REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté Des Mathématiques Et Sciences De La Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelles

Par : KHELIF DJIHANE NADJET

Thème :

Sur quelque problème de la physique mathématique

Soutenu publiquement le : 06/07/2023

Devant Le Jury Composé de :

Mr. AKTI MOHAMED	**M.A**	**Université Kasdi Merbah Ouargla**	**Président**
Me. TABIB HAWA	**M.C.B**	**Université Kasdi Merbah Ouargla**	**Examinatrice**
Mr. MAFLAH MABROUK	**PROF**	**Université Kasdi Merbah Ouargla**	**Rapporteur**

Promotion :2022/2023

Dédicace

Avecl ’expression de ma reconnaissance,

Jedé die cem odestet ravailà c euxqui , quels que soientl es termes embrassés,

Je n’arri verai s jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A l’homme, mon précieuxof fredu di eu, quidoi tm a vie,

Ma réussitee tt outm on respect: m on cher père.

Al a femmequi a souf fertsans m el aisser souffrir,

quin’ a jamais ditnon â mes exigences etqui n’ a épargné auc un

effortpour m ere ndrehe ureuse:m on adorablem ère

.

A mon chère frèrequi n’ ontpas c esséed em e *conseiller, encourager*

etsout enir toutau l ong dem es études.

QueD ieu les protègee tl eurs offrel a chancee tl e bonheur.

A tous les cousins, les voisins etl es amis quej ’aic onnu

jusqu’à maintenant.

Mercipour l eurs amourse tl eurs encouragements.

Melle KHELIF Djihane Nadjet

Remerciement

Ce mémoire est le fruit des efforts fournis et des sacrifices Consentis par plusieurs personnes quej en epourrai oubl ier dere mercier.

Mes remerciements s'adressent d'abord à Dieu, créateur de toutes choses, pour son soufflee tt ous ses innombrables bienfaits " alhamd lilah".

Aussi, je remercie mon Directeur de mémoire, Mr . MEFLAH Mebrouk. *d'avoir accepté de m'encadrer dans la conception et l'élaboration de ce travail, et aussi pour ledé vouementm anifesté malgrét outes ses nombreuses occupations.*

Jesouhai teadre sser mesre merciements sincères à tous les professeurs qui m'ont accompagné tout au long de mon parcours académique. Leur dévouement, leur expertise et leur passion pour l'enseignement ont été une source d'inspiration pour moi. Leurs enseignements m'ont permis de développer mes compétences et de me préparer au mieuxpour ma carrièreprof essionnelle.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude envers mes parents, mon frère et mes amis. Leur soutien inconditionnel, leurs encouragements et leur amour indéfectibles ont été essentiels pour surmonter les obstacles et persévérer dans mes études. Leur présence et leurs conseils précieux ont été d'une valeur inestimable tout au long dem on stage.

Je tiens à remercier du fond du cœur toutes les personnes qui ont *contribué à ma réussite, que ce soit sur le plan académique ou personnel. Leur soutien et leurs encouragements m'ont permis de grandir et de m'épanouir. Je suis extrêmement reconnaissant(e) d'avoir eu la chance d'avoir de telles personnes extraordinaires dans ma vie.*

Melle KHELIF Djihane Najet

Table des matières

.1 Introduction 1

I RAPPELS ET NOTATION 3

I.1 Rappels et notations 4

I.1.1 Présentation des edp 4

I.1.1.1 Les opérateurs différentiels 4

I.1.1.2 Définitions et propriétés des edp 4

I.1.1.3 Classification des EDP : 5

II Les problèmes hyperboliques 6

II.1 Le cas unidimensionnel 7

II.1.1 Solutions classiques et courbes caractéristiques 8

II.1.2 Solutions faibles 11

II.1.3 Solution entropique 17

II.1.4 Conditions limites 26

II.2 Cas multidimensionnel 29

II.2.1 Cas sans condition limite 29

II.2.2 Cas des conditions aux limites 39

III Les Problèmes elliptiques 44

III.1 Introduction 45

III.2 Des équations elliptiques linéaires 45

III.2.1 Présentation du probléme 45

III.2.2 Existence et unicité de la solution 47

III.2.3 Régularité et positivité de la solution 48

III.2.3.1 La régularité de la solution 48

III.2.4 Des équations elliptiques non linéaires 52

III.2.4.1 Théorèmes de points fixes 52

III.2.4.2 Équations semi-linéaires 58

III.2.4.3 Équations quasi-linéaires 66

IV Les Problèmes Paraboliques **76**

IV.0.1 Aperçu des méthodes 77

IV.1 Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$, solutions classiques 77

IV.2 Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert borné 79

IV.3 Solutions presque classiques par semi-groupes 82

IV.4 Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace) 87

IV.5 Discrétisation en espace et en temps 88

.1 Introduction

La physique mathématique est un domaine de recherche passionnant qui cherche à résoudre des problèmes physiques en utilisant des outils mathématiques avancés. Au cœur de cette discipline se trouvent les équations aux dérivées partielles, qui sont des équations mathématiques décrivant des phénomènes physiques complexes. Dans cette mémoire, nous nous intéresserons à quelques-uns des problèmes les plus fondamentaux de la physique mathématique, qui se présentent sous la forme d'équations aux dérivées partielles de seconde ordre.

Le sommaire de cette mémoire est divisé en trois parties, chacune se concentrant sur un type spécifique de problème d'équation aux dérivées partielles : le problème hyperbolique, le problème parabolique et le problème elliptique.

Dans la première partie il a été fait référence aux géneralités des éléments du mémorandum que nous nous apprétons à présenter et à inclure présentation des EDP,les opérateurs différentiels, Définitions et propriétés des EDP , classification des EDP.

Dans la deuxième partie, nous examinerons le problème hyperbolique. Ce type de problème se caractérise par des équations aux dérivées partielles qui impliquent des termes de dérivées secondes par rapport au temps et des termes de dérivées spatiales. Les exemples courants de problèmes hyperboliques incluent les équations des ondes et les équations de transport. Nous explorerons les méthodes mathématiques utilisées pour résoudre ces problèmes, telles que les techniques de séparation de variables, les méthodes de transformée de Fourier et les approches de propagation des singularités.

Dans la ltroisième partie , nous nous pencherons sur le problème elliptique. Ce type de problème se caractérise par des équations aux dérivées partielles qui impliquent uniquement des termes de dérivées spatiales. Les équations de Laplace et les équations de Poisson sont des exemples classiques de problèmes elliptiques. Nous aborderons des techniques avancées telles que la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des intégrales de frontière pour résoudre ces problèmes elliptiques.

Enfin, dans la quatriémé partie ,nous aborderons le problème parabolique. Ce type de problème implique également des termes de dérivées secondes par rapport au temps, mais les termes de dérivées spatiales sont moins prononcés. Les équations de la chaleur et les équations de diffusion sont des exemples courants de problèmes paraboliques. Nous étudierons les méthodes d'analyse fonctionnelle, telles que la théorie des semi-groupes et les espaces de Sobolev, qui sont utilisées pour résoudre ces problèmes paraboliques.

En explorant ces différents problèmes de la physique mathématique, nous découvrirons la richesse des méthodes mathématiques utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles de seconde ordre. Nous examinerons les principes théoriques qui sous-tendent ces méthodes et leur application pratique dans divers domaines de la physique, tels que la mécanique des fluides, la thermodynamique et l'électromagnétisme. En outre, nous discuterons des applications concrètes de ces problèmes de physique mathématique dans la modélisation et la simulation de phénomènes physiques complexes, ainsi que de leur importance pour notre compréhension fondamentale du monde qui nous entoure.

Chapitre I

RAPPELS ET NOTATION

I.1 Rappels et notations

I.1.1 Présentation des edp

I.1.1.1 Les opérateurs différentiels

Pour commencer, nous présentons ici quelques opérateurs différentiels qui jouent un rôle important dans les équations aux dérivées partielles..

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) muni de la mesure de Lebesgue dx.

Difinition .2.1.1.1 Le gradient : Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Le gradient de u, noté ∇u , est donné par :

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)^t.$$

Difinition .2.1.1.2 Le Laplacien : Soit $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Le Laplacien de u, noté Δu, est défini par :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x).$$

I.1.1.2 Définitions et propriétés des edp

Définition .2.1.2.1 : Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation qui concerne les dérivées partielles d'une fonction inconnue. Si nous notons :

$u : \mathbb{R}^n$ (ou Ω) $\to \mathbb{R}$
où :$x \mapsto u(x)$
alors l'équation peut être écrite sous la forme :

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), ..., D^pu(x)) = 0 \quad (1.1.1)$$

où n et p sont des entiers strictement positifs donnés et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \times ... \times \mathbb{R}^{n\times n\times...\times n}$ est une fonction donnée.

Définition .2.1.2.2 : L'ordre d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est le plus haut ordre parmi les dérivées partielles apparaissant dans cette EDP.

Définition .2.1.2.3 : La dimension d'une EDP est le nombre de variables indépendantes de la fonction inconnue u.

Remarque .2.1.2.4 : L'équation (1.1.1) est une EDP d'ordre p et de dimension n.

Définition .2.1.2.5 :

1. On dit qu'une EDP est linéaire si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la variable dépendante.
2. On dit qu'une EDP est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé.
3. En dehors de ces critères, l'EDP est qualifiée de non linéaire.

I.1.1.3 Classification des EDP :

On peut classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes catégories :

1. Les équations de type elliptique : Ces équations comprennent l'équation de Poisson comme modèle principal, exprimée comme suit :

$$-\nabla u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x) \quad (1.1.2)$$

   R^n ;$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, la fonction $u : f \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, et l'inconnue : $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

2. Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \Delta T(x,t) = \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}(x,t) = 0$$

   $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $t > 0$. L'inconnue est la fonction $T : \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

3. Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont :
   i/ L'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

   , $\forall x \Omega \in\subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. ii/ L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} a\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = 0$$

   $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et a un réel donné.

Chapitre II

LES PROBLÈMES HYPERBOLIQUES

II.1 Le cas unidimensionnel

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons initialement sur les équations hyperboliques scalaires . Nous démontrerons l' existence de Kruzhkov [1] et le théorème d'unicité pour la solution entropique . Nous examinerons d'abord le cas unidimensionnel dans la section (1) avant de passer au cas multidimensionnel dans la section (2). Enfin, dans la section (3), nous présenterons quelques éléments pour l'analyse des systèmes hyperboliques.
L'équation (1) représente une équation hyperbolique scalaire de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \tag{II.1}$$

Cette équation est associée à la vitesse de transport c. La condition initiale est donnée par :

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{II.2}$$

Si la condition initiale u_0 est suffisamment régulière, on peut observer facilement que la fonction (3) satisfait cette équation.

$$u(x,t) = u_0(x+ct) \tag{II.3}$$

Si l'équation est non linéaire, la solution de l'équation (1)-(2) peut être obtenue d'une manière "faible" même si u_0 n'est pas régulière, c'est-à-dire qu'elle peut être discontinue.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R} \tag{II.4}$$

Calculer les solutions faibles de l'équation (1)-(2) devient plus difficile lorsque l'équation est non linéaire, par exemple avec $f(u) = u^2$, et avec une condition initiale donnée par (2).

Remarque1.1 : En ce qui concerne la simulation numérique, les équations hyperboliques sont généralement discrétisées selon la méthode des volumes finis, tandis que les méthodes par éléments finis entraînent souvent des schémas instables. En effet, les solutions discrètes obtenues par ces méthodes ne satisfont pas toujours certaines propriétés physiques souhaitables.

Considérant "f" appartenant à l'espace $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et une condition initiale u_0 appartenant à l'espace $C^1(\mathbb{R})$. Nous examinons maintenant l'équation hyperbolique non linéaire

1. Stanislav Nikolaevich Kruzhkov, 1936–1997, mathématicien russe, spécialiste de l'analyse des EDP non linéaires.

suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, u(x,0) = u_0(x), (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \tag{II.5}$$

II.1.1 Solutions classiques et courbes caractéristiques

Prenons d'abord le temps de définir la notion de solution classique pour ce problème, même si, comme nous le verrons par la suite, le problème (5) ne possède généralement pas de solution classique.

Soit Q une partie de $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que u appartient à $C^k(\bar{Q})$ si u est la restriction à Q d'une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R}^p$. Cette définition est équivalente à la définition usuelle lorsque $k = 0$. Nous utiliserons également la notation u_c^k, ce qui signifie que u appartient à $C^k(\bar{Q})$ et qu'il existe $K \subset Q$, où K est compact, tel que u soit nulle sur le complémentaire de K. Cette notation sera utilisée, par exemple, lorsque Q = $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ou $Q = \mathbb{R} \times [0, T[$.

Définition 6 (Solution classique) : Supposons que u_0 appartienne à $C^1(\mathbb{R})$ et que $f^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, u est une solution classique du problème (5) si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et si u vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f(u)}{\partial x}(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{II.6}$$

Avant de présenter la proposition 5.5 qui démontre l'inexistence d'une solution classique, il est important de rappeler le résultat classique d'existence et d'unicité locale de solutions pour une équation différentielle non linéaire, connu sous le nom de théorème de Cauchy-Lipschitz. Ce théorème s'applique lorsque nous avons une fonction a localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ à IR et un point de départ $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_0'(t) = a(x(t), t), t \in \mathbb{R}^* \\ x_0(0) = x_0. \end{cases} \tag{II.7}$$

$\forall T > 0$, le problème (7) a au plus une solution (classique) définie sur l'intervalle $[0, T[$. Il existe un $T_{max} > 0$(éventuellement égal à $+\infty$) et une fonction x continue sur $[0, T_{max}[$, de classe C^1 sur $]0, T_{max}[$, qui est une solution classique du problème (7). De plus, si $T_{max} < +\infty$, alors $\lim_{t \to Tmax} |x(t)| = +\infty$.

Soit u une solution classique de . On définit alors :

Soit $a \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ définie par :

$$a(x,t) = f'(u(x,t)) \tag{II.8}$$

où f_0 est une fonction continue dépendant de $u(x,t)$. Il est évident que la fonction u est une solution classique du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a(x,t).\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{II.9}$$

Maintenant, nous présentons la définition des courbes caractéristiques pour l'équation (9), établissant ainsi une connexion entre les équations hyperboliques linéaires et les équations différentielles ordinaires.

Définition 3(Courbe caractéristique) : Supposons que la fonction a définie par (8) soit localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous définissons la courbe caractéristique du problème (9) à partir de $x_0 \in \mathbb{R}$ comme étant la courbe déterminée par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t),t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{II.10}$$

Proposition 4 (Solutions classiques et courbes caractéristiques) : Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, et u une solution classique de (5). Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0)$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction u est constante le long de la droite $tßx(t) = x_0 + f'(u_0(x_0))t$. (Cette droite est la courbe caractéristique du problème (9) issue de $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $a(x,t) = f'(u(x,t))$.)

Démonstration : On pose $a(x,t) = f_0(u(x,t))$. Comme $f_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $u \in C^1(\mathbb{R}\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, la fonction a est bien localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc pour le problème (9). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème (9) admet alors une solution maximale $x(t)$ définie sur $[0, T_{max}[$, et $|x(t)|$ tend vers l'infini lorsque t tend vers T_{max} si $T_{max} < +\infty$. Les trois étapes de la démonstration sont les suivantes :

1. Comme u est une solution classique, nous avons :
   $u(x(t),t) = u_0(x_0)$,∀t $\in [0, T_{max}[$ Ce qui signifie que u (solution de (5)) est constante le long de la droite caractéristique issue de x_0. En effet, soit Φ définie par :

$$\Phi(t) = u(x(t), t)$$

En dérivant Φ On obtient :

$$\Phi\text{'(t)} = \partial_t u(x(t), t) + \partial_x u(x(t), t)x'(t).$$

Comme la fonction x satisfait (10), cela entraîne :

$$\Phi'(t) = \partial_t u(x(t), t) + f_0(u(x(t), t))\partial_x u(x(t), t)$$

et donc :

$$\Phi'(t) = \partial_t u(x(t), t) + \partial_x u(f_0(u))(x(t), t) = 0.$$

La fonction Φ est donc constante, ce qui implique :

$$u(x(t), t) = \Phi(t) = \Phi(0) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0), t \in [0, T_{max}[$$

2. Les courbes caractéristiques sont des droites, car $u(x(t), t) = u_0(x_0), \forall t \in [0, T_{max}[$, et donc $x_0(t) = f'(u_0(x_0))$. En intégrant, on obtient que le système (10) décrit la droite d'équation :

$$x(t) = f'(u(x_0))t + x_0. \tag{II.11}$$

   Cela signifie que pour chaque valeur de x_0 (la condition initiale), la courbe caractéristique correspondante dans le plan (x, t) est une droite. L'évolution de cette droite dans le temps est déterminée par la fonction f', qui dépend de la valeur de u_0 à l'emplacement initial x_0.

   En d'autres termes, les courbes caractéristiques représentent les trajectoires des solutions du système (10) dans le plan (x, t). Chaque droite correspond à une condition initiale différente, et elle évolue linéairement dans le temps en fonction de la valeur de $u_0(x_0)$

3. $T_{max} = +\infty$, donc $\forall t \in [0, +\infty[, u(x, t) = u_0(x_0)$.

   Puisque x satisfait (11), si $T_{max} < \infty$, alors : $\lim_{t \to T_{max}} |x(t)| < +\infty$. Par conséquent, on en déduit que $T_{max} = +\infty$.

Proposition 5 (Non existence d'une solution classique) Considérons une fonction f appartenant à l'espace $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supposons que f' n'est pas constante. Dans ce cas, il existe une fonction u_0 appartenant à l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que l'équation (5) n'admette pas de solution classique.

Démonstration : Étant donné que f' est non constante, on peut trouver deux valeurs v_0 et v_1 telles que $f'(v_0) > f'(v_1)$. En utilisant ces valeurs, on peut construire une fonction u_0 appartenant à l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $u_0(x_0) = v_0$ et $u_0(x_1) = v_1$, où x_0 et x_1 sont des valeurs données avec $x_0 < x_1$, comme illustré dans la figure 1.
Supposons maintenant que u soit une solution classique avec cette condition initiale. Alors, d'après la proposition (4) :

En utilisant la condition initiale :
$u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) = u_0(x_0) = v_0$ et $u(x_1 + f'(u_0(x_1))t, t) = u_0(x_1) = v_1$
On peut déterminer T tel que :
$x_0 + f'(v_0)T = x_1 + f'(v_1)T = \bar{x}$.
En résolvant cette équation, on obtient :
$T = \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}$.
Ainsi, on a :
$u(\bar{x}, T) = u_0(x_0) = v_0 = u_0(x_1) = v_1$, ce qui est impossible.
Par conséquent, on en déduit que l'équation (5) n'admet pas de solution classique pour cette condition initiale.

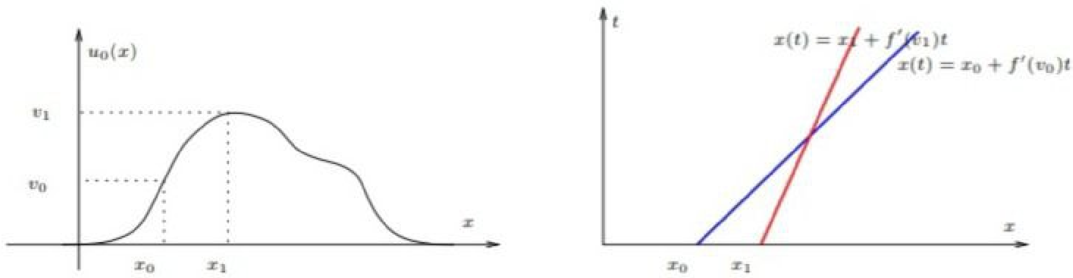

Figure II.1 — Droites caractéristiques, cas non linéaire

II.1.2 Solutions faibles

Il n'existe donc pas toujours de solution au sens classique au problème (5). On va donc affaiblir le sens de solution, et définir des solutions dites faibles. On donne cette définition dans un cadre légèrement plus général consistant à supposer que f est localement lipschitzienne (au lieu d'être de classe C_1). On note Lip_{loc} $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes de R dans R. On rappelle que si $f \in Lip_{loc}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction f est alors derivable p.p., sa dérivée est localement bornée et on a :
$f(c) - f(d) = \int_c^d f'(t)\, dt, \forall c, d \in \mathbb{R}$.
Définition 7(Solution faible) : Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On appelle solution

faible de (5) une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}+)$ telle que : Donnons maintenant les liens entre solution classique et solution faible.

$$\int \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} [u(x,t)\phi_t(x,t) + f(u(x,t))\phi_x(x,t)]\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)\, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \tag{II.12}$$

Proposition 8 : Le texte mathématique correspondant aux propositions données est le suivant :

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. '

1. Si u est une solution classique de l'équation (5) (et donc $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), alors u est une solution faible de l'équation (5).
2. Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est une solution faible de l'équation (5), alors $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (au sens où la classe de fonctions u_0 a un représentant de classe C^1 et est identifiée à ce représentant), et u est une solution classique de l'équation (5).
3. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; x < \sigma t$ et $D_2 = (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; x > \sigma$.
   (a) On suppose que $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, que u restreint à $D_i \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ pour i = 1, 2, que l'équation (5) est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i (i = 1,2)$, et que la condition initiale (5) est satisfaite presque partout. Alors u est une solution faible de l'équation (5).

   (b) Plus généralement, on suppose que $u|_{D_i} \in C^1(\overline{D_i}, \mathbb{R})$ (i = 1, 2), que l'équation (5) est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ (i = 1, 2) et que la condition initiale (5) est satisfaite p.p.. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$u^+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t) \text{ et } u^-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t),$$
$$[u](\sigma t, t) = u^+(\sigma t, t) - u^-(\sigma t, t),$$
$$[f(u)](\sigma t, t) = f(u^+(\sigma t, t)) - f(u^-(\sigma t, t)).$$

alors u est une solution faible de l'équation (5), cela signifie que :

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \tag{II.13}$$

Cette relation est connue sous le nom de condition de Rankine[1]-Hugoniot[2].

Démonstration :

1. Supposons que u est une solution classique de (5), c'est-à-dire de :

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soit$\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.On Multiplions (5) par ϕ et on fait intégration sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On aura :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_x(f(u))(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx = 0.$$

L'application du la théorème de $Fubini$ et on f intégration par parties donnent alors :

$$-\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\phi(x,0)\,dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x,t)\phi_t(x,t)\,dt\,dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u)(x,t)\phi_x(x,t)\,dx\,dt = 0,$$

(car le support de ϕ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$).

On aura donc bien la relation (12), grâce à la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$.

2. Soit u une solution faible de (5), qui vérifie $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$. On a donc suffisamment de régularité pour fair une intégration par parties dans (12).

On prendre ϕ à support compact dans $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. On a donc $\phi(x,0) = 0$, et on fait intégration par parties dans (12) donne :

$$-\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(f(u))(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt = 0.$$

$$-\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(f(u))(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt = 0.$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_t u(x,t) + \partial_x(f(u))(x,t))\phi(x,t)\,dt\,dx = 0,$$

$$\forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}\times]0,+\infty[).$$

1. William John Macquorn Rankine (1820–1872), ingénieur écossais qui contribua aussi en physique et mathématiques

2. Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887), inventeur, mathématicien, and physicien français spécialiste de mécanique des fluide, en particulier des chocs

Comme la $\partial_t u + \partial_x(f(u))$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, en déduit que $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$. on rappelle que si $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ et $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} h(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx = 0$ pour toute fonction $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$, alors $h = 0$ p.p. De plus, si h est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, alors $h = 0$ elle est partout sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

On prend alors $\phi \in C^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, on fait intégration par parties dans l'équation (5.11) donne :

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\phi(x,0)\,dx - \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} (\partial_t u(x,t) + \partial_x(f(u))(x,t))\phi(x,t)\,dt\,dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0.$$

mais va montrer que $\frac{\partial_u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0$,et on a deduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x,0))\phi(x,0)\,dx = 0, \quad \forall\phi \in C^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

3. On montre directement l'item (b) (qui contient l'item (a)). On suppose que $u|_{D_i} \in C^1(\overline{D_i}, \mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$, que la première équation de (5.5) est vérifiée pour tout $(x,t) \in D_i$ pour $i = 1, 2$ et que la condition initiale (de (5)) est satisfaite p.p. sur $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que u est solution faible de (5) si et seulement si (13) est vérifiée. Pour cela, on pose :

$$X = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^+} u(x,t)\phi_t(x,t)\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} f(u)(x,t)\phi_x(x,t)\,dx\,dt.$$

On aura donc X = X1 + X2, avec :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^+} u(x,t)\phi_t(x,t)\,dt\,dx \quad \text{et} \quad X_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} (f(u))(x,t)\phi_x(x,t)\,dx\,dt.$$

Calculons X_1. Comme u n'est de classe C^1 que sur chacun des domaines D_i, on n'a pas le droit d'intégrer par parties sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ entier. On va donc décomposer l'intégrale sur D_1 et D_2 ; supposons par exemple $\sigma < 0$, voir figure 2. (Le cas $\sigma > 0$ se traite de façon similaire et le cas $\sigma = 0$ est plutôt plus simple). On a alors $D_1 = \{(x,t); x \in \mathbb{R}^-$ et $0 < t < \frac{x}{\sigma}$ et $D_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \{(x,t); x \in \mathbb{R}^-$ et $\frac{x}{\sigma} < t < +\infty\}$.

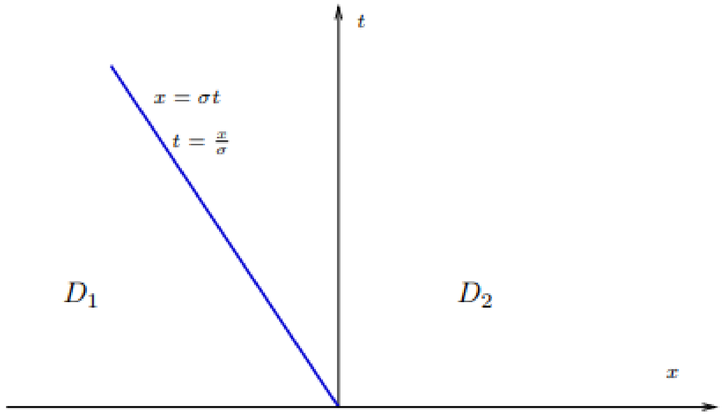

Figure II.2 — Les domaines D_1 et D_2

On a alors :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}^-}\int_{x/\sigma}^{0} u(x,t)\phi_t(x,t)\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}^-}\int_{+\infty}^{\frac{x}{\sigma}} u(x,t)\phi_t(x,t)\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} u(x,t)\phi_t(x,t)\,dt\,dx.$$

Comme u est de classe C_1 sur chacun des ces domaines, on peut utilise l'intégration par parties, ce qui donne :

X$_1 = \int_{\mathbb{R}^-} u_-(x,x^\sigma)\phi(x,x^\sigma)\,dx - \int_{\mathbb{R}^-} u(x,0)\phi(x,0)\,dx - \int_{\mathbb{R}^-}\int_{\frac{x}{\sigma}}^{0} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx$
- $\int_{\mathbb{R}^-} u_+(x,x^\sigma)\phi(x,x^\sigma)\,dx - \int_{\mathbb{R}^-}\int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx - \int_{\mathbb{R}^+} u(x,0)\phi(x,0)\,dx -$
$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx.$ (II.14)

En regroupant, il vient :

$X_1 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\phi(x,0)\,dx - \iint_{D_1} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx - \iint_{D_2} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx - \int_{\mathbb{R}^-}[u](x,\frac{x}{\sigma})\phi(x,\frac{x}{\sigma})\,dx$. Dans ce dernière intégrale, on fait le changement de variable $\frac{x}{\sigma}$. On obtient :

$X_1 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\phi(x,0)\,dx - \iint_{D_1} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx - \iint_{D_2} \partial_t u(x,t)\phi(x,t)\,dt\,dx + \sigma\int_{\mathbb{R}^+}[u](\sigma t,t)\phi(\sigma t,t)\,dt.$

On décompose de même façon X_2 sur $D_1 \cup D_2$, en remarquant maintenant que :$D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+; x > \sigma t\}$:

$X_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\sigma t}^{-\infty} f(u)(x,t)\phi_x(x,t)\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\sigma t}^{+\infty} f(u)(x,t)\phi_x(x,t)\,dx\,dt.$

La fonction u est de classe C^1 sur chacun des deux domaines, on peut là encore fait l'intégration par parties. Comme ϕ est à support compact sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, on obtient :

$X_2 = -\int\int_{D1}(f(u))_x(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt - \int\int_{D2}(f(u))_x(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt - \int_{\mathbb{R}^+}[f(u)](\sigma t,t)\phi(\sigma t,t)\,dt.$

$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0$ sur D_1 et D_2, on a donc :

$X = X_1 + X_2 = -\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\phi(x,0)\,dx + \int_{\mathbb{R}^+}(\sigma[u](\sigma t,t) - [f(u)](\sigma t,t))\phi(\sigma t,t)\,dt.$
On en déduit bien que u est solution faible de (5) si et seulement si (13) est vérifiée. Notons qu'il existe fréquemment plusieurs solutions faibles. On a donc besoin d'une notion supplémentaire pour les distinguer. C'est la notion de solution entropique, qui nous permettra d'obtenir l'unicité. Donnons tout d'abord un exemple de non-unicité de la solution faible. Pour cela, on va considérer une équation modèle, appelée équation de Burgers [1] qui s'écrit

$$\partial_t u + \partial_x(u^2) = 0 \quad (15)$$

et des données initiales particulières, sous la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec u_g, $u_d \in \mathbb{R}$. Ces données initiales définissent un problème de Cauchy particulier, qu'on appelle problème de Riemann [2].

