Ministère de l'enseignement suppérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des sciences de la matière

Département des Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplome de

Master Académique

Spécialité: Mathématique

Option : Analyse

Présenté par :

KEDDI Ismail

Théme

Résolution d’un problème parabolique de reaction- diffusion par la méthode de décomposition des opérateurs

Soutenu publiquement le : 30/05/2016

Devant le jury composé de :

Dr. ACILA Mustafa M.C .(B) Université KASDI MERBAH — Ouargla Président

Dr. GUERFI Amara M.C(A) Université KASDI MERBAH — Ouargla Examinateur

Mr. AMAR A Abdelkader M.A(A) Université KASDI MERBAH — Ouargla Examinateur

Dr .SAID Mohamed Said M.C(A) Université KASDI MERBAH — Ouargla Encadreur

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur du mémoire le docteur: SAID. M .Said maitre de conférence à l'université de Kasdi Merbah – Ouargla; qui m'a proposé ce sujet et qui m'a beaucoup aidé durant la préparation de ce mémoire .

Je remercie aussi les membres du jury :

- Dr. ACILA Mustafa M.C .(B) Université KASDI MERBAH de Ouargla ; d'avoir accepter de présider le jury.
- Dr. GUERFI Amara M.C(A) Université KASDI MERBAH de Ouargla ; d'avoir accepter d'examiner ce travail.
- Mr. AMAR A Abdelkader M.A(A) Université KASDI MERBAH de Ouargla d'avoir aussi accepter d'examiner ce travail.

Je voudrais également remercier tous les membres du départements de mathématique

Je tiens à remercier toute ma famille qui m'ont toujours soutenu et encouragé

Je remercie aussi tous mes amis et mes collègues et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Kasdi Merbah de Ouargla.

Table des matières

Introduction génèrale

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (à une seule variable) ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

la résolution numérique de systèmes d'équations nécessite des connaissances approfondies en mathématiques. Chacune de ces équations différentielles aux dérivées partielles peut êtrerèpertoriée par type. Ainsi, les équations de type elliptique décrivent les phénomènes de diffusion stationnaire, les équations de type parabolique décrivent les phénomènes de diffusion évolutive et les équations de type hyperbolique décrivent les phénomènes de transport à vitesse finie.

De plus, dans la plupart des cas, le phénomène physique évolue durant un intervalle de temps déterminé, aussi, afin de décrire convenablement le phénomène, nous devons imposer des conditions aux limites(au début et à la fin de l'intervalle de temps en question). Nous obtenons ainsi un problème aux limites pour des équations différentielles.

Nous allons donner dans ce mémoire un aperçu de quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites (et de calcul des variations) qui se jouent actuellement un grand rôle en Analyse Numérique.

L'idée commune à ces méthodes est la "décomposition" : il s'agit, utilisant certaines propriétés spécifiques du problème (décomposition des opérateurs pour les problèmes aux limites, décomposition des opérateurs et des contraintes en calcul des variations), de ramener la résolution d'un problème donné à la résolution d'un certain nombre de problèmes beaucoup plus simples.

Il n'est pas possible de faire un exposé complet sur le sujet, nous nous contenterons de montrer sur quelques exemples l'idée générale de ces méthodes.

Dans ce travail, nous développons le cas d' une équation parabolique de réaction diffusion telque le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda \exp(Bu) \quad in \quad \Sigma \qquad (\lambda, \mathrm{B}) \in IR \\ u(x,0) = u_0(x); \;\; x \in \Omega \subseteq IR \\ u = 0 \;\; on\, \Gamma = \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \;\; on\, \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)$$

$x\epsilon\Omega;\ t\epsilon]0;T[$avec

Nous allons d'abord démontrer l'unicité par la méthode classique. Et pour la démonstration de l'existence on utilise la technique qui utilise la méthode de décomposition des opérateurs. Premièrement, on étudiera l'existence d'une approximation de la solution. Deuxièment, on étudiera des estimations à priori sur les approximations ;Troisièment, on passera à la limite

Ce mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le chapitre 1, on présente quelques notations, définitions sur les "EDP" et sur les équations de réaction –diffusion et sur les espaces de sobolev.

Dans le chapitre 2, on donne un résumé sur l'approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition, qui nous permettent de mieux comprendre le contenu de ce travail.

