UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Analyse

Par :ATIA IDRISS

Thème

Existence de solutions d'une équation différentielle d'ordre trois avec conditions aux limites en trois points .

Soutenu publiquement le : 01/06/2016

Devant le jury composé de :

Mr.Agti Mohamed	M.A.université de KASDI Merbah - Ouargla Président
Mr.Ben cheikh Abd elkrim	M.A.université de KASDI Merbah-Ouargla Examinateur
Mr. Abassi Hocine	M.A.université de KASDI Merbah-Ouargla Examinateur
Mr. Kouidri Mohammed	M.A.université de KASDI Merbah - Ouargla Rapporteur

Année univercité 2015/2016

Dédicace

Merci **Allah** (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du réve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Ya Kayoum "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mére

A mon pére, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à encouragement, à me donner l'aide et à me protéger.

A mon frére "saad"

A toute la grande familles **ATIA** et **TAMMA**

A mes amies

A tous ceux qui me sont chéres

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail

Remerciment

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements à¡ mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

Je tiens a remercier vivement :

Mon encadreur Mr.Mohammed Kouidri qui a proposé le théme de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à¡ la fin de ce travail.

A Mr.Ben cheik, Mr. Agti Mohamed , Mr. Abassi Hocine qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé et encouragé le long de ce travail.

Table des matières

Notations

- On utilise la convention de la sommation par rapport aux indices répétés.

- On utilise les notations suivantes tout au long du travail :

Les symboles :

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
- (M, d) : espace métrique.
- $d(.,.)$: application de distance.
- $C([a, b])$: l'espace des fonctions continues.
- Ω : un ensemble ouvert borné.
- $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$: c'est la fermeture de Ω.
- U : un ensemble ouvert.
- $\overline{U} = U \bigcup \partial U$: c'est la fermeture de U.
- $\overline{C}^K(.,.)$: l'espace des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, K fois différentiable dans Ω.
- deg : degré topologique.
- deg_B : degré topologique de Brouwer.
- deg_{LS} : degré topologique de Leray-Schauder.
- max : le maximum.

- $\overline{B}$: la boule unité fermée

- $\emptyset$:

- N : L-compact sur $\overline{\Omega}$.

- $\|.\|_\infty = max|.|$.

- α, β, γ : fonctions $\in L^1[0,1]$.

Introduction

Ce premier chapitre est consacré aux outils mathématiques utiliser pour développer ces présentes études. On s'intéresse particulièrement à dénir quelques notions fondamentales et à rappeler quelques théorèmes importants dans la théorie du point fixe, notamment le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. pour plus de détails voir [1 ; 21 ; 22] : Aussi en guise d'introduction nous discutons une notion bien importante : le degré topologique et ses implications pour les théorèmes de points fixes. Cette théorie est intéressante pour deux raisons : d'une part, elle constitue l'une des approches classiques pour démontrer quelques théorèmes d'aspect topologiques, Notons que cette théorie a fait l'objet d'un travail publié.
Enfin il convient de rappeler le théorème pilier dans cette thèse qui est celui d'Ascoli-Arzela dont nous faisons un usage fréquent dans presque tous les chapitres, ce dernier est utilisé pour prouver la compacité dans des espaces de fonctions définies sur des ensembles compacts où non nécessairement compacts.
Dans deuxieme chapitre, nous présentons nos travaux concernant l'existence et l'unicité des solutions d'un problème à valeurs aux limites en trois points généré par une équation différentielle du troisième ordre. Nous établissons des conditions suffsantes permettant d'obtenir l'existence des solutions en utilisant l'alternative non linéaire de Leray- Schauder et le principe de contraction de Banach. Ces travaux ont fait l'objet des publications [13] et [14]

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Théorèmes du point fixe métrique

1.1.1 Théoréme de point fixe de Banach

Définition 1.1 *(Point fixe) Soit T une application d'un ensemble X dans lui méme. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.*

Le théoréme du point fixe le plus élémentaire et certainement le plus utilisé est le principe de contraction de Banach. Pour cela nous commençons par une présentation de ce principe ainsi qu'un certain nombre de généralisations de ce résultat.

Théoréme 1.1 *(principe de contraction de Banach* [10] *. soit (M.d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante i.e qu'il existe $0 < K < 1$ que $d(T(x);T(y)) \leq kd(x,y)$;$\forall x,y \in M$, alors T admet un unique point fixe $x^* \in M$ de plus pour tout $x \in M$ ona : $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x^*$ et,*

$$d(T^n(x), x^*) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x, T(x)).$$

Preuve. D'abord, on montrons l'unicité .

On suppose que il existe $x, y \in M$ avec $x = T(x); y = T(y)$ et $d(x, y) = d(T(x), T(y) \leq kd(x, y)$.

Puisque $0 < k < 1$ alors l'inégalité dernier $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$, alors $\exists! x \in M$ tel que $T(x) = x$.

Maintenant, on preuve l'existence de x où $x \in M$.

On suppose que $T^n(x)$ est une suite de Cauchy où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq kd(T^{n-1}(x), T^n(x)) \leq .... \leq k^n d(x, T(x))$$

Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^m(x)) &\leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) + ... + (T^{m-1}(x), T^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, Tx) + k^{n+1} d(x, Tx) + ... + k^{m-1} d(x, T(x)) \\ &\leq k^n d(x, T(x)) \left[1 + k + k^2 + ...\right] \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x, T(x)) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)) \end{aligned}$$

Pour $m > n; n \in \{0, 1, ...\}$ on a

$$d(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)) \tag{1.1}$$

alors $T^n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $u \in X$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} T^n(u) = u$$

De plus par la continuité de T

$$u = \lim_{n \longrightarrow \infty} T^{n+1}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(T^n) = T(u)$$

Alors u est un point fixe de T.

Finalement, $m \longrightarrow \infty$, on obtient

$$d(T^n(u), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x))$$

■

Exemple 1.1 *Considérons l'application* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *défini par* $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$*; alors* T *une contraction avec* $0 < k = \frac{1}{2} < 1$*; et admet comme point fixe* $x = 1$ *de plus* $\lim\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 1$

Remarque *: Les conditions du théoréme sont nécessaires, pour s'en convaincre consdérons les exemples suivants .*

Exemple 1.2 $T : [0,1] \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + 1$ *,est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que* $T([0;1]) \subsetneq [0;1]$ *et on ne peut pas itérer :* $x_0 = 0$ *;* $x_1 = 1$ *;* $x_2 = 1.5$ *; mais* x_3 *n'est pas déifni !*

Exemple 1.3 $T :]0,1] \to]0,1]$, $T(x) = \frac{x}{2}$ *; est contractante et vérifie* $T(]0;1]) \subset]0;1]$ *mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que* $]0;1]$ *n'est pas fermé : lim* $u_n = 0$ *n'est pas contenue dans* $]0;1]$

Exemple 1.4 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *;* $T(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ *vérifie* $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ *pour tout* $x \neq y$*, mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que* T *n'est pas contractante, et pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on obtient* $x_n \longrightarrow +\infty$