Nous considérons maintenant l'exemple simple obtenu avec $u_g = -1$ et $u_d = 1$. Le problème considéré est donc le problème suivant, avec $f(u) = u^2$, $u_g = -1$, $u_d = 1$:

1. Johannes Martinus Burgers (1895–1981) physicien néerlandais.
2. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), mathématicien allemand qui a apporté de nombreuses contributions importantes en particulier en topologie, analyse, et géométrie différentielle

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

On cherche tout d'abord une solution faible de la forme :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t, \\ u_d & \text{si } x > \sigma t. \end{cases} \quad (17)$$

Cette éventuelle solution est discontinue au travers de la droite d'équation $x = \sigma t$ dans le plan (x,t). On remplace $u(x,t)$ par ces valeurs dans (12). D'après la proposition 8, on sait que u est solution faible si la condition suivante (condition de Rankine et Hugoniot) est vérifiée :

$$\sigma(ud - ug) = (f(u_d) - f(u_g)), \quad (18)$$

Ce qui, avec la condition initiale spécifique choisie ici, conduit à $2\sigma = 1^2 - (-1)^2 = 0$. Cependant, il est possible de trouver d'autres solutions faibles. Si u est une solution régulière, on sait que sur les courbes caractéristiques, définies par l'équation $x(t) = x_0 + f_0'(u_0(x_0))t$, la fonction u reste constante. Étant donné que $f_0'(u) = 2u$, les courbes caractéristiques sont des droites de pente -2 lorsque $x_0 < 0$ et de pente 2 lorsque $x_0 > 0$. Nous pouvons construire ces caractéristiques sur la figure (3) Dans la région centrale, représentée par un point d'interrogation, nous cherchons u sous la forme $u(x,t) = \phi(\frac{x}{t})$,Pour que u soit continue sur $IR \times IR^+$, nous pouvons choisir la fonction u suivante :

$$u(x,t) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -2t, \\ \frac{x}{2t}, & \text{si } -2t < x < 2t, \\ 1, & \text{si } x > 2t. \end{cases} \quad (19)$$

II.1.3 Solution entropique

Nous avons observé qu'il peut exister une non-unicité des solutions faibles. Comment choisir la "bonne" solution faible parmi les équations (17) et (19) ? Étant donné que les problèmes hyperboliques sont souvent obtenus en négligeant les termes de diffusion dans les équations paraboliques, une technique pour choisir la solution consiste à rechercher la limite du problème de diffusion associé, qui peut être écrit comme suit :

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) - \epsilon \partial_{xx} u = 0, \quad (20)$$

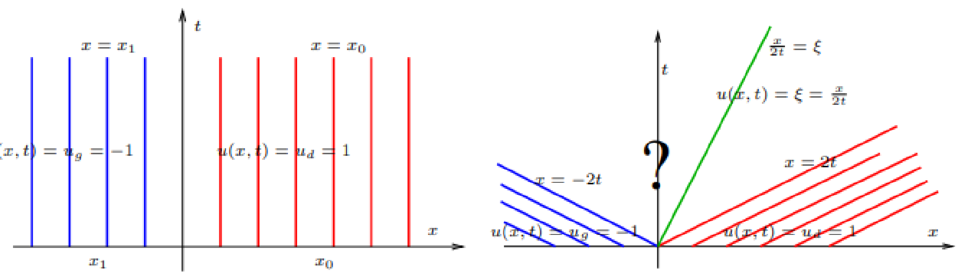

Figure II.3 — Problème de Riemann pour l'équation de Burgers

lorsque le terme de diffusion devient négligeable, c'est-à-dire lorsque ϵ tend vers 0. Soit u_ϵ la solution de (20) avec la condition initiale $u_\epsilon(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$ (nous supposons pour le moment l'existence et l'unicité de u_ϵ). On peut démontrer que u_ϵ converge vers u (dans un sens approprié) lorsque ϵ tend vers 0, où u est la "solution faible entropique" de (20), définie comme suit.

Définition 9 (Solution entropique) : Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. On dit que u est une solution faible entropique de l'équation (5.5) si, pour toute fonction η définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui est convexe et appelée "entropie", et pour φ définie par $\varphi(s) = \int_0^s f'(\tau)\eta'(\tau)d\tau$ (pour $s \in \mathbb{R}$), qui est appelée "flux d'entropie", on a :

Pour toute fonction $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, on a l'inégalité suivante :

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} (\eta(u)\partial_t \phi + \varphi(u)\partial_x \phi)(x,t)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\phi(x,0)\, dx \geq 0,$$

On rappelle que si la fonction η définie sur $\mathbb{R}$ est convexe, elle est localement lipschitzienne, ce qui permet de remarquer que φ est correctement définie. Il est également pertinent de noter que dans la définition (9), il est possible de restreindre les fonctions η à la classe C^2 (il suffit de régulariser η à l'aide d'une famille de noyaux régularisants pour en être convaincu). Si f et η sont des fonctions de classe C^1, alors φ est simplement une fonction de classe C^1 avec $\varphi'(s) = \eta'(s)f'(s)$. Enfin, il va de soi que si u est une solution faible entropique, alors u est également une solution faible (proposition 12).

Remarque 10 (Condition initiale) : Notons que dans la définition 9, nous choisissons à nouveau $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^+)$ afin de prendre en compte correctement la condition initiale. Ce n'est pas toujours fait de cette manière dans les travaux plus anciens sur le sujet, où la condition initiale était garantie par une condition supplémentaire, à savoir $u(t) \to u_0$ localement dans L^1 lorsque $t \to 0$. Si la condition initiale est prise en compte uniquement dans la définition de la solution faible (sans être reprise dans la condition d'entropie), le choix de l'espace fonctionnel dans lequel nous cherchons la solution devient crucial pour préserver l'unicité de la solution entropique, alors $u \in C([0, +\infty[, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ et $u(t) \to u_0$ dans L^1_{loc} lorsque $t \to 0$.

Nous prouverons ultérieurement le théorème 25 dans un cadre multidimensionnel, mais avec la variable spatiale restreinte à un domaine borné plutôt que dans tout l'espace. Ce théorème énonce qu'en présence de $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe une unique solution entropique de (5) selon la définition 9. Examinons maintenant les relations entre la solution classique, la solution faible et la solution entropique.

Proposition 11 (Solution classique et solution faible entropique) : Soit $par f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si u est une solution classique de (5), alors elle est également une solution (faible) entropique.

Démonstration : Soit u une solution classique de (5.5) et $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ (la convexité de η est inutile ici) et φ tel que $\varphi' = f'\eta'$ (φ est la fonction flux associée à η). Multiplions (5.5) par $\eta'(u)$:

L'équation $\eta'(u)\partial_t u + f'(u)\partial_x u\eta'(u) = 0$ peut également s'écrire comme suit, en utilisant $\varphi' = f'\eta'$:

$$(\eta(u))_t + (\varphi'(u))_x = 0$$

Ainsi, on obtient finalement l'équation :

$$(\eta(u))_t + (\varphi(u))_x = 0 \quad (22)$$

De plus, puisque $u(x, 0) = u_0(x)$, nous avons également $\eta(u(x, 0)) = \eta(u_0(x))$. Soit $\phi \in C^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, nous multiplions l'équation (22) par ϕ, nous intégrons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et obtenons (21) (avec égalité) en effectuant une intégration par parties. Dans le cas d'une solution classique, l'inégalité d'entropie devient une égalité.

Une solution faible entropique est également une solution faible.

Proposition 12 : Soit $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si u est une solution faible entropique de (5), alors u est également une solution faible de (5).

Démonstration : Il suffit de choisir $\eta(u) = u$ et $\eta(u) = -u$ dans (21) pour comprendre le résultat.

De la proposition 11 et du théorème (25) de Kruzhkov, il découle que si plusieurs solutions faibles existent pour le problème (5) et que l'une d'entre elles est régulière, alors cette solution régulière est nécessairement la solution entropique.
On utilisera souvent la caractérisation suivante, qui sera admise :
Proposition 13 (Entropies de Kruzhkov) : Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Considérons $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. La fonction u est une solution entropique de l'équation (5) (selon la définition 9) si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation (21) est satisfaite avec η définie comme $\eta(s) = |s - k|$, et φ, le flux d'entropie associé, défini par :
La fonction $\varphi(u) = f(\max(u, k)) - f(\min(u, k))$ est définie pour étudier les solutions présentant une ligne de discontinuité, telles que celles mentionnées dans la dernière partie de la proposition 8. Il convient de noter que la fonction η, appelée "entropie de Kruzhkov", n'est pas nécessairement de classe C^1.
Nous allons maintenant examiner le cas particulier des solutions présentant une ligne de discontinuité, similaire à celui abordé dans la dernière partie de la proposition 8.
Proposition 14 : Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x > \sigma t\}$. Nous supposons que $u|_{D_i} \in C^1(\overline{D_i}, \mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$, que la première équation de (5.5) est vérifiée pour tout $(x, t) \in D_i$ pour $i = 1, 2$, et que la condition initiale (de (5.5)) est satisfaite presque partout. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, nous posons :

$$u^+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x, t) \quad \text{et} \quad u^-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x, t),$$

$$[u](\sigma t, t) = u^+(\sigma t, t) - u^-(\sigma t, t),$$

$$[f(u)](\sigma t, t) = f(u^+(\sigma t, t)) - f(u^-(\sigma t, t)).$$

Alors u est solution faible entropique de (5) si et seulement si :

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \quad (23)$$

et, pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe et $\varphi \in C^1$ telle que $\varphi' = f'\eta'$,

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\varphi(u)](\sigma t, t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \quad (24)$$

Démonstration : La proposition 5.7 montre que u est solution faible si et seulement si (23) est satisfaite. En reprenant la démonstration de la proposition (8), on montre que u est solution faible entropique si et seulement si (23) et (24) sont satisfaites.

Dans le cas où la fonction f est strictement convexe, la proposition (14) peut être précisée. Ceci est fait dans la proposition (16) donnée ci-après, dont la démonstration repose sur le petit lemme technique suivant.

Lemme 15 (Un résultat pour des fonctions convexes) : Soient f et η deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et $\sigma = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Définissons φ comme suit : $\varphi(s) = \int_0^s \eta'(t)f'(t)dt$ pour $s \in \mathbb{R}$ (de sorte que $\varphi'(s) = \eta'(s)f'(s)$ p.p. sur $\mathbb{R}$). Alors :

1. $\sigma(\eta(b) - \eta(a)) \leq (\varphi(b) - \varphi(a))$.

2.Soit η une fonction strictement convexe et f une fonction convexe et non affine entre a et b. Alors, $\sigma(\eta(b) - \eta(a)) < (\varphi(b) - \varphi(a))$.

Démonstration : Rappelons tout d'abord que si φ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$, alors elle est localement lipschitzienne. Par conséquent, elle est dérivable presque partout, sa dérivée est localement bornée, et $\varphi(\alpha) - \varphi(\beta) = \int_\beta^\alpha \varphi'(t)\, dt$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\varphi(b) - \varphi(a)) - \sigma(\eta(b) - \eta(a)) = \int_a^b \eta'(t)(f'(t) - \sigma)\, dt = \int_a^b (\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma)\, dt \quad (25)$$

Étant donné que f est convexe, la dérivée f' est croissante. Comme σ est la valeur moyenne de f' sur l'intervalle ouvert (a, b), il existe un $c \in (a, b)$ tel que :
$f'(t) \leq \sigma$ p.p.t $t \in (a, c)$ et $f'(t) \geq \sigma$ p.p.t (pour presque tout) $t \in (c, b)$.

Soit maintenant $\gamma = \sup\{\eta'(s), s \leq c\}$ dans l'expression (5.24), de sorte que $\eta'(s) \leq \gamma$ si $s \leq c$ et $\eta'(s) \geq \gamma$ si $s > c$. Bien sûr, si η' est continue, alors $\gamma = \eta'(c)$. Comme $(\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma) \geq 0$ pour presque tout $t \in (a, b)$, on obtient $(\phi(b) - \phi(a)) - \sigma(\eta(b) - \eta(a)) = \int_a^b (\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma)dt \geq 0$.

Ce qui établit le premier point du lemme.
Pour le deuxième point, on observe que :$\sigma(\eta(b) - \eta(a)) = (\phi(b) - \phi(a))$ implique $(\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma) = 0$ presque partout sur (a, b). Comme η est strictement convexe, on a $(\eta' - \gamma) \neq 0$ presque partout sur (a, b).
On en déduit que $f' = \sigma$ presque partout sur (a, b), ce qui signifie que f est affine sur (a, b), ce qui contredit l'hypothèse.

Proposition 16 : Sous les hypothèses de la proposition 14, considérons u comme une solution faible de l'équation (5). Supposons également que f soit strictement convexe. Dans ce cas, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est une solution faible entropique,
2. $u - (\sigma t, t) \geq u + (\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

3. Il existe une fonction strictement convexe η (de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$) telle que (5.23) est vérifiée (avec ϕ défini par $\phi' = f'\eta'$).

Démonstration : Prouvons d'abord l'équivalence entre les deux premiers éléments. Supposons que u soit une solution faible entropique. Cela signifie que pour toute fonction convexe η de classe C^1, l'équation (24) est satisfaite pour tout t. En choisissant une fonction strictement convexe η, le lemme 15 garantit que, étant donné que f est également strictement convexe, $u^-(\sigma t, t) \geq u^+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, si u satisfait $u^-(\sigma t, t) \geq u^+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, alors le lemme 15 implique que l'équation (24) est satisfaite pour tout t et pour toute fonction convexe η de classe C^1 (ceci reste vrai même si f est seulement une fonction convexe). Ainsi, nous avons établi l'équivalence entre les éléments 1 et 2.

Pour conclure la preuve de la proposition 16, il est remarquable que le premier élément implique naturellement le troisième.

Réciproquement, si u satisfait le troisième élément, le lemme 15 garantit, grâce au fait que f est également strictement convexe, que $u^-(\sigma t, t) \geq u^+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, u est une solution faible entropique.

Remarque 17 (Contre-exemple si f n'est pas strictement convexe) : L'équivalence entre les deux premiers éléments de la proposition 16 n'est plus valide si l'on remplace l'hypothèse "f strictement convexe" par "f convexe". Cela est évident lorsque u_0 prend ses valeurs dans un intervalle où f est une fonction affine, mais cela s'applique également aux u_0 plus généraux. Nous commencerons par présenter un exemple qui apparaît dans certains articles traitant de la modélisation de la circulation routière. Ensuite, nous adapterons légèrement cet exemple pour qu'il corresponde exactement aux hypothèses de la proposition 16.

Soit $\alpha > 0$, $\beta < 0$, et choisissons $a = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$ (remarquons que $a \in (0,1)$ et $a\alpha = \beta(a-1)$). Définissons la fonction f de la manière suivante : $f(s) = \alpha s$ pour $s \in [0, a]$ et $f(s) = \beta(s-1)$ pour $s \in (a, 1)$. Considérons également $u_g \in (a, 1)$ et $u_d \in (0, a)$, et définissons u_0 de la manière suivante : $u_0 = u_g$ sur $\mathbb{R}_-$ et $u_0 = u_d$ sur $\mathbb{R}_+$. Dans ce cas, il est relativement simple de prouver que la solution faible entropique de (5) est la fonction u définie par :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \beta t, \\ a & \text{si } \beta t < x < \alpha t, \\ u_d & \text{si } x > \alpha t. \end{cases}$$

Cependant, étant donné que $u_g > a$ (et aussi $a > u_d$) et que f est concave, cette solution semble être en contradiction avec la proposition 16.

Puisque $u_g > a$ (et aussi $a > u_d$) et étant donné que f est concave, cette solution semble être en contradiction avec la proposition 16.

Dans cet exemple, la fonction f est lipschitzienne et la solution présente deux lignes de discontinuité. En modifiant légèrement cet exemple, nous pouvons obtenir une fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec une seule discontinuité. Nous prenons $a = \frac{1}{2}$ et définissons $f(s) = \alpha s$ pour $s \in [0, a]$ et $f(s) = \beta s - \gamma s^2 + \delta$ avec $\alpha = \gamma = \frac{4}{3}$, $\beta = \frac{8}{3}$, et $\delta = -\frac{1}{3}$. La fonction f est de classe C^1, strictement concave sur $[a, 1]$, et affine sur $[0, a]$. Comme précédemment, nous choisissons $u_g \in (a, 1)$ et $u_d \in (0, a)$, et définissons u_0 tel que $u_0 = u_g$ sur $\mathbb{R}_-$ et $u_0 = u_d$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors, la solution faible entropique de (5.5) est la fonction u définie par (puisque $f'(a) = \alpha$).

$$u(x,t) = \begin{cases} ug & \text{si } x < f'(ug)t, \\ \xi & \text{si } f'(ug)t < x < f'(a)t \text{ et } f'(\xi) = \frac{x}{t}, \quad \xi \in]a, u_g[, \\ ud & \text{si } x > f'(a)t = \alpha t. \end{cases}$$

Dans cet exemple également, puisque $a > ud$ et que f est concave, cette solution semble être en contradiction avec la proposition 16. Cependant, il convient de noter que les hypothèses de la proposition ne sont pas respectées.

Les propositions 14 et 16 peuvent être généralisées aux cas de courbes de discontinuité.

Proposition 18 (Rankine-Hugoniot, cas courbe) : Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe un nombre fini d'ouverts à frontière lipschitzienne, D_i, $i = 1, \ldots, N$, tels que :

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \bigcup_{i=1}^N \overline{D}_i$.
2. Pour $i \neq j$, $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \{(t, \sigma_{i,j}(t)) \mid t \in I_{i,j}\}$, où $I_{i,j}$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et $\sigma_{i,j}$ est une fonction lipschitzienne de $I_{i,j}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Pour tout i, $u|_{D_i}$ appartient à $C^1(\overline{D}_i, \mathbb{R})$ et est une solution (classique) de la première

équation de (5) et satisfait (p.p.) la condition initiale (de (5)) lorsque $\overline{D}_i$ rencontre l'axe $t = 0$.

Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ et $t \in I_{i,j}$, nous définissons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
u^+(\sigma_{i,j}(t), t) &= \lim_{x \downarrow \sigma_{i,j}(t)} u(x,t), \\
u^-(\sigma_{i,j}(t), t) &= \lim_{x \uparrow \sigma_{i,j}(t)} u(x,t), \\
[u](\sigma_{i,j}(t), t) &= u^+(\sigma_{i,j}(t), t) - u^-(\sigma_{i,j}(t), t), \\
[f(u)](\sigma_{i,j}(t), t) &= f(u^+(\sigma_{i,j}(t), t)) - f(u^-(\sigma_{i,j}(t), t)).
\end{aligned}$$

Alors, la fonction u satisfait la condition de solution faible entropique de l'équation (5) si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in I_{i,j}$:

$$\sigma'_{i,j}(t)[u](\sigma_{i,j}(t), t) = [f(u)](\sigma_{i,j}(t), t) \quad (26)$$

et, pour toute fonction convexe $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1$ telle que $\varphi' = f'\eta'$,

$$\sigma'_{i,j}(t)[\eta(u)](\sigma_{i,j}(t), t) \geq [\varphi(u)](\sigma_{i,j}(t), t) \quad (27)$$

Démonstration : La démonstration peut se faire en utilisant la formule de Stokes (espace temps) sur chaque $\mathcal{D}_i$. En notant u_i le prolongement par continuité de u sur $\overline{\mathcal{D}_i}$, la formule de Stokes fait apparaître pour tout couple (i, j), $i \neq j$ (lorsque $\mathcal{I}_{i,j}$ est non vide),

$$\int_{\mathcal{I}_{i,j}} \begin{bmatrix} f(u_i(x,t)) \\ u_i(x,t) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}_{i,j} \, d\gamma(x,t),$$

où γ représente la mesure de Lebesgue unidimensionnelle sur $I_{i,j}$ et $n_{i,j}$ est le vecteur normal à $I_{i,j}$ qui pointe vers l'extérieur de D_i. Pour que u soit une solution faible, il est nécessaire et suffisant que le terme correspondant à i sur $I_{i,j}$ se compense avec le terme correspondant à j. Étant donné que $n_{i,j}(\sigma_{i,j}(t), t)$ est parallèle au vecteur $\begin{bmatrix} -1 \\ \sigma'_{i,j}(t) \end{bmatrix}$ (et que $n_{i,j} = -n_{j,i}$), on obtient la condition (26).

En appliquant un raisonnement similaire avec le vecteur $\begin{bmatrix} \varphi(u_i) \\ \eta(u_i) \end{bmatrix}$, on obtient la condition (27).

constatons que les solutions d'une équation hyperbolique non linéaire respectent les bornes de la solution initiale.

Proposition 19 (Principe du maximum) : Considérons une fonction initiale u_0 appartenant à l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ et deux constantes A et B dans $\mathbb{R}$ tels que $A \leq u_0 \leq B$ presque partout. Soit f une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, la solution entropique u appartenant à l'espace $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ de l'équation (5.5) satisfait : $A \leq u(x) \leq B$ presque partout dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

On peut démontrer cette propriété en prenant la limite des solutions de l'équation visqueuse associée ou des solutions approchées par un schéma numérique. Il est important de veiller à ce que le schéma respecte les bornes afin de garantir le respect des bornes physiques.

Remarque 20 (Domaine borné) : Que faire si le domaine spatial est différent de $\mathbb{R}$, par exemple si le problème (5) est posé pour $x \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$? Si f_0 ne change pas de signe, il est assez facile de donner une bonne définition de solution entropique et de montrer un théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique. Dans le cas où f_0 change de signe (et ce cas est très intéressant pour de nombreux problèmes), le problème est beaucoup plus difficile. Le premier résultat sur la question est celui de Bardos-Leroux-Nedelec (1979). Dans la thèse de Otto (1996), il y a une très jolie formulation pour les conditions aux limites. Un intérêt considérable de cette formulation est qu'elle est très pratique pour montrer la convergence des schémas numériques. Dans le cas multidimensionnel de la section suivante, on s'intéressera à un problème similaire à (5) posé dans un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$, mais sans aborder vraiment ce délicat problème des conditions aux limites (car dans le théorème 25 on considère un champ de vecteurs b nul sur le bord du domaine considéré).

Pour clore cette section, nous aborderons les concepts de "discontinuité de contact", "onde de choc" et "onde de détente".

Dans le cas où f est une fonction linéaire (ou affine, ce qui revient au même en supposant $f(0) = 0$) et où $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, la solution faible de l'équation (5) est unique. Ainsi, elle correspond à la solution entropique. De plus, dans ce cas, les inégalités d'entropie (21) sont vérifiées en tant qu'égalités. Si la solution u présente une courbe de discontinuité, on parle alors de "discontinuité de contact".

Lorsque f est strictement convexe et que la solution faible entropique u de l'équation (5) présente une courbe de discontinuité, on parle d'un choc ou d'une onde de choc. Dans ce cas, il est possible de montrer que les inégalités d'entropie (21) sont strictes pour certains η et ϕ.

Si u_0 présente une discontinuité, c'est-à-dire une rupture brusque dans sa valeur, cela peut indiquer la présence d'une onde de détente.

Dans le cas où la fonction f est linéaire (ou affine, ce qui revient au même car on peut supposer $f(0) = 0$) et que u_0 appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$, la solution faible de l'équation (5) est unique . Par conséquent, elle correspond à la solution entropique. De plus, dans ce cas, les inégalités d'entropie (21) sont vérifiées en tant qu'égalités. Lorsque la solution u présente une courbe de discontinuité (qui est nécessairement une demi-droite), on parle de "discontinuité de contact".

Si la fonction f est strictement convexe et que la solution faible entropique u de l'équation (5) présente une courbe de discontinuité, on parle d'un choc ou d'une onde de choc. Dans ce cas, il est possible de montrer que les inégalités d'entropie (21) sont strictes pour certains η et ϕ.

II.1.4 Conditions limites

Nous présentons maintenant un résultat qui garantit l'existence et l'unicité d'une solution pour une équation hyperbolique avec des conditions aux limites, en utilisant la formulation proposée par Otto [1].

Considérons le problème suivant :
Nous focalisons notre attention sur le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad \text{(28a)}$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in]0,1[\quad \text{(28b)}$$

et les conditions aux limites :

$$u(0,t) = \overline{u}(t), \quad u(1,t) = \overline{\overline{u}}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{(28c)}$$

Cependant, comme nous l'explorerons ultérieurement, les conditions aux limites ne sont que partiellement incluses dans la formulation faible entropique du problème.

1. F. Otto. Initial-boundary value problem for a scalar conservation law. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 8 :729–734, 1996.

Définition 5.20 (Solution entropique avec conditions aux limites, Otto) : Soient $u_0 \in L^\infty([0,1])$, $\overline{\overline{u}}, \overline{u} \in L^\infty((0,+\infty))$ et $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$. Soient A et B tels que $A \leq u_0, \overline{u}, \overline{\overline{u}} \leq B$ p.p.. On dit que u est une solution entropique de l'équation (28) s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\int_0^{+\infty}\int_0^1 \eta(u(x,t))\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt + \int_0^1 \eta(u_0(x))\phi(x,0)\,dx$$

$$+\int_0^{+\infty}\int_0^1 \varPhi(u(x,t))\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\,dx\,dt + M\int_{\mathbb{R}^+}\phi(0,t)\eta(u(t))\,dt + M\int_0^{+\infty}\phi(1,t)\eta(u(t))\,dt \geq 0 \quad (29)$$

Pour tout $\phi \in C_c^1([0,1]\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ et pour toute fonction η positive et convexe, telle qu'il existe un élément $s_0 \in [A,B]$ vérifiant $\eta(s_0) = 0$, ainsi qu'une fonction $\varPhi$ définie par $\varPhi(s) = \int_{s_0}^s \eta^{'}(t)f^{'}(t)t\,dt$.(on rappelle qu'une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est localement lipschitzienne et donc dérivable).

Théorème 22 (Existence and unicité, avec conditions limites) : Soit $u_0 \in L^\infty([0,1])$, $\overline{\overline{u}}, \overline{u}$, $\in L^\infty(]0,+\infty[)$ et $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soient A et B tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p. et $A\overline{u}, \overline{\overline{u}} \leq B$ p.p.. Soit $M \geq \max_{s\in[A,B]}|f'(s)|$. Alors il existe une unique fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ qui est solution entropique de l'équation (28).

De plus :

$$\forall (x,t) \in]0,1[\times\mathbb{R}^+$$

nous avons $A \leq u(x,t) \leq B$ presque partout. La démonstration de l'existence de solution dans le théorème (22) peut être obtenue en choisissant $M \geq \max_{s\in[A,B]}|f'(s)|$ (la solution u prend ses valeurs dans $[A,B]$). Une approche relativement simple pour prouver cette existence consiste à prendre la limite des schémas numériques à flux monotone, comme démontré dans le théorème (31) pour le cas multidimensionnel. L'unicité est valide pour toute valeur de M (mais n'est évidemment pertinente que s'il y a existence), et la solution (qui existe si $M \geq \max_{s\in[A,B]}|f'(s)|$) ne dépend pas de M.