Dans le chapitre 3, nous traitons le problème parabolique de réaction diffusion en dimension deux, et on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème.

On termine ce mémoire par une conclusion qui est un synthèse où on récapitule les résultats obtenus.

CHAPITRE 1

Préliminaires

1-Notations et définitions

1-1 Notations

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes:

- On désigne par p.p la notation qui veut dire presque partout.
- $f \in L_{loc}{}^{1}(\Omega)$; si pour tout compact K dans Ω ; $f \in L^1(K)$.
- D(Ω) désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.
- $B_{1;N} = \{x \in R^N ;\ \|x\| < 1\}$.
- $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions de puissance p –i éme sommable sur Ω pour la mesure.
- $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des classes des fonctions essentiellement bornées.
- $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \dots\dots; \alpha_n)$; $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

1-2 Définitions et rappels sur les équation dérivées partielles

Définition 1-2-1:

une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.en mathématiques:

Pour les EDP, par souci de simplification, il est d'usage d'écrire *u* la fonction inconnue et $D_x u$ (notation franchise) ou u_x (notation anglo-saxonne, plus répandue) sa dérivée partielle par rapport à x, soit avec les notations habituelles du calcul différentiel :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

et pour les dérivées partielles secondes :

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Une équation différentielle partielle très simple est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

où *u* est une fonction inconnue de *x* et *y*. Cette équation implique que les valeurs $u(x,y)$ sont indépendantes de *x*. Les solutions de cette équation sont :

$u(x,y) = f(y),$ où *f* est une fonction de *y*.

L'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0$$

a pour solution :

$$u(x) = c,$$

avec *c* une valeur constante (indépendante de *x*). Ces deux exemples illustrent qu'en général, la solution d'une équation différentielle ordinaire met en jeu une constante arbitraire, tandis que les équations aux dérivées partielles mettent en jeu des fonctions arbitraires.

Une solution des équations aux dérivées partielles n'est généralement pas unique.

1-2-2 Examples d'EDP

1-2-2-1 Équation de Laplace

L'équation de Laplace est une EDP de base très importante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

où u(x,y,z) désigne la fonction inconnue.

En notation d'analyse vectorielle, en utilisant l'opérateur laplacien Δ

Soit $\psi \equiv u\,(x, y, z, t)$, fonction d'onde.

$$\Delta\psi = 0$$

1-2-2-2 Équation de propagation (ou équation des cordes vibrantes)

Cette EDP, appelée équation de propagation des ondes, décrit les phénomènes de propagation des ondes sonores et des ondes électromagnétiques (dont la lumière).

La fonction d'onde inconnue est notée u(x,y,z,t), t représentant le temps :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Le nombre c représente la célérité ou vitesse de propagation de l'onde u.

En notation d'analyse vectorielle, en utilisant l'opérateur laplacien Δ :

Soit $\psi \equiv u\left(x, y, z, t\right)$,

fonction d'onde.

$$\Delta\psi \ = \ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

1-2-2-3Équation de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Cette EDP est également appelée équation de la chaleur. La fonction u représente la température.

La dérivée d'ordre 1 par rapport au temps traduit l'irréversibilité du phénomène.

Le nombre αest. appelé diffusivité thermique du milieu.

En notation d'analyse vectorielle, en utilisant l'opérateur laplacien Δ :

Soit $\psi \equiv u\left(x, y, z, t\right)$, fonction d'onde de température.

$$\Delta\psi \ = \ \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

1-2-2-4 Équation de Poisson

En utilisant l'opérateur laplacien Δ :

Soient $\psi\left(x, y, z\right)$, fonction d'onde et $\rho\left(x, y, z, t\right)$densité de charge.

$$\Delta\psi \ = -4\pi\rho$$

1-2-2-5 Équation d'advection

L'équation d'advection en dimension 1 d'espace et de temps décrit le transport de la quantité $u(x,t)$ par la vitesse d'advection a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Elle a pour solution $u(x,t) = \eta(x - at)$ pour $t \geqslant 0$ où $\eta(x)$ est la condition initiale à $t = 0$.

L'équation d'advection joue un rôle fondamental dans l'étude des méthodes de résolution numérique par la méthode des volumes finis des systèmes hyperboliques de lois de conservation comme les équations d'Euler en dynamique des fluides compressibles.

