement convergentes de la solution exacte si une telle solution sous forme fermée existe, et non composants comme dans la méthode de décomposition d'Adomian. L'itération variationnelle méthode [8] gère les problèmes linéaires et non linéaires de la même manière sans tout besoin de restrictions spécifiques comme les polynômes dits d'Adomian dont nous avons besoin pour les problèmes non linéaires. Les fonctionnelles de correction des équations intégro-différentielles du système sont donnés par

$$\mathrm{u}_{n+1}(x) = u_n(x) + \textstyle\int_0^x \lambda(t)\big(u_n^{(i)}(t) - f_1(t) - \int_a^b (K_1(t,r)\tilde{u}_n(r)dr + \tilde{K}_1(t,r)\tilde{v}_n(r)dr)dt\big), \quad (3.51)$$

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(u_n^{(i)}(t) - f_2(t) - \int_a^b (K_2(t,r)\tilde{u}_n(r)dr + \tilde{K}_2(t,r)\tilde{v}_n(r)dr)dt\right)$$

Il faut d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui peut être identifié de manière optimale.
Ayant λ déterminé, une formule d'itération, sans restriction variation, doit être utilisé pour la détermination des approximations successives $u_{n+1}(x)$, $v_{n+1}(x)$, $n \geq 0$des solutions $u(x)$et $v(x)$. Les approximations zéro $u_0(x)$ et $v_0(x)$peuvent être n'importe quelles fonctions sélectives. Cependant, nous pouvons utiliser les conditions initiales pour sélectionner les approximations zéro u_0 et $v_0(x)$. Le VIM sera illustré en étudiant les exemples suivants.

Exemple 3.7

Résoudre le système d'équations intégro-différentielles de Fredholm en utilisant la méthode variationnelle méthode d'itération

$$u'(x) = -2 - \sin x + \int_0^\pi (u(t) + v(t))dt \quad , \quad u(0) = 1, \tag{3.52}$$

$$v'(x) = 2 - \pi + \cos x + \int_0^\pi (tu(t) + tv(t))dt \quad , \quad v(0) = 0.$$

Les fonctionnelles de correction pour ce système sont données par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) \int_0^x (u_n'(t) + 2 + \sin t - \rho_1)dt, \tag{3.53}$$

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) \int_0^x (v_n'(t) + \pi - 2 - \cos t - \rho_2)dt$$

où

$$\rho_1 = \int_0^\pi (u_n(r) + v_n(r))dr, \rho_2 = \int_0^\pi (ru_n(r) + rv_n(r))dr. \tag{3.54}$$

En sélectionnant $u_0(x) = 1$et $v_0(x) = 0$, les fonctionnelles de correction donnent ce qui suit approximations successives

$u_0(x) = 1,$

$v_0(x) = 0,$

$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left(u_0'(x) + 2 + \sin t - \int_0^\pi (u_0(r) + v_0(r))dr\right) dt = \cos x 2x + \pi x,$

$v_1(x) = v_0(x) - \int_0^\pi \left(v_0'(t) + \pi 2 \cos t - \int_0^\pi (ru_0(r) + rv_0(r))dr\right) dt,$

$= \sin x + 2x - \pi x + \frac{\pi^2}{2}x,$

$u_2(x) = u_0(x) - \int_0^x \left(u_0'(x) + 2 + \sin t - \int_0^\pi (u_1(r) + v_1(r))dr\right) dt = \cos x + (2x - 2x) + (\pi x - \pi x) + ,$

$v_2(x) = v_0(x) - \int_0^\pi \left(v_0'(t) + \pi - 2 - \cos t - \int_0^\pi (ru_1(r) + rv_1(r))dr\right) dt,$

$= \sin x + (2x - 2x) + (\pi x - \pi x) + \left(\frac{\pi^2}{2}x - \frac{\pi^2}{2}x\right)$ ......, (3.55)

et ainsi de suite. Il est évident que des termes de bruit apparaissent dans chaque composante. Par en annulant les termes de bruit, les solutions exactes sont donc données par

$$(u(x), v(x)) = (\cos x, \sin x). \quad (3.56)$$

Exemple 3.8

Résoudre le système d'équations intégro-différentielles de Fredholm en utilisant la méthode variationnelle méthode d'itération

u'(x) =1+ $\cosh x + \int_0^{\ln 2}(u(t) + v(t))dt, \qquad u(0) = 0,$

v'(x) = 1 - 2 $\ln 2 + \sinh x + \int_0^{\ln 2}(tu(t) + tv(t))dt, \qquad v(0) = 1..$
(3.57)

Les fonctionnelles de correction pour ce système sont données par

$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(t) + 1 - \cosh t - \rho_3)dt,$