Si la solution est de classe C^1, alors cette solution est une solution entropique sur $]0,1[$, c'est-à-dire qu'elle est une solution de l'équation (29) pour tout $\phi \in C_c^1(]0,1[\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ et pour toute fonction convexe η, et elle satisfait les conditions aux limites telles que définies dans [1].

Ceci reste valide même lorsque la solution est de classe BV (aussi appelée à varia-

1. C. Bardos, A. LeRoux, and J. Nédélec. First order quasilinear equations with boundary conditions. Comm. Partial Differential Equations, 9 :1017–1034, 1979.

tion bornée) en espace pour tout t, ce qui signifie que la solution a, pour tout t, une limite en $x = 0$ et $x = 1$. Il est à noter que l'espace $BV([0,1])$ est défini par :

Définition 23 (Fonction à variation bornée, espace BV) : Soit $v :]0,1[\to \mathbb{R}$, alors v est considérée comme une fonction à variation bornée, ou $v \in BV(]0,1[)$, si v appartient à $L^1(]0,1[)$ et si $|v|_{BV}([0,1] < +\infty$, où $|v|_{BV}(\Omega)$ est défini comme le suprême des intégrales suivantes :

$$|v|_{BV}(\overline{\Omega}) = \sup \left\{ \int_\Omega v \operatorname{div} \phi \, dx, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Bien sûr, si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est solution de (5.28) comme dans la définition 21, la fonction u est aussi solution de (29) avec les entropies de Kruzhkov, c'est-à-dire η définie (pour $k \in [A,B]$) par $\eta(s) = |s-k|$ (et donc ϕ, flux d'entropie associé, définie par :

$$\phi(s) = f(\max(s,k)) - f(\min(s,k)))$$

Par contre, le fait que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ vérifie (29) pour toutes les entropies de Kruzhkov n'est pas suffisant pour assurer l'unicité (alors que c'était suffisant dans le cas du problème posé sur tout $\mathbb{R}$, sans conditions aux limites). Un exemple de non unicité est donné dans la remarque 24. On obtient toutefois l'unicité si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ vérifie (29) pour toutes les "semi-entropies de Kruzhkov", c'est-à-dire les fonctions η définies (pour $k \in [A,B]$) par $\eta(s) = (s-k)^+$ (et donc $\phi(s) = f(s) - f(k)$ si $s \geq k$ et 0 sinon) et $\eta(s) = (s-k)^-$ (et donc $\phi(s) = f(k) - f(s)$ si $s \leq k$ et 0 sinon).

Remarque 24 (Contre exemple à l'unicité avec les entropies de Kruzhkov) : Nous donnons dans cette remarque un exemple de non unicité si on se limite dans la définition 21 aux entropies de Kruzhkov, c'est-à-dire aux fonctions η définies (pour $k \in [A,B]$) par $\eta(s) = |s-k|$ (et donc ϕ, flux d'entropie associé, définie par :

$$\phi(s) = f(\max(s,k)) - f(\min(s,k)))$$

)

Pour cet exemple, $f(s) = s^2$, $u_0 = 1$ p.p. dans $]0,1[$, $\overline{\overline{u}} = -1$ p.p. sur $\mathbb{R}^+$ et $u = 1$ p.p. sur $\mathbb{R}^+$. Il est donc possible de prendre $A = -1$, $B = 1$ et $M = 2$. Le théorème 22 nous donne une solution entropique de (28) avec ces valeurs de A, B et M. On peut vérifier que cette solution est la fonction u définie par :

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{2t}, & \text{si } x < 2t, \\ 1, & \text{si } x > 2t. \end{cases}$$

Elle correspond à une onde de détente. Cette solution reste donc aussi solution de (29) en se limitant aux entropies de Kruzhkov.
On considère maintenant la fonction constante $u = 1$ p.p. dans $]0,1[\times\mathbb{R}^+$. Cette fonction constante est aussi solution de (29) si on se limite dans cette définition aux entropies de Kruzhkov. Cette solution consiste en fait à propager une discontinuité non entropique au point $x = 0$.
On a ainsi deux fonctions qui vérifient (29) si on se limite dans cette définition aux entropies de Kruzhkov.

II.2 Cas multidimensionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2,3$, $T > 0$, $b \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T])^N$ et $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (mais on pourrait aussi considérer le cas $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$). On étudie maintenant le problème suivant :
Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, où $N = 2$ ou $N = 3$, et $T > 0$. Soit $b \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T])^N$ et $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (mais on peut également envisager le cas où $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Nous étudions maintenant le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(bf(u)) = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[,$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (30)$$

Pour être plus précis, nous allons prouver, en supposant des hypothèses appropriées sur les données, le théorème d'existence et d'unicité des solutions entropiques de ce problème. Tout d'abord, nous examinerons le cas sans conditions aux limites , puis nous aborderons le cas d'un problème avec des conditions aux limites .

II.2.1 Cas sans condition limite

On suppose ici que $b = 0$ sur $\partial\Omega\times[0,T]$, et donc on n'a pas besoin de conditions aux limites sur $\partial\Omega$.

Théorème 25 (Kruzhkov,1955) : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (avec $N > 1$) ayant une frontière lipschitzienne. Soit $T > 0$ et $b \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T])^N$ tel que $b = 0$ sur $\partial\Omega\times[0,T]$ et $\mathrm{div} b = 0$ dans $\Omega\times[0,T]$. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Alors il existe une unique solution entropique de l'équation (5.29),c'est-à-dire solution

de :

$$u \in L^\infty(\Omega\times]0,T[), \int_0^T \int_\Omega (\eta(u)\phi_t + \Phi(u) b \cdot \nabla \phi)\, dx\, dt + \int_\Omega \eta(u_0(x))\phi(x,0)\, dx \geq 0,$$

$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T[, \mathbb{R}^+)$, $\forall \eta \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe et Φ tel que $\Phi^{'} = \eta^{'} f^{'}$. (31)

De plus, si $A \leq 0$ et $B \geq 0$ sont tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p. sur Ω, alors on a $A \leq u \leq B$ p.p. sur $\Omega\times]0,T[$.

Démonstration :

Etape 1 **(Construction d'une solution approchée) :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^{(n)}$ une solution telle que $u^{(n)} \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$, satisfaisant l'équation suivante :

$$-\int_0^T \int_\Omega u^{(n)} \phi_t\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega b f(u^{(n)}) \cdot \nabla \phi\, dx\, dt + \frac{1}{n} \int_0^T \int_\Omega \nabla u^{(n)} \cdot \nabla \phi\, dx\, dt - \int_\Omega u_0(x) \phi(x,0)\, dx = 0,$$

$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,+\infty[)$ (32)

On a établi l'existence et l'unicité de $u^{(n)}$ grâce à l'étude de l'équation de convection-diffusion . (Le fait d'avoir $\frac{1}{n}$ au lieu de 1 ne pose aucun problème dans cette étude.)

On a également constaté, que cette formulation est équivalente au problème suivant :

La fonction $u^{(n)}$ appartient à l'espace $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$, la dérivée partielle par rapport au temps de $u^{(n)}$ appartient à $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, et $u^{(n)}(0) = u_0$. On a l'équation suivante :

$$\int_0^T \langle \partial_t u^{(n)}, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt - \int_0^T \int_\Omega b f(u^{(n)}) \cdot \nabla v dx dt + \frac{1}{n} \int_0^T \int_\Omega \nabla u^{(n)} \cdot \nabla v dx dt = 0,$$

$$\forall v \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)). \quad (33)$$

Etape 2 (Estimations sur la solution approchée) : Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Il existe A et $B \in \mathbb{R}$, tels que $A \leq 0 \leq B$, vérifiant $A \leq u_0 \leq B$ presque partout (A et B sont donc indépendants de n). Par conséquent, on en déduit que pour tout $t \in [0,T]$, on a $A \leq u^{(n)} \leq B$ presque partout. La suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$. En prenant maintenant $v = u^{(n)}$ dans l'équation (33), et en utilisant $\int_\Omega b f(u^{(n)}) \cdot \nabla u^{(n)} dx = 0$ presque partout (grâce à div $b = 0$), on obtient :

$$\frac{1}{2}\left\|u^{(n)}(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^{(n)}|^2 dxdt = 0.$$

On en déduit que Pour tout n, on a :

$$\frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^{(n)}|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty. \quad (34)$$

L'estimation $\sqrt{\frac{1}{n}}\|\nabla u^{(n)}\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}$ est utile pour la limite lorsque $n \to +\infty$. Cette estimation ne garantit pas la compacité, mais elle est nécessaire pour la convergence faible.

Grâce à la première estimation ($u^{(n)}$ bornée dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$), après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $u^{(n)}$ converge faiblement vers u dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$.

Si $f(u) = u$, il est facile de montrer que u est une solution faible de l'équation (30). En utilisant uniquement $\eta(s) = s$ dans l'équation (31) avec ϕ dans $C_c^\infty(\Omega \times [0,T[,\mathbb{R})$ et $=$ au lieu de $\geq$, on peut montrer que u est une solution de l'équation (31), ce qui conclut la partie "existence" du théorème 25.

Si la fonction f_0 n'est pas constante, la situation est beaucoup plus complexe, même pour montrer que u est une solution faible de l'équation (30), car la convergence de $u^{(n)}$ vers u est seulement faible. On ne sait donc pas si $f(u^{(n)})$ tend vers $f(u)$ (et plus généralement, si $\eta(u^{(n)})$ tend vers $\eta(u)$ et $\phi(u^{(n)})$ tend vers $\phi(u)$). Pour surmonter cette difficulté, deux méthodes ont été développées.
Une première méthode, proposée par Kruzhkov, suppose initialement que la donnée initiale u_0 appartient à l'espace BV(Ω (on dit aussi que u_0 a une "variation bornée"), ce qui signifie que $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $|u_0|_{BV(\overline{\Omega})} < +\infty$, où ($|u_0|_{BV(\overline{\Omega})}$ est défini comme suit :

$$|u_0|_{BV(\overline{\Omega})} = \sup\left\{\int_\Omega u_0 div\phi\, dx : \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N), \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\right\} \quad (35)$$

On prouve alors que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\overline{\Omega}\times[0,T])$. L'idée pour établir cette borne sur u^n est de dériver la première équation de (30) par rapport à x_i et de multiplier par sign($\partial_i u$). Grâce à cette estimation sur u^n, on peut ensuite appliquer le théorème de Helly[1] qui est présenté ci-dessous.

Théorème 30 (Helly) : Considérons $d \geq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^1(Q)$ et bornée dans $BV(Q)$, où Q est un compact de $\mathbb{R}^d$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^1(Q)$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Helly avec $Q = \overline{\Omega} \times [0,T]$ (et $d = N+1$). Étant donné que $u_n \to u$ dans $L^1(Q)$, à l'exception d'une éventuelle sous-suite, nous avons $u^n \to u$ dans $L^p(Q)$ pour tout $p < +\infty$, et nous pouvons également supposer (après extraction éventuelle d'une sous-suite) que $u^n \to u$ presque partout. Nous pouvons alors montrer que u est une solution de (31) (ce que nous ferons à l'étape 3 ultérieurement), ce qui prouve l'existence d'une solution à (31) si $u_0 \in BV(\overline{\Omega})$. Si u_0 n'appartient qu'à $L^\infty(\Omega)$ (ce qui est probablement la contribution majeure de Kruzhkov ici), nous pouvons approximer u_0 par une suite d'éléments de $L^\infty(\Omega) \cap BV(\overline{\Omega})$ et montrer que la suite des solutions entropiques associées converge (dans un sens approprié, après extraction d'une sous-suite) vers une solution entropique associée à u_0.

On peut également démontrer l'unicité de la solution de l'équation (31) (étape 4 ci-après). Cependant, cette méthode présente un inconvénient majeur, car elle ne semble pas fonctionner pour démontrer la convergence des schémas numériques. Même si la condition initiale est supposée appartenir à l'espace $BV(\overline{\Omega})$, la solution approchée obtenue par un schéma numérique n'est pas bornée dans $BV(\overline{\Omega} \times [0,T])$, indépendamment des paramètres de discrétisation, sauf dans le cas des maillages cartésiens.

C'est pourquoi on peut préférer la deuxième méthode, qui ne repose pas sur l'estimation de BV. On considère uniquement u_0 dans $L^\infty(\Omega)$ et on ne cherche pas à démontrer directement une compacité forte de la suite u^n dans $L^1(\Omega\times]0,T[)$. Grâce à l'estimation de u^n dans $L^\infty(\Omega\times]0,T[)$, on montre (après extraction d'une sous-suite) que $u^n \to \widetilde{u}$ dans un sens approprié, où $\widetilde{u}$ dépend d'une variable supplémentaire. (Il s'agit donc d'un théorème de compacité atypique qui conduit à une convergence que nous désignons comme une "convergence non linéaire faible- ?").

Ensuite, nous démontrons que $\widetilde{u}$ constitue une solution du problème dans un sens plus général que celui de (31), que nous appelons le "sens processus". Cette démonstration est très similaire à celle de l'étape 3 mentionnée précédemment. Par la suite, nous prouvons l'unicité de la solution dans le sens processus et que la solution processus est une

1. Eduard Helly, 1884–1943, mathématicien autrichien, prisonnier en Sibérie pendant et après la première guerre mondiale, il n'obtient pas de poste universitaire en raison de sa judéité et il s'exile aux USA après l'Anschluss en 1938. * Il a donné de nombreuses contributions en Analyse fonctionnelle.

solution entropique (c'est-à-dire une solution de (31)). La démonstration d'unicité est très similaire à celle présentée dans l'étape 4 susmentionnée. Cela conclut la démonstration de l'existence d'une solution à (31) (directement avec u_0 dans $L^\infty(\Omega)$). (L'unicité est toujours assurée par l'étape 4.) Un sous-produit de cette démonstration est la convergence (forte) de u^n vers u dans tous les espaces $L^p(\Omega\times]0,T[)$, où $p < +\infty$, même lorsque f est linéaire (ou linéaire sur des intervalles de $\mathbb{R}$). L'idée essentielle a donc été de remplacer le théorème de compacité (forte) de Helly par un théorème de compacité plus faible combiné avec un résultat d'unicité de la solution "au sens processus" de (30).

Etape 3 : Nous allons maintenant reprendre la méthode 1 et procéder à la limite lorsque $n \to +\infty$, en supposant que $u_0 \in BV$ et donc que $u^n \to u$ p.p. (pour une sous-suite). Nous admettons donc la partie "estimation BV de u^n".

1. Montrons que u est une solution faible. Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,+\infty[)$, nous avons :

$$\int_0^T \int_\Omega (u^n\phi_t + bf(u^n)\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt + \int_\Omega u_0(x)\phi(x,0)\,dx - \frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega \nabla u^n\cdot\nabla\phi\,dx\,dt = 0$$

   On remarque tout d'abord que le dernier terme du membre de gauche tend vers 0, grâce à l'estimation (34) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en effet :

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega \nabla u^n\cdot\nabla\phi\,dx\,dt\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}|\nabla u^n|\right\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \||\nabla\phi|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}$$

   et $\|\sqrt{\frac{1}{n}}|\nabla u^n|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ par (34). Ainsi, $\frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega \nabla u^n\cdot\nabla\phi$ tend vers 0 lorsque n tend vers 0.

   Les autres termes convergent par convergence dominée, et donc en passant à la limite, on obtient

$$\int_0^T\int_\Omega (u\phi_t + bf(u)\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt + \int_\Omega u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0. \quad (36)$$

2. Montrons que u est une solution entropique. Étant donné que $u(n)$ est une solution faible de l'équation parabolique

$$u_t^n + \operatorname{div}(bf(u^n)) - \frac{1}{n}\Delta u^n = 0, \quad (37)$$

   on peut montrer (on l'admettra) que $u^n \in C^2(\Omega\times]0,T[)$ (c'est ce que l'on appelle l'effet régularisant pour une équation parabolique). La fonction u^n est donc une solution classique de (37). Nous pouvons ensuite multiplier cette équation par $\eta'(u^n)$ avec $\eta \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe. On obtient, sur $\Omega\times]0,T[$, L'équation obtenue est :

$$(\eta(u^n))_t + bf^{'}(u^n)\eta^{'}(u^n)\cdot\nabla u^n - \frac{1}{n}\eta^{'}(u^n)\Delta u^n = 0.$$

On peut en déduire :

$$(\eta(u^n))_t + b\cdot\nabla(\Phi(u^n) - \frac{1}{n}\mathrm{div}(\eta^{'}(u^n)\nabla u^n) + \frac{1}{n}\eta^{''}(u^n)|\nabla u^n|^2 = 0.$$

Cependant, étant donné que $\frac{1}{n}\eta^{''}(u^n)|\nabla u^n|^2 \geq 0$, nous avons donc :

$$(\eta(u^n))_t + b\cdot\nabla(\Phi(u^n) - \frac{1}{n}\mathrm{div}(\eta^{'}(u^n)\nabla u^n) \leq 0.$$

En multipliant cette équation par ϕ, avec $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T[,\mathbb{R}^+)$, on obtient, toujours sur $\Omega\times]0,T[$:

$$\phi(\eta(u^{(n)}))_t + \phi\mathbf{b}\cdot\nabla(\Phi(u^{(n)}) - \frac{1}{n}\phi\mathrm{div}(\eta^{'}(u^{(n)})\nabla u^{(n)})) \leq 0$$

On intègre sur $[\epsilon,T[\times\Omega$ avec $\epsilon > 0$ et, après intégration par parties, on obtient :

$$-\int_\epsilon^T\int_\Omega \eta(u^{(n)})\phi_t\,dx\,dt - \int_\Omega \eta(u^{(n)}(\epsilon))\phi(x,\epsilon)\,dx - \int_\epsilon^T\int_\Omega (b\cdot\Phi(u^n).\nabla\phi + \frac{1}{n}\eta^{'}(u^n)\nabla(u^n)$$

$$\nabla u^n\nabla\phi)\,dx\,dt \leq 0$$

Mais on a quand :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_n(\varepsilon) \to u_n(0) = u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$\eta(u_n(\varepsilon)) \to \eta(u_0) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

Et donc :

$$-\int_{T_0}\int_\Omega \eta(u_n)\phi_t - \int_\Omega \eta(u_0)\phi(x,0)\,dx - \int_{T_0}\int_\Omega\int_\epsilon^T\int_\Omega (b\cdot\Phi(u^n).\nabla\phi + \frac{1}{n}\eta^{'}(u^n)\nabla(u^n)$$

$$\nabla u^n\nabla\phi)\,dx\,dt \leq 0$$

Lorsque $n\to\infty$, nous avons $\eta(u^n)\to\eta(u)$ et $\Phi(u_n)\to\Phi(u)$ dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$. De plus, avec $C_{\eta,A,B} = \max\{|\eta^{'}(s)|, A \leq s \leq B\}$, nous avons :

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega \eta^{'}(u^n)\nabla u^n\cdot\nabla\phi\,dx\,dt\right| \leq \frac{C_{\eta,A,B}}{\sqrt{n}}\|\frac{1}{\sqrt{n}}|\nabla u^n|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\||\nabla\phi|\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

En utilisant ces résultats, nous obtenons finalement :

$$\int_0^T \int_\Omega \eta(u)\phi_t + b \cdot \Phi(u^n)\nabla\phi \, dx \, dt + \int_\Omega \eta(u_0)\phi(x,0)\, dx \geq 0$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T[, \mathbb{R}^+)$, ce qui conclut la preuve de l'existence.

Etape 4 : Soit u une solution de l'équation (5.30). Tout d'abord, nous démontrons qu'il est possible de prendre $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T[, \mathbb{R}^+)$ dans l'équation (5.30). C'est à ce stade que l'hypothèse $b = 0$ sur le bord de Ω est utile.

Nous construisons une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\phi_n = 1$ sur $K_n = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$, $0 \leq \phi_n \leq 1$, et $|\nabla\phi_n| \leq C_\Omega n$, où C_Ω dépend uniquement de Ω (la régularité lipschitzienne de Ω est importante ici).

Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T[, \mathbb{R}^+)$. Nous prenons alors $\phi(x,t)\phi_n(x)$ comme fonction test dans l'équation (5.30) et obtenons :

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\phi_n \eta(u) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_n \Phi(u) b \cdot \nabla\phi \right) dx \, dt + \int_\Omega \eta(u_0(x))\phi_n(x)\phi(x,0)\, dx$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega b\Phi(u)\phi \cdot \nabla\phi_n \, dx \, dt \geq 0$$

Les termes initiaux convergent grâce à la convergence dominée. Appelons R_n le dernier terme. Nous allons démontrer sa convergence de manière assez facile en utilisant l'hypothèse que b est nul sur le bord.

$$R_n = \int_0^T \int_\Omega b\Phi(u)\phi \cdot \nabla\phi_n \, dx \, dt \; = \int_0^T \int_{\mathcal{C}_n} b\Phi(u)\phi \cdot \nabla\phi_n \, dx \, dt$$

où $Cn = \frac{\Omega}{K_n}$.
On a alors :

$$|R_n| \leq T \|b\|_{L^\infty(C_n)} C_{u,\phi} \|\phi\|_\infty C_\Omega n \mathrm{mes}(C_n)$$

Où $C_u, \varphi = \max\{|\varphi(s)| : s \in [-\gamma, \gamma]\}$, avec $\gamma = \|u\|_{L^\infty(\Omega \times [0,T])}$. Comme $b = 0$ sur $\partial\Omega \times [0,T]$ (et b continue), on a $\|b\|_{L^\infty(C^n)} \to 0$ quand $n \to \infty$. Enfin, la suite $(nmes(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On a donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ et on obtient donc :

$$\int_0^T \int_\Omega \eta(u)\phi_t + b\Phi(u)\cdot\nabla\phi\,dx\,dt + \int_\Omega \eta(u_0)\phi(x,0)\,dx \geq 0 \quad \forall\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T],\mathbb{R}^+)$$

$\forall\eta \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \eta$ convexe.
Par un procédé de régularisation, il est alors assez simple de démontrer que l'hypothèse de régularité sur η (c'est-à-dire η de classe C^2) peut être remplacée par une hypothèse plus faible, à savoir " η localement lipschitzienne". Cela présente l'avantage de pouvoir utiliser les entropies de Kruzhkov.

On peut maintenant montrer l'unicité de la solution de l'équation (31). Soient u et v deux solutions de (5.30). On va utiliser (31) en prenant pour η une entropie de Kruzhkov et des fonctions $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T],\mathbb{R}^+)$ (on vient de montrer que cela est possible). On reprend ici une idée de Kruzhkov, dite de dédoublement de variables. Elle consiste tout d'abord à choisir, dans (31), $k = v(y,s)$ et à prendre $\phi(x,t) = \psi(t)\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n(t-s)$ avec $\psi \in C_c^\infty([0,T],\mathbb{R}^+)$, $\rho_n(x) = n^N\rho(nx)$ et $\bar{\rho}_n(t) = n\bar{\rho}(nt)$, où ρ et $\bar{\rho}$ sont des noyaux régularisants, et à intégrer par rapport à y et s. La fonction ρ est à valeurs positives, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$, elle a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur $\mathbb{R}^N$ vaut 1. De même, la fonction $\bar{\rho}$ est à valeurs positives, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle a son support dans la boule de rayon 1 et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. De plus, on choisit $\bar{\rho}$ de manière à ce que son support soit dans $\mathbb{R}^-$. Avec ce choix de fonction test (et n assez grand pour que la fonction test soit admissible dans (31)) écrit avec des éléments de $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T],\mathbb{R})$, on obtient :

$$A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n} \geq 0, \quad (38)$$

$$A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)-v(y,s)|\psi^{'}(t)\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n(t-s)\,dx\,dt\,dy\,ds,$$

$$A_{2,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)-v(y,s)|\psi(t)\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n^{'}(t-s)\,dx\,dt\,dy\,ds,$$

$$A_{3,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(u(x,t))-f(v(y,s)))(\mathrm{sign}(u(x,t)-v(y,s))\psi(t)b\cdot\nabla\rho_n(x-y)\bar{\rho}_n(t-s)\,dx\,dt\,dy\,ds,$$

$$A_{4,n} = \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega |u_0(x) - v(y,s)| \psi(0) \rho_n(x-y) \bar{\rho}_n(-s)\, dx\, dy\, ds.$$

On passe alors maintenant à limite quand $n \to +\infty$ dans (38). Il n'est pas difficile de démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} A_{1,n} = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t) - v(x,t)| \psi'(t)\, dx\, dt.$$

On démontre ensuite que $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. Pour cela, on peut suppose la formulation entropique pour v, écrite avec y et s comme variables. On choisit l'entropie de Kruzhkov associée à $k = u(x,t)$ et $\phi(y,s) = \psi(t)\rho_n(x-y)\rho_n(t-s)$. Enfin, en fait intégration par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on obtient :

$$-\int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega |v(y,s) - u(x,t)| \psi(t) \rho_n(x-y) \bar{\rho}_n'(t-s)\, ds\, dx\, dt$$

$$-\int_0^T \int_\Omega \int_0^T \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u(x,t))) \mathrm{sign}(v(y,s) - u(x,t)) \psi(t) b \cdot \nabla \rho_n(x-y) \bar{\rho}_n(t-s)\, ds\, dx\, dt \geq 0$$

Ce qui résulte $A_{2,n} + A_{3,n} \leq 0$. On note que le terme associé à la condition initiale est nul car $\bar{\rho}_n(t) = 0$ si $t \geq 0$. Il suffit maintenant de montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$ pour conclure en passant à la limite dans (39) que

$$\int_0^T \int_\Omega |u(x,t) - v(x,t)| \psi'(t)\, dx\, dt \geq 0. \quad (39)$$

Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$, nous reprenons la formulation entropique pour v écrite avec y et s comme variables. Nous choisissons l'entropie de Kruzhkov associée à $k = u_0(x)$ et $\phi(y,s) = \psi(0)\rho_n(x-y) \int_s^\infty \rho_n(-\tau) d\tau$ (avec n suffisamment grand pour que cette fonction test ϕ soit admissible). Enfin, nous intégrons par rapport à $x \in \Omega$. Cela nous donne :

Le terme $A_{4,n}$ peut être réécrit comme suit :

$$-A_{4,n} - \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u_0(x))) \left(\mathrm{sign}(v(y,s) - u_0(x)) \psi(0) b \cdot \nabla \rho_n(x-y)\right.$$

$$\left(\int_s^\infty \bar{\rho}_n(-\tau) d\tau\right) dy ds dx + \int_\Omega \int_\Omega |u_0(y) - u_0(x)| \psi(0) \rho_n(x-y) dx dy \geq 0.$$

Nous avons donc l'inégalité suivante :

$$0 \leq A_{4,n} \leq A_{5,n} + A_{6,n},$$

avec

$$A_{5,n} = -\int_0^T \int_\Omega \int_\Omega (f(v(y,s)) - f(u_0(x)))\,(\text{sign}(v(y,s) - u_0(x))\psi(0)b\cdot$$
$$\nabla\rho_n(x-y)\left(\int_s^\infty \rho_n(-\tau)d\tau\right) dydsdx$$

et

$$A_{6,n} = \int_\Omega \int_\Omega |u_0(y) - u_0(x)|\psi(0)\rho_n(x-y)dxdy.$$

Il est possible de démontrer aisément que $\lim_{n\to+\infty} A_{5,n} = \lim_{n\to+\infty} A_{6,n} = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} A_{4,n} = 0$, et finalement, on obtient (39).
On peut maintenant conclure. Soit $0 < \epsilon < T$, on choisit une fonction $\psi \in C_C^\infty([0,T[,\mathbb{R}^+)$ telle que $\psi' < 0$ sur $]0, T-\epsilon[$.
L'inégalité (39) donne alors : $u = v$. sur $\Omega\times]0, T-\epsilon[$. Comme ϵ est arbitrairement petit, on en conclut que $u = v$. sur $\Omega\times]0,T[$, ce qui finis la preuve de l'unicité.