1-2-3 Classification des EDP :

Trois catégories importantes d'EDP sont les équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes du second-ordre dites elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

Soit l'EDP sous la forme suivante :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial u}{\partial t} + E\frac{\partial u}{\partial x} + Fu = 0$$

- si, $B^2 - 4AC < 0$ l'équation est dite "elliptique" comme l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

.

- Si, $B^2 - 4AC = 0$ l'équation est dite "parabolique" comme l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

- Si, $B^2 - 4AC > 0$ l'équation est dite "hyperbolique" comme l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Remarque: Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (à une seule variable) ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand.

1-2-4 Les équations de réaction –diffusion

Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions chimiques locales, dans lequel les différentes substances se transforment, et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace.

Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie. Cependant, ils peuvent aussi décrire des phénomènes dynamiques de nature différente : la biologie, la physique, la géologie ou l'écologie sont des exemples de domaines où de tels systèmes apparaissent. Mathématiquement, les systèmes à réaction-diffusion sont représentés par des équations différentielles partielles paraboliques semi-linéaires qui prennent la forme générale de :

$$\partial_t q = \underline{D}\,\Delta q + R(q)$$

où chaque composante du vecteur $q(x,t)$ représente la concentration d'une substance, $\underline{D}$est une matrice diagonale de coefficients de diffusion, Δdésigne le Laplacien et Rreprésente toutes les réactions locales. Les solutions d'une équation de réaction-diffusion peuvent présenter des comportements très divers parmi lesquels la formation d'ondes progressives et de phénomènes ondulatoires ou encore de motifs entropiques (bandes, hexagones et d'autres motifs plus complexes tels que les solitons dissipative

1-3 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans toute la suite Ω est un ouvert de $I\!R^N$ et p est un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$.

1-3-1 Dérivées faibles

Lemme 1-3-1-1:

Soient $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

on a :

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$alors \qquad f = g \quad p.p.$$

Définition1-3-1-1:

On dit que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction

$i \in [1, N]$. au sens faible s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_\Omega D_i f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Définition1-3-1-2 :

Si Ω est un ouvert de $I\!R^N$ alors on note :

1. Pour $K \subset \Omega$ compact, $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,|\, supp(\varphi) \subset K\}$,
2. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $P_\alpha(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$.

Définition1-3-1-3:

1. On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, (T est une distribution) si $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, est linéaire et vérifie : pour tout K compact inclus dans Ω, il existe $C_K > 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$, tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$| < T, \varphi > | = C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} P_\alpha(\varphi).$$

2. Si $i \in [1, N]$ alors on définit la dérivée de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dans la direction i comme étant la distribution $D_i T$ vérifiant :

$$< D_i T, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$$

Définition1-3-1-4:

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors on définit la distribution

d'ordre 0 :

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

On appelle alors dérivée faible, au sens des distributions, de f dans la direction i la distribution $D_i T_f$ que l'on note $D_i f$.

Remarque1-3-1-1:

Si f est dérivable au sens faible dans la direction i

alors :

$$D_i T_f = T_{D_i f}.$$

Proposition1-3-1-1:

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors : f est ***lipschitzienne*** ssi $\forall i \in [1, N]$, $D_i f \in L^\infty(\Omega)$.

Définition1-3-1-5:

Les espaces de Sobolev sont, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$,

$m \in \mathbb{N}$, et $p \in [1, +\infty]$:

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \,|\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N avec\, |\alpha| \le m, D^\alpha f \in L^2(\Omega)\},$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \,|\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N avec\, |\alpha| \le m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}.$$

On définit :

Sur $H^m(\Omega)$, le produit scalaire $< u, v >_{H^m} = \sum_{|\alpha| \le m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2}$,

Sur $W^{m,p}(\Omega)$, la norme $||u||_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p$.

Remarque1-3-1-2:

1. $D_i f$ étant une distribution, $D_i f \in L^2$ signifie qu'il existe $g \in L^2$ telle que $D_i f = T_g$:
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < D_i f, \varphi > = \int_\Omega g(x)\, \varphi(x)\, dx.$$
2. $W^{m,2} = H^m$ et les normes sur $W^{m,2}$ et sur H^m sont équivalentes.