$v_{n+1}(x) = v_n(x) - \int_0^x (v_n(t) + 2\ln 2 - 1 - \sinh t - \rho_4)dt.$
(3.58)

où

$\rho_3 = \int_0^{\ln 2}(u_n(r) + v_n(r))dr, \quad \rho_4 = \int_0^{\ln 2}(ru_n(r) + rv_n(r))dr.$(3.59)

Nous pouvons utiliser les conditions initiales pour sélectionner $u_0(x) = 0$et $v_0(x) = 1$. En utilisant cette sélection dans les fonctionnelles de correction donne les approximations

$u_0(x) = 0,$

$\mathrm{v}_0(x) = 1,$

$\mathrm{u}_1(x) = \sinh x + x \ln 2 - x,$

$\mathrm{v}_1(x) = \cosh x + x - 2x \ln 2 + \frac{x}{2}(\ln 2)^2,$

$\mathrm{u}_2(x) = \sinh x + (x - x) + (2x \ln 2 - 2x \ln 2) + \left(\frac{x}{2}(ln2)^2 - \frac{x}{2}(ln2)^2\right) + ...,$

$\mathrm{v}_2(x) = \cosh x + (x - x) + (2x \ln 2 - 2x \ln 2) + \left(\frac{x}{2}(ln2)^2 - \frac{x}{2}(ln2)^2\right) + ...,$

$\mathrm{u}_3(x) = \sinh x + \left(\frac{x}{4}(ln2)^3 - \frac{x}{4}(ln2)^3\right) + ...,$

$\mathrm{v}_3(x) = \cosh x + \left(\frac{x}{3}(ln2)^4 - \frac{x}{3}(ln2)^4\right) + ,$ (3.60)
et ainsi de suite. Il est évident que des termes de bruit apparaissent dans chaque composante. Par en annulant les termes de bruit, les solutions exactes sont donc données par

$$(u(x), v(x)) = (\sinh x, \cosh x). \tag{3.61}$$

Conclusion

L'objectif principal de ce travail est d'étudier certaines méthodes de résolution des systèmes de Volterra d'équations intégrales et différentielles intégrales des premier et deuxième types.

Nous avons également étudié les méthodes de solutions systémiques des équations intégrales et différentielles intégrales de Friedholm

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications, Wiley, New York, (1999).

[2] A.M. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World Scientific,Singapore,(1997).

[3] A.M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, HEP

[4] and Springer, Beijing and Berlin, (2009).

[5] D. Porter and D.S. Stirling, Integral Equations: a Practical Treatment from

[6] equations of the first kind, J. Inst. Maths. Appl., 14 (1974) 211–215.

[7] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method ,Kluwer, Boston, (1994).

[8] J.H. He, Variational iteration method for autonomous ordinary differential sys tems, Appl. Math. Comput., 114(2/3) (2000) 115–123.

[9] P. Linz, A simple approximation method for solving Volterra integro-differential

[10] P. Linz, Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations, SIAM, Philadelphia, (1985). Spectral Theory to Applications, Cambridge, (2004).

[11] . A.M. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World Scientific,Singapore,(1997). 145 (2003) 641–653.

[12] A. Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications,Wiley, New York,(1999).

[13] A.M. Wazwaz, A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equa tions, Appl. Math. Comput., 127 (2002) 405–414.

[14] C.D. Green, Integral Equations Methods, Barnes and Noble, New York, (1969).

[15] H. Hochstadt, Integral Equations,Wiley, New York, (1973)

[16] K. Maleknejad and Y. Mahmoudi, Taylor polynomial solution of highorder non linear Volterra-Fredholm integro-differential equations, Appl. Math. Comput.

[17] R. Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, (1997).

[18] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer, Berlin, (1999)

[19] A. Polyanin and A. Manzhirov, Handbook of Integral Equations, Chapman and

[20] A.M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, HEP

[21] A.M. Wazwaz, The variational iteration method for solving linear and nonlinear
and Springer, Beijing and Berlin, (2009). Appl. Math. Comput., 175 (2006) 1229-1234.
Fredholm integral equations system by using a Taylor-series expansion method,

[22] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method, Hall,(2008) . integral equations, Math. Comput. Modelling, 39 (2004) 1113–1150.

[23] K. Maleknejad, N. Aghazadeh and M. Rabbani, Numerical solution of second kind Kluwer, Boston, (1994).

[24] R.F. Churchhouse, Handbook of Applicable Mathematics, Wiley, New York,(1981).

[25] R.P. Agarwal, D. O'Regan and P. Wong, Eigenvalues of a system of Fredholm

[26] R.P. Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, (1997). systems of PDEs, Comput. Math. Appl.54 (2007) 895–902.