1.1.2 Théorémes du point fixe pour des contractions non définies sur tout l'espace métrique

Soit $(M;d)$ *un espace métrique complet, il est clair qu'une fonction définie seulement sur un sous-ensemble de* M *n'aura pas forcément un point fixe. Pour assurer cela, desconditions supplémentaires seront nécessaires.*

Théoréme 1.2 *Soient* $K \subset M$ *un ensemble fermé et* $T : K \to M$ *une k-contraction. Supposons qu'il existe* $x_0 \in K$ *et* $r > 0$ *tels que :*

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K$$

et

$$d(x_0; T(x_0)) < (1 - k)r,$$

alors T a un unique point fixe $x^* \in B(x_0; r)$.
Dans certaines applications, il y'a des cas où T est lipschitzienne sans étre une contraction, alors qu'une certaine puissance de T est une contraction (*voir*[1]). *Dans ce cas nous avons le théoréme suivant.*

Théoréme 1.3 *Soit (M; d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que $d(T^m(x); T^m(y)) \leqslant kd(x, y)$, $\forall x, y \in M$, pour un certain $m \geq 1$; où $0 \leq k < 1$. Alors T admet un unique point fixe $x^* \in M$.*
Preuve. *Comme T^m est une contraction, il en resulte du théoréme (1.2) que T^m a un unique point fixe, soit donc $x^* = T^m x^*$. Alors $T^m(T(x^*)) = T(T^m(x^*)) = T(x^*)$, i.e., $T(x^*)$ est un point fixe de T^m : Mais T^m a un unique point fixe, d'où $Tx^* = x^*$: Donc T a un unique point fixe x^* ; et il est unique car tout point fixe de T est également point fixe de T^m.*

Exemple 1.5 *Considérons l'espace métrique M donné par :$M = C[a; b]$; l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a; b]$. M est un espace de Banach par rapport la norme $\|u\| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|$. $u \in M$. On définit $T : M \to M$ par :*

$$Tu(t) = \int_a^t u(s)ds$$

alors,

$$\|T(u) - T(v)\| \leq (b - a)\|u - v\|,$$

donc $(b - a)$ est la meilleure constante de Lipchitz pour T. D'autre part, on a :

$$T^2(u)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s u(\tau)d\tau\right) ds = \int_a^t (t - s)u(s)ds$$

et par induction

$$T^m u(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t - s)^{m-1} u(s)ds,$$

dés lors

$$\|T^m(u) - T^m(v)\| \leq \frac{(b-a)^m}{m!}\|u-v\|,$$

et donc T^m *serait une contraction si* $\frac{(b-a)^m}{m!} < 1$

1.1.3 Principes de continuation.

Une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation . Celui-ci consiste déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation connue sous le nom d'homotopie devra vérifier certaines conditions voir [1] *.*

Définition 1.2 *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques. Deux applications continues* f*,* $g : X \to Y$ *sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue*

$$H : X \times [0;1] \to Y,$$

telle que $H(x,0) = f(x)$ *et* $H(x,1) = g(x)$*. En d'autres termes, il existe une famille d'applications de* X *dans* Y *, à savoir* $x \to H$ *(*x*;* t*)pour* $0 \leq t \leq 1$ *; qui part de* f *pour arriver à* g *; et varie continément. On note* $f \simeq g$*.*

Exemple 1.6 *Soit* $X = Y = \mathbb{R}^n$*, on considére* $c : \mathbb{R}^n \to R^n$ *l'application constante* $c(x) = 0$*, et* $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *l'application* $i(x) = x$*. Montrons que* c *et* i *sont homotopes. Il suffit de prendre :*

$$H : \mathbb{R}^n \times [0;1] \to \mathbb{R}^n$$

$$H(x;t) = tx.$$

Alors $H(x;0) = 0 = c(x)$ *et* $H(x;1) = x$ *:*

Exemple 1.7 *Soit* $X = Y = \mathbb{R}^n - \{0\}$ *; on considére cette fois* $p(x) = x/\|x\|$ *; et* $i(x) = x$ *de nouveau. On voit que* p *et* i *sont homotopes en prenant*

$$H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0;1] \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$$H(x;t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

Définition 1.3 *Soit $f : X \to Y$ une application continue. On dit que f est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = id_x$ et $f \circ g = id_y$. On dit alors que X et Y ont le méme type d'homotopie, ou parfois qu'ils sont homotopie-équivalents, et on note $X \simeq Y$.*

Exemple 1.8 *Soit $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $Y = S^{n-1}$, on prend alors $f : X \to Y$ définie par $f(x) = x/\|x\|$; et $g : Y \to X$ l'inclusion. Alors $f \circ g = id_y$, et l'exemple 1.7 montre que $g \circ f \simeq id_x$. Donc $R^n - \{0\}$ a le meme type d'homotopie que la sphére S^{n-1}.*
Soit (X, d) un espace métrique complet, et U un sous ensemble ouvert de X.

Définition 1.4 *Soit $F : \overline{U} \to X$ et $G : \overline{U} \to X$ deux contractions, on dit que F et G sont homotopes s'il existe $H : \overline{U} \times [0, 1] \to X$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) $H(., 0) = G$ et $H(., 1) = F$;

(b) H $(x\,;\,t) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \in [0, 1]$;

(c) Il existe $\alpha \in [0; 1)$ tel que $d(H(x; t); H(y, t)) \leq \alpha d(x, y)$ pour tout x , $y \in \overline{U}$ et $t \in [0, 1]$;

(d) Il existe $M \geq 0$ tel que $d(H(x, t); H(x; s)) \leq M|t - s|$ pour tout $x \in \overline{U}$ et $t\,;\,s \in [0, 1]$.

Théoréme 1.4 *Soit $F : \overline{U} \to X$ et $G : \overline{U} \to X$ deux applications homotopiquement contractives et G a un point fixe dans U : Alors, F admet un point fixe dans U :*

preuve *Considérons l'ensemble* $Q = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x;\lambda)$ *, pour certain* $x \in U\}$ *où* H *est une homotopie entre* F *et* G *décrite dans la définition 1.2. Notons que* Q *est non vide puisque* G *a un point fixe et que* $0 \in Q$ *: On montre que* Q *est la fois ouvert et fermé dans* $[0;1]$ *; et ainsi, par connexité on aura* $Q = [0,1]$ *: Par conséquent* F *a un point fixe : Montrons d'abord que* Q *est un ensemble fermé dans* $[0,1]$ *: En effet,soit* $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ *une suite dans* Q *telle que* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ *; alors, nous devons montrer que* $\lambda \in Q$*. Comme* $\lambda_n \in Q$ *pour n = 1 ; 2,.......il existe* $x_n \in U$ *où* $x_n = H(x_n;\lambda_n)$*. Egalement pour n ;m* $\in \{1,2,3,....\}$*, on a*