Propositions1-3-1-2:

1. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
2. Pour $p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.
3. Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

CHAPITRE 2

Approximations d'équations aux dérivées Partielles par des méthodes de décomposition

2-1 problèmes d'évolution

Description heuristique de la méthode des pas fractionnaires

On considère dans un espace de Hilbert H une équation d'évolution

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < T \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Ou A est un opérateur linéaire dans H .

Dans les méthodes usuelles d'approximation ;on considère un découpage de l'intervalle $[0;T]$ en N intervalles égaux de longueur k ,et on définit une famille d'éléments de H , $u^0; u^1; \ldots u^N$.

En partant de $u^0 = u_0$ (2.2)

Et ensuite par

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^{n}}{k} + A(u^{n+1}) = f^{n+1} = f\big((n+1)k\big), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, \ldots\ldots, N-1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Si l'opérateur A admet une décomposition $A = \sum_{i=1}^{i=q} A_i$ (2.4)

On peut utiliser cette décomposition pour approcher (2.1) et cela conduit au schéma de pas fractionnaires suivant:

on définit les éléments

$$u^{n+\frac{i}{q}} \; ; n = 0; \ldots \ldots ; N-1; i = 1; \ldots \ldots ; q$$

Par récurrence ;en partant de $u^0 = u_0$ (2.5)

Et ensuite par
$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{i}{q}}-u^{n+\frac{i-1}{q}}}{k} + A_i\left(u^{n+\frac{i}{q}}\right) = f^{n+\frac{i}{q}}, \\ \qquad\qquad n = 0, \ldots\ldots, N-1; i = 1; \ldots \ldots ; q \end{cases} \tag{2.6}$$

Ou $f^{n+1} = \sum_{i=1}^{i=q} f^{n+\frac{i}{q}}$ (2.7)

Dans le cas du schéma (2.3) ;le calcul de u^{n+1} *nécessite l'inversion de l'opérateur* $(I + kA)$;dans le cas du schéma (2.6) le calcul de $u^{n+\frac{i}{q}}; \ldots \ldots ;\; u^{n+1}$ *nécessite l'inversion des opérateurs* $(I + A_1); \ldots \ldots ;\; (I + kA_q)$;et la méthode est intéressante lorsque l'inversion de ces opérateurs est plus simple que l'inversion de L'opérateur $(I + kA)$.

Un résultat de convergence

Nous allons énoncer un résultat précis sur la mnière dont les $u^{n+\frac{i}{q}}$ approximent la solution $u\ de\ (2.1)$.

Soient $V_i; i = 1; \ldots\ldots; q, des\ espaces\ de\ Hilbert;$

$$V = \bigcap_{i=1}^{i=q} V_i$$

Les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant

On identifie H à son dual ; V'_i désignant le dual de $V. V'\,celui\ de\ V. on\ a$

$$V \subset V_i \subset H \subset V'_i \subset V' \qquad (2.8)$$

Avec injéction continuies, chaque espace étant dense dans le suivant

Supposons que $A_i \epsilon L(V_i, V'_i)\ avec$

$$\begin{cases} (A_I v, v) \geq \alpha_i \|v\|^2{}_{V_i} \\ \quad \forall v \in V_i; \alpha_i > 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Alors pour u_0 donné dans H et f donnée dans $L^2([O;T];H)$;l'équation (2,1)

Possède une solution unique $u \in L^2([O.T];V) \cap \underline{C}([O;T];H);(cf.Lions\ [6])$.

On se donne une décomposition arbitraire de f

$$f = \sum_{i=1}^{q} f_i \,; \quad f_i \in L^2([O;T];H) \qquad (2.10)$$

Et on pose:

$$f^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f_i\,(s)ds \qquad (2.11)$$

Les équations (2.6) définissent alors de manière unique les $u^{n+\frac{i}{q}}$ comme élèments de

V_i ,on introduit les fonctions étagées u_{ik} ; $1 \leq i \leq q$

$u_{ik} = u^{n+\frac{i}{q}}$ pour $t \in [nk;(n+1)k]; i = 1; \ldots \ldots; q$

Et on le résultat de convergence ($cf.$ [13]).