Remarque 27 (Pour le cas où Ω est non borné) : Dans la partie ”unicité” de (Étape 4) de la démonstration précédente, il aurait été possible de avoir une fonction ψ dépendant aussi de x. On aurait alors obtenu :

$$\int_0^T \int_\Omega |u-v|\psi(t)\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega b(f(u)-f(v)\,\text{sign}(u-v)\cdot\nabla\psi\,dx\,dt \geq 0 \quad \forall\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T[,\mathbb{R}^+) \quad (40)$$

Ceci est intéressant pour démontrer que l'unicité dans le cas où l'ouvert Ω est non borné (exemple : $\Omega = \mathbb{R}^N$), en profitant de la propriété de ”propagation à vitesse finie” pour des problèmes hyperboliques. Plus précisément, on prend dans (40) :

$$\psi(x,t) = r(t)\phi_a(|x| + \omega t) avec : \omega = L_f\|b\|_\infty$$

Dans cette démonstration, nous utilisons la notation L_f pour représenter un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle $[-\gamma, \gamma]$, où γ est défini comme le maximum entre $\|u\|_\infty$ et $\|v\|_\infty$. De plus, nous définissons $r(t)$ comme la fonction $(1/T)(T-t)^+$ et ϕ_a comme une fonction appartenant à $C_c^\infty([0,\infty[,\mathbb{R}^+)$, telle que $\phi_a = 1$ sur $[0,a]$ pour un certain $a > 0$, et ϕ_a est décroissante.
On peut observer qu'un simple argument de régularisation permet de prendre une fonction ψ telle que dans l'équation (5.39). On obtient alors :

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|\phi_a(|x| + \omega t)\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|r(t)\phi_a'(|x| + \omega t)\omega\,dx\,dt$$

$$+\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} b(f(u)-f(v))\mathrm{sign}(u-v)r(t)\phi_a^{'}(|x|+\omega t)\frac{x}{|x|}\,dx\,dt \geq 0.$$

Cependant, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} b(f(u)-f(v))\mathrm{sign}(u-v)r(t)\phi_a^{'}(|x|+\omega t)\frac{x}{|x|}\,dx\,dt \\
&\leq -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|b\|L_f|u-v|r(t)\phi_a^{'}(|x|+\omega t)\,dx\,dt \\
&\leq -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|r(t)\phi_a^{'}(|x|+\omega t)\omega\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

car $\omega = \|b\|L_f$. Par conséquent,

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|\phi_a(|x|+\omega t)\,dx\,dt \geq 0.$$

On en déduit, avec $B_{a,t} = \{x \text{ tq } :|x|+\omega t \leq a\}$, que

$$\int_0^T \int_{B_{a,t}} |u-v|\,dx\,dt = 0.$$

En faisant tendre maintenant a vers $+\infty$, on obtient, par convergence monotone,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u-v|\,dx\,dt = 0,$$

et donc $u = v$ p.p. sur $\Omega\times]0,T[$.

Remarque 28 (hypothèses sur b) :

1. Nous avons utilisé la régularité C^1 de b pour obtenir l'estimation BV des solutions approchées. Même si nous n'utilisons pas cette estimation BV, nous utilisons toujours la régularité C^1 de b pour l'unicité. En réalité, on peut remarquer que les démonstrations de l'estimation BV et de l'unicité restent valables dès que b est localement lipschitzienne.
2. Nous avons supposé que $\mathrm{div}(b) = 0$. Cette hypothèse pourrait être remplacée par $\mathrm{div}(b) \in L^\infty$ à condition de supposer que f soit lipschitzienne. Nous avons également supposé que $b = 0$ sur $\partial\Omega$ (afin d'éviter de traiter le cas difficile des conditions aux limites), mais on pourrait remplacer cette condition par $b \cdot n = 0$ sans difficulté supplémentaire majeure. Le problème des conditions aux limites se poserait si $b \cdot n \neq 0$.

II.2.2 Cas des conditions aux limites

Ce sous titre est consacrée à une généralisation du théorème 22 dans le cas scalaire multidimensionnel Nous prend le problème (30) et ne supposons plus que $b = 0$ sur la frontière.

Définition 29 (Solution faible entropique, avec conditions limites[1] : Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ avec une frontière de Lipschitz. Soit $T > 0$, f une fonction continue dérivable (ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne) et $b \in \overline{\Omega} \times [0,T]^N$. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\bar{u} \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$. On suppose que u_0 est bornée entre $A, B \in \mathbb{R}$, et que u_0 est bornée entre A et B presque partout sur $\partial\Omega \times (0,T)$.

Une fonction $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ est une solution entropique faible de l'équation (5.29) qui satisfait faiblement la condition limite $\bar{u}$ si les conditions suivantes sont respectées :

$$u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))\text{and } \forall \kappa \in [A,B], \forall \phi \in C_c^1(\bar{\Omega} \times [0,T), \mathbb{R}^+)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega [(u-\kappa)^\pm \partial_t \phi + \mathrm{sign}_\pm((u-\kappa))(f(u)-f(\kappa))b \cdot \mathrm{grad}\phi]\, dx\, dt \\
&+ M \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u(t)-\kappa) \pm \phi(x,t)\, d\gamma(x)\, dt + \int_\Omega (\overline{u}(t)-\kappa)^\pm \phi(x,0)\, dx \geq 0, \qquad (41)
\end{aligned}$$

La notation $d\gamma(x)$ représente l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $(N-1)$-dimensionnelle sur la frontière de Ω. De plus, on choisit un coefficient M tel que :M est tel que : $\|b\|_\infty |f(s_1) - f(s_2)| \leq M \cdot |s_1 - s_2|$ $\forall s_1, s_2 \in [A,B]$,aussi : $\|b\| =$ **Sup**$_{(x,t)\in\Omega\times[0,T]} |b(x,t)|$($|.|$designe la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$)

Remarque 30 :

1. Si u satisfait des inégalités (41), on a capable de prouver que u est une solution faible de (30) et qu'elle correspond certaines inégalités d'entropie dans $\Omega \times (0,T)$, à savoir

$$|u-\kappa|_t + \mathrm{div}(b(f(\max(u,\kappa)) - f(\min(u,\kappa)))) \leq 0, \forall \kappa \in \mathbb{R}$$

   et aussi sur les frontières $\partial\Omega$ et a $t = 0$(unité de temps). La solution faible entropique u correspond la condition initiale $u(\cdot,0) = u_0$ et correspond partiellement les conditions aux limites. Par exemple : si $f_0 > 0$ et que u et Ω sont suffisamment réguliers, alors $u(x,t) = \bar{u}(x,t)$ si $x \in \partial\Omega$, $t \in (0,T)$ et $b(x,t) \cdot n(x,t) < 0$, où n est le vecteur normal sur frontière extérieur de $\partial\Omega$.

2. Soit $\bar{M} \geq 1$. Il est important de constate que u est une solution de (41) si et seulement si u est une solution de (41) tel que le terme $\int_\Omega (u_0-\kappa)^\pm \phi(x,0)dx$ est remplacé par $M \int_\Omega (u_0-\kappa)^\pm \phi(x,0)dx$.

Théorème 31 (Existence et unicité, Otto, 1996) : Sous les hypothèses de la définition 29, considérons que $\mathrm{div} b = 0$ dans $\Omega \times [0,T]$; alors il existe une solution entropique unique

1. F. Otto. Initial-boundary value problem for a scalar conservation law. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 8 :729–734, 1996.

$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ satisfaisant (41). De plus,

$$A \leq u(x,t) \leq B, \text{p.p.}(x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}^+$$

.

Démonstration : Nous ne donnons ici qu'un résumé de la preuve dans le cas Ω un sous-ensemble ouvert borné polygonal de $\mathbf{R}^n$; cette preuve est basée et dépend de la convergence des approximations numériques [1].

Étape 1 : (SOLUTIONS APPROCHÉES). En supposant un millage assez général de Ω, noté T , et un pas de unité temps k, une solution approchée $u_{T,k}$ du problème (30) peut être sur-définie en utilisant des flux numériques de deux points (sur les bordures des mailles) construits avec une fonction de flux numérique g où :

— g est croissante comparant à son premier argument et décroissante par rapport à son second argument,

— $g(s,s) = f(s)$,pour tout $s \in [A,B]$

— g est localement lipschitzienne.

Sous une condition connue sous le nom de condition CFL, exprimée par $k \leq (1-\zeta)\frac{h}{L}$ avec $\zeta > 0$, il est possible de démontrer facilement que pour tout point (x,t) appartenant à $\Omega \times (0,T)$, la solution approchée $u_{T,k}$ satisfait l'inégalité :

$$A \leq u_{T,k} \leq B$$

Malheureusement, obtenir directement un résultat de compacité forte pour la famille de solutions approximatives n'est pas une tâche aisée (bien que ce résultat de compacité forte soit bel et bien vérifié, comme nous l'explorerons plus tard).

Étape 2 : COMPACITÉ FAIBLE. En se basant uniquement sur la borne L^∞ de $u_{T,k}$, on peut supposer (par extraction d'une sous-suite) que lorsque la taille de la maille tend vers 0 (avec la condition CFL), la solution $u_{T,k}$ converge vers une solution u d'une manière faible et non linéaire (analogue à une convergence vers une mesure de Young,). Cela signifie que u appartient à $L^\infty(\Omega \times (0,T) \times (0,1))$ et que pour tout ψ appartenant à $L^1(\Omega \times (0,T))$ et tout ϕ appartenant à $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, nous avons :

$$\int_0^T \int_\Omega \phi(u_{T,k}(x,t))\psi(x,t)dxdt \to \int_0^1 \int_0^T \int_\Omega \phi(u(x,t,\alpha))\psi(x,t)dxdtd\alpha$$

1. . Vovelle. Convergence of finite volume monotone schemes for scalar conservation laws on bounded domains. Numer. Math., 90(3) :563–596, 2002.

Étape 3 : PASSAGE À LA LIMITE. En utilisant la propriété de monotonie des flux numériques, les solutions approchées vérifient des inégalités d'entropie discrète spécifiques. En procédant à la limite de ces inégalités, nous obtenons que la solution u (définie à l'étape 2) satisfait des inégalités similaires à (41) suivantes :

$$u \in L^\infty(\Omega\times(0,T)\times(0,1)), \int_0^1\int_0^T\int_\Omega[(u-\kappa)^\pm\phi_t+\mathrm{sign}_\pm(u-\kappa)(f(u)-f(\kappa))b\cdot\mathrm{grad}\phi]dxdtd\alpha$$

$$+M\int_0^T\int_{\partial\Omega}(\bar{u}(t)-\kappa)^\pm\phi(x,t)d\gamma(x)dt+\int_\Omega(u_0-\kappa)^\pm\phi(x,0)dx\geq 0,$$

pour tout $\kappa\in[A,B]$ et tout $\phi\in C_c^1(\Omega\times[0,T],\mathbb{R}^+)$.

Nous sélectionnons ici une constante M qui est choisie pour être plus grande non seulement que la constante de Lipschitz de $\|b\|_\infty f$ sur l'intervalle [A, B], mais aussi plus grande que la constante de Lipschitz des flux numériques associés aux bords des mailles sur l'intervalle $[A,B]^2$. Ce choix de M est réalisable car la solution unique de l'équation (41) ne dépend pas de M, à condition que M soit supérieur à la constante de Lipschitz de $\|b\|_\infty f$ sur l'intervalle [A, B]. De plus, il est possible de choisir la fonction de flux numérique de telle sorte qu'elle ait une constante de Lipschitz bornée par la constante de Lipschitz de $\|b\|_\infty f$ (par exemple, en utilisant le flux de Godunov). Cette méthode conduit à un résultat d'existence avec M seulement supérieur à la constante de Lipschitz de $\|b\|_\infty f$sur $s\in[A,B]$,en passant à la limite sur les solutions approchées obtenues avec ces flux numériques.

Étape 4 : DÉTERMINATION DE LA SOLUTION UNIQUE DE (42). Dans cette étape, nous utilisons la méthode de "dédoublement de variables" de Krushkov pour prouver l'unicité de la solution de l'équation (42). Supposons que u et w soient deux solutions de (42). En appliquant la méthode du dédoublement de variables, nous obtenons l'expression suivante :

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^T\int_\Omega|u(x,t,\alpha)-w(x,t,\beta)|\phi_t dxdtd\alpha d\beta$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^T\int_\Omega(f(\max(u,w))-f(\min(u,w)))b\cdot\nabla\phi dxdtd\alpha d\beta\geq 0 \quad (42)$$

pour tout $\phi\in C_c^1(\bar{\Omega}\times[0,T],\mathbb{R}^+)$.

En choisissant $\phi(x,t)=(T-t)^+$ dans cette expression (ce qui est effectivement possible), nous obtenons que u ne dépend pas de α, w ne dépend pas de β, et $u=w$ presque partout sur $\Omega\times(0,T)$. Par conséquent, u est également la solution unique de l'équation

(41).

Étape 5 : CONCLUSION. L'étape 4 garantit, en particulier, l'unicité de la solution de l'équation (41). Elle garantit également que la limite faible non linéaire des suites de solutions approchées est une solution de l'équation (41), ce qui prouve l'existence de la solution de (41).

De plus, étant donné que la limite faible non linéaire des suites de solutions approchées ne dépend pas de α, il est assez facile de déduire que cette limite est "forte" dans $L^p(\Omega\times(0,T))$ pour tout $p \in [1,\infty)$. Grâce à l'unicité de la limite, la convergence a lieu sans extraction de sous-suite.

Chapitre III

LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

III.1 Introduction

Le but de ce chapitre est dÌÈtudier la classe particuliËre des Èquations elliptiques linéaires dÌordre 2. En particulier on montrera des resultats dÌexistence et dÌunicitÈ de solutions du problËme continu (1.1.2). On fera Èvoquer aussi les rÈsultats de rÈgularitÈ de la solution ainsi que ses propriÈtÈs qualitatives (positivitÈ, continuitÈ par rapport aux donnÈes du problËme).

III.2 Des équations elliptiques linéaires

III.2.1 Présentation du probléme

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière Γ définie par $\partial\Omega = \frac{\overline{\Omega}}{\Omega}$. Soient les fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant l'hypothèse d'ellipticité uniforme, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad (5.1.1)$$

On considère les fonctions $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. On cherche une solution au problème suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Définition 5.1.1 - "Solution classique" : Si les fonctions $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ pour $i, j = 1, \ldots, n$, $f \in C(\Omega)$ et $g \in C(\partial)$, alors une solution classique du problème (5.1.2) est une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaisant (5.1.2).

Remarque 5.1.1 : Cette solution n'existe pas toujours, mais elle existe au sens faible.

Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. En multipliant l'équation (5.1.2) par $\phi(x)$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\phi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall\phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad (5.1.3)$$

En utilisant la formule de Green, cette équation devient :

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\phi(x)\right)dx=\int_{\Omega}f(x)\phi(x)\,dx,\forall x\in\Omega \quad 5.1.4$$

Puisque $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, alors l'équation (5.1.4) implique

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)dx=\int_{\Omega}f\varphi dx, \quad \forall x\in\Omega. \quad (5.1.5)$$

Comme $u \in C^2(\Omega)$, nous avons $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ pour tout i. Par conséquent, $u \subset C(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega)$ donc $u \in H^1(\Omega)$. Pour le cas particulier où Ω est borné et $\partial\Omega$ est de classe C^1, et pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$, le problème (2.1.6) peut être reformulé comme :

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx=f(x), \quad \forall x\in\Omega \\ u(x)=0, x\in\partial\Omega\end{cases} \quad (5.1.7)$$

Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, grâce à la densité de $C_c^{\infty}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^{\infty}(\Omega)$ avec $\varphi_n \in C_c^1(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire $\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $i = 1,\dots,n$. Cela conduit à

$$-\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}\right)dx=\int_{\Omega}f\varphi_n dx. \quad (5.1.8)$$

En passant à la limite, on va trouve que u satisfait le problème suivant, qu'on l'appelle formulation faible du problème (5.1.6) :

$$\begin{cases}u\in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\right)dx=-\int_{\Omega}f(x)v(x)dx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega).\end{cases}$$

Remarque 5.1.2 "Problème minimal" : Dans le cas où $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i \neq j$, u est la solution de (5.1.7) si et seulement si u est solution du problème suivant :

$$\begin{cases}u\in H_0^1(\Omega), \\ J(u)\leq J(v), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),\end{cases}$$

où la fonctionnelle J est définie comme suit :

$$J(v) = \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{D}_i v \cdot \mathrm{D}_j v\right) v\,dx.$$

III.2.2 Existence et unicité de la solution

Considérons le problème (2.1.7) mentionné précédemment.

Théorème 5.2.1 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, et soit $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \subset l^\infty(\Omega)$ une fonction dans $L^1(\Omega)$ telle que pour tout $\alpha > 0$, la condition (5.1.1) est satisfaite. Alors le problème (5.1.7) possède une unique solution.

Pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions des problèmes (5.1.7) et (5.1.8), nous ferons appel au lemme de Lax-Milgram. Pour appliquer ce lemme, nous réécrivons le problème (5.1.7) sous la forme suivante :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on ait $a(u,v) = T(v)$, où

$$T(v) = \int_{\Omega} f v\,dx.$$

et :

$$a(u,v) = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx$$

La fonctionnelle T est définie par

$$T(v) = -\int_{\Omega} f(x)v(x)\,dx.$$

Nous pouvons noter en premier lieu que la forme linéaire T est continue, c'est-à-dire que :

$$|T(v)| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La forme bilinéaire a est évidemment continue. On a

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|_{L^\infty(\Omega)}\|D_i u\|_{L^2(\Omega)}\|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

où $C = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|_{L^\infty(\Omega)}$. De plus, a est coercive, car

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_i u D_j u \right) dx \geq \left[\inf_\Omega (a_{i,j}) \right] \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i u|^2 \right) dx = h \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$

où $h = \inf_{a_{i,j}} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|$. En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (C_\Omega + 1) \sum_{1}^{,} \|D_i u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

ce qui implique :

$$\sum_{i=0}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_\Omega + 1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

En conclusion, le lemme de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (5.1.7).

III.2.3 Régularité et positivité de la solution

III.2.3.1 La régularité de la solution

Théorème 5.3.1 : On considère le problème (5.1.6) avec $u \in H_0^1(\Omega)$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ pour $i,j = 1,\ldots,n$ et Ω un ouvert à frontière de classe C^2. Alors, pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^2(\Omega)$.

Pour démontrer ce théorème (5.3.1), on se ramène par la technique dite des "cartes locales" au cas $\Omega = (x_1, x_2)$ où $x_1 > 0$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Considérons le problème suivant :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \int a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad x = (x_1, x_2)$$

Ensuite, nous utilisons le théorème de Nirenberg énoncé ultérieurement, qui nécessite les lemmes techniques suivants :

Lemme 5.3.1 Soient $g \in L^2(\Omega)$ et $h > 0$. Pour toute fonction $\omega_{h,g}$ définie par :

$$\omega_{h,g} = \frac{1}{h}(g_h - g), \text{avec } g_h \in H_0^1(\Omega) \text{ défini comme :} g_h(x) = g(x_1, x_2 + h)$$

Alors, on a :

$$\|\omega_{h,g}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve : Soit $g \in L^2(\Omega)$. Par définition :

$$\|\omega_{h,g}\|_{H^{-1}} = \sup_{x_2 \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_{h,g} v dx_1 dx_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{H^1} \leq 1 \right)$$

Puisque l'espace C_c^∞ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, nous pouvons écrire :

$$\|\omega_{h,g}\|_{H^1} = \sup_{x_2} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_{h,g} v dx_1 dx_2, \quad \forall v \in C_c^\infty, \quad \|v\|_{H^1} \leq 1 \right)$$

Soit $v \in C_c^\infty$ tel que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_{h,g} dx_1 dx_2 = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [g(x_1, x_2 + h) - g(x_1, x_2)] v(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, \tilde{x}_2) v(x_1, \tilde{x}_2 - h) dx_1 d\tilde{x}_2 - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2) v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2). \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1, x_2 - h)}{-h} dx_1 \, dx_2$$

Preuve :

$$| \int \omega_{h,g} \, v \, dx|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \cdot \| \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1, x_2 - h)}{-h} \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

On en déduit que :

$$\|\omega_{h,g}\|_{H-1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Lemme 2.3.2 Sous les hypothèses du lemme précédent (5.3.1), soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors $\omega_h u \to D_2 u$ dans D' lorsque $h \to 0$.

Preuve : Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, nous voulons montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h u \; \varphi \, dx_1 \, dx_2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+} - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u \, \partial_2 \varphi \, dx_1 \, dx_2 = \langle \partial_2, \varphi \rangle_{D', D} \quad \text{lorsque } h \to 0$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h u\, u\, \varphi\, dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{u(x_1, x_2+h) - u(x_1, x_2)}{h}\right) \varphi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_h u\, u\, u\, dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2-h)}{-h}\right) \varphi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\varphi(x_1; x_2) - \varphi(x_1; x_2-h)}{-h}\right) = \partial_2\varphi$$

Alors,

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n1}} \omega_h u\, dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{-1}} u\partial_2\varphi dx_1 dx_2$$

Théorème 5.3.2 (Nirenberg) : affirme que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\Omega = (x_1, x_2), x_1 \leq 0\text{et} x_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

et $u \in H_0^1(\Omega)$ et la solution unique de problème :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), x = (x_1, x_2) \quad (5.3.1)$$

Alors, la solution $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$ du problème est unique, où u est une fonction appartenant à $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ et f est une fonction appartenant à $L^2(\mathbb{R}^n)$.
La présente démonstration sera effectuée dans le cas où $n = 2$, . Considérons $u \in H_0^1()$, solution de l'équation (2.3.1). Par conséquent, u satisfait le suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \nabla u \cdot \nabla v\, dx_1 dx_2 + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u \cdot v\, dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g \cdot v\, dx_1 dx_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où $g = u + f$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.

$$\int\int\int ru : rv\, dx_1\, dx_2 + u : v\, dx_1\, dx_2 = g : v\, dx_1\, dx_2, \quad \forall v \in H^0(\Omega), \quad \text{où } g = u + f \in L^2(\Omega),$$

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R^{n-1}}} ||\cdot v||^2 \, dx_1 \, dx_2\right) \leq \|g\|_{H-1(\Omega)}|v\|_{H^1(\Omega)}, v \in H_0^1$$

$$\|g\|_{H-1(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R^{n-1}}} g\cdot v \, dx_1 \, dx_2\right), v\in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$$

On suppose l'opérateur auto-adjoint :

$$T_g : H_0^1(\Omega) \to H^-1(\Omega) : v \mapsto \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g \, dx_1 \, dx_2, \quad \text{avec } g \in L^2(\Omega).$$

On choisit maintenant $v = u$ dans (5.3.2) pour obtenir :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On introduit la fonction :
$u_h = \frac{1}{(u+h_u)}$, où $u_h \in H_0^1(\Omega)$, définie par :
$u_h(x) = u(x_1, x_2 + h)$.
Puisque u est une solution de (2.3.1), alors u_h vérifie :
Ce qui conduit à :

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \nabla h_u \nabla v \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R^{n-1}}} f_h v \, dx_1 \, dx_2 = f(x+h) \quad \forall h \leq 0.$$

En supposant $\omega_h f = \omega_h g - \omega_h u$, on en déduit que :

$$\langle \omega_h u, v\rangle_{H_1(\Omega)} = \int \omega_h g v \, dx_1 \, dx_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce résultat entraîne que la norme $\|\omega_h u\|_{H^1(\Omega)}$ est bornée par la norme $\|\omega_h g\|_{H^{-1}(\Omega)}$. En appliquant le lemme (2.3.1), nous obtenons alors :

$$\|\omega_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\omega_h g\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On applique le lemme (5.3.1) on aura :

$$\|\omega_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Maintenant, considérons $h = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ dans l'inégalité ci-dessus et laissons n tendre vers $+\infty$. Par ce qui précède, la suite $\left(\omega_{\frac{1}{n}} u\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe $w \in L^2(\Omega)$

telle que $\left(\omega_{\frac{1}{n}}u\right)_{n\in\mathbb{N}} \to w$ dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, nous avons $\left(\omega_{\frac{1}{n}}u\right)_{n\in\mathbb{N}} \to w$ dans D', et d'après (2.3.2), cela implique $\partial_{x_2}u = w$ dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, $\partial_{x_1}\partial_{x_2}u \in L^2(\Omega)$ et $\partial^2_{x_2}u \in L^2(\Omega)$. Pour conclure, il reste à montrer que $\partial^2_{x_1}u \in L^2(\Omega)$. En effet, comme u est une solution faible de (2.3.1), nous avons $\nabla u = f$ dans D', ce qui implique $\partial^2_{x_1}u = f - \partial^2_{x_2}uu$ presque partout. Par conséquent, $\partial^2_{x_1}u \in L^2(\Omega)$. Cela termine la preuve.

III.2.4 Des équations elliptiques non linéaires

III.2.4.1 Théorèmes de points fixes

Nous commencerons par rappeler un résultat bien connu concernant l'existence et l'unicité de points fixes pour les applications contractantes.

Théorème II.2.4.1.1 (Point fixe de Banach, Picard) : Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que :

$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in X.$

Alors, l'application f possède un unique point fixe $\bar{x}$ dans X, c'est-à-dire $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Nous allons maintenant établir deux nouveaux théorèmes de point fixe. Le premier concerne les dimensions finies (le théorème de Brouwer) et le second concerne les dimensions infinies (le théorème de Schauder). Ces théorèmes seront utiles pour démontrer l'existence de solutions pour des EDP elliptiques semi-linéaires.

Théorème II.2.4.1.2 (Point fixe de Brouwer) : Soit K un ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors, il existe un point fixe de f dans K.

Démonstration :

Étape 1 (On peut réduire le problème au cas où K est une boule fermée) : Supposons que le résultat soit vrai pour les boules fermées. Considérons un ensemble convexe compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction continue $f : K \to K$. Comme K est borné, il existe une boule fermée B telle que $K \subset B$. Nous définissons $g = f \circ P_K$ où P_K est la projection orthogonale sur le convexe fermé K. Ainsi, $g : B \to K \subset B$ est continue car elle est la composition de fonctions continues. Par conséquent, il existe un point $\bar{x} \in B$ tel que $f(P_K(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}$. Comme f prend ses valeurs dans K, il est nécessaire que $\bar{x} \in K$ et $P_K(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Sans perte de généralité, nous pouvons également supposer que B est la boule unité fermée.

Étape 2 (On peut réduire le problème au cas où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$) : En effet, de la même manière que dans l'étape 1, si $f : B \to B$ est une fonction continue, nous posons $g = f \circ P_B$ où P_B est la projection orthogonale sur la boule fermée B. Ainsi, $g : \mathbb{R}^n \to B$ est continue car elle est la composition de fonctions continues. Il existe alors un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(P_B(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}$. Comme f prend ses valeurs dans B, il est donc nécessaire que $\bar{x} \in B$ et $P_B(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Étape 3 (Nous pouvons réduire le problème au cas où f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$) : En effet, si $f : \mathbb{R}^n \to B$ est une fonction continue, nous définissons $f_\varepsilon := f * \rho_\varepsilon$, où ρ_ε est un noyau régularisant. Les propriétés classiques de la convolution montrent que $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $|f_\varepsilon| \leq 1$. De plus, comme f est continue, nous avons $f_\varepsilon \to f$ uniformément sur tout compact. Soit $x_\varepsilon \in B$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Comme B est une boule fermée et donc un compact, il existe une sous-suite $x_{\varepsilon_j} \to \bar{x} \in B$. Comme $f_{\varepsilon_j} \to f$ uniformément sur B, alors $f_{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}) \to f(\bar{x})$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Supposons par contradiction que f n'admet pas de point fixe sur B, c'est-à-dire $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B$. Comme f prend ses valeurs dans B, cela signifie en fait que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Étape 4 (Construction d'une rétraction de classe C^∞ de B dans ∂B) : Nous allons construire une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \partial B$ telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in \partial B$. Pour cela, nous considérons la demi-droite partant de l'extrémité $f(x)$ et dirigée par le vecteur $x - f(x)$. Cette demi-droite intersecte la sphère ∂B en un unique point que nous notons $g(x)$. Par construction, il est évident que g prend ses valeurs dans ∂B et que $g(x) = x$ si $x \in \partial B$.