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m) &= d(H(x_n,\lambda_n),H(x_m,\lambda_m)) \\
&\leq d(H(x_n,\lambda_n),H(x_n,\lambda_m)) + d(H(x_n,\lambda_m),H(x_m,\lambda_m)) \\
&\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n,x_m)
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$d(x_n,x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|$$

Ce qui montre que $\{x_n\}$ *est une suite de cauchy de* X *(car* $\{\lambda_n\}$ *l'est aussi) et, puisque* X *est complet, il existe* $x \in \overline{U}$ *telle que* $lim_{n\to\infty}x_n = x$*. Par la continuité de* H*,*

$$x = lim_{n\to\infty}x_n = lim_{n\to\infty}H(x_n,\lambda_n) = H(x,\lambda).$$

Ainsi, $\lambda \in Q$ *et* Q *est fermé dans* $[0;1]$ *.*

Montrons que Q *est un ensemble ouvert de* $[0;1]$ *: Soit* $\lambda_0 \in Q$*, alors il existe* $x_0 \in U$ *avec* $x_0 = H(x_0;\lambda_0)$ *: Puisque, par hypothése,* $x_0 \in U$*, nous pouvons trouver* $r > 0$ *tel que la boule ouverte* $B(x_0;r) = \{x \in X : d(x;x_0) < r\} \subseteq U$ *: Choisissons* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon \leq \frac{(1-\alpha)}{M}\tau$ *où* $r \leq dist(x_0,\partial U)$ *; et* $dist(x_0;\partial U) = inf\{d(x_0;x) : x \in \partial U\}$ *. Fixons*

$\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon)$ *: Alors, pour* $x_0 \in \overline{B(x_0, \tau)}$ *;*

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x, \lambda) &\leq d(H(x_0, \lambda_0), H(x, \lambda_0)) + d(H(x, \lambda_0), H(x, \lambda)) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda - \lambda_0| \\ &\leq \alpha\tau + (1 - \alpha)\tau = \tau \end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon)$ *fixé,*

$$H\ (.\ ;\ \lambda) : \overline{B(x_{0,\tau})} \to \overline{B(x_0, \tau)}\ :$$

Par le théoréme 1.1,1.2 ; [1] *; on déduit que* $H(.; \lambda)$ *a un point fixe dans* U*. Alors,* $\lambda \in Q$ *pour tout* $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$*, et parconséquent* Q *est ouvert dans [0 ; 1] .*
Du théoréme précédent, nous déduisons le résultat suivant.

Théoréme 1.5 *(Alternative non-linaire de Leray-Schauder) [1]. Soit* $U \subset E$ *un ensemble ouvert d'un espace de Banach* E *tel que* $0 \in U$*, et soit* $F : \overline{U} \to E$ *une contraction telle que* $F(\overline{U})$ *soit bornée. Alors un des deux énoncés suivantsest vérifié :*

(1) F *a un point fixe dans* $\overline{U}$ *;*

(2) il existe $\lambda \in (0; 1)$ *et* $x \in \partial U$ *tels que* $x = \lambda F(x)$ *.*

preuve*. Supposons que (2) n'est pas verifi et que* F *n'a pas de point fixe sur* ∂U *c'est à dire* $x \neq \lambda F(x)$ *pour tout* $x \in \partial U$ *et* $\lambda \in [0; 1]$*.*
Soit $H : \overline{U} \times [0; 1] \to E$ *donnée par :* $H(x; \lambda) = \lambda F(x)$ *; et soit* G *l'application nulle. Notons que* G *a un point fixe dans* U *(à savoir* $0 = G(0)$ *) et que* F *et* G *sont deux applications homotopiquement contractives. Par le théoréme 1.4,* F *aégalement un poin fixe et donc l'ennoncé (1) est vérifié.*

1.2 Degré topologique

Dans cette section, nous donnons un bréf aperéu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension fnie ou infine. Le degré, $deg(f;\Omega,y)$ *de* f *dans* Ω *par rapport à* y *donne une information sur le nombre de solutions de l'équation* $f(x)=y$ *dans un ensemble ouvert* $\Omega\subset X$ *où* $f:\Omega\subset X\to X$ *est continue,* $y\notin f(\partial U)$ *et* X *est un espace topologique, métrique la plupart du temps. Pour plus de connaissances et d'amples details voir [3 ; 10 ; 17] .*

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Considérons un ouvert borné Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *de frontiére* $\partial\Omega$ *et de fermeture* $\overline{\Omega}$. $\overline{C}^k(\Omega,R^n)$ *désignera l'espace des fonction valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, k *fois différentiables dans* Ω *qui sont continues sur* $\overline{\Omega}$ *. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.*
Soit $x_0\in\Omega$ *; si* f *est diférentiable en* x_0*, on note par* $J_f(x_0)=det f'(x_0)$ *le Jacobien de* f *en* x_0.

Définition 1.5 *Soit f une fonction de classe* C^1 *sur . Notons par*$J_f(x_0)$ *le Jacobien de* f *en un point* x_0 *de* Ω *. Le point* x_0 *est dit point critique si* $J_f(x_0)=0$ *: Dans le cas contraire,* x_0 *est dit point régulier.*
On désigne par $S_f(\Omega)$ *l'ensemble des points critiques. C'ets à dire :*

$$S_f(\Omega)=\{x\in\Omega, J_f(x)=0\}.$$

Définition 1.6 *Un élement* $y\in\mathbb{R}^n$ *est dit valeur réguliére de* f *si* $f^{-1}(y)\cap S_f(\Omega)=\phi$ *Dans le cas contraire,* y *est dit valeur singuliére.*

Définition 1.7 *Soient* $f\in\overline{C}^1(\omega,\mathbb{R}^n)$ *et* $y\in\mathbb{R}^n\backslash f(\partial\omega)$ *une valeur réguliére de f. On appelle degré topologique de* f *dans* Ω *par rapport à* y*, le nombre entier*

$$deg(f,\omega,y)=\sum_{x\in f^{-1}(y)} Sgn J_f(x),$$

où $Sgn\ J_f(x)$ désigne le signe de $J_f(x)$, défini par $sgn(t) = 1$ si $t > 0$ et $sgn(t) = -1$ si $t < 0$.

Remarques 1.2.

1) Par convention si $f^{-1}(y) = \phi$, $deg(f, \Omega, y) = 0$.

2) $f^{-1}(y)$contient un nombre fini d'éléments.