Théorème 2.4

Lorsque $k \to 0$;

1. u_{ik} $converge\ vers\ u\ dans\ L^2([O;T];V_i)$ fort et $L^\infty([O;T];H)$ faible étoile
2. $u_{ik}(t) \to u(t) dans H\ fort\ ; \forall\ t\ \in [O;T]\ ou\ u\ est\ la\ solution\ unique$

   de (2.1)

2.2 **Cas particulier $q = 2$**

De façon génèrale et formelle ; cinsidérons le système (u désignant évantuellement un vecteur) :

$$\frac{du}{dt}+A_1(u)+A_2(u)=f \qquad (2.12)$$

Ou $A_1\ et\ A_2$ sont deux opérateurs linéaires ou non .

Soit : $k=\Delta t$

Le pas de temps et supposons nous connaissons:

$u^n\ \ =\ll approximation \gg de\ u\ à\ l'instant\ \ nk.$

Nous détèrminons alors :

$u^{n+1}\ \ =(\ll approximation\ \gg de\ u\ à\ l'instant\ \ (n+1)k) en\ deux$

$étapes$:

$première\ étape$: on considère l'equation :

$$\begin{cases}\frac{dw_1}{dt}+A_1(w_1)=f_1\\ w_1(nk)=u^n\end{cases} ; \qquad (2.13)$$

$w_1 vérifiant\ les\ conditions\ aux\ limites\ correspondantes\ à\ A_1;$

$et\ on\ calcule$

$$w_1\big((n+1)k\big)=u^{n+\frac{1}{2}} \qquad (2.14)$$

$Deuxième\ étape$:

$on\ considère\ la\ deuxième\ partie\ de\ l'équation\ (2.12)$

$$\begin{cases}\frac{dw_2}{dt}++A_2(w_2)=f_2\\ w_2(nk)=u^{n+\frac{1}{2}}\end{cases} ; \qquad (2.15)$$

$w_2 vérifiant\ les\ conditions\ aux\ limites\ correspondantes\ à\ A_2;$

Ou $f_1+f_2=f$

On prend alors :

$$u^{n+1} = w_2((n+1)k) \qquad (2.16)$$

$pour\ l'intégration\ de$ (2.13) (2.15)$il\ est\ naturel\ de\ se\ borner$

à $une\ \ approximation\ de\ l'$équation (2.13) (2.15) $puisque\ \ m$ème

$une\ int$é$gration\ exacte\ ne\ fournit\ qu\ "une\ approximation\ \ de\ u$

On arrive ainsi par exemple au schéma décomposé (ou de pas fractionnaire)

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} + A_1(u^{n+\frac{1}{2}}) = f_1{}^n \\ \dfrac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} + A_2(u^{n+1}) = f_2{}^n \end{cases} \qquad (2.17)$$

CHAPITRE 3

Etude de l'existence et l'unicité de la solution

3.1 Position du problème

Dans l′ouvert $\Omega \times]0;T[$ on cherche la fonction $u(x;t)$ telque $x\epsilon\Omega;\ t\epsilon]0;T[$

avec $\beta = -1\ et\ \lambda \in \mathrm{R}^{+}$ et vérifiant le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda \exp(-u) \quad in \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x);\ \ x \in \Omega \subseteq IR \\ u = 0 \ \ on\, \Gamma = \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \ on\, \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)$$

3.2 Etude de l'existence et l'unicité

3.2.1 L'unicité

$soinetu_1\ \ et\ u_2\ deux\, solutions\ ; on\ pose\ u = u_1 - u_2$

$et\ on\, remplace\, dans\ \ (p)\ on\, trouve$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 \ + \lambda\, \mathrm{e}^{-u_1} \qquad (3.1)$$

et

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 \ + \lambda\, \mathrm{e}^{-u_2} \qquad (3.2)$$

On retranche (3.2) de (3.1) on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda e^{-u_1} - \lambda e^{-u_2} \qquad (3.3)$$

On multiplie (3.3) par u et on intègre sur Ω on obtient

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx = \int \Delta u . u \, dx + \lambda \int (e^{-u_1} - e^{-u_2}) u \, dx$$

En utilisant les conditions aux limites on aura

$$\int \Delta u . u \, dx = -\|\nabla u\|^2 \leq 0$$

Qui implique

$$. \int \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx \leq \lambda \int (|e^{-u_1} - e^{-u_2} |) |u| \, dx \leq 2\lambda \int |u| \, dx$$

Pour $|u| > 1$ on a $\int \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx \leq 2\lambda \|u\|^2$

Et comme $\int \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2$ on obtient : $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 \leq 2\lambda \|u\|^2$

On applique le lemme de Gronwall on trouve :

$\|u\|$ =0 donc $u = 0$ d'où $u_1 = u_2$ donc la solution u est unique.