Par définition de g, il existe un nombre $\lambda_x \geq 0$ tel que $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$. Ce nombre est obtenu en résolvant l'équation du second degré :

$$1 = |g(x)|^2 = |f(x)|^2 + 2\lambda f(x) \cdot (x - f(x)) + \lambda^2 |x - f(x)|^2$$

et en prenant la racine positive. Le calcul du discriminant donne :

$$\mathit{\Delta} x = (f(x) \cdot (x - f(x)))^2 + (1 - |f(x)|^2)|x - f(x)|^2 \geq 0$$

car $|f(x)| \leq 1$. Par conséquent, nous obtenons :

$$\lambda_x = -\frac{f(x) \cdot (x - f(x)) + \sqrt{\mathit{\Delta} x}}{|x - f(x)|^2}$$

, et la fonction $x \to \lambda_x$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, g est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Remarquons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\mathit{\Delta} x \geq \delta$ pour tout $x \in B$. En effet, étant donné que $x \to \mathit{\Delta} x$ est continue sur le compact B, elle atteint son minimum en un point $x_0 \in B$. Si $\mathit{\Delta} x_0 = 0$, alors cela impliquerait que $|f(x_0)| = 1$ et $x_0 \cdot f(x_0) = 1$, ce qui est impossible car cela signifierait que $x_0 = f(x_0)$. Par conséquent, en posant $\delta = \mathit{\Delta} x_0 = \min_{x \in B} \mathit{\Delta} x$, on constate effectivement que $\mathit{\Delta} x \geq \delta$ pour tout $x \in B$. Nous en déduisons que la fonction $x \to \lambda_x$ est de classe C^∞ sur B°, ce qui implique que $g \in C^\infty(B^\circ)$. De plus, nous avons :

$$c = \max_{x \in B} |\nabla g| < +\infty$$

Étape 5 : Pour tout $0 \le t \le 1$ et pour tout $x \in B$, nous définissons :

$$\phi_t(x) = (1-t)x + tg(x)$$

de sorte que $\phi_0(x) = x$ et $\phi_1(x) = g(x)$. Montrons que si $0 < t < \frac{1}{1+c}$, alors ϕ_t réalise un C^1-difféomorphisme de B° sur B°.
Tout d'abord, notons que $\phi_t(B) \subset B$ car si $x \in B$, alors $g(x) \in \partial B \subset B$, et par convexité de B, $\phi_t(x) = (1-t)x + tg(x) \in B$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, nous avons pour tout $x, y \in B$:

$$|g(x) - g(y)| \le c|x-y|.$$

De plus :

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \ge (1-t)|x-y| - t|g(x) - g(y)| \ge ((1-t) - ct)|x-y|.$$

On peut conclure que la fonction ϕ_t est injective lorsque $0 \le t < \frac{1}{1+c}$. Étant donné que ϕ_t est l'identité sur ∂B, il en découle que $\phi_t(B^\circ) \subset B^\circ$.
De plus, pour $0 \le t < \frac{1}{1+c}$, nous avons :

$$\nabla \phi_t = (1-t)I + t\nabla g = (1-t)\left(I + \frac{t}{1-t}\nabla g\right),$$

où

$$\frac{t}{1-t}|\nabla g| \le \frac{ct}{1-t} < 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in B^\circ$ et $0 \le t < \frac{1}{1+c}$, la matrice $\nabla \phi_t(x)$ est inversible. Selon le théorème d'inversion globale, ϕ_t réalise une transformation différentiable de classe C^1-difféormorphismede B° vers son image $\phi_t(B^\circ)$, qui est un ensemble ouvert.

Prouvons maintenant que ϕ_t est surjective en supposant par l'absurde que $\phi_t(B^\circ) \neq B^\circ$. Il existe donc un élément $y \in B^\circ \setminus \phi_t(B^\circ)$. Soit $y_0 \in \phi_t(B^\circ)$ et posons :

$$\lambda_0 := \inf\{\lambda \geq 0 : y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y \notin \phi_t(B^\circ)\}.$$

Comme $\phi_t(B^\circ)$ est un ensemble ouvert, nous avons $\lambda_0 > 0$. De plus, $\lambda_0 \leq 1$ puisque $y \notin \phi_t(B^\circ)$. Pour un $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, nous avons $y_{\lambda_0 - 1/k} \in \phi_t(B^\circ)$, ce qui implique l'existence d'un $x_k \in B^\circ$ tel que $\phi_t(x_k) = y_{\lambda_0-1/k}$. Étant donné que B est un ensemble compact, en extrayant une sous-suite, nous pouvons supposer que $x_k \to x_0 \in B$. En utilisant la continuité de ϕ_t, nous avons alors $\phi_t(x_0) = y_{\lambda_0}$. Par conséquent, $x_0 \notin \partial B$, car si c'était le cas, nous aurions $x_0 = y_{\lambda_0} \in \partial B$. Étant donné la convexité de B, le segment $[y_0, y]$ serait entièrement inclus dans B°. Par conséquent, $x_0 \in B^\circ$ et donc $\phi_t(B^\circ)$ est un voisinage de y_{λ_0}. Il s'ensuit qu'il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $y_\lambda \in \phi_t(B^\circ)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1[$, ce qui contredit la définition de λ_0 en tant que borne inférieure.

Étape 6 : comme :

$$t \to det(\nabla\phi_t(x)) = a_0(x) + a_1(x).t + ... + a_n(x).t^n$$

est une fonction polynomiale de degré n par rapport à t, on en déduit que : $P(t) = \int_B \det(\nabla\phi_t(x))dx$ est également une fonction polynomiale qui est de degré n par rapport à t. Comme $\nabla\phi_t = (1-t)I + t\nabla g$ converge uniformément vers I sur B, il en découle que $\det(\nabla\phi_t)$ converge uniformément vers 1 sur B. Cela montre l'existence d'un $t_0 < \frac{1}{1+c}$ tel que pour tout $0 < t < t_0$ et tout $x \in B$, on ait $\det(\nabla\phi_t(x)) > 0$. En utilisant la formule de changement de variables, nous obtenons que pour tout $0 < t < t_0$:

$$|B^\circ| = |\phi_t(B^\circ)| = \int_B \det(\nabla\phi_t(x))dx = P(t).$$

Cela montre que le polynôme P est constant sur l'intervalle ouvert $]0, t_0[$, et donc constant sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$|B^\circ| = P(1) = \int_B \det(\nabla\phi_1(x))dx = \int_B \det(\nabla g(x))dx.$$

D'autre part, si $x \in B$ était tel que $\det(\nabla g(x)) \neq 0$, le théorème d'inversion locale montrerait que g réalise une C^1-difféomorphisme localement au voisinage de x, et donc l'image de g ne serait pas vide. Cela contredirait le fait que g prenne ses valeurs sur la sphère ∂B. Par conséquent, $\det(\nabla g) = 0$ sur B, ce qui est impossible car $|B| \neq 0$. Nous concluons donc que f possède au moins un point fixe dans B.

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre ce dernier résultat en dimension infinie.

Théorème II.2.4.1.3 (Point fixe de Schauder) : Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble compact et convexe de E, et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors, il existe un point fixe de f dans K.

Démonstration : L'idée est de se ramener au point fixe de Brouwer par une approximation. Pour tout $\varepsilon > 0$, étant donné que K est compact, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que : K soit inclus dans l'union des boules ouvertes de rayon ε autour de ces points, c'est-à-dire

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

Notons que pour tout $x \in K$, la quantité $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}(x, B(x_i, \varepsilon)^c)$ est strictement positive. Sinon, il existerait un point $\bar{x} \in K$ tel que $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)^c = (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon))^c$, ce qui est impossible. Nous pouvons alors définir, pour tout $x \in K$, les fonctions :

$$\alpha_i^\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, B(x_i, \varepsilon)^c)}{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{dist}(x, B(x_j, \varepsilon)^c)} \geq 0$$

Ces fonctions α_i^ε sont continues sur K et vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$$

pour tout $x \in K$. Définissons $J_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^\varepsilon(x) x_i \forall x \in K$. Alors, pour tout $x \in K$, on a :

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^\varepsilon(x) \|x_i - x\|$$

Si $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$, alors $x \in B(x_i, \varepsilon)$, ce qui implique :

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^\varepsilon(x) = \varepsilon \quad (II.2.4.1.1)$$

Notons $K_\varepsilon = \operatorname{Conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, l'enveloppe convexe de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Comme K_ε est un

sous-ensemble convexe de K et que K est compact, le théorème du point fixe de Brouwer assure l'existence d'un point $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$, où $f_\varepsilon = J_\varepsilon \circ f$ est également une fonction continue.
De plus, étant donné que $K_\varepsilon \subset K$ et que K est compact, nous pouvons extraire une sous-suite (x_{ε_j}) qui converge vers un point $\bar{x} \in K$. Par conséquent :

$$\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leftarrow \|f(x_{\varepsilon_j}) - x_{\varepsilon_j}\| \leq \varepsilon_j \to 0$$

ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.
Il peut être utile d'utiliser la version suivante du théorème du point fixe de Schauder.
Corollaire II.2.4.1.4 : Soit E un espace de Banach, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné, et $f : C \to C$ une fonction continue telle que $\overline{f(C)}$ soit compact. Alors, il existe un point fixe de f dans C.
Démonstration : L'ensemble $A = \overline{f(C)}$ est compact par hypothèse, mais il n'est pas convexe. Nous considérons donc l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(A)$, qui est convexe mais pas fermée en dimension infinie. De plus, nous considérons l'ensemble convexe fermé $K = \overline{\mathrm{Conv}(A)}$ et admettons temporairement qu'il soit compact. Comme $f(C) \subset C$, alors $A = \overline{f(C)} \subset C$ puisque C est fermé. Ensuite, $\mathrm{Conv}(A) \subset C$ car C est convexe, et enfin $K = \overline{\mathrm{Conv}(A)} \subset C$ car une fois de plus, C est fermé. Par conséquent, $f : K \to K$ et le théorème du point fixe de Schauder garantit l'existence d'un point fixe de f dans $K \subset C$.

Il nous reste à démontrer que K est compact. Soit $\varepsilon > 0$. Comme A est compact, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \ldots, x_m \in A$ tels que :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon/2) = \{x_1, \ldots, x_m\} + B(0, \varepsilon/2)$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \mathrm{Conv}\{x_1, \ldots, x_m\} + B(0, \varepsilon/2)$$

Comme $\mathrm{Conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_m\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $\mathrm{Conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$ est à la fois convexe et compact. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$ tels que :

$$\mathrm{Conv}\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon/2) = \{y_1, \ldots, y_n\} + B(0, \varepsilon/2)$$

Ainsi, nous en déduisons que :

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \{y_1, \ldots, y_n\} + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon)$$

,ce qui démontre que Conv(A) est précompact et donc compact.

III.2.4.2 Équations semi-linéaires

Théorème du point fixe de Schauder et solutions d'EDP semi-linéaires : Le théorème du point fixe de Schauder est utilisé pour démontrer l'existence de solutions pour les équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques semi-linéaires, c'est-à-dire des EDP non linéaires dont la partie principale est linéaire par rapport à u. Nous commençons par considérer l'EDP sous forme de divergence suivante :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f(x, u) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (II.2.4.2.1)$$

Le terme principal de cette équation $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u(x)$ est effectivement linéaire par rapport à u.
Tout d'abord, rappelons la définition et quelques propriétés des fonctions de Carathéodory.
Définition II.2.4.2.1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si $f(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^m$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $f(\cdot, z)$ est mesurable sur Ω pour tout $z \in \mathbb{R}^m$.
Lemme II.2.4.2.2 : Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $w : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. Alors la fonction $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable.
Démonstration : La fonction w étant mesurable, on peut trouver une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge vers w presque partout sur Ω. On peut alors trouver $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^m$ et des ensembles mesurables $A_1, \ldots, A_k \subset \Omega$ deux à deux disjoints tels que

$$w_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Ainsi, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$f(x, w_n(x)) = \sum_{i=1}^{k} f(x, \alpha_i)\chi_{A_i}(x).$$

Comme f est une fonction de Carathéodory, on a que $x \mapsto f(x, \alpha_i)$ est mesurable. Par conséquent, $x \mapsto f(x, w_n(x))$ est mesurable comme produit et somme de fonctions mesurables. Comme $w_n(x) \to w(x)$ et que $f(x, \cdot)$ est continue presque partout sur Ω, on en déduit que $f(x, w_n(x)) \to f(x, w(x))$ presque partout sur Ω, ce qui montre que $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable comme limite presque partout de fonctions mesurables.

Hypothèses Nous formulons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;

(H_2) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$ telle que $|f(x, s)| \leq a(x)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et presque tout $x \in \Omega$;

(H_3) Pour tout $1 \leq i, j \leq N$, les fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ vérifient l'inégalité $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, avec $\lambda > 0$ une constante.

Théorème II.2.4.2.2 : Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), il existe une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation (II.2.4.2.1), c'est-à-dire :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration : Nous utiliserons le théorème du point fixe de Schauder. Pour cela, considérons l'application $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ qui à $u \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution $v = T(u) \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

L'existence et l'unicité de v découlent du théorème de Lax-Milgram puisque la fonction $x \mapsto f(x, u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$ d'après le Lemme II.2.4.2.2 et l'hypothèse (H_2).

En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle et en utilisant les hypothèses (H_2), (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx \leq \|a\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, l'inégalité de Poincaré donne :

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq R := \frac{C_\Omega \|a\|_{L^2(\Omega)}}{\lambda}.$$

En notant $K := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R\}$, nous avons montré que $T : L^2(\Omega) \to K$. De plus, l'ensemble K est convexe et le théorème de Rellich montre que K est compact dans $L^2(\Omega)$.
Il reste à montrer que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est continue. Pour cela, considérons une suite $(u_n) \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, et notons $v_n := T(u_n) \in H_0^1(\Omega)$. L'argument précédent montre que $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$. On peut donc extraire une sous-suite telle que :

$$\begin{gathered} v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ v_{\sigma(n)} \to v \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \\ u_{\sigma(n)} \to u \text{ p.p. sur } \Omega \end{gathered}$$

Comme f est une fonction de Carathéodory, on a $f(x, u_{\sigma(n)}(x)) \to f(x, u(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$, et l'hypothèse (H_2) montre que $|f(x, u_{\sigma(n)}(x))| \leq a(x)$ p.p. tout $x \in \Omega$ avec $a \in L^2(\Omega)$.
Le théorème de la convergence dominée montre alors que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$. En passant à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x))w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui montre que T est continue sur $L^2(\Omega)$.
Nous avons donc montré que $T : K \to K$ est continue et que K est un sous-ensemble convexe et compact de $L^2(\Omega)$. Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence d'un point fixe $u \in K$ de T dans K, c'est-à-dire $T(u) = u$, autrement dit :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

On peut aussi considérer un problème un peu plus général en autorisant f à dépendre de ∇u. On s'intéresse alors à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f(x,u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (II.2.4.2.2)$$

Pour cela, on ajoute l'hypothèse suivante :

(H_2') $f : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$, $b > 0$, et $0 < \beta < 1$ tels que $|f(x,s,\xi)| \leq a(x) + b(|s|^\beta + |\xi|^\beta)$ pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et presque tout $x \in \Omega$.

Théorème II.2.4.2.3 : Sous les hypothèses (H_1), (H_0'), et (H_3), il existe une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation (II.2.4.2.2), c'est-à-dire

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration : On définit l'application $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ par $v = T(u)$, où $v \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Notons que v est unique car $x \mapsto f(x,u(x),\nabla u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$. En effet, d'après le Lemme II.2.4.2.2, cette fonction est mesurable, et d'après l'hypothèse (H_2'), on a $|f(x,u(x),\nabla u(x))| \leq a(x) + b(|u(x)|^\beta + |\nabla u(x)|^\beta)$ presque partout dans Ω.
Comme la fonction $a + b(|u|^\beta + |\nabla u|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (car $\beta < 1$ et Ω est borné), on en déduit que $f(\cdot,u,\nabla u) \in L^2(\Omega)$.

En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle et en utilisant les hypothèses (H_0'), (H_3), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\lambda\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))v(x)dx$$

$$\leq \left(\|a\|_{L^2(\Omega)} + b\left(\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)}\right)\right)\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\|u\|^\beta_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^\beta_{L^2(\Omega)}\right)|\Omega|^{\frac{1-\beta}{2}} \leq C\|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)},$$

où $C > 0$ ne dépend que de N, Ω, et β. Par conséquent, en utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_*(1 + \|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)}),$$

où $C_* > 0$ est une constante ne dépendant que de λ, N, $\|a\|_{L^2(\Omega)}$, b, Ω, et β. Comme $\beta < 1$, on peut trouver un $R > 0$ tel que $C^*(1 + R^\beta) \leq R$, de sorte que si $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$, alors $\|T(u)\|_{H^1_0(\Omega)} = \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$. Si C désigne la boule fermée dans $H^1_0(\Omega)$ centrée en 0 et de rayon R (un ensemble convexe, fermé, et borné), on a donc montré que $T : C \to C$. Montrons maintenant que T est continue sur $H^1_0(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $H^1_0(\Omega)$ telle que : $u_n \to u$ dans $H^1_0(\Omega)$, et notons $v_n := T(u_n)$. L'argument précédent montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$, et donc on peut extraire une sous-suite et trouver une fonction $v \in H^1_0(\Omega)$ telle que $v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$.
D'autre part, la réciproque de la convergence dominée montre qu'on peut encore extraire des sous-suites et trouver des fonctions G et $H \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \to u \text{ p.p. sur } \Omega, \\ \nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u \text{ p.p. sur } \Omega, \\ |u_{\sigma(n)}| \leq G \text{ p.p. sur } \Omega, \\ |\nabla u_{\sigma(n)}| \leq H \text{ p.p. sur } \Omega. \end{cases}$$

La fonction f étant de Carathéodory, on en déduit que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ p.p. sur Ω. Par suite, l'hypothèse (H_0') montre que :

$$|f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)})| \leq a + b(|G|^\beta + |H|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

car $\beta < 1$. Le théorème de la convergence dominée implique que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^2(\Omega)$. En passant à la limite dans la formulation variationnelle :

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x), \nabla u_{\sigma(n)}(x))w(x)dx \quad \forall w \in H^1_0(\Omega),$$

on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))w(x)dx \quad \forall w\in H_0^1(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui montre que T est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons maintenant que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans C telle que $v_n := T(u_n) \in C$. Comme C est borné, on peut en déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$. Ainsi, en extrayant éventuellement des sous-suites, on peut trouver des fonctions $u, v\in H_0^1(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } \mathrm{H}_0^1(\Omega), \\ v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

De plus, le théorème de Rellich montre que :

$$v_{\sigma(n)} \to v \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \quad (II.2.4.2.3)$$

En notant $h_n := f(\cdot, u_n, \nabla u_n)$, d'après l'hypothèse (H_2'), on déduit que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc, en extrayant éventuellement une nouvelle sous-suite, on peut supposer que :

$$h_{\sigma(n)} \rightharpoonup h \text{ faiblement dans } L^2(\Omega) \quad (II.2.4.2.4)$$

Il est important de noter qu'à ce stade de la preuve, nous n'avons pas encore $h = f(\cdot, u, \nabla u)$.
En passant à la limite dans la formulation variationnelle :

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x)\cdot\nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x,u_{\sigma(n)}(x),\nabla u_{\sigma(n)}(x))w(x)dx \quad \forall w\in H_0^1(\Omega),$$

on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx = \int_\Omega h(x)w(x)dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $w = v_{\sigma(n)}$ comme fonction test, on en déduit que :

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x)\cdot\nabla v_{\sigma(n)}(x)dx = \int_\Omega h_{\sigma(n)}(x)v_{\sigma(n)}(x)dx \to \int_\Omega h(x)v(x)dx = \int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)dx,$$

où l'on a utilisé le fait que $v_{\sigma(n)} \to v$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et $h_{\sigma(n)} \rightharpoonup h$ faiblement dans $L^2(\Omega)$. En vertu de la propriété de coercivité (H_3), on a donc :

$$\lambda\int_\Omega |\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)}|^2 dx \leq \int_\Omega A(\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)})\cdot(\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)})dx \to 0,$$

ce qui montre que $\nabla v_{\sigma(n)} \to \nabla v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, ou encore $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Cela prouve que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer le Corollaire II.2.4.1.4 qui montre que l'application T possède un point fixe dans C. Il existe donc un $u \in C \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $T(u) = u$, c'est-à-dire :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

L'exemple suivant montre que l'hypothèse $\beta < 1$ dans (H_2') est optimale.

Exemple II.2.4.2.3 : Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet sur le bord. On rappelle que λ_1 peut être calculée en considérant le problème de minimisation du quotient de Rayleigh .

$$\lambda_1 = \min\left\{\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx : \phi \in H_0^1(\Omega), \|\phi\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}.$$

Soit $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ une solution de ce problème. Remarquons que puisque $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$, alors $|\phi_1| \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla|\phi_1| = \nabla\phi_1\chi_{\phi_1\geq 0} - \nabla\phi_1\chi_{\phi_1<0}$ de telle sorte que $|\nabla|\phi_1|| = |\nabla\phi_1|$. En remplaçant ϕ_1 par $|\phi_1|$, on peut donc supposer toujours que $\phi_1 \geq 0$ p.p. sur Ω. La fonction propre ϕ_1 est une solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla\phi_1\cdot\nabla v\, dx = \lambda_1\int_\Omega \phi_1 v\, dx \quad (II.2.4.2.5)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Posons, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f(s) = 1 + \lambda_1 s$ et supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de :

$$-\Delta u = f(u) \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(u)v \, dx = \int_\Omega v.dx + \lambda_1 \int_\Omega uv \, dx, \in H_0^1(\Omega) \quad (II.2.4.2.6)$$

En prenant $v = u$ dans l'équation (II.2.4.2.5) et $v = \phi_1$ dans l'équation (II.2.4.2.6), on en déduit que :

$$\int_\Omega \nabla\phi_1 \cdot \nabla u \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \phi_1 u \, dx, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi_1 \, dx = \int_\Omega \phi_1 \, dx + \lambda_1 \int_\Omega u\phi_1 \, dx,$$

ce qui implique que :

$$\int_\Omega \phi_1 \, dx = 0,$$

ou encore que $\phi_1 = 0$, ce qui est impossible.

En général, il n'y a aucune raison pour que l'unicité ait lieu. Terminons cette section par un exemple de critère assurant l'unicité des solutions.

Théorème II.2.4.2.3 : On suppose, en plus de (H_1), (H_2) et (H_3), que la fonction $s \mapsto f(x, s)$ est décroissante pour presque tout $x \in \Omega$. Alors, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation (II.2.4.2.1), c'est-à-dire :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x) \, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x) \, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration : Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Comme $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction test, on en déduit que :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_1 \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx = \int_\Omega f(x,u_1)(u_1-u_2)\, dx$$
$$\int_\Omega A(x)\nabla u_2 \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx = \int_\Omega f(x,u_2)(u_1-u_2)\, dx.$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, il vient

$$\int_\Omega A(x)(\nabla u_1 - \nabla u_2)\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx = \int_\Omega (f(x,u_1)-f(x,u_2))(u_1-u_2)\, dx \le 0,$$

d'après l'hypothèse de décroissance de f. En utilisant la propriété de coercivité (H_3) de A, on en déduit que :

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\, dx \le 0,$$

ce qui montre que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. sur Ω. Enfin, l'inégalité de Poincaré implique que $\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, et donc que $u_1 = u_2$ p.p. sur Ω.

III.2.4.3 Équations quasi-linéaires

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est dite quasi-linéaire si elle est non linéaire, mais linéaire par rapport aux dérivées d'ordre maximal. Dans cette étude, nous nous intéressons aux EDP elliptiques quasi-linéaires du second ordre sous forme de divergence, qui peuvent être généralement exprimées comme suit :

$$-\mathrm{div}\, a(x,u,\nabla u) = f(x,u,\nabla u) \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Remarquons que le terme principal, donné par $\sum_{i,j=1}^N \partial_{\xi_j} a_i(x,u,\nabla u)\partial^2_{x_{ij}} u$, est linéaire par rapport à D^2u.
Lorsque $a(x,u,\nabla u) = A(x,u)\nabla u$ est linéaire par rapport à ∇u, nous pouvons prouver l'existence de solutions en utilisant le théorème de Schauder, à condition que les coefficients $a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la matrice A soient des fonctions de Carathéodory satisfaisant la condition suivante : il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $\Lambda > 0$ telles que :

$$\lambda|\xi|^2 \le A(x,s)\xi\cdot\xi \le \Lambda|\xi|^2$$

pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$. Dans le cas général, nous utiliserons une méthode de Galerkin en considérant un problème approximé en dimension finie et en faisant une hypothèse de monotonie sur la dépendance de a par rapport à ∇u.
Nous nous intéressons aux EDP de la forme suivante :

$$-\mathrm{div}\, a(x,u,\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (II.2.4.3.1)$$

c'est-à-dire que nous supposons que le second membre f est indépendant de u et ∇u.
Nous faisons les hypothèses suivantes :
(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;
(H_2) $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un opérateur de Leray-Lions :

(a) Pour tout $1 \leq i \leq N$, $a_i : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory ;

(b) (Coercivité) Il existe $\lambda > 0$ et $1 < p < \infty$ tels que $a(x,s,\xi) \cdot \xi \geq \lambda|\xi|^p$ pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$;

(c) (Croissance) Il existe $\Lambda > 0$ tel que $|a(x,s,\xi)| \leq \Lambda(1 + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$ pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$;

(d) (Monotonie) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$, $(a(x,s,\xi_1) - a(x,s,\xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq 0$;
H_3 $f \in L^{p'}(0)(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Remarque II.2.4.3.1 :

1. L'hypothèse de monotonie est satisfaite, par exemple, lorsque $a(x,s,\xi) = DW(\xi)$, où $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe de classe C^1 et DW désigne la différentielle de W . En effet, si $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$ et $t \in]0,1[$, alors en utilisant la convexité de W, on a :

$$W(\xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1)) = W(t\xi_2 + (1-t)\xi_1) \leq tW(\xi_2) + (1-t)W(\xi_1).$$

Par conséquent, en utilisant la convexité de $W(\xi)$ et en passant à la limite lorsque $t \to 0$, on obtient :

$$DW(\xi_1) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \leq W(\xi_2) - W(\xi_1).$$

En inversant les rôles de ξ_1 et ξ_2, on obtient également :

$$DW(\xi_2) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \leq W(\xi_1) - W(\xi_2).$$

En sommant les deux inégalités, on a :

$$(DW(\xi_2) - DW(\xi_1)) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \geq 0.$$

2. Lorsque $W(\xi) = \frac{1}{|\xi|^p}$, alors $DW(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ et l'équation suivante :

$$-\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

est l'équation du p-Laplacien.

Nous commençons par établir un résultat sur les opérateurs coercifs en dimension finie.

Lemme II.2.4.3.2 Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et coercive, c'est-à-dire que : $\frac{T(u) \cdot u}{|u|} \to +\infty$ lorsque $|u| \to +\infty$. Alors T est surjective, c'est-à-dire que pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(u) = b$.

Démonstration : Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Brouwer. Soit B_R la boule fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$. Il s'agit clairement d'un compact convexe. La projection orthogonale $P_R : \mathbb{R}^n \to B_R$ est définie par :

$$P_R(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leq R, \\ \frac{R}{|u|}u & \text{si } |u| > R. \end{cases}$$

Elle est caractérisée par :

$(u - P_R(u)) \cdot (v - P_R(u)) \leq 0$ pour tout $v \in B_R$.

On définit la fonction $T_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par :

$$T_R(u) := P_R(u - T(u) + b) \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^n.$$

Clairement, T_R est continue en tant que composition de fonctions continues et $T_R : B_R \to B_R$. Le théorème de Brouwer montre donc que T_R admet un point fixe, noté

u_R, dans B_R. En utilisant la caractérisation de la projection orthogonale, on a :

$$(u_R - T(u_R) + b - P_R(u_R - T(u_R) + b)) \cdot (v - P_R(u_R - T(u_R) + b)), \text{pour tout } v \in B_R \leq 0$$

En utilisant le fait que :

$$P_R(u_R - T(u_R) - b) = T_R(u_R) = u_R$$

il vient que :

$$(b - T(u_R)) \cdot (v - u_R) \leq 0, \text{ pour tout } v \in B_R \quad (II.2.4.3.2)$$

En prenant

$$v = 0 \in B_R$$

on obtient :

$$T(u_R) \cdot u_R \leq b \cdot u_R \leq |b||u_R|$$

et la propriété de coercivité implique que

$$|u_R| \leq C$$

, où $C > 0$ est une constante indépendante de R. Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, on peut trouver un $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u_R \to u$ lorsque $R \to +\infty$. Comme T est continue, $T(u_R) \to T(u)$, et en passant à la limite dans (5.3.2), on obtient

$$(b - T(u)) \cdot (v - u) \leq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

ce qui montre que : $T(u) = b$.
En fixant une base, on en déduit le résultat suivant.
Corollaire II.2.4.3.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $T : E \to E'$ un opérateur continu et coercif, c'est-à-dire :

$$\frac{\langle T(u), u \rangle_{E',E}}{\|u\|_E} \to +\infty \text{ lorsque } \|u\|_E \to +\infty$$

Alors, pour tout $b \in E'$, il existe un $u \in E$ tel que : $T(u) = b$.