***Exemple 1.9** soit $0 < \epsilon < 1$ et considérons la fonction $f(x, y)(x^2 - y^2 - \epsilon, 2xy)$, et $f^{-1}(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = (0, 0)\}$ alors, on a*

$$x^2 - y^2 - \epsilon = 0 \tag{1.2}$$

et

$$2xy = 0 \tag{1.3}$$

D'aprés (1.3) on trouve $x = 0$ ou $y = 0$.
Si $x = 0$ alors : $-y^2 - \epsilon = 0 \Longrightarrow y^2 = -\epsilon$ c'est contradiction.
Si $y = 0$ alors : $x^2 - \epsilon = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\epsilon}$ ou $x = -\sqrt{\epsilon}$, donc

$$f^{-1}(0, 0) = \{(-\sqrt{\epsilon}, 0); (\sqrt{\epsilon}, 0)\}$$

Si $\Omega\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ alors $f^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset$. En outre, comme

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $det(J_f((x, y))) = 4(x^2 - y^2)$ et puisque $deg(f,_\Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} SgnJ_f(x)$ alors

$$SgndetJ_f(\sqrt{\epsilon}, 0) = Sgn4\epsilon = 1$$

$$SgndetJ_f(-\sqrt{\epsilon}, 0) = Sgn4\epsilon = 1$$

$$\Longrightarrow deg(f, \Omega, 0) = 1 + 1 = 2$$

***Remarques 1.3** Donc le cas où $f^{-1}(y) \cap S_f \neq \emptyset$, on ale lemme suivant*

Lemme 1.1 *(lemme Sard) Soit une fonction* $f \in C^1(\overline{\Omega}, R^n)$. *Alors l'ensemble* $f(S_f)$ *des valeurs critiques de* f *est de mesure nulle.*

Nous verrons maintenant qu'on peut étendre la notion de degré au cas où la fonction f *est seulement continue.*

Définition 1.8 *Soient* $\Omega \subset R^n$ *un ouvert borné,* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $y \notin f(\partial\Omega)$. *On définit le degré topologique de* f *dans* Ω *par rapport à* y *par*

$$deg(f, \Omega, y) = \lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega, y)$$

où $\{f_n\}_{n \in N^*}$ *est une suite de fonction* $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *qui converge uniformément vers* f *dans* $\overline{\Omega}$.

Rappelons à présent quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer.

Théoréme 1.6 (10) *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné, et posons*

$$A(\Omega) = \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega))\}$$

L'application $deg_B(f, \Omega, y) : A(\Omega) \to \mathbb{Z}$ *satisfait les propriés suivantes*

1. (Normalisation) $deg_B(I; \Omega, y) = 1$ *si* $y \in \Omega$ *et*$deg_B(I; \Omega, y) = 0$ *si* $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ *où* I *désigne l'application identité sur* $\overline{\Omega}$.

2. (Solvabilité) Si $deg_B(f, \Omega, y) \neq 0$, *alors* $f(x) = y$ *admet au moins une solution dans* Ω.

3. (Invariance par homotopie) Pour tout $h : [0; 1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *et tout* $y : [0; 1] \to \mathbb{R}^n$ *continues telles que* $y(t) \notin h(t; \partial\Omega)$ *pour tout* $t \in [0; 1]$, $deg_B(h(t; .), \Omega, y(t))$ *est indépendant de* t.

4 .(Additivité) Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $y \notin f(\overline{\Omega} \diagdown (\Omega_1 \bigcup \Omega_2))$. Alors

$$deg_B(f, \Omega, y) = deg_B(f, \Omega_1, y) + deg_B(f, \Omega_2, y)$$

5.$deg_B(f, \Omega, y)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^n \diagdown f(\partial\Omega)$

6. $deg_B(f, \Omega, y) = deg_B(f - y, \Omega, 0)$.

7. Soit $g : \overline{\Omega} \to F_m$ une application continue où F_m est un sous espace de $\mathbb{R}^n$,$dimF_m = m$, $1 \leq m \leq n$: Supposons que y est tel que $y \notin (I - g)\partial\Omega$. Alors

$$deg_B(f, \Omega, y) = deg_B((I - g)_{\overline{\Omega} \cap F_m}, \Omega \cap F_m, y)$$

Dans le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, la propriété (2) du théoréme ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérét principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes, elles ont le méme degré.

Exemple 1.10 *Soit $\Omega = (-1; 1)$ et considérons*

$$h : (t; x) \in [0, 1] \times \overline{\Omega} \to h(t, x) = (1 - t)x + txe^x$$

il est clair que cette appliction satisfait

1. h est continue sur $[0; 1] \times \overline{\Omega}$

2.$h(0; x) = x$ et $h(1; x) = xe^x$

3. Pour toutt $\in [0; 1]$; la fonction $h(t; x)$ ne sannulle pas en $\{-1, 1\}$. Donc si $f(x) = xe^x$ alors $deg_B(f; (-1, 1), 0) = deg_B(I, (-1, 1), 0) = 1$

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $\Omega \subset X$ un ensemble ouvert et borné, $f : \bar{\Omega} \to X$ une fonction continue et $y \in X$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$ .Dans la section précédente , nous avons vu qu'en dimension finie , $C(\bar{\Omega}, X)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré , le degré de Brouwer , satisfaisant les propriétés 1,2 et 3 du théorème . Malheureusement, en dimension infinie, $C(\bar{\Omega}, X)$ ne l'est pas .En effet , un exemple du à Leray montre qu'il faut restreindre la classe des fonctions pour laquelle il y a existence et unicité d'une fonction degré , le degré de Leray-Schauder , a un ensemble strictement contenu dans $C(\bar{\Omega}, X)$.

L'exemple de Leray [6]

On considère $X = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|$, à savoir pour $x \in X, \|x\| = max_{s\in[0,1]}|x(s)|$. On définit la fonction $x_0 \in X$ par $x_0(s) = \frac{1}{2}$, $\forall s \in [0,1]$, puis on introduit l'ensemble ouvert borné $\Omega = \{x \in X, \|x - x_0\| < \frac{1}{2}\}$.
Alors, on peut montrer qu'il existe $y \in X$ tel que pour toute fonction $deg_B(., \Omega, y)$: $C(\bar{\Omega}, X) \to \mathbb{Z}$, une des trois propriétés 1,2 et 3 listées ci dessus n'est pas vérifiée.
En effet , supposons au contraire qu'il existe une fonction $deg_B(., \Omega, y) : C(\bar{\Omega}, X) \to \mathbb{Z}$, satisfaisant $1-3$.On définit $f \in C(\bar{\Omega}, X)$ par $f(x) = h \circ x$, ou $h \in X$,

$$h(s) = \begin{cases} s \quad si \ \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ 1-s \quad si \ \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant \frac{5}{8}; \\ \frac{5}{3}(s-1)+1 \quad si \ \frac{5}{8} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

On remarque que pour $x \in \bar{\Omega}$, pour tout $s \in [0,1], 0 \leqslant x(s) \leqslant 1$. Donc , puisque $h([0,1]) = [0,1], f(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$. Soit $H : \bar{\Omega} \times [0,1] \to X$ définie par $H(x,t) = tx + (1-t)f(x)$. Il est clair que H est une homotopie continue entre l'identité et f et vérifie

$$\|H(x,t) - x_0\| \leqslant t\|x - x_0\| + (1-t)\|f(x) - x_0\| \leqslant \frac{1}{2}$$

Montrons que pour tout $t \in [0,1], H(\partial\Omega, t) \subset \partial\Omega$. Pour ce faire , fixons $t \in [0,1]$. Soit $x \in \partial\Omega$ i.e $\|x - x_0\| = \frac{1}{2}$. Alors, $\forall s \in [0,1], -\frac{1}{2} \leq x(s) - x_0(s) \leq \frac{1}{2}$ et pour un certain $s_0 \in [0,1], |x(s_0) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2}$, ce qui entraine que $x(s_0) \in \{0,1\}$. Par conséquent, $H(x(s_0), t) = x(s_0)$ et donc $|H(x(s_0), t) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2}$. On sait que pour $x \in \partial\Omega$, pour tout $s \in [0,1], 0 \leq x(s) \leq 1$, ce qui implique que $\forall s \in [0,1], 0 \leq H(x(s), t) \leq 1$. Autrement dit $|H(x(s), t) - x_0(s)| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi , on a bien démontré que pour tout $x \in \partial\Omega$ et $\forall s \in [0,1]$ on a $|H(x,t) - x(s)| = \frac{1}{2}$.