3.2.2 Etude de l'existence

L'existence se fait en trois étapes :

3.2.2.1 L'approximation

Reprenons le système (p) essayons de le décomposer en les deux systèmes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\, e^{-u} \qquad (p_1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \qquad (p_2)$$

Avec les mêmes conditions aux limites et initiales du problème (p)

L'intérêt de cette décompositions est que chacun des systèmes $(p_1)\ et\ \ (p_2)$ peut être intégré explicitement ; il est alors convenable que l'on puisse ainsi obtenir des estimations a priori "plus fine" que celle que l'on pourrait obtenir directement (sans décomposition)

On fait maintenant une semi discrétisation en temps de $(p_1)\ et\ (p_2)$

On aura :

$$u_{n+\frac{1}{2}} - u_n = \lambda h e^{-u_{n+\frac{1}{2}}} \qquad (3.4)$$

$$u_{n+1} - u_{n+\frac{1}{2}} = h\Delta u_{n+1} \qquad (3.5)$$

Avec $h = \Delta t$ et $t \in \,]0;T[$ et T fini et $u_n = u(t = nh)\ et\ u_0 = u_0(x)$

Donc si on connait $u_n = u(t = nh)$ le problème (p_1) donne $u_{n+\frac{1}{2}}$

Et comme $u_{n+\frac{1}{2}}$ est connu alors (p_2) donne $u_{n+1} = u(t = (n+1)h)$

Donc par itérations on obtient les valeurs de u_{n+2} ; u_{n+3} ……..

3.2.2.2 L'estimation

On prend h *sous la forme* $h = \frac{T}{N}$, *N entier*

Et l'on introduit les fonctions :

$u_{\mathrm{ik}}(\mathrm{t}) = \mathrm{u}^{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}$; $i = 1; 2$ *pour* $t \in [nk, (n+1)k]; n = 0.1 \dots N-1.$

Et $\breve{u}_k(t)$ *linéaire dons* $[nk, (n+1)k]; 0 \leq n \leq N-1$

$\breve{u}_k(nk) = u^n$

Lemme3. 2.2.2.1

La fonction u_{ik} $(i = 1; 2)$, $\breve{u}_k$ *demeurent, lorsque* $k \to 0$ *dans*

un borné de $L^\infty\big(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\big)$*et sont à valeurs*

positives(p.p)

Lemme3. 2.2.2.2

Si l'on pose $C_0 = \|u_0\|_{L^\infty}$ sur Ω

On a $\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^\infty} \leq C_0 \quad \forall\, n = 0,1 \dots\dots, N-1$ *et pour* $i = 1,2$

Et $u^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$ *p.p* $\forall\, n$ *et* $i = 1,2$

il faut montrer que $\|u^n\|$ est borné et que $\|Du^n\|$ et $\|D^2 u^n\|$ sont bornées

$\forall\, n = 1; 2; \dots\dots N$ *et N fini*

Telque $D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ et $D^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x_1}; \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2}; \frac{\partial^2}{\partial x_2})$

D'abord on va montrer que $\|u^n\|$ est borné

On a de (3.4) $\quad u_{n+\frac{1}{2}} = \lambda h e^{-u_{n+\frac{1}{2}}} + u_n \quad$ donc

$\left| u_{n+\frac{1}{2}} \right| \leq \lambda h + |u_n| \quad$ on suppose que $|u_0| \leq C_0$

Avec $C_0 = \|u_0\|_{L^\infty}$ sur Ω

On oura $\left| u_{n+\frac{1}{2}} \right| \leq \lambda h + C_0 \qquad$ (3.6)

De même pour (3.5)

$u_{n+1} = u_n + h\Delta u_{n+1}$ On multiplie par u_{n+1} et on intègre sur Ω il vient

$\langle u_{n+1}; u_{n+1} \rangle = \langle u_n; u_{n+1} \rangle + \langle \Delta u_{n+1}; u_{n+1} \rangle$

Donc $\|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_n\| \cdot \|u_{n+1}\| \Rightarrow \quad \|u_{n+1}\| \leq \|u_n\| \quad$ (3.7)