Théorème II.2.4.3.4 : Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), il existe une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (5.3.1), c'est-à-dire :

$$\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x) w(x)\, dx \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration : La démonstration est basée sur une méthode de Galerkin qui consiste à approcher le problème en un problème posé en dimension finie, puis en faisant tendre la dimension vers l'infini.

Étape 1 (définition d'un opérateur) : Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fixé. Alors, pour presque tout $x \in \Omega$, d'après l'hypothèse de croissance,

$$|a(x, u(x), \nabla u(x))| \leq \Lambda(1 + |u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1})$$

, ce qui montre que $a(\cdot, u, \nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$ Par conséquent, l'application linéaire

$$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \langle A(u), v\rangle = \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v\, dx$$

est continue, car d'après les inégalités de Hölder et de Poincaré,

$$|\langle A(u), v\rangle| \leq \Lambda \left(\Omega^{\frac{1-1}{p}} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \right) \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(1 + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \right) \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Par conséquent, $A(u)$ définit un élément du dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$ noté $W^{-1,p'}(\Omega)$ Montrons que $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est un opérateur continu. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après la réciproque de la convergence dominée, on peut extraire une sous-suite notée $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver des fonctions G et $H \in L^p(\Omega)$ telles que :

$$u_{\sigma(n)} \to u, \nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u, |u_{\sigma(n)}| \leq G \text{ et } |\nabla u_{\sigma(n)}| \leq H p.p. sur \Omega$$

Comme a est une fonction de Carathéodory, on a $a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to a(\cdot, u, \nabla u)$ p.p. sur Ω et d'après la propriété de croissance

$$|a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)})| \leq \Lambda(1 + |G|^{p-1} + |H|^{p-1}) \in L^{p'}(\Omega)$$

.

Par convergence dominée, on en déduit que $a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \rightarrow a(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, et comme la limite est Indépendamment de la sous-suite, on peut en réalité constater que toute la suite $a(\cdot, u_n, \nabla u_n) \rightarrow a(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1$, nous avons, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\langle A(u_n) - A(u), v\rangle = \int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla v \, dx$$
$$\leq \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

En prenant le supremum sur tous les v, on obtient

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

ce qui démontre bien que A est continu.
Montrons enfin que A est coercif. En effet, d'après la propriété de coercivité $(H_2) - b$, on a :

$$\langle A(u), u\rangle \| = \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \lambda \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Puisque $p > 1$, nous concluons que $\frac{\langle A(u), u\rangle \|}{|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \rightarrow +\infty$ lorsque $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow +\infty$, ce qui démontre la coercivité de A.

Étape 2 : (Problème approché en dimension finie) : Nous allons aborder un problème en dimension finie. En raison de la contrainte $1 < p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable, ce qui signifie qu'il contient un ensemble dénombrable dense $D = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Nous notons $E_n = \text{vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$, qui est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ainsi, nous avons

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \quad (II.2.4.3.3)$$

(voir équation (II.2.4.3.3).
Pour tout $u \in E_n$, nous définissons $T_n = A|_{E_n}$. L'opérateur $T_n : E_n \rightarrow E_n'$ est continu et coercif selon l'étape précédente. Étant donné que $f \in L^{p'}(\Omega)$, qui est inclus dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ et E_n', le Corollaire II.2.4.3.3 garantit l'existence d'un élément $u_n \in E_n$ tel que $T_n(u_n) = f$. Autrement dit, pour tout $w \in E_n$ (voir équation 5.3.4) :

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx \quad (II.2.4.3.4)$$

Étape 3 : (Estimations a priori) En utilisant la propriété de coercivité et l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\lambda\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,dx = \langle T_n(u_n),u_n\rangle_{E_n',E_n} = \langle f,u_n\rangle_{E_n',E_n}$$
$$\leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

En appliquant ensuite l'inégalité de Poincaré, nous obtenons :

$$\|\nabla u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\lambda}\|f\|_{L_p'(\Omega)}$$

Ce qui démontre que la suite (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus, en utilisant la propriété de croissance, on a l'inégalité suivante :

$$\|a(x,u_n,\nabla u_n)\|_{L_0^p(\Omega)} \leq \Lambda\left(|\Omega|^{1-1/p} + \|u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right),$$

ce qui montre également que la suite $(a(\cdot,u_n,\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$. Comme $1<p<\infty$, on a aussi $1<p'<\infty$. Par conséquent, $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont des espaces réflexifs. Nous pouvons extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :$u_{\sigma(n)}$ converge faiblement à u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $a(\cdot,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})$ converge faiblement à ξ dans $L^{p'}(\Omega)$.

Étape 4 (Passage à la limite) : Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après l'équation (II.2.4.3.3), il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n \in E_n$ pour tout n et v_n converge fortement à v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En prenant $w = v_{\sigma(n)}$ comme fonction test dans l'équation (II.2.4.3.3), on obtient :

$$\int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla v_{\sigma(n)}\,dx = \int_\Omega f v_{\sigma(n)}\,dx.$$

En passant à la limite lorsque $n\to+\infty$, on a :

$$\int_\Omega \xi\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \forall \in v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{(II.2.4.3.5)}$$

En particulier, puisque $u_{\sigma(n)}$ converge faiblement à u dans $L^p(\Omega)$, on en déduit que :

$$\int_\Omega a(x, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \cdot \nabla u_{\sigma(n)}\, dx \to \int_\Omega f u\, dx = \int_\Omega \xi \cdot \nabla u\, dx.$$

Nous allons utiliser l'astuce de Minty basée sur la propriété de monotonie pour montrer que $\operatorname{div}(\xi) = \operatorname{div}(a(\cdot, u, \nabla u))$. Pour ce faire, on remarque que la propriété de monotonie implique :

$$0 \leq \int_\Omega [a(x, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) - a(x, u_{\sigma(n)}, \nabla v_{\sigma(n)})] \cdot [\nabla u_{\sigma(n)} - \nabla v_{\sigma(n)}]\, dx = I_n,$$

où $I_n = I_n^1 - I_n^2 - I_n^3 + I_n^4$. On a déjà montré que $I_n^1 \to \int_\Omega \xi \cdot \nabla u\, dx$ et $I_n^2 \to \int_\Omega \xi \cdot \nabla v\, dx$. De plus, $\nabla v_{\sigma(n)} \to \nabla v$ fortement dans $L^p(\Omega)$ et par le théorème de Rellich, $u_{\sigma(n)} \to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Comme a est une fonction de Carathéodory à croissance $p-1$, on en déduit que $a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla v_{\sigma(n)}) \to a(\cdot, u, \nabla v)$ fortement dans $L^{p'}(\Omega)$. Ainsi, on a :

$$I_n^4 \to \int_\Omega a(x, u, \nabla v) \cdot \nabla v\, dx$$

et

$$I_n^3 \to \int_\Omega a(x, u, \nabla v) \cdot \nabla u\, dx.$$

car $\nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u$ converge faiblement dans $L_{p(\Omega)}$. En regroupant les quatre convergences précédentes, on obtient :

$$\int_\Omega [\xi - a(x, u, \nabla v)] \cdot (\nabla u - \nabla v)\, dx \geq 0, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En choisissant $v = u + \epsilon w$ avec $\epsilon > 0$ et $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on obtient :

$$\int_\Omega [\xi - a(x, u, \nabla u + \epsilon \nabla w)] \cdot \nabla w \leq 0.$$

Comme : $u + \epsilon w$ converge fortement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que $a(\cdot, u, \nabla \mathrm{u} + \epsilon \nabla w)$ converge vers $a(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Par conséquent, on a :

$$\int_\Omega [\xi - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla w \leq 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant w par $-w$:

$$\int_{\Omega}[\xi - a(x,u,\nabla u)]\cdot\nabla w = 0 \quad \text{pour tout } w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En reportant dans (II.2.4.3.5), on a établi que :

$$\int_{\Omega} a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \int_{\Omega} f v\,dx \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ce qui conclut la preuve du théorème.
La question de l'unicité est plus délicate à traiter. Dans le cas où la fonction a est indépendante de u, le résultat général suivant s'applique :
Proposition II.2.4.3.5 : Supposons que la fonction a : $\Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est indépendante de s et strictement monotone, c'est-à-dire que pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$ avec $\xi_1 \neq \xi_2$ et presque partout $x \in \Omega$, on a l'inégalité :

$$(a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2))\cdot(\xi_1 - \xi_2) > 0.$$

Alors, il existe une unique solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de l'équation (II.2.4.3.1), c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} a(x,\nabla u(x))\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)w(x)\,dx, \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration : Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions de l'équation. Comme $v = u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une fonction test, on a, pour $i = 1, 2$:

$$\int_{\Omega} a(x,\nabla u_i)\cdot\nabla v\,dx = \int_{\Omega} f v\,dx,$$

ce qui montre que :

$$\int_{\Omega}[a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2)]\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2)\,dx = 0.$$

En utilisant l'hypothèse de monotonie, on sait que

$$[a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \geq 0 \text{ presque partout sur } \Omega$$

. Par conséquent, on a en fait que

$$[a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0 \text{ presque partout sur } \Omega$$

On utilise maintenant l'hypothèse de stricte monotonie qui implique nécessairement que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ presque partout sur Ω. Comme : $u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré donne :

$$\|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

ce qui signifie que $u_1 = u_2$ presque partout sur Ω.
Dans le cas général où $a = a(x, s, \xi)$, on peut toujours démontrer l'unicité dans le cas $1 < p \leq 2$ sous des hypothèses plus fortes de monotonie de a par rapport à ξ. Cependant, lorsque $p > 2$, la solution n'est généralement pas unique [1].

1. L. Boccardo, T. Gallouet, F. Murat ¨ : Unicit´e de la solution de certaines ´equations elliptiques non lin´eaires, C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math. 315 (1992), no. 11, 1159–1164.

Chapitre IV

LES PROBLÈMES PARABOLIQUES

IV.0.1 Aperçu des méthodes

IV.1 Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$, solutions classiques

Soit $N \geq 1$ et $u_0 \in C\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$. On s'intéresse ici à chercher des solutions classiques au problème suivant

$$\begin{aligned} &\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ &u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\partial_t u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps t, et Δu désigne le laplacien de u :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u$$

où $\partial_i^2 u$ désigne la dérivée partielle seconde de u par rapport à la i-ème variable d'espace x_i. Par "solution classique", on entend une fonction $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}\right) \cap C\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\right)$ solution de 4.1 au sens classique de la dérivation et de la condition initiale.

On commence par un petit calcul formel (le terme "formel" signifiant souvent en mathématiques "non nécessairement justifié"). On suppose qu'on peut utiliser pour la condition initiale et pour la solution la transformée de Fourier (en espace). On retient comme formule pour la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^N$ la formule suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x) \mathrm{d}x.$$

Si u est solution de .1, on obtient ainsi (si on est autorisé à utiliser la transformée de Fourier)

$$\hat{\partial}_t u(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0, \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0, \text{ et } \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N$$

ce qui donne

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } t \geq 0$$

En choisissant $g(t) \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ t.q. $\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$, on a donc $\hat{u}(\cdot,t) = \widehat{g(t)}\hat{u}_0$ pour tout $t \geq 0$ et donc (en utilisant le fait que la transformée de Fourier transforme la convolution en produit),

$$\hat{u}(\cdot,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\widehat{g(t)\star u_0} \text{ pour } t \geq 0$$

ou encore

$$u(\cdot,t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} g(t)\star u_0 \text{ pour } t \geq 0$$

Il reste à calculer $g(t)$. Comme $\widehat{g(t)} \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour $t > 0$, le théorème d'inversion de Fourier nous donne $g(t) = \widehat{\widehat{g(t)}}(-\cdot)$, c'est-à-dire

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int e^{ix\cdot\xi}e^{-|\xi|^2 t}d\xi \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0$$

Le changement de variable $\xi = \eta/\sqrt{2t}$ donne alors

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}}\int e^{ix\cdot\frac{\eta}{\sqrt{2t}}}e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}d\eta \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.$$

Finalement, on obtient

$$g(t)(x) = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}}e^{-\left|\frac{x}{\sqrt{2t}}\right|^2\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0$$

Ce qui donne

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)dy \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0.(4.2)$$

Il est maintenant possible de donner des conditions sur u_0 pour lesquelles (4.2) donne une solution classique de(4.1). Voici deux exemples de conditions suffisantes pour lesquelles la fonction u donnée par (4.2) est une solution classique de (4.1) :

Exemple 1 :

$$u_0 \in \left(L^1\left(\mathbb{R}^N\right) + L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$$

(

Exemple 2 :

$$u_0 \in C\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right) \text{ et il existe } C \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ tels que } |u_0(x)| \leq C\left(1+|x|^p\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N$$

(4.3)

On a ainsi obtenu des résultats d'existence d'une solution classique pour (4.1). A-t-on alors unicité de la solution ? On n'a pas de résultat d'unicité si on ne met des hypothèses que sur u_0. Plus précisément, on peut construire une solution classique non nulle de (4.1) avec $u_0 = 0$. Il n'y a donc jamais unicité de la solution classique de (4.1). Par contre, si on rajoute une hypothèse convenable de croissance sur la solution, on a un résultat d'unicité.

Théorème 4.1 Sous l'hypothèse 4.3 , il existe une et une seule fonction u vérifiant :

1. u est solution classique de .1 .
2. $\forall T > 0, \exists C_T \in \mathbb{R}, P_T \in \mathbb{N}$ tel que $|u(x,t)| \leq C_T \left(1 + |x|^{P_T}\right), \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \in [0,T]$.

Comme nous l'avons déjà dit, sans la deuxième condition sur u donnée dans le théorème .1 il n'y a pas unicité de la solution puisque l'on peut trouver $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[\right), u \neq 0$ et t.q.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Un exemple est donné dans le livre de Smoller [31]. La démonstration de l'unicité dans le théorème 1] peut se faire en utilisant la transformée Fourier dans l'espace $\mathcal{S}'$ (où $\mathcal{S}'$ est le dual de l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, muni de sa topologie naturelle). Pour cela, on remarque que, sous l'hypothèse de croissance donnée dans le théorème .1 on a $u \in \mathcal{S}'$. Notons que ce raisonnement par analyse de Fourier est limité à $\mathbb{R}^N$ et essentiellement au cas du laplacien.

IV.2 Solutions presque classiques, équation de diffusion, Ω ouvert borné

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour u_0 donné, on s'intéresse maintenant au problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+^\star \\ u(x,t) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

Pour cela on définit un opérateur $\mathcal{A}$ d'une partie de $L^2(\Omega)$, notée $D(\mathcal{A})$, dans $L^2(\Omega)$ en posant

$$D(\mathcal{A}) = \left\{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}$$

et, pour $u \in D(\mathcal{A}), \mathcal{A}u = -\Delta u$. Dans la définition de $D(\mathcal{A})$, Δu est une dérivée faible de

u. Le fait que $u \in D(\mathcal{A})$ signifie donc simplement que $u \in H_0^1(\Omega)$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ (ou, de manière équivalente, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$).

On suppose maintenant que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et va chercher une solution de 4.4 au sens suivant :

$$\begin{cases} u \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0,+\infty[, L^2(\Omega)) \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0 \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.} \end{cases} \tag{4.5}$$

où $u(t)$ désigne la fonction $x \mapsto u(x,t)$. On rappelle et plus particulièrement le théorème 2.13 qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire une famille orthonormale dense dans $L^2(\Omega)$), notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, formée de fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction e_n est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ dans } \Omega \\ e_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $e_n \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$.

Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. En notant $(u \mid v)_2$ le produit scalaire de u et v dans $L^2(\Omega)$, on a

$$u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_0 \mid e_n)_2 \, e_n$$

(cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$).

On a aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_0 \mid e_n)_2^2 = \|u_0\|_2^2 < +\infty$.

On pose, pour $t \geq 0$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} (u_0 \mid e_n)_2 \, e_n$$

qui est une série convergente dans $L^2(\Omega)$. On a donc ainsi $u(t) \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour tout $t \geq 0$ et on a même (comme la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée inférieurement par λ_1 avec $\lambda_1 > 0$) $u \in C([0,+\infty[, L^2(\Omega))$ et $u(0) = u_0$ p.p.. D'autre part, comme $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$, il est facile de montrer que la fonction u est dérivable de $]0,+\infty[$ dans $L^2(\Omega)$ et que la dérivée de u est obtenue est dérivant la série terme à terme (ceci est une conséquence du fait que la série dérivée terme à terme est, sur $]0,+\infty[$, localement uniformément convergente dans $L^2(\Omega)$). On a donc, pour tout $t > 0$

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n t}\, (u_0 \mid e_n)_2\, e_n$$

(La série écrite dans le terme de droite est convergente dans $L^2(\Omega)$).

On rappelle que $pu(t) \in D(\mathcal{A})$ pour tout $t > 0$ car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}\, (u_0 \mid e_n)_2\, e_n$ est convergente dans $L^2(\Omega)$, pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{A}u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}\, (u_0 \mid e_n)_2\, e_n$$

On a donc $u \in C^1(]0, +\infty\,[, L^2(\Omega))$ et $u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0$ p.p. pour tout $t \in]\,0, +\infty[$. On a ainsi trouvé une solution au problème(4.5) .

On veut montrer maintenant que cette solution est unique. Pour cela, nous allons montrer que si u est solution du problème avec donnée initiale nulle, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u \in C^1(]0, +\infty\,[, L^2(\Omega)) \cap C\,([0, +\infty\,[, L^2(\Omega)) \\ u(t) \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0 \text{ p.p., pour tout } t > 0 \\ u(0) = 0 \text{ p.p.} \end{cases}$$

alors u reste nulle pour tout temps, c'est-à-dire $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$.

Soit $t > 0$. Comme $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ p.p., en prenant le produit scalaire avec $u(t) \in L^2(\Omega)$, on obtient $(u'(t) \mid u(t))_2 + (\mathcal{A}u(t) \mid u(t))_2 = 0$. Comme $(\mathcal{A}u(t) \mid u(t))_2 = \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \,\mathrm{d}x$, on a donc

$$(u'(t) \mid u(t))_2 = -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \,\mathrm{d}x \leq 0$$

Soit ψ l'application définie par $t \mapsto \psi(t) = \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. L'application ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\psi'(t) = 2\,(u'(t) \mid u(t))_2$ pour tout $t > 0$. On a donc $\psi'(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$. L'application ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$et, comme $\psi(0) = 0$, on en déduit que $\psi(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc $\psi(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. On a bien finalement $u(t) = 0$ p.p. pour tout $t \geq 0$

Nous avons ainsi montré l'existence et l'unicité de la solution de 4.5. Cette solution est dite "presque classique" car la dérivation en temps est prise au sens classique (puisque u est de classe C^1 à valeurs dans $L^2(\Omega)$), la condition intiale est prise au sens classique dans $L^2(\Omega)$. Par contre le laplacien de $u(t)$ est pris au sens des dérivées faibles. Il faut un travail supplémentaire (sur la régularité des fonctions e_n) pour montrer que l'équation $\partial_t u - \Delta u$ est vérifiée au sens classique sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^\star$. Ceci est fait pour $N = 1$ dans l'exercice (4.1)

Remarque 4.2 (Généralisation) On peut aussi montrer l'existence et l'unicité (pour $u_0 \in L^2(\Omega)$) de la solution de (4,5) en remplaçant, dans la définition de $\mathcal{A}, \Delta u$ par

$\sum_{i,j=1}^{N} D_j\left(a_{ij} D_i u\right)$, avec $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, sous une hypothèse de coercivité, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ p.p. dans Ω et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On peut aussi remplacer $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = 0$ par $u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t)$ si $f \in C\left([0, \infty[, L^2(\Omega)\right)$.

IV.3 Solutions presque classiques par semi-groupes

Soit E un espace de Banach réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire. L'ensemble $D(\mathcal{A})$ est donc le s.e.v. de E sur lequel $\mathcal{A}$ est défini.

Définition (4,3) (Opérateur m-accrétif) On dit que $\mathcal{A}$ est m-accrétif si $\mathcal{A}$ vérifie :

(i) $D(\mathcal{A})$ est dense dans E,

(ii) $\forall \lambda > 0, (\mathrm{Id} + \lambda\mathcal{A})$ est inversible, d'inverse continue et $\|(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq 1$

On rappelle que $\mathcal{L}(E, E)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans E, et que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|T(u)\|_E}{\|u\|_E}, \text{ pour tout } T \in \mathcal{L}(E, E).$$

Remarque (4,4) (Opérateur maximal monotone) Soit E est un espace de Hilbert réel et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire. L'opérateur $\mathcal{A}$ est m-accrétif si et seulement si il vérifie :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}u \mid u)_E \geq 0 \quad \forall u \in D(\mathcal{A}) \\ (\mathrm{Id} + \mathcal{A}) \text{ surjectif.} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{A}$ est maximal monotone.

Exemple : Le laplacien Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, E = L^2(\Omega)$ et $\mathcal{A}$ défini par $D(\mathcal{A}) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ et $\mathcal{A}u = -\Delta u$ si $u \in D(\mathcal{A})$. L'opérateur $\mathcal{A}$ est alors un opérateur m-accrétif (ou maximal monotone puisqu'on est dans le cas d'un Hilbert).

Remarque (4,5) (Graphe d'un opérateur m-accrétif) Le graphe d'un opérateur m-accrétif est fermé. En ce sens, il est maximal, d' où le " m "' dans m-accrétif.

On admettra le théorème suivant dû à Hille][1] et Yosida |[2] (voir par exemple [8] pour la démonstration dans le cas des espaces de Hilbert) :

Théorème (4.6) (Hille-Yosida) Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif et $u_0 \in D(\mathcal{A})$. Alors il existe un unique $u : \mathbb{R}_+ \to E$ tel que

$$u \in C^1([0, +\infty[, E), \qquad (4,6a)$$

$$u(t) \in D(\mathcal{A}), \forall t \geq 0, \qquad (4,6b)$$

(4.3

$$u'(t) + \mathcal{A}(u(t)) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star, \qquad (4,6c)$$

$$u(0) = u_0. \qquad (4,6d)$$

La démonstration de ce théorème peut s'effectuer par une discrétisation en temps : on considére le problème elliptique $\frac{u_{n+1}-u_n}{\delta t} + \mathcal{A}u_{n+1} = 0$, qui s'écrit encore $u_{n+1} = (\mathrm{Id} + \delta t\mathcal{A})^{-1}u_n$, où $\delta t > 0$ est le pas de la discrétisation. On effectue ensuite un passage à la limite $\delta t \to 0$.

Définition (4,7) (Semi-groupe) Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire maccrétif. Pour $u_0 \in D(\mathcal{A})$ et $t \geq 0$, on pose $S(t)u_0 = u(t)$, où u est l'unique fonction vérifiant(4.3.4). Alors l'opérateur $S(t)$ est un opérateur linéaire continu de $D(\mathcal{A}) \subset E$ dans E qui vérifie

$$\begin{cases} S(t+s) = S(t) \circ S(s) \text{ pour } t, s \geq 0 \\ S(0) = \mathrm{Id} \\ \|S(t)u_0\|_E \leq \|u_0\|_E \end{cases}$$

On dit que $\{S(t), t \geq 0\}$ est un semi-g le contraction.[1]

Soit $t \geq 0$, comme $\overline{D(\mathcal{A})} = E$, l'opé $S(t)$ se prolonge de manière unique à tout E en un opérateur $\overline{S(t)}$ et $\overline{S(t)} \in \mathcal{L}(E, E)$

Définition (4,8) (Solution "mild") Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \to E$ un opérateur linéaire maccrétif. Soit $u_0 \in E$, la fonction $u(t) = \overline{S(t)}u_0$, définie de manière unique, s'appelle solution mild du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}u = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Dans le cas du laplacien, on peut se demander en quel sens la solution mild satisfait (4.4). On peut montrer que la solution mild est solution en un sens faible que nous verrons dans la section 4.3. De plus, cette solution mild est, dans ce cas particulier, l'unique solution faible. Cependant, cette situation n'est pas complètement générale. La solution mild, obtenue par densité, est toujours unique (dès que $u_0 \in E$, quelque soit l'espace de Banach E et l'opérateur m-accrétif $\mathcal{A}$). Pour les problèmes issus d'équations aux dérivées partielles, cette solution mild est en général une solution faible du problème que l'on veut résoudre ; toutefois le problème de l'unicité de la solution faible est beaucoup plus difficile. On peut avoir non unicité de la solution faible quand on prend une "solution faible"' dans un sens qui semble pourtant raisonnable. Il n'y a pas alors d'équivalence entre la notion de solution mild et de solution faible, car la solution mild est unique et, malheureusement, il n'y a pas unicité de la solution faible.

Pour essayer d'éclairer cette difficulté, nous nous intéressons, dans le paragraphe qui

1. .Carl Einar Hille (1894-1980),Mathématicien américain d'originie suédoise,spécialisted'analyse.
2.Kosaku Yosida (1909-1990),Mathématicien japonais,spécialiste de l'analyse fonctionnelle.

suit, à un problème un peu plus simple. Nous nous intéressons à un problème elliptique pour lequel nous montrons que la solution obtenue par densité, à la manière de la solution mild introduite ci-dessus, est unique alors qu'on n'a pas unicité des solutions faibles en prenant une définition "naturelle" de solution faible. Ceci montre en particulier que dans le cas parabolique, il n'y a pas non plus d'équivalence entre solution mild et solution faible (par exemple en considérant les solutions stationnaires).

Le Laplacien avec donnée L^1 On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, des fonctions a_{ij}, pour $i, j = 1, \ldots, N$, appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et satisfaisant l'hypothèse de coercivité habituelle :

$$\exists \alpha > 0; \quad \sum_{i,j} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

On note A la fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, définie par les fonctions $a_{ij}, i, j = 1, \ldots, N$. On sait (par le lemme de Lax-Milgram) que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int fv, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4,7}$$

On considère le même problème avec une donnée moins régulière $f \in L^1(\Omega)$.

Etape 1 - Estimation, cas régulier. Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, on montre qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}$ tel que si u est (l'unique) solution de 4.7) avec $f \in L^2(\Omega)$ alors $\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_q\|f\|_{L^1(\Omega)}$. On pose alors $T_q(f) = u$.