Soit à présent la fonction $y \in X$ défini pour $s \in [0,1]$ par $y(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}$. Alors $y \notin \partial\Omega$ puisque $\|y - x_0\| = \frac{1}{4}$. Par suite , d'après ce qui précède , pour tout $t \in [0,1], y \notin H(\partial\Omega, t)$ et donc $deg_B(H(.,t), \Omega, y)$ est bien défini .Ainsi , en accord avec les propriétés 1 et 3 on a $deg_B(f, \Omega, y) = deg_B(I, \Omega, y)) = 1$ et vu la propriété 2, on déduit l'existence de $x \in \Omega$ tel que $f(x) = h \circ x = y$. Montrons alors que l'équation $x(s) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution . On sait d'après la définition de h que

$$y(0) = \frac{1}{4} = h \circ x(0) \Rightarrow x(0) = \frac{1}{4} \;\; et \; y(1) = \frac{3}{4} = h \circ x(1) \Rightarrow x(1) = \frac{17}{20}$$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x(s) = \frac{1}{2}$ admet au moins $s^* \in [0,1]$, de plus s^* doit satisfaire $y(s^*) = h \circ x(s^*) = h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ i.e. $s^* = \frac{1}{2}$, d'où l'unicité. En vu du théorème des valeurs intermédiaires, il résulte que pour tout $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ soit $x(s) < \frac{1}{2}$, soit $x(s) > \frac{1}{2}$. Le premier cas n'est pas possible puisque $x(1) = \frac{17}{20}$. Donc pour tout $s \in (\frac{1}{2}, 1], x(s) > \frac{1}{2}$. Mais comme $x(s) = \frac{1}{2}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon], x(s) \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$, ce qui implique que $h \circ x(0) \in [h(\frac{5}{8}), h(\frac{1}{2})] = [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$, contradiction avec le fait que pour tout $s \in [0,1], y(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} = h \circ x(s)$.

En réalité. le bon cadre pour introduire la notion de degré topologique de Leray-Schauder est celui des perturbations compactes de l'identité, c'est a dire des opérateurs du type $I - T$ avec T un opérateur compact.

Pour construire ce degré, nous avons besoin de quelques résultats et définitions notamment ceux des opérateurs compacts , et de rang finis [17].

Définition 1.9 [17] *Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. Si $T : \Omega \to X$*

est un opérateur continu , on dit que T est compact si pour toute partie bornée B de Ω , $T(B)$ est relativement compact dans X.
On notera en particulier que si T est compact , alors T est borné sur les parties bornées de X.

Définition 1.10 *Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. On dit que l'application $T : \Omega \to X$ est de rang fini si $dim(Im(T)) < \infty$, autrement dit , si $Im(T)$ est un sous-espace de dimension finie de X.*

Lemme 1.2 *Soient X un espace de Banach , $\Omega \subset X$. un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte . Alors , pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension fini noté F et une application continue $T_\epsilon : \bar{\Omega} \to F$ telle que*

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \quad \textit{pourtout} \;\; x \in \bar{\Omega}.$$

Définition 1.11 *Soient X un espace de Banach , $\Omega \subset X$. un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte . Supposons maintenant que $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le degré de Brouwer $deg_B(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$ est bien défini où T_ϵ est défini comme dans le lemme 1.2. Par conséquent , nous définissons le degré de Leray-Schauder par*

$$deg_{Ls}(I - T, \Omega, 0) = deg_{Ls}(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0).$$

Remarque 1.1 *Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $Y \in X$ est tel que $y \notin (I - T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à y est défini comme étant*

$$deg_{Ls}(I - T, \Omega, y) = deg_{Ls}(I - T - y, \Omega, 0).$$

Théoréme 1.7 [10] *Soit X un espace de Banach et*

$$A = \left\{(I - T, \Omega, 0), \Omega \;\; \textit{un ouvert borné de} \;\; X, T : \overline{\Omega} \to X \quad \textit{compacte} \quad, 0 \notin (I - T)(\partial\Omega)\right\}$$

alors , il existe une unique application $deg_{Ls}(f, \Omega, y) : A \to Z$ appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :

1. *(Normalité) Si $0 \in \Omega$ alors $deg_{Ls}(I, \Omega, 0) = 1$;*

2. *(Solvabilité) Si* $deg_{Ls}(I-T,\Omega,0)\neq 0$ *alors* $\exists\ x\in\Omega$ *tel que* $(I-T)x=0$;

3. *(Invariance par homotopie) Soit* $H:[0,1]\bar{\Omega}$ *une homotopie compacte, telle que* $0\notin (I-H(t,.))(\partial\Omega)$. *Alors* $(I-H(t,.),\Omega,0)$ *ne* $deg_{Ls}det\in[0,1]$;

4. *(Additivité) Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous-ensembles disjoints ouverts de* Ω *et*

$$0\notin (I-T)(\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)).$$

Alors,

$$deg_{Ls}(I-T,\Omega,0)=deg_{Ls}(I-T,\Omega_1,0)+deg_{Ls}(I-T,\Omega_2,0).$$

Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brower. Pour finir et comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques en particulier l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

1.3 Théorème du point fixe topologiques

Théoréme 1.8 *(Brouwer) Soit* $\bar{B}$ *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}$ *et* $f:\bar{B}\to\bar{B}$ *continue. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x\in\bar{B}$ *tel que* $f(x)=x$.

Preuve. *S'il existe un* $x\in\partial B$, *alors il n'y a rien à prouver. Sinon considérons l'application* $h(t,x)=x-tf(x)$. *On a* h *est continue ,* $h(0,x)=x$ *et* $h(1,x)=x-f(x)$. *En outre si on suppose que* $h(t,x_0)=0$ *pour certain* $x_0\in\partial B$, *alors on obtient* $x_0=tf(x_0)$ *ce qui implique comme* $0\leqslant t\leqslant 1$, *que* $f(x_0)\in\partial B$, *contradiction . comme est une homotopie admissible entre* $I-f$ *et* I *alors*

$$deg_B(I-f,\Omega,0)=deg_B(I,\Omega,0)=1.$$

En conclusion , il existe un $x\in B$, *tel que* $x-tf(x)=0$ *i.e.* $f(x)=x$. ■

Théoréme 1.9 *(Schauder) Soit* $\bar{B}$ *la boule unité fermée d'un Banach* E *et* $f:\bar{B}\to\bar{B}$ *compacte .Alors* f *a un point fixe : il existe* $x\in\bar{B}$ *tel que* $f(x)=x$.