De (3.6) et (3.7) $\|u_n\|$ est bornée

Il reste de montrer que $\|Du^n\|$ et $\|D^2u^n\|$ sont bornées

La démonstration se basée sur le lemme suivant:

Lemme3. 2.2.2.3

Si $4C_0 h < 1; il\ existe\ une\ constante\ C_1\ telle\ que$

$$\left| \frac{du^{n+\frac{i}{2}}}{dx_j} \right| \leq C_1 \quad i; j = 1; 2;\ 0 < n \leq N - 1$$

3.2.2.3 Passage à la limite

On peut extraire des sous suites notées u_{ik} et $\breve{u}_k$ telle que

$u_{ik} \to u_i$ et $\breve{u}_k \to \breve{u}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ faible étoile

Ce type de convergence n'est pas suffisant pour passer à la limite dans les termes non linéaires mais on a une estimation supplémentaire pour $\breve{u}_k$

Lemme3.2.2.3.1

Lorsque $k \to 0$; $\frac{d\breve{u}_k}{dt}$ demeure dans un borné $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

On peut donc supposer que $\breve{u}_k \to \breve{u}$ $dans\ L^2(\Omega)$ et

$$\frac{d\breve{u}_k}{dt} \to \frac{du}{dt}\ dans\ L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big) faible\ étoile$$

Donc on a $\breve{u}_k(0) \to u(0)$ et par conséquent $u(0) = u_0$

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié un problème parabolique de réaction diffusion en utilisant l'approximation par décomposition des opérateurs

Nous avons établi un résultat d'existence de la solution du problème décomposé en deux problèmes $(p_1)\ et\ \ (p_2)$ avec les mêmes conditions aux limites et initiales du problème (p)

L'intérêt de cette décompositions est que chacun des systèmes $(p_1)\ et\ \ (p_2)$ peut être intégré explicitement ; il est alors convenable que l'on puisse ainsi obtenir des estimations a priori "plus fine" que celle que l'on pourrait obtenir directement (sans décomposition)

On a établit aussi un résultat d'unicité par la méthode classique (lemme de Gronwall).

Le problème étudié est basé sur l'étude de problème posé par T.CARLEMAN dans [2],.

La méthode de décomposition est l'usage courant en Analyse Numérique, Une démonstration d'un théorème de l'existence (pour un système d'équations intervenant en Météorologie) utilisant la méthode de décomposition est annoncé dans DEMIDOV et MARCHIK [4].

Cette méthode peut être généralisée à des problèmes multidimensionnels.

Bibliographie

[1] H. BREZIS - Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris (1987).

[2] T. CARLEMAN - Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz, Publications scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler, Uppsala (1957).

[3] J.L.DEMIALLY - Analyse numérique et équations différentielles, OPU. Alger (1993) Introduction générale.

[4] DEMIDOV et G.I.MARCHIK - Un théorème d'existence pour le problème de la prévision météorologique a court terme. Soviet. Math., 7(1966), 1310-1312.

[5] KOLODNER - On Carleman's model for the Boltzman equation. Non linear problems. The Univ. Of Wisconsin Press, (1963) 285-287.

[6] J.-L. LIONS - Equations différentielles opérationnelles, Springer-Verlag, Berlin (1961).

[7] J.-L. LIONS, R. TEMAM - Eclatement et décentralisation en calcul des variations, 3me Colloque International d'Optimisation, Nice (1969), SpringerVerlag, Lecture Notes.

[8] J.-L. LIONS - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

Résumé

Dans ce mémoire ;nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème parabolique de réaction diffusion par l'approximation par la méthode de décompositions des opérateurs .

Mots clés:

Méthode d'approximation de décomposition des opérateurs; équation réaction diffusion ,problème parabolique,opérateur.

الملخص

تناولنا في هذه المذكرة دراسة وجود ووحدانية الحل لمشكلة قطع مكافئ لرد فعل وانتشاربواسطة التقريبات بطريقة فصل المؤثرات

الكلمات المفتاحية :

طريقة التقريبلت بفصل المؤثرات،معادلة رد فعل انتشار،مسألة قطع مكافئ .

Abstract

In this work ,we study the existence and uniqueness of the solution of parabolic reaction diffusion problem by the method of approximation by decomposition Of operator

Keys words:

Method of approximation by decomposition of operator, reaction diffusion problem, parabolic problem.