Etape 2 - Solution mild Pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, l'application T_q de $L^2(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ est continue de $L^2(\Omega)$ muni de la norme de $L^1(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ (muni de sa norme naturelle). On peut donc prolonger T_q de manière unique par densité sur tout $L^1(\Omega)$ (car $L^2(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$). On appelle $\bar{T}_q$ ce prolongement. On remarque alors que $\overline{T_{q_1}}f = \overline{T_{q_2}}f$ pour tout q_1, q_2 t.q. $1 \leq q_1 < q_2 < \frac{N}{N-1}$. On peut ainsi définir un opérateur (linéaire) T de L^1 dans $\bigcap_{1 \leq q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ par $T(f) = \overline{T_q}(f)$ pour tout $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

Définition 4.9 (Solution mild pour un problème elliptique à donnée$\boldsymbol{L^1}$) Sous les hypothèses précédentes sur Ω et A, soit $f \in L^1(\Omega)$. La fonction T f est la solution mild de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4,8}$$

Etape 3 - Quel sens donner à la solution mild ? Il est naturel de se demander quel rapport il y a entre la solution mild $u = Tf$ et une solution faible du problème de Dirichlet homogène. Il est assez facile de montrer que u est solution faible dans le sens (naturel) suivant :

$$\begin{cases} u \in \bigcap_{1 \le q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \ \mathrm{d}x \quad \forall v \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases} \tag{4,9}$$

Remarque : un résultat analogue d'existence de solution mild et donc d'existence de solution faible est encore vrai si f est une mesure sur Ω (dans (4.9), on remplace alors $fvdx$ par vdf). Pour montrer ce résultat, on utilise la densité de $L^2(\Omega)$ dans l'ensemble des mesures sur Ω au sens de la convergence faible- dans $C(\bar{\Omega})'$(car l'ensemble des mesures sur Ω peut être vu comme une partie du dual de $C(\bar{\Omega})$). Il faut aussi utiliser le fait que les éléments de $W_0^{1,r}(\Omega)$ sont des fonctions continues pour $r > N$

Etape 4 - Unicité mild, non unicité faible La solution mild est unique. La solution de 4.9 est-elle unique ? pas toujours. .. Montrons d'abord que si $N = 2$, la solution faible est unique. Ceci se montre par régularité sur le problème dual, qui entraîne l'unicité sur le problème primal. Soit u solution de

$$\begin{cases} u \in \bigcap_{1 \le q < 2} W_0^{1,q}(\Omega), \\ \int A\nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x = 0, \quad \forall v \in \bigcup_{r>2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases} \tag{4,10}$$

On veut montrer que $u = 0$. On ne peut pas prendre comme fonction test $v = u$ dans 4.9 ou 4.10 , en raison du manque de régularité de u. Pour contourner ce problème, on va raisonner en utilisant la régularité des solutions du problème dual. On remarque d'abord que u est solution de 4.10 et que 4.10 peut se re-écrire ainsi :

$$\begin{cases} u \in \bigcap_{1 \le q < 2} W_0^{1,q}, \\ \int A^t\nabla v \cdot \nabla u \ \mathrm{d}x = 0, \quad \forall v \in \bigcup_{r>2} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases} \tag{4,11}$$

Or on sait (par le théorème de Lax-Milgram) que si $g \in L^2(\Omega)$ il existe un unique v solution de

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega), \\ \int A^t\nabla v \cdot \nabla w \ \mathrm{d}x = \int gw \ \mathrm{d}x, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4,12}$$

(4.12 est le problème dual de 4.7 .)

On aimerait pouvoir prendre $w = u$ dans 4.12 , car on aurait alors, grâce à 4.11, $\int_\Omega gu \ \mathrm{d}x = 0$ pour tout $g \in L^2(\Omega)$, ce qui permettrait de conclure que $u = 0$. Mais pour l'instant, on ne peut pas car u et v ne sont pas dans les bons espaces. L'astuce consiste à considérer un second membre g plus régulier dans 4.12) et d'utiliser le résultat de régularité suivant [25].

Théorème 4.10 (Meyers, [25]) Il existe $p^\star > 2$, ne dépendant que de A et Ω, tel que si $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de 4.12 alors $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$.

Soit donc $g \in L^\infty(\Omega)$ et v solution de 4.12. On a alors $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$ grâce au théorème de Meyers. On note $\left(p^\star\right)'$ l'exposant conjugué de $p^\star$, de sorte que $\left(p^\star\right)' = \frac{p^\star}{p^\star - 1} < 2$. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,\left(p^\star\right)'}(\Omega)$, on déduit de 4.12 que

$$\int A^t \nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x = \int gw \, \mathrm{d}x, \quad \forall w \in W_0^{1,\left(p^\star\right)'}(\Omega) \tag{4,13}$$

Or, comme $\left(p^\star\right)' = \frac{p^\star}{p^\star - 1} < 2$, toute solution u solution de 4.11 appartient à $W_0^{1,\left(p^\star\right)'}(\Omega)$. On peut donc prendre $w = u$ dans 4.13. Mais comme $v \in W_0^{1,p^\star}(\Omega)$ avec $p^\star > 2$, on a également, par 4.11, $\int_\Omega A^t \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = 0$. On a donc $\int_\Omega gu \, \mathrm{d}x = 0$, pour tout $g \in L^\infty(\Omega)$. On en déduit que $u = 0$ en prenant successivement $g = 1_{\{u>0\}}$ puis $g = 1_{\{u<0\}}$

Pour $N = 3$, le théorème de régularité de Meyers est encore vrai, la démonstration d'unicité est donc encore juste si A est telle que $p^\star > N = 3$ (afin de pouvoir prendre v comme fonction test dans 4.9). Mais il existe des fonctions matricielle $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,N}$ (à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et coercive) pour lesquelles $p^\star < 3$. L'unicité n'est plus assurée et on peut effectivement construire des cas pour lesquels la solution de 4.9 n'est pas unique (voir[27]).

Etape 5 Que peut-on rajouter à solution faible pour avoir l'unicité ? Pour $f \in L^1(\Omega)$, on montre qu'il existe une et une solution à une nouvelle formulation, due à Ph. Bénilan [3]66. Cette nouvelle formulation (aussi appelée formulation entropique), est la suivante :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \text{ pour tout } 1 \leq q < \frac{N}{N-1}, \quad T_k(u) \in H_0^1(\Omega), \forall k > 0, \\ \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla T_k(u - \varphi) \mathrm{d}x = \int f T_k(u - \varphi) \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall k \geq 0. \end{cases} \tag{4,14}$$

où T_k est la fonction troncature, définie par : $T_k(s) = \max(\min(k, s), -k)$. L'article de Ph. Bénilan et al. démontre qu'il existe une unique solution au problème 4.14) (qui est donc la solution mild de (4.8). Ph. Bénilan conjecturait que le fait d'ajouter la condition $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ (pour tout $k > 0$) à la formulation $\sqrt{4.9}$ devait suffire à assurer l'unicité. De fait, dans les articles de Serrin et Prignet [29, 27], le contre exemple consiste à construire une solution non nulle de (4.9) avec $f = 0$, mais cette solution ne vérifie pas $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ pour $k > 0$. La conjecture de Bénilan reste donc une conjecture...

Une autre question ouverte consiste à trouver une formulation semblable à 4.14 donnant l'unicité lorsque f est une mesure sur Ω.

Remarque 4.11 (Limitation de la méthode semi-groupe) Une difficulté importante de cette méthode par semigroupe est sa généralisation au cas où A dépend de t.

IV.4 Méthode de Faedo-Galerkin (discrétisation en espace)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, T > 0, u_0$ une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega \times]\,0, T[$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times]\,0, T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(., 0) = u_0 \end{cases} \qquad \textbf{(4,15)}$$

[1]

Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et f dans un espace convenablement choisi, on va chercher $u \in L^2(]0, T\,[, H_0^1(\Omega))$ solution faible de ce problème. La méthode de Faedo [4] Galerkine [5] consiste à construire par approximation une suite de problèmes dont la solution existe et de montrer la convergence des solutions des problèmes approchées vers une fonction qui satisfait une formulation faible de 4.15 .

Comme $H_0^1(\Omega)$ est séparable, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces inclus dans $H_0^1(\Omega)$, de dimension finie, par exemple $\dim E_n = n$, et tels que $E_n \subset E_{n+1}$ et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = H_0^1(\Omega)$$

Soit $\{e_1 \dots e_n\}$ une base de E_n. On cherche $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$t.q.

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \alpha_i'(t) e_i e_k \,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \alpha_i(t) \nabla e_i \cdot \nabla e_k \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(t) e_k \,\mathrm{d}x, \text{ pour tout } k = \{1 \dots n\} \text{ et } t > 0$$

et les $\alpha_i(0)$ sont choisis pour que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(0) e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, un système de n équations différentielles avec condition initiale pour lequel on montre l'existence d'une solution. On cherche alors des estimations sur la solution u_n qui permettent de passer à la limite quand $n \to +\infty$. Cette technique, qu'on va développer plus loin, permet de montrer que pour $f \in L^2(]0, T\,[, H^{-1})$ la limite u des u_n satisfait :

1. Philippe Bénilan (1941-2001), mathématicien français, spéialiste des EDP, professeur à l'université de Besançon.

$$\begin{cases} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)), u \in C([0,T],L^2(\Omega)), u(0)=u_0 \text{ p.p. }, \\ \int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \,\mathrm{d}t + \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v \,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f,v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{d}t, \forall v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)). \end{cases} \quad \textbf{(4,16)}$$

IV.5 Discrétisation en espace et en temps

On discrétise le problème(4.15) par un schéma numérique, par exemple par éléments finis $P1$ en espace et par un schéma d'Euler [6] implicite en temps. On obtient une solution approchée notée u_n. On obtient alors des estimations sur u_n. On passe ensuite à la limite lorsque $n \to +\infty$.

Pour $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, on obtient ainsi pour le problème de la chaleur 4.15) que la limite u du schéma numérique satisfait :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)), \\ -\int_0^T\int_\Omega u\partial_t\varphi \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x \\ \qquad = \int_0^T\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty([0,T[\times\Omega)) \end{cases} \quad \textbf{(4,17)}$$

On démontrera plus loin le lemme suivant, qui donne l'équivalence des formulations 4.16) et 4.17).

[1] [2] [3]

4.3 Étude de l'équation de la chaleur

Notation : Si E est un espace de Banach et $T>0$, on notera souvent $L^2(]0,\ T[,\ E)$ (au lieu de $L^2_E(]\ 0,T$ l'espace $L^2_E(]0,\ T[,\ B(]O,\ T[,\ \lambda)$.

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème suivant :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathrm{B}^N, T \in \mathrm{B}_+^\star, f$ une fonction de $\Omega\times]\ 0,T[$dans IR et u_0 une fonction de Ω dans B. On cherche u tel que

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f & \text{dans } \Omega\times]O,\ T[, \\ u = 0 & \text{sur}\partial\Omega\times]O,\ T[, \\ u\ 0) = u_0. \end{cases}$$

On va donner pour ce problème linéaire un résultat d'existence par la méthode de Faedo-Galerkine et d'unicité de solution faible.

Théorème (4,12) (Faedo-Galerkine) *Soit Ω un ouvert borné de*

1. Alessandro Faedo (1913-2001), mathématicien et homme politique italien, connu pour ses travaux en analyse numérique ; il a été l'un des élèves de Leonida Tonelli et il lui a succédé à la chaire d'analyse mathématique de l'université de Pise après la mort de ce dernier.
2. Boris Grigorievitch Galerkine (1871-1945), mathématicien et ingénieur soviétique, connu pour sa méthode d'intégration approchée et spécialiste de mécanique des structures.
3. Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien, physicien, astronome, géographe et ingénieur suisse qui fonda la théorie des graphes et la topologie et fit des découvertes fondamentales dans de nombreuses branches des mathématiques.

$\mathrm{IR}^N, T > 0$ *et* $u_0 \in L^2$ *on identifie* $L^2()$ *avec son dual et on suppose que* $f \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}$ *Alors, il existe un et un seul* u *tel que*

$$\begin{cases} u \in L^2(]0,\ T[,\ H_0^1\ \partial_t u \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}()) \ , \\ \int_0^T \{\partial_t u(s),\ v(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^T \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla v(s) \mathrm{d}x \mathrm{d}s = \int_0^T \{f(s),\ v(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \mathrm{d}s \\ \forall v \in L^2(]0,\ T[,\ H_0^1(\Omega)) \ , \\ u(0) = u_0 p.p.. \end{cases} \quad \textbf{(4,18)}$$

(4.19) (*On rappelle que* $u(s)$ (*resp.* $v(s)$) *désigne la fonction* $x \mapsto u(x,\ t)$ (*resp.* $v(x, t$

On a de plus les estimations suivantes sur u *et* $\partial_t u$:

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \ ,$$

$$\|\partial_t u\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \ ,$$

Démonstration

On rappelle que l'on a identifié $L^2()$ avec L^2 de sorte que $H_0^1() \subset L^2(\omega) = L^2(\Omega)' \subset H^{-1}$ Comme on cherche ut.q. $u \in L^2(]\ 0, T[, H_0^1$ et $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}$ on a nécessairement $u \in C([0,\ T], L^2$

. La fonction u est donc définie en tout $t \in [0,\ T]$, ce qui permet de donner un sens à la condition $u(\mathrm{O}) = u_0$p.p..

Etape 1, remarques liminaires. La famille $(e_n)_{n \in \mathrm{IN}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega) \ , \\ \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \lambda_n \int_\Omega e_n v \mathrm{d}x,\ \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(), avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in 1\mathrm{N}^\star$ et $\lambda_n \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Comme $(e_n)_{n \in \mathrm{IN}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ on a, pour tout $w \in L^2 w = \sum_{n \in \mathrm{IN}^\star} (w|e_n)_2 e_n$ au sens de la convergence $L^2()$ (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n (w|e_i)e_i \to w$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$).

On va montrer maintenant que la famille $(\lambda_n^{-1/2} e_n)_{n \in \mathrm{IN}^\star}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$ On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert ; la norme de u dans $H_0^1(\Omega)$ est définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$ et donc le produit scalaire de u et v dans $H_0^1(\Omega)$ est donné par $(u|v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$.

On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m \mathrm{d}x = \lambda_n \int_\Omega e_n e_m \mathrm{d}x = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $(e_n|e_m)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ si $n \neq m$ et

$$\|\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\nabla e_n \cdot \nabla e_n}{\lambda_n} \mathrm{d}x = 1.$$

Puis, on remarque que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_\in)_{n\in \mathrm{IN}^\star}$, noté $ev\{e_n,\ n \in \mathrm{IN}^\star\}$, est dense dans H_0^1 En effet soit $v \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $(v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $n \in 1\mathrm{N}^\star$. On a donc, pour tout $n \in 1\mathrm{N}^\star$,

$$0 = (v|e_n)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \lambda_n \int_\Omega e_n v \mathrm{d}x.$$

Comme $(e_n)_{n\in \mathrm{IN}^\star}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ (et $\lambda_\in \neq 0$ pour tout $n \in 1\mathrm{N}^\star$), on en déduit que $v = 0$ p.p.. Ceci montre que l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de $ev\{e_n,\ n \in \mathrm{IN}^\star\}$ est réduit à $\{0\}$ et donc que $ev\{e_n,\ n \in 1\mathrm{N}^\star\}$ est dense dans H_0^1 Finalement, on obtient ainsi que la famille $(\lambda_n^{-1/2} e_n)_{n\in \mathrm{IN}^\star}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$

Etape 2, solution approchée.

Soit $n \in \mathrm{IN}^\star$; on pose $E_n = ev\{e_p,\ p = 1,\ \dots n\}$, et on cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$ avec $\alpha_i \in C([\mathrm{O},\ T],\ \mathrm{B})$. En supposant que les α_i sont dérivables pour tout t (ce qui n'est pas vrai, en général), on a donc

$$u'_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) e_i,$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in]\ \mathrm{O}, T[$, on a (compte tenu de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$

$$\{u'_n(t),\ \varphi\}_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) \int_\Omega e_i \varphi \mathrm{d}x.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,\ T]$ on a

$-\triangle u_n(t) = -\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \triangle e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) e_i$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ et dans $H^{-1}(\Omega)$

c'est-à-dire, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\{-\triangle u_n(t),\ \varphi\}_{H(\Omega), H_0^1(\Omega)} - 1 = \int_\Omega \nabla u_n(t) \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) \int_\Omega e_i \varphi \mathrm{d}x.$$

Enfin, comme $f \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1})$, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega) \{f(\cdot),\ \varphi\}_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1_{1\mathrm{R}}(]\ 0, T$ La quantité $\{f(t),\ \varphi\}_{H(\Omega), H_0^1(\Omega)} - 1$ est donc définie pour presque tout t et on obtient finalement, pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\{u_n'(t) - \triangle u_n(t) - f(t),\ \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i'(t) + \lambda_i\alpha_i(t)) \int_\Omega e_i\varphi \mathrm{d}x - \{f(t),\ \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

Pour obtenir u_n, une idée naturelle est de choisir les fonctions α_i pour que

$$\{u_n'(t) - \triangle u_n(t) - f(t),\ \varphi\}_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_i(t) = \{f(t),\ e_i\}_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $i \in \{1,\ \dots,\ n\}$,

$$\alpha_i'(t) + \lambda_i\alpha_i(t) = f_i(t)\ .$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0|e_i)_2$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds. \qquad (4,19)$$

Les fonctions α_i ainsi définies appartiennent à $C([0,\ T],\ \mathrm{IR})$ et on a donc $u_n \in C([\mathrm{O},\ T],\ E_n) \subset C([\mathrm{O},\ T], H_0^1(\Omega)$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)e_i$.

Etape 3, précision sur la dérivée en temps. Soit $n \in 1\mathrm{N}^\star$ et u_n la solution approchée donnée par l'étape pré- cédente. Les fonctions α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut la dérivée (par transposition) de u_n. On va noter cette dérivée $\partial_D(u_n)$. Par définition de la dérivation par transposition, $\partial_t(u)$ est un élément de $\mathcal{D}_E^\star$ avec $E = H_0^1(\Omega)$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,\ T[)$ on a

$$\{\partial_t(u_n),\ \varphi\}_{D_E^\star,D} = -\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t \in E_n \subset H_0^1(\Omega)$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, on a donc

$$\{\partial_t u_n,\ \varphi\}_{D_E^\star,D} = -\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \alpha_i(t)e_i\varphi'(t)\mathrm{d}t = -\sum_{i=1}^{n}(\int_0^T \alpha_i(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t)e_i.$$

On utilise maintenant (4,19)

$$\int_0^T \alpha_i(t)\varphi'\mathrm{d}t = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t}\varphi'(t)dt = \int_0^T \alpha_i^{(0)}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\varphi(t)dt.$$

$$S_i = \int_0^T (\int_0^t e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s)ds)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini :

$$S_i = \int_0^T (\int_0^T 1_{[0,t]}(s) e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s)ds)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T (\int_0^T 1_{[s,T]}(t) e^{-\lambda_i (t-s)}\varphi'(t)\mathrm{d}t) f_i(s)ds$$

$$= \int_0^T (\int_s^T e^{-\lambda_i (t-s)}\varphi'(t)\mathrm{d}t) f_i(s)ds = \int_0^T (\int_s^T \lambda_i e^{-\lambda_i (t-s)}\varphi(t)\mathrm{d}t) f_i(s)ds - \int_0^T \varphi(s) f_i(s)ds.$$

$$= \int_0^T (\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s)ds)\varphi(t)dt - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)dt.$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^T f_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$, et donc

$$\{\partial_t u_n,\ \varphi\}_{D^\star, D} = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) e_i \varphi(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t) e_i \varphi(t)dt.$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]\ 0, T[)$ on a finalement

$$\partial_t u_n = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0,\ T[,\ E_n)\ .$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

$$\partial_t u_n = \triangle u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,\ T[,\ E_n) \subset L^2(]0,\ T[,\ H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega))\ .$$

Soit maintenant $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\omega)$ Comme $\partial_t u_n \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}$ on a $\{\partial_t u_n, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1(]0,\ T[)$ et

$$\int_0^T \{\partial_t u_n(t),\ v(t)\}_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i,

$\int_0^T \{\partial_t u_n(t), \Upsilon(t)\}_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt \quad + \quad \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \quad \cdot \quad \nabla v \mathrm{d}x dt \quad =$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \{f(t),\ e_i\}_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)(\int_\Omega e_i v\mathrm{d}x)\mathrm{dt}}$$

$$=\int_0^T \{f(t),\ \sum_{i=1}^{n}(v|e_i)_2 e_i\}_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt.$$

On note P_n l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v. E_n. L'opérateur P_n peut donc être vu comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\omega)$ (car $E_n \subset H_0^1(\Omega)$ On note alors P_n^t l'opérateur transposé qui est donc un opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))'$ qui est lui même identifié à $L^2(\Omega)$ et est aussi un s.e.v. de $H^{-1}(\Omega)$

On obtient alors (pour tout $v \in L^2(]\ 0,T\ [,\ H_0^1(\Omega)$
$\int_0^T \{\partial_t u_n,\quad v\}_{H^{-1},H_0^1}dt\ +\ \int_0^T\int_\Omega \nabla u_n\ \cdot\ \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ =\ \int_0^T\{f,\quad P_n v\}_{H^{-1},H_0^1}dt\ =$ $\int_0^T \{P_n^t f,\ v\}_{H^{-1},H_0^1}dt.$ (4,20)

On a aussi $u_n \in C([0,\ T],\ H_0^1(\Omega)$ et $u_n(0) = P_n u_0$.

Etape 4, estimations sur la solution approchée Pour $n \in 1\mathrm{N}^\star$, on a $u_n \in C([\mathrm{O},\ T], H_0^1(\Omega) \subset L^2(]\ 0,T[, H_0^1(\Omega)$ et $\partial_t u_n = \triangle u_n + f^{(n)} \in L^2(]\ 0,T[, H^{-1}(\Omega)$

D'après la section 4.2 on a donc

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 = \int_0^T \{\partial_t u_n,\ u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}\mathrm{d}t.$$

En prenant $v = u_n$ dans (4,20)) on en déduit

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \{f,\ P_n u_n\rangle_{HH_0^1} - 1, dt,$$

et donc

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} = \int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \int_0^T \{f,\ P_n u_n\}_{H^{-1},H_0^1}dt.$$

On en déduit, en remarquant que $P_n u_n = u_n$,

$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))-}2$$

$$< \|u_0\|_2^2 + 1\int_0^T \{f,\ u_n\}_{H^{-1},H_0^1}dt$$

$$< \frac{1}{2}{}_{\|u_0\|_2^2+\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1())}}$$

$$\le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}.$$

On a donc
$$\|u_n\|^2_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} \leq \|u_0\|^2_2 + \|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$
Ce qui donne aussi
$$\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H} - 1(\Omega)) \ .$$

Comme $\partial_t u_n = \triangle u_n + P^t_n f$ (égalité ((4,20) et que $\|P_n w\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1_0(\Omega)}$ pour tout $w \in H^1_0(\omega)$ on obtient aussi une borne sur $\partial_t u_n$:
$$\|\partial_t u_n\|_{L^2(]0,T[,H} - 1(\Omega)) \leq \|u_n\|_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega))$$

et donc
$$\|\partial_t u_n\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \ .$$
La suite $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^\star}$ est donc bornée dans $L^2(]0,T[,\ H^1_0(\Omega)$ et la suite $(\partial_t u_n)_{n\in\mathrm{IN}^\star}$ est bornée dans $L^2(]\ 0,T[,H^{-1}(\Omega)$

Etape 5, passage à la limite. Grâce aux estimations obtenues àl'étape précédente, on peut supposer, après extrac- tion éventuelle d'une sous-suite, que, quand $n \to +\infty$,

$u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]\ 0,T\ [,\ H^1_0(\Omega)$

$\partial_t u_n \to w$ faiblement dans $L^2(]\ 0,T[,H^{-1}(\Omega)$

et les estimations sur u_n et $\partial_t u_n$ donnent aussi les estimations suivantes sur u et w :
$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \ ,$$
$$\|w\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}}(\Omega)) \ .$$

Nous allons montrer tout d'abord que $w = \partial_t u$ (puis nous montrerons que u est solution de $\partial_t u = \triangle u + f$ au sens demandé par ((4,18)

Par définition de $\partial_t u$, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$
$$\int_0^T \partial_t u(t)\varphi(t)\mathrm{c} \qquad \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt.$$
Pour démontrer que $\partial_t u = w$, il suffit donc de montrer que l'on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$
$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt. \quad ((4,21)$$

On rappelle que le terme de gauche de l'égalité ((4,21)) est dans $H^{-1}(\Omega)$ alors que le terme de droite est dans $H^1_0(\Omega)$. Cette égalité utilise donc le fait que $H^1_0(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, cette inclusion étant due au fait que nous avons identifié $L^2(\Omega)'$ avec L^2

Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$ Nous allons montrer (4;21) . Pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$ on considère l'application S de $L^2(]0,T[)$ [, $H_0^1(\Omega)$ dans IR définie par

$S(v) = \int_\Omega (-\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt)\psi(x)\mathrm{d}x$ pour $v \in L^2(]\ 0,T\ [,\ H_0^1$

L'application S est linéaire continue de $L^2(]\ 0,T[,H_0^1(\Omega)$ dans IR. Comme $u_n \to u$ faiblement $L^2(]\ 0,T[,H_0^1(\Omega)$ on a donc $S(u_n) \to S(u)$ quand $n \to +\infty$. Or, pour $v = u_n$ et pour $v = u$, on a

$$S(v) = -(\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt|\psi)_2 = -\{\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt,\ \psi\rangle_{HH_0^1} - 1,\cdot$$

On a donc, quand $n \to +\infty$,

$$-\{\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt,\ \psi\}_{HH_0^1} - 1, \to -\{\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt,\ \psi\}_{HH_0^1} - 1,\cdot$$

On utilise maintenant le fait que $-\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T \partial_t u_n(t)\varphi(t)dt$ (par définition de $\partial_t u_n$). On a donc

$$\{\int_0^T \partial_t u_n(t)\varphi(t)dt,\ \psi\}_{HH_0^1} - 1, \to -\{\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt,\ \psi\}_{HH_0^1} - 1,\cdot$$

On considère maintenant l'application $\overline{S}$ de $L^2(]\ 0,T[,H^{-1}$ dans IR définie par

$\overline{S}(v) = \{\int_0^T v(t)\varphi(t)dt,\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}$ pour $v \in L^2(]\ 0,T\ [,\ H^{-1}$

L'application $\overline{S}$ est linéaire continue de $L^2(]\ 0,T[,H^{-1}$ dans IR. Comme $\partial_t u_n \to w$ faiblement $L^2(]\ 0,T[,H^{-1}$ on a donc $\overline{S}(\partial_t u_n) \to \overline{S}(w)$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire

$$\{\int_0^T \partial_t u_n(t)\varphi(t)dt,\ \psi\}_{H^{-1},H_0^1} \to \{\int_0^T w(t)\varphi(t)dt,\ \psi\}_{H^{-1},H_0^1}.$$

On en déduit que pour tout $\psi \in H_0^{1](\Omega)}$ on a

$$-\{\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt,\ \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \{\int_0^T w(t)\varphi(t)dt,\ \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc bien montré que $-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]\ 0,T$ c'est-à-dire que $\partial_t u = w$.

Nous savons donc que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]\ 0,T[,H_0^1(\Omega)$ et que $\partial_t u_n \to \partial_t u$ faiblement dans $L^2(]\ 0,T[,H^{-1}(\Omega)$ Pour montrer que u est solution de $\partial_t u = \triangle u + f$ au sens demandé par **(4,18)**, il suffit maintenant de passer à la limite dans **(4,20)** . Soit

$v \in L^2(]\ 0, T[, H_0^1(\Omega)$ on a pour tout $n \in 1\mathrm{N}^\star$, selon **(4,20)**

$$\int_0^T \{\partial_t u_n,\ v\}_{HH_0^1} - 1, dt + \int_0^T (u_n|v)_{H_0^1}\mathrm{d}t = \int_0^T \{f,\ P_n v\}_{HH_0^1} - 1, dt.$$

Les deux termes de gauche de cette égalité passent àlimite quand $n \to +\infty$ grâce aux convergences de u_n et $\partial_t u_n$. Pour le terme de droite, on utilise l'étape liminaire. On remarque que $P_n v(t) \to v(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour presque tout t et $\|P_n v(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout t. Cela permet de passer à la limite dans le terme de droite, par le théorème de convergence dominée. On obtient ainsi

$$\int_0^T \{\partial_t u,\ v\}_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (u|v)_{H_0^1}\mathrm{d}t = \int_0^T \{f,\ v\}_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien le sens souhaité dans la formulation **(4,18)**

Etape 6, condition initiale. Comme $u \in L^2(]\ 0, T[, H_0^1(\Omega)$ et $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}(\Omega)$ on sait que $u \in C([0,\ T], L^2(\Omega)$ (voir la sectionE4.2. Pour terminer la démonstration du fait que u est solution de **(4,18)** il reste donc seulement à montrer que $u(\mathrm{O}) = u_0$ p.p. (c'est-à-dire $u(\mathrm{O}) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$

On sait que $u(t) \to u(\mathrm{O})$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$. On sait aussi que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Pour en déduire que $u(\mathrm{O}) = u_0$, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}^\star}$ est re- lativement compacte dans $C([0,\ T],\ H^{-1}(\Omega)$ En effet, si la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}^\star}$ est relativement compacte dans $C([\mathrm{O},\ T],\ H^{-1}(\Omega)$ il existe $w \in C([\mathrm{O},\ T],\ H^{-1}(\Omega)$ et une sous$-$suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}^\star}$, t.q. $u_n(t) \to w(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0,\ T]$ (et donc aussi dans $L^2(]\ 0, T[, H^{-1}(\Omega)$ En particulier, on a donc $w(\mathrm{O}) = u_0$. Mais on sait déjà que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]\ 0, T[, H_0^1(\Omega)$ et donc aussi faiblement dans $L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ Par unicité de la limite, on a donc $u = w$ p.p. sur$]\mathrm{O},\ T[$et donc $u(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0,\ T]$ car u et w sont continues sur $[0,\ T]$. On obtient ainsi, finalement, $u(\mathrm{O}) = w(0) = u_0$.