Preuve. *Soit* $h(t,x) = tf(x)$ *fonction compacte sur* $[0,1] \times \bar{B}$. *Si, pour un* $t \in [0,1]$ *et un* $x \in \partial B$, *on a* $x - h(t,x) = 0$, *alors* $tf(x) = x$; *comme* $|x| = 1$ *et* $|f(x)| \leq 1$, *ceci impose* $t = 1$ *et* $x = f(x)$ *donc un point fixe sur* ∂B *situation que l'on a exclue . On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne*

$$1 = deg_{Ls}(I, B, 0) = deg_{Ls}(I - f, B, 0)$$

puisque $h(0,.) = 0$ *et* $h(1,0) = f$ *donc l'existence d'un point fixe .* ■

Théoréme 1.10 (9) *(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder). Soit* $\Omega \subset X$ *un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach* X *tel que* $0 \in \Omega$, *et soit* $T : \bar{\Omega} \to X$ *un opérateur compact . Alors un des deux énoncés suivants vérifié :*

(1) T *a un point fixe dans* $\bar{\Omega}$ *;*

(2) il existe $\lambda > 1$ *et* $x \in \partial\Omega$ *tels que* $Tx = \lambda x$.

Preuve. *Si (2) est vraie alors on a rien à prouver. Sinon, on définit l'homotopie*

$$H(t,x) = tTx \quad pour \quad t \in [0,1].$$

Ainsi défini $H(t,x)$ *est compacte ,* $H(0,x) = 0$ *et* $H(1,x) = Tx$. *Supposons que* $H(t,x_0) = x_0$ *pour un certain* $t \in [0,1]$ *et* $x_0 \in \partial\Omega$. *Alors on a* $tTx_0 = x_0$. *Si* $t = 0$ *ou* $t = 1$ *on a (1) ; Sinon*

$$Tx_0 = \frac{1}{t}x_0 \quad pour \quad un \quad certain \quad t \in (0,1),$$

et alors on a (2) . Sinon, on a $deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$ *et alors* T *a un point fixe dans* Ω. ■

Théoréme 1.11 (Brouwer) *Soit* M *une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie* $(X, \|.\|)$ *et soit* $A : M \to M$ *une application continue, alors* A *admet un point fixe .*

Théoréme 1.12 (Schauder) *soit* M *une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach* X *et soit* $A : M \to M$ *une application compacte, alors* A *admet un point fixe.*

Rappelons à présent le théorème d'Ascoli-Arzela ainsi que le théorème de convergence dominée de Lebesgue dont nous faisons un usage fréquent dans toute la suite.

Théoréme 1.13 (Ascoli-Arzela) *Considérons* $X = C([a, b])$ *muni de la norme* $\|u\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t)|$, *avec* $-\infty < a < b < +\infty$. *Si* M *est un sous ensemble de* X *tel que*

i. $\forall u \in M$ *et* $r > 0$ *un nombre fixé,* M *est uniformement borné, i.e .* $\|u\| \leqslant r$.

ii. M *est équicontinu, i.e.*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad tq \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad et \quad \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$$

Alors, M *est relativement compact.*

Théoréme 1.14 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *telle que*

i. $f_n(x) \to f(x)$ *presque partout sur* Ω.

ii. $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *presque partout sur* Ω, $\forall n$ *avec* $g \in L^p(\Omega)$. *Alors,*

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Chapitre 2

Existence de solutions d'une équation différentielle d'ordre trois avec conditions aux limites en trois points

2.1 Introduction

Les problèmes aux limites en trois points ont connu un essor considérable et sont devenus un important sujet de recherche. Ceci est dû au fait que de nombreux phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations différentielles ordinaires aux conditions non locales. En revanche les problèmes liés aux conditions non locales ont beaucoup d'applications dans de nombreux problèmes tels que la dynamique des populations, le processus de conduction de la chaleur, la théorie du contrôle, etc. Pour plus de détails voir [2; 4; 19] *ainsi que leurs références. L'intêret porté sur l'introduction de ce type de conditions et que ses dernières peuvent améliorer les caractéristiques qualitatives et quantitatives du problème ce qui conduit à de bons résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution.*

Dans ce chapitre nous abordons la question de l'existence des solutions pour un problème aux limites en trois points suivant

$$u''' + f(t,u) = 0, 0 < t < 1 \tag{2.1}$$

$$u(0) = \alpha u(1), u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \tag{2.2}$$

où $\eta \in (0;1)$ *;* $f : [0;1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction donnée vériant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et* α*,*β*,deux paramètres tels que* $(1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$ *Cette question a fait récemment l'objet de plusieurs travaux où de différentes situations sur les structures des non linéarités de* f *ont été étudiées. Dans ce contexte, notre contribution consiste à introduire de nouvelles conditions sur la non linéarité de* f *: En effet, nous proposons d'établir des résultats d'existence et d'unicité moyennant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach lorsque* f *est une fonction de carathéodory, ensuite on examine le cas où* $f \in C([0;1] \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ *où nous n'imposons aucune condition de monotonicité sur* f *mais nous supposons que* $f(t;0) \neq 0$ *et qu'ils existent deux fonctions positives k ;h*$\in L^1([0;1];\mathbb{R}_+)$ *telles que*

$$|f(t,x)| \leqslant K(t)|x|^p + h(t), \text{ où } p > 0 \text{ , } (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \tag{2.3}$$

pour n'en citer que quelques uns ont prouvé des résultats d'existences sous diverses méthodes telles que la méthode des sous et sur solutions, la théorie du degré topologique, les méthodes de continuations basées sur la majoration à priori des solutions, le degré de coincidence, le théorème du point fixe dans un cône, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et ainsi de suite ; voir par exemple [7; 12; 15; 17; 18; 20]*, ainsi que leurs références. Ce chapitre est organisé comme suit : Nous consacrons la premiére partie à l'existence des solutions du probléme (2.1)-(2.2) lorsque* f *est de type carathéodory, et la deuxiéme partie sera réservée aux résultats établis dans le cas où* f *vérifie la deuxiéme condition mentionnée ci dessus.*

2.2 Préliminaires

Lemme 2.1

$$\begin{cases} u''' + y(t) = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1), u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

admet une unique solution

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds - \frac{\beta}{2\zeta}(t^2(1-\alpha)+\alpha)\int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s)y(s)ds$$

.

Preuve. *En effet on a* $u^{'''} = -y(t)$*,en intégrant trois fois l'équation on obtient*

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (1-s)^2 y(s)ds + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3. \tag{2.5}$$

où C_1 C_2 *et* C_3 *sont déterminées partir des conditions aux limites (2).*

$$u^{'}(0) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$\begin{aligned} u(0) = \alpha u(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds\right) + \frac{\alpha}{2}C_1 + \alpha C_3 = C_3 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-\alpha)C_3 = -\frac{\alpha}{2}\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds + \frac{\alpha}{2}C_1. \end{aligned}$$

d'où si $\alpha \neq 1$

$$C_3 = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds + \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}C_1$$

de plus

$$u'(1) = \beta u^{'}(\eta) \Leftrightarrow -\int_0^1 (1-s)y(s)ds + C_1 =$$

$$= -\beta \int_0^{\eta} (\eta - s) y(s) ds + \beta \eta C_1$$

$$\Leftrightarrow (1 - \beta\eta) C_1 = -\beta \int_0^{\eta} (\eta - s) y(s) ds + \int_0^1 (1 - s) y(s) ds$$

.

dés lors si$(1 - \beta\eta) \neq 0$

$$C_1 = -\frac{\beta}{1 - \beta\eta} \int_0^{\eta} (\eta - s) y(s) ds + \frac{1}{1 - \beta\eta} \int_0^1 (1 - s) y(s) ds$$

En substituuantes C_1, C_2 *et* C_3 *,et en posant* $\zeta = (1 - \alpha)(1 - \beta\eta) \neq 0$
on obtient

$$u(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (t - s)^2 y(s) ds - \frac{\beta}{2\zeta} (t^2(1 - \alpha) + \alpha) \int_0^{\eta} (\eta - s) y(s) ds$$

$$+\frac{1}{2\zeta} \int_0^1 (1 - s)(t^2(1 - \alpha) + \alpha\beta\eta(1 - s) + \alpha s) y(s) ds.$$

■

Définission l'opérateur intégral $T : E \to E$*,par*

$$Tu(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (t - s)^2 y(s) ds$$

$$-\frac{\beta}{2\zeta} (t^2(1 - \alpha) + \alpha) \int_0^{\eta} (\eta - s) y(s) ds$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s)y(s)ds. \tag{2.6}$$

En accord avec le lemme 2.1, le probléme (2.1)-(2.2) a une solution si et seulement si l'opérateur T admet un point fixe dans E. Pour ce faire, nous prouvons deux résultats, le premier est un résultat d'unicité basé sur le principe de contraction de Banach où nous montrons que T est une contraction. Le deuxiéme est un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder où nous prouvons par le théoréme d'Ascolie-Arzela que T est un opérateur complétement continu .

2.3 Existence et unicité

Dans toute cette section, pour établir nos résultats d'existences nous supposons la fonction $f : [0;1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory c'est à dire vérifiant les hypothéses suivantes :

(i) $t \to f(t;x)$ *est mesurable pour tout* $\in \mathbb{R}$.

(ii) $x \to f(t;x)$ *est continue presque pour tout* $t \in [0;1]$.

Théoréme 2.1 *Supposons qu'il existe une fonction non négative* $k \in L^1([0;1];\mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq K(t)|x-y| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}, t\in[0,1] \tag{2.7}$$

et

$$A=\int_0^1 [(|\zeta|+|\alpha\beta|)(1-s)^2+(1+2|\alpha|)(1-s)]K(s)ds < 2|\zeta|,$$

alors, le probléme aux limites (2 :1)-(2 :2) admet une seule solution u dans E .

Preuve. *Transformons le probléme (2 :1)-(2 :2) en un probléme de point fixe où l'opérateur* T *est défini dans (2 :6) .*

A présent, montrons que T est une contraction. En effet, soient u ;$v \in E$; alors,

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1 (1-s)|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds$$

$$+\frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)(1+2|\alpha| + |\alpha\beta|(1-s))|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds. \tag{2.8}$$

en vertu de(2,7), on obtient

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1 (1-s)|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds$$

$$+\frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)(1+2|\alpha| + |\alpha\beta|(1-s))|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds. \tag{2.9}$$

en vertu de(2,7), on obtient

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 K(s)|u(s) - v(s)|ds$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1(1-s)K(s)|u(s)-v(s)|ds$$

$$+\frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1(1-s)(1+2|\alpha|+|\alpha\beta|(1-s))K(s)|u(s)-v(s)|ds$$

$$\leq\frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1[(|\zeta|+|\alpha\beta|)(1-s)^2(1+2|\alpha|)(|\beta|+1)(1-s)]K(s)|u(s)-v(s)|ds \tag{2.10}$$

D'où en passant au suprémum $\|Tu,Tv\|<\|u,v\|$. Conséquemment T est une contraction dés lors, T admet un unique point fixe qui est l'unique solution du probléme (2.1)-(2.2) ∎

Théoréme 2.2 *Supposons que $f(t;0)\neq 0$ et qu'ils existent deux fonctions nonnegatives $k;h\in L^1([0;1];R_+)$ telles que*

$$|f(t,x)|\leq K(t)|x|+h(t),(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}, \tag{2.11}$$

$$\left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1(1-s)^2K(s)ds+\frac{|\beta|(1-2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta(\eta-s)K(s)ds$$

$$+\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1(1-s)K(s)ds<1. \tag{2.12}$$

Alors le propléme oux limites (2.1)-(2.2) a au moins une solution trivail $u^*\in E$

Pour démontrer ce théoréme nous appliquons l'alternative non linéaire que nous rappelons ici

Lemme 2.2 [9] *Soit F un espace de Banach et Ω un sous ensemble ouvert, borné de F tel que $0\in\Omega$. Soit $T:\overline{\Omega}\to F$ un opérateur complétement continu. Alors, soit qu'il existe $x\in\partial U$, $\lambda>1$ tels que $T(x)=\lambda x$, ou il existe un point fixe $x^*\in\overline{\Omega}$ de T.*

Preuve. *. Tout d'abord, définissons un ouvert, borné $\Omega \subset E$: Soient*

$$M = \left(1 + \eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 K(s)ds + \frac{|\beta|(1-2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta - s)K(s)ds$$

$$+\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)K(s)ds..$$

et

$$N = \left(1 + \eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 h(s)ds + \frac{|\beta|(1-2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta - s)h(s)ds$$

$$+\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

On vertu de l'hypothése (2.11), nous savons que $M < 1$: Comme $f(t,0) \neq 0$; alors il existe un intervalle $[\sigma;\tau] \subset [0,1]$ tel que $\underset{\sigma\leq t\leq\tau}{min}|f(t,0)| > 0$. Puisque $h(t) \leq |f(t,0)|$; $\forall t \in [0,1]$; d'où $N > 0$: Soit $m = \frac{N}{1-M}$, alors l'ensemble Ω ouvert, borné est defini par

$\Omega = \{u \in C[0,1] : \|u\| < m\}$.

Montrons que T est un opérateur complétement continu dans Ω .