Il reste à montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}^\star}$ est relativement compacte dans $C([\mathrm{O},\ T], H^{-1}(\Omega)$ Par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que

1. Pour tout $t \in [0,\ T], (u_n(t))_{n\in\mathrm{IN}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$

2. $\|u_n(t) - u_n(s)\|_H - 1 \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in 1\mathrm{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0, T$

Par démontrer le deuxième item, on utilise le fait que $\partial_t u_\in \in L^1([0,\ T], H^{-1}(\Omega)$ La section(4.2) Nous donne que pour tout $t_1, t_2 \in [0,\ T], t_1 > t_2$, et tout $n \in$ IN, on a (dans $H^{-1}(\Omega)$

$$u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} \partial_t u_n(s) ds,$$

et donc

$$\|u_n(t_1)-u_n(t_2)\|_{H^{-1}} \leq \int_{t_2}^{t_1} \|\partial_t u_n(s)\|_{H^{-1}} ds \leq (\int_0^T \|\partial_t u_n(s)\|_{H^{-1}}^2 ds)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t_1-t_2}$$

$$\leq \|\partial_t u_n\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} {}^{\sqrt{t_1-t_2}}.$$

Comme la suite $(\partial_t u_n)_{n\in \mathrm{IN}^\star}$ est bornée dans $L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ on en déduit bien que $\|u_n(t)-u_n(s)\|_H - 1 \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in 1\mathrm{N}^\star$ (et pour tout $t \in [0, T$

Pour démontrer de premier item, on utilise encore la section (4.2)
Comme $u_n \in L^2(]\ 0,T[,H_0^1(\Omega)$
et $\partial_t u_n \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)$ on a, pour tout $t,s \in [0,\ T]$,

$$\|u_n(t)\|_2^2 = \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t \{\partial_t u_n(\xi),\ u_n(\xi)\}_{H^{-1},H_0^1} d\xi,$$

et donc
$\|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2\int_s^t |\{\partial_t u_n(\xi), u_n(\xi)\rangle_{HH_0^1} - 1, |d\xi \leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2\|\partial_t u_n\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}$. En intégrant cette inégalité par rapport à s sur $[0,\ T]$, on en déduit

$$T\|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n\|_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))}^2 + 2T\|\partial_t u_n\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n(t))_{n\in \mathrm{IN}^\star}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,\ T]$ (et même uniformément par rapport à t). On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n\in \mathrm{IN}^\star}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0,\ T]$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et conclure, comme cela est indiqué au début de cette étape, que $u(\mathrm{O}) = u_0$p.p.. Ceci termine la démonstration du fait que u est solution de **(4,18)** et donc la démonstration de la partie "existence" du théorème **(4,12)**

Dans la démonstration, nous avons obtenu les estimations suivantes

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\ ,$$

$$\|\partial_t u\|_{L^2(]0,T[,H} - 1(\Omega)) \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H} - 1(\Omega))\ .$$

Enfin, comme $u \in L^2(]\ 0,T[,H_0^1(\Omega)$ et $\partial_t u \in L^2(]\ 0,T[,H^{-1}(\Omega)$ donne, pour tout t,

$$\|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2 + 2\int_0^t \{\partial_t u(s),\ u(s)\}_{HH_0^1} - 1, ds,$$

on en déduit que

$\|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \|\partial_t u\|^{2_{2-1}}_{L(]0,T[,H(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}$, pour tout $t \in [0, T\ [$.

Etape 7, unicité. On montre maintenant la partie "unicité" du théorème **(4,12)** Soit u_1, u_2 deux solutions de **(4,18)** On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et en prenant, pour $t \in [0,\ T], v = u1_{]0,t[}$ comme fonction test, on obtient

$$\int_0^t \{\partial_t u(s),\ u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]\ 0, T[, H_0^1$ et $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}$ on a, d'après la section 4.2

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \{\partial_t u(s),\ u(s)\}_{H^{-1},H_0^1} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0,\ T]$,

$$(\|u(t)\|_2^2 - (\|u(0)\|_2^2) + 2\int_0^t \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla u(s) dx ds = 0.$$

Enfin, comme $u(\mathrm{O}) = 0$, on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω, pour tout $t \in [0,\ T]$. Ceci termine la démonstration de la partie "unicité" du théorème **(4,12)**

Nous allons maintenant donner quelques propriétés complémentaires sur la solution de **(4,18)**

Proposition (4,13) (Dépendance continue) *Soit Ω un ouvert borné de* IR^N *et* $T > 0$. *Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ on note $T(u_0,\ f)$ la solution du problème* **(4,18)** *L'opérateur T est linéaire continu de $L^2(\Omega) \times L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(]\ 0, T[, H_0^1(\Omega)$ et dans $C([\mathrm{O},\ T], L^2(\Omega)$*

Démonstration Il suffit de reprendre les estimations vues dans le théorème (4,12) pour u solution de **(4,18)** :

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)} \leq \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} + \|u_0\|_2,$$

$\|u(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \|\partial_t u\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1})} + \|u\|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1)}$ pour tout $t \in [0,\ T]$,

$$\|\partial_t u\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}\ .$$

On en déduit bien la continuité de T dans les espaces annoncés.

Proposition (4,14) (Positivité et principe du maximum) *Soit Ω un ouvert borné de* $\mathrm{B}^N, T > 0$ *et* $u_0 \in L^2(\Omega)$

On note u la solution de **(4,18)** *avec $f = 0$.*

1. On suppose $u_0 \geq 0$p.p.. On a alors $u(t) \geq 0$p.p. et pour tout $t \in [0,\ T]$.

2. On suppose que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *. Soit* $A, B \in \mathrm{IR}$ *tels que* $A \leq 0 \leq B$ *et* $A \leq u_0 \leq B p.p.$*.. On a alors* $A \leq u(t) \leq B p.p.$ *et pour tout* $t \in [0,\ T]$.

Démonstration Pour démontrer le premier item, on montre plutôt (ce qui est équivalent) que $u_0 \leq 0$p.p. implique $u(t) \leq 0$ p.p. pour tout $t \in [0,\ T]$. On suppose donc que $u_0 \leq 0$ p.p.. On utilise alors le lemme **(4,15)** avec $\varphi(s) = s^+$. Il donne que $u^+ \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)$ Pour $t \in [0,\ T]$, on peut donc prendre $v = u^+ 1_{]0,t[}$ dans l'équation de **(4,18)** et on obtient

$$\int_0^t \{\partial_t u(s),\ u^+(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla u^+(s) dx ds = 0.$$

En utilisant encore le lemme **(4,15)** on a donc

$$\frac{1}{2}\|u^+(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u^+(0)\|_2^2 + \int_0^t \|u^+(s)\|_{H_0^1}^2 ds = 0.$$

Comme $u^+(0) = u_0^+ = 0$ p.p., on en déduit bien que $\|u^+(t)\|_2 = 0$ et donc $u(t) \leq 0$p.p..

La démonstration du deuxième item est semblable en utilisant le lemme **(4,15)** avec $\varphi(s) = (s - B)^+$ et $\varphi(s) = (s - A$

Lemme (4,15) *Soit* Ω *un ouvert borné de* B^N *et* $T > 0$. *Soit* φ *une fonction lipchitzienne de* IR *dans* IR *t.q.*$\varphi(0) = 0$. *On définit* Φ *par*

$\Phi(\xi) = \int_0^\xi \varphi(\bar{\xi}) d\bar{\xi}$ *pour* $\xi \in \mathrm{B}$.

Soit $u \in L^2(]0,\ T[,\ H_0^1(\Omega)$ *t.q.* $\partial_t u \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ *On a alors* $\varphi(u) = L^2(]0,\ T[,\ H_0^1(\Omega)$ $\Phi(u) \in C([\mathrm{O},\ T], L^1$ *et, pour tout* $t_1, t_2 \in [0,\ T]$,

$$\int_\Omega \Phi(u(t_2))\mathrm{d}x - \int_\Omega \Phi(u(t_1))\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} \{\partial_t u(s),\ \varphi(u(s)\}_{HH_0^1} - 1, ds.$$

On a aussi pour presque tout $t \in]\ \mathrm{O}, T[, \varphi(u(t)) \in H_0^1(\Omega)$ *et* $\nabla\varphi(u(t)) = \varphi'(u(t))\nabla u p.p.$*, c'est-à-dire, en étant plus précis,* $\nabla\varphi(u)(x,\ t) = \varphi'(u(x,\ t))\nabla u(x,\ t)$ *pourpresque tout* $x \in \Omega$. *Dans cette égalité, on peut prendre pour* $\varphi'(u(x,\ t))$ *n'importe quelle valeur si* φ *n'est pas dérivable au point* $u(x,\ t)$ *. En particulier ceci montre que, pour tout* $a \in 1\mathrm{R}, \nabla u = 0$*p.p. sur l'ensemble* $\{u = a\}$.

Démonstration Ce lemme est la version "parabolique" des lemmes 2.22 et 2.23 vus précédemment. La démons- tration consiste à considérer d'abord (comme dans le lemmeE222 que φ est de classe C^1 et à régulariser u puis à, approcher φ par des fonctions de classe C^1 (au moins lorsque φ est dérivable sauf en un nombre fini de points, le cas général étant plus difficile). Cette preuve n'est pas détaillée ici. On donne maintenant l'équivalence entre la formulation faible (4,18) et une autre formulation faible, la formulation (4,22) Cette deuxième formulation est, en particulier, intéressante lorsque l'on cherche à prouver la convergence des solutions approchées obtenues par une discrétisation en espace et en temps.

Proposition (4,16) Equivalence entre deux formulations faibles) *Soit Ω un ouvert borné de* $\mathrm{B}^N, T>0, u_0 \in L^2(\Omega)$ *et* $f \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ (*on identifie, comme d'habitude* $L^2\Omega$) *avec* $L^2(\Omega)')$. *Alors u est solution de* (4.19) *si et seulement si u vérifie* :.

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(]0,\ T[,\ H_0^1(\Omega))\ , \\ -\int_0^T \int_\Omega u\partial_t\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,\ 0)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = \int_0^T < f(s),\ \varphi\ s) >_{H^{-1},H_0^1} ds \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}([0,\ T[\times\Omega,\ )\ . \end{array}\right. \quad (4\ ,22)$$

Démonstration On montre tout d'abord que u solution d (4,18) $\Rightarrow u$ est solution de (4,22) On suppose donc que u est solution de (4,18). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega\times[0,T$ Pour $n\in$ IN, on pose

$$\varphi_n(x,\ t) = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i,t_{i+1}[}(t)\varphi(x,\ t_i)$$

où $t_i = (i/n)T$. Comme φ est une fonction régulière, il est clair que $\varphi_n \in L^2(]\ 0,T\ [,$ $H_0^1(\Omega)$ et que $\varphi_n\to\varphi$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1$ quand $n\to+\infty$. Comme $\varphi_n\in L^2(]\ 0,T[,H_0^1(\Omega)$ et que u est solution de (4,18), on a

$$\int_0^T \{\partial_t u,\ \varphi_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\{f,\ \varphi_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}\mathrm{d}t.$$

On pose $T_n = \displaystyle\int_0^T \{\partial_t u,\varphi_n\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt$. Comme $\varphi_n\to\varphi$ dans $L^2(]\ 0,T[,H_0^1(\Omega)$ quand $n\to+\infty$, l'égalité précé- dente donne

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^T\{\partial_t u,\ \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}dt = -\int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\{f,\ \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\mathrm{d}t. \quad (4,24)$$

On va maintenant calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ en utilisant (4,23) On a

$$T_n = \int_0^T\{\partial_t u(t), \sum_{i=0}^{n-1} 1_{]t_i,t_{i+1}[}(t)\varphi(\cdot,\ t_i)\}_{HH_0^1} - 1, dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\partial_t u(t),\ \varphi\ t_i)\}_{HH_0^1} - 1, dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_t u(t)dt,\ \varphi\ t_i)\}_{HH_0^1} - 1,\cdot$$

Comme $u, \partial_t u \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\omega)$ (on rappelle que $H_0^1\ (\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ par l'identification de $L^2(\Omega)$ avec son dual), on a (d'après la sectionE42$u\in C([0,\ T], H^{-1}(\Omega)$ et

$$\int_{t_i} \partial_t u(t)\mathrm{d}t = u(t_{i+1}) - u(t_i) \in H^{-1}$$

On a donc

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \{u(t_{i+1}) - u(t_i),\ \varphi\ t_i)\}_{H^{-1},H_0^1} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_\Omega (u(x,\ t_{i+1}) - u(x,\ t_i))\varphi(x,\ t_i)\mathrm{d}x.$$

La dernière égalité venant de la manière avec laquelle un élément de $H_0^1(\Omega)$ est considéré comme un élément de H^{-1} Une intégration par parties discrète donne alors (en remarquant que $\varphi t_n) = 0)$

$$T_n = -\int_\Omega u(x,\ 0)\varphi(x,\ 0)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\varphi(x,\ t_{i-1}) - \varphi(x,\ t_i))u(x,\ t_i)\mathrm{d}x.$$

Puis, comme φ est une fonction régulière,

$$T_n = -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,\ 0)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t\varphi(x,\ t)dt)u(x,\ t_i)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,\ 0)\mathrm{d}x - \int_0^T \int_\Omega \partial_t\varphi(x,\ t)(\sum_{i=1}^{n} 1_{]t_{i-1},t_i[}u(x,\ t_i))dx\mathrm{d}t$$

$$= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,\ 0)\mathrm{d}x - \int_0^T \int_\Omega \partial_t\varphi(x,\ t)(u(x,\ t) + R_n(x,\ t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

avec $R_n(x,\ t) = \sum_{i=1}^{n} 1_{]t_{i-1},t_i[}u(x,\ t_i) - u(x,\ t)$. Pour tout $t \in [0,\ T]$, on a

$$\|R_n(\cdot,\ t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max\{\|u(s_1) - u(s_2)\|_{L^2(\Omega)},\ s_1,\ s_2 \in [0,\ T],\ |s_1 - s_2| \leq \frac{T}{n}\}.$$

Comme $u \in C([\mathrm{O},\ T],\ L^2$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \|R_n(,\ t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ uniformément par rapport à $t \in [0,\ T]$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega \partial_t\varphi(x,\ t)R_n(x,\ t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

En résumé, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,\ 0)\mathrm{d}x - \int_0^T \int_\Omega \partial_t\varphi(x,\ t)u(x,\ t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Avec (4.25) on a donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0, T$

$$-\int_0^T \int_\Omega \partial_t\varphi(x,\ t)u(x,\ t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,\ 0)\mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \{f,\ \varphi\}_{HH_0^1} - 1, \mathrm{d}t.$$

Ceci montre que u est bien solution de **(4,22)**

On montre maintenant que u solution de **(4,22)** $\Rightarrow u$ est solution de **(4,18)** On suppose donc que u est solution de **(4,22)**. On veut montrer que u est solution de **(4,18)** On va raisonner en deux étapes. On va d'abord montrer que $\partial_t u \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ et $\partial_t u = \triangle u + f$ (remarquer que $\triangle u,\ f \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ puis que $u(\mathrm{O}) = u_0$. **Etape 1** On montre ici que $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}(\Omega)$ et $\partial_t u = \triangle u + f$. On utilise la définition de $\partial_t u$. On a $\partial_t u \in \mathcal{D}^\star_E$, avec $E = H^1_0(\Omega)$ et pour tout $\phi \in C^\infty(]0,\ T[,\ \mathrm{B})$

$$\{\partial_t u,\ \phi\}_{D^\star_E, D} = -\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t \in H^1_0$$

Pour montrer que $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}(\Omega)$ et $\partial_t u = \triangle u + f$, il s'agit donc de montrer que, pour tout $\phi \in C^\infty_c(]0,\ T[,\ \mathrm{B})$,

$$-\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T (\triangle u(t) + f(t))\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Noter que le membre de gauche de cette égalité est dans $H^1_0(\Omega)$ et donc dans $H^{-1}(\omega)$ (grâce à l'identification entre $L^2(\Omega)$ et son dual) et que le membre de droite est dans $H^{-1}(\Omega)$ Pour montrer l'égalité de ces deux termes, il suffit de montrer que

$\{-\int_0^T u(t)\phi'(t)\mathrm{d}t, \psi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} = \{\int_0^T (\triangle u(t) + f(t))\phi(t)\mathrm{d}t, \psi\rangle_{H^{-1}, H^1_0}$ pour tout $\psi \in H^1_0$

c'est-à-dire que

$-\int_0^T \{u(t)\phi'(t), \psi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} dt = \int_0^T \{(\triangle u(t) + f(t))\phi(t), \psi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} dt$ pour tout $\psi \in H^1_0$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans H^1_0 il suffit de considérer $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En utilisant la manière donc $H^1_0(\Omega)$ est inclus dans H^{-1} on a

$$-\int_0^T \{u(t)\phi'(t),\ \psi\}_{H^{-1}, H^1_0} dt = -\int_0^T \int_\Omega u(x,\ t)\phi'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^T \{(\triangle u(t) + f(t))\phi(t),\ \psi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} dt = \int_0^T \phi(t)\{\triangle u(t) + f(t),\ \psi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} dt$$

$$= -\int_0^T \phi(t) \int_\Omega \nabla u(x,\ t)\cdot\nabla\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \phi(t)\{f,\ \psi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} dt.$$

En résumé, pour terminer l'étape 1, il suffit donc de montrer que

$$-\int_0^T \int_\Omega u(x,\ t)\phi'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \phi(t)(-\int_\Omega \nabla u(x,\ t)\cdot\nabla\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \{f, \psi\rangle_{HH^1_0} - 1,)\mathrm{d}t \qquad \textbf{(4,25)}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(]0,\ T[)$ et tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega$

Comme cela a été déjà dit, ceci donnera $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}$ et $\partial_t u = \triangle u + f$.

Pour montrer **(4, 25)** on utilise **(4,22)**. Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,\ T[)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On choisit dans **(4,22)**, $\varphi(x,\ t) = \phi(t)\psi(x)$(ce qui est possible car on a bien $\varphi \in \mathcal{D}(]0,\ T[\times\Omega)$. On obtient

$$-\int_0^T\int_\Omega u(x,\quad t)\phi'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad + \quad \int_0^T\int_\Omega(\nabla u(x,\quad t) \quad \cdot \quad \nabla\psi(x))\phi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad = \int_0^T\{f(t),\ \phi(t)\psi\}_{HH_0^1} - 1, \mathrm{d}t.$$

Ceci donne **(4,25)** et termine donc l'étape 1, c'est-à-dire $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}(\Omega)$ et $\partial_t u = \triangle u + f$ (ce qui l'équation demandée dans **(4,18)**

Etape 2 Comme $u \in L^2(]\ 0, T[, H_0^1(\Omega)$ et $\partial_t u \in L^2(]\ 0, T[, H^{-1}(\Omega)$ on a (d'après la section, $u \in C([\mathrm{O},\ T],_{42} L^2$ On montre dans cette deuxième étape que $u(\mathrm{O}) = u_0$. Pour $n \in 1\mathrm{N}^\star$, on choisit une fonction r_n de $C_c^\infty([0,\ T[,\ \mathrm{IR})$ décroissante et t.q. $|r_n'(t)| \leq 2n$ pour tout $t, r_n(0) = 1$ et $r_n(t) = 0$ si $t \geq 1/n$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $n \in 1\mathrm{N}^\star$ tel que $1/n < T$. On prend $\varphi(x,\ t) = r_n(t)\psi(x)$ dans (4.23). On obtient

$$-\int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega u(x,\ t)r_n'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x)\psi(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega \nabla u(x,\ t)\cdot\nabla\psi(x)r_n(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}}\{f(t),\ \psi\}_{H^{-1},H_0^1}r_n(t)dt,$$

c'est-à-dire

$$T_n = \int_\Omega u_0(x)\psi(x)\mathrm{d}x - R_n + S_n, \quad \textbf{(4,26)}$$

avec

$$T_n = -\int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega u(x,\ t)r_n'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$R_n = \int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega \nabla u(x,\ t)\cdot\nabla\psi(x)r_n(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \text{ et } S_n = \int_0^{\frac{1}{n}}\{f(t),\ \psi\}_{H^{-1},H_0^1}r_n(t)dt.$$

On montre tout d'abord que R_n et S_n tendent vers 0. En effet, on a

$$|R_n| \leq \int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega |\nabla u(x,\ t)||\nabla\psi(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leq (\int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega |\nabla u(x,\ t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{\frac{1}{n}}\int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}} \quad \textbf{(4,27)}$$

$$\leq \|u\|_{L^2(]0,T[,H_0^1)}\frac{1}{\sqrt{n}}\|\psi\|_{H_0^1}.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$ car

$$|S_n| \leq \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1})}{}^{\frac{1}{\sqrt{n}}\|\psi\|_{H_0^1}}.$$

On remarque maintenant que

$$\tau_n = -\int_0^{\frac{1}{n}} \int_{\Omega} u(x,0) r_n'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{\Omega} (u(x,t)-u(x,0)) r_n'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\Omega} u(x,0)\psi(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{\Omega} (u(x,t)-u(x,0)) r_n'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

(On a utilisé ici $r_n(0) = 1$ et $r_n(1/n) = 0$.) On majore de dernier terme de cette égalité :

$$|\int_0^{\frac{1}{n}} \int_{\Omega} (u(x,\ t) - u(x,\ 0)) r_n'(t)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t| \leq \frac{1}{n} 2n\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,\frac{1}{n}]} \|u(\cdot,\ t) - u\ 0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $u \in C([0,\ T], L^2(\Omega)$ ce denier terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et on a donc, finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_{\Omega} u(x,\ 0)\psi(x)\mathrm{d}x.$$

Avec (4,26) , comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, on en déduit
$\int_{\Omega} u(x,\ 0)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} u_0(x)\psi(x)\mathrm{d}x$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ceci permet de conclure que $u(\mathrm{O}) = u_0$ et termine la

démonstration de la proposition (4,16)Nous donnons maintenant un théorème de compacité qui sera très utile pour la résolution de problèmes non li- néaires comme ceux de la section 4.4 C'est l'équivalent parabolique des théorèmes de compacité vus pour les problèmes elliptiques. Soit Ω est un ouvert borné de $1\mathrm{R}^N$. Pour $f \in H^{-1}$ on note $T(f)$ la solution faible de l'équation $-\triangle u = f$ avec $u \in H_0^1$ On a déjà montré que l'opérateur T était compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

Proposition(4,17) **(Compacité)** *Soit Ω un ouvert borné de* B^N *et* $T > 0$. *On identifie* $L^2(\Omega)'$ *avec* $L^2(\Omega)$ *Pour* $f \in L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)$ *et* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *on note* $T(f,\ u_0)$ *la solution de* (4,18)

L'opérateur T est compact de $L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)\ \times L^2(\omega)$ dans $L^2(]\ 0, T[, L^2(\Omega)$

Démonstration la proposition (4,13)donne déjà la continuite' de T. Il reste donc àmontrer que Ttransforme les parties borne'es de $L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)\ ) \times L^2(\Omega)$ en parties relativement compactes de $L^2(]0,\ T[,\ L^2(\Omega)\ )$. Soit donc A une partie bornée de $L^2(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)\ \times$ L^2 On pose $B = \{T(f,\ u_0),\ (f,\ u_0) \in A\}$. Les estimations vues dans le théorème montrent que B est une partie bornée de $L^2(]\ 0, T[, H_0^1(\Omega)$ et que $\{\partial_t u,\ u \in B\}$ es t_{428} une partie bornée de $L(]0,\ T[,\ H^{-1}(\Omega)\ )$. Le lemme de compacite' donne' ci $-$ après(lemme∞434, dû àJ. L. Lions, donne alors la relative compacité de A dans $L^2(]\ 0, T[, L^2(\Omega)$

Lemme (4;18) (Compacité espace$-$temps, cadre L^2) *Soit Ω un ouvert borné de* B^N *et* $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ *une suite de* $L^2(]0,\ T[,\ L^2(\Omega)$ *On identifie* $L^2(\Omega)'$ *avec* $L^2(\Omega)$ *On suppose que 1. la suite* $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ *est bornée dans* $L^2(]\ 0, T[, H_0^1(\Omega)$ *2. la suite* $((\partial_t u_n))_{n\in\mathrm{IN}}$ *est bornée dans*

$L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)$ *Alors, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est relativement compacte dans* $L^2(]0,T[, L^2(\Omega)$

CONCLUSION.

Dans ce travail,nous avons traité quelques problémes fondamentaux de physique mathématique , qui se présentent sous la forme d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Ces problémes sont représentés dans :le probléme hyperbolique , le probléme eliptique et le probléme barabolique.

le problème hyperbolique Ce type de problème se caractérise par des équations aux dérivées partielles qui impliquent des termes de dérivées secondes par rapport au temps et des termes de dérivées spatiales.

le problème elliptique Ce type de problème se caractérise par des équations aux dérivées partielles qui impliquent uniquement des termes de dérivées spatiales.

le problème parabolique Ce type de problème implique également des termes de dérivées secondes par rapport au temps, mais les termes de dérivées spatiales sont moins prononcés

Résumé.

Dans ce mémoire en va traité quelques problémes fondamentaux de physique mathématique , qui se présentent sous la forme d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Ces problémes sont représentés dans :le probléme hyperbolique , le probléme eliptique et le probléme barabolique .

ABSTRACT.

In this note, e have dealt with some fundamental problems of mathematical physic ,which present themselves in the form of second-order partial differential equations. These problems are represented in : the hyperbolic problem, the elliptical problem and the barabolic problem.

1 **Bibliographies :**

1. Alessandro Faedo (1913-2001), mathématicien et homme politique italien, connu pour ses travaux en analyse numérique ; il a ´été l'un des élèves de Leonida Tonelli et il lui a succède `a la chaire d'analyse mathématique de l'universités de Pise après la mort de ce dernier.

2. Boris Grigorievitch Galerkine (1871-1945), mathématicien et ingénieur soviétique, connu pour sa méthode d'intégration approchée et spécialiste de mécanique des structures.

3. .Carl Einar Hille (1894-1980),Mathématicien américain d'origine suédoise ,spécialiste d'analyse.

4 C. Bardos, A. Leroux, and J. N´Nedelec. First order quasi linear equations with boundary conditions. Comme. Partial Différentia Equations, 9 :1017–1034, 1979.

5. Eduard Helly, 1884–1943, mathématicien autrichien, prisonnier en Sibérie pendant et après la première guerre mondiale, il n'obtient pas de poste universitaire en raison de sa judéité et il s'exile aux USA après l'Anschluss en 1938. * Il a donné de nombreuses contributions en Analyse fonctionnelle

6. F. Otto. Initial-boundary value problem for a scalar conservation law. C. R. Acad. Sci. Paris S´er. IMath., 8 :729–734, 1996

7 .Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), mathematician allemande qui a apporté de nombreuses contributions importa

8. Johannes Martinus Burgers (1895–1981) physicien néerlandais.

9.Kosaku Yosida (1909-1990),Mathématicien japonais spécialiste de l'analyse fonctionnelle.

10 L. Boccardo, T. Gallouet, F. Murat ¨ : Unicité de la solution de certaines ´équations elliptiques non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 315 (1992), no. 11, 1159–1164.

11. Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien, physicien, astronome, géographe et ingénieur suisse qui fonda la théorie des graphes et la topologie et fit des d´découvertes fondamentales dans de nombreuses branches des mathématiques

.12 Philippe B´enilan (1941-2001), mathématicien français, spécialiste des EDP, professeur `l'Université de Besa'n¸con.

14. Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887), inventeur, mathématicien, and physicien français spécialiste de mécanique des fluide, en particulier des chocs

15. . Vovelle. Convergence of finite volume monotone schemes for scalar conservation laws on bounded domains. Numer. Math., 90(3) :563–596, 2002

16. William John Macquorn Rankine (1820–1872), ingénieur ´Ecossais qui contribua aussi en physique et mathématiques