(i) T est continu, en effet, soit (u_n) convergente pour la norme $\|.\|$ vers une limite u dans E : Alors

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|ds$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1 (1-s)|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds$$

$$+\frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)(1+2|\alpha|+|\alpha\beta|(1-s))|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds$$

$$\leq\left(1+\frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|f(.,u_n(.))-f(.,u(.))\|_{L_1} \tag{2.13}$$

En vu du théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\|Tu_n-Tu\|\leq\left(1+\frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|f(.,u_n(.))-f(.,u(.))\|_{L_1}\to 0$$

quand $n \to\infty$

D'où T *est continu.*

(ii) Montrons que $T(\Omega)$ *est relativement compact :*

a) Soit $u\in\Omega$ *alors en tenant compte de(2.10)*

$$|(Tu)(t)|\leq$$

$$\|u\|\left[\left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2K(s)ds+\frac{|\beta|(1-2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta-s)K(s)ds+\right.$$

$$\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)K(s)ds+$$

$$\left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 h(s)ds+\frac{|\beta|(1-2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds$$

$$+\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)h(s)ds = M\|u\|+N.$$

Donc $\|Tu\| \leq Mm+N$ *est par suit* $T(\Omega)$ *est uniformément borné.*

b) $T(\Omega)$ *en équicontinu. En efft, soint* t_1,$t_2 \in [0,1]$,$t_1 < t_2$ *et* $u \in \Omega$ *,nous par appliction de (2.10)*

$$|Tu(t_1)-Tu(t_2)| \leq M|u(t_1)-u(t_2)|$$

$t_1 \to t_2$,*alors* $|Tu(t_1)-Tu(t_2)|$ *tend vers 0, par conséquent* $T(\Omega)$ *est equicontinu.En vue du théorème d'Ascoli-Arzela,* T *est complètement continu.*

A présent, nous pouvons appliquer l'alternative non linéaire pour $T:\overline{\Omega}\to E$ *: Supposons que* $u\in\partial\Omega$,$\lambda>1$ *, tels que* $Tu=\lambda u$ *alors,*

$$\lambda m = \lambda\|u\| = \|Tu\| = \max_{0\leq t\leq 1}|(Tu)(t)| \leq$$

$$\|u\|\left[\left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 K(s)ds+\frac{|\beta|(1-2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta-s)K(s)ds+\right.$$

$$\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)K(s)ds+$$

$$\left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 h(s)ds+\frac{|\beta|(1-2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds$$

$$+\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)h(s)ds = M\|u\|+N.$$

D'ici on obtient $\lambda \leq M + N/m = 1$ *; contradiction avec le fait que* $\lambda > 1$, *En vertu du lemme 2.2, on conclut que* T *a un point fixe* $u^* \in \overline{\Omega}$ *et donc le problème (2.1)-(2.2) a une solution non triviale* $u^* \in E$. ■

Théoréme 2.3 *L'ensemble des solution du probléme (2.1)-(2.2) est compact.*

Preuve. *Soit* $\sum$ =$\{$*u*$\in E$ *; u solution du probléme (2.1)-(2.2)*$\}$ *, montrons en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela (tout sous ensemble de E est compact si et seulement si, il est borné, fermé et equicontinu), est compact.*

(i) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite dans* $\sum$ *; alors*

$$u_n(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (1-s)^2 f(s,u_n(s))ds$$

$$-\frac{\beta}{2\zeta}(t^2(1-\alpha)+\alpha)\int_0^\eta (\eta-s)f(s,u_n(s))ds$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s)f(s,u_n(s))ds. \tag{2.14}$$

En utilisant le même raisonnement que dans le théorème 2.2, on prouve que $\sum$ *est borné et equicontinu. Montrons maintenant que* $\sum$ *est fermé. Dune part, et en vue de la condition (2.10) on a*

$$|f(t,u_n)| \leq k(t)|u_n| + h(t) \leq k(t)m + h(t) = g_m(t) \tag{2.15}$$

D'autre part, le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la condition (ii) sur f *garantissent que*

$$u(t) = \lim u_n(t) =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t (1-s)^2 f(s,u(s))ds - \frac{\beta}{2\zeta}(t^2(1-\alpha)+\alpha)\int_0^\eta (\eta-s)f(s,u(s))ds$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s)f(s,u(s))ds.$$

cependant $u \in \sum$ *et par conséquent* $\sum$ *est compact.* ■

2.4 Exemples

Comme applications, nous considérons deux exemples permettant d'illustrer nos résultats obtenus.

Exemple 2.1 *Considérons le problème aux limites en trois points suivant :*

$$\begin{cases} u''' + 2\frac{\sqrt{3}u^3}{3+u^4}\sqrt{t} + te^{-t} = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = -2u(1), u'(1) = 3u'(\frac{1}{2}), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Nous avons $\alpha = -2, \beta = 3, \eta = \frac{1}{2}$, $\zeta = \frac{3}{2}$, $f(t,x) = 2\frac{\sqrt{3}u^3}{3+u^4}\sqrt{t} + te^{-t}$ *et* $|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t)$*, où* $k(t) = \sqrt{t}, h(t) = te^{-1}$, k , $h \in L_1([0,1],\mathbb{R}_+)$*. En utilisant le théorém 2.2* *on obtient*

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{3}\int_0^1 (1-s)^2\sqrt{s}ds + \frac{5}{3}\int_0^1 (1-s)\sqrt{s}ds + 5\int_0^\eta (\eta - s)\sqrt{s}ds \\ &= 0.88286 < 1 \end{aligned}$$

Alors, le problème (2,15) a au moins une solution non triviale u^* dans E.

Exemple 2.2 *Considérons un autre problème aux limites*

$$\begin{cases} u''' + \frac{tu}{\sqrt{3}\sqrt{t^2+1}} - e^t + \cos t^2 = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = \frac{1}{3}u(1), u'(1) = -\frac{1}{2}u'(\frac{1}{4}), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

où $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{4}$, $|\zeta| = \frac{3}{4}$ .Par application du Théorème 2.1, il découle

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$$

où $k(t) = \frac{t}{\sqrt{3}\sqrt{t^2+1}}$ D'un simple calcul on obtient doc

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{11}{12}(1-s)^2\frac{s}{\sqrt{3}\sqrt{s^2+1}} + \frac{5}{2}(1-s)\frac{s}{\sqrt{3}\sqrt{s^2+1}}ds \\ &= 0.25 < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Alors, il éxiste au moins une solution non triviale u^* dans $\mathbb{E}$ du problème (2 :16) .

2.5 Autres résultats d'existences

Dans cette section, en considérant $f : [0;1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et en seplaçant dans un cadre plus général, nous prouvons les resultats suivants.

Théoréme 2.4 *Supposons que $f(t,0) \neq 0$, $\zeta \neq 0$,$0 < p < 1$, et quils existent deux fonctions nonnegativesk ; $h \in L_1[0;1]$, $k(t) \neq 0$ presque pour tout $t \in [0;1]$ et telle que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x|^p + h(t), pour (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \tag{2.18}$$

alors, le problème aux limites (2.1)-(2.2) a au moins une solution non trivial $u^* \in E$.
Preuve. *Comme k est nonnegative et $k(t) \neq 0$; pour $t \in [0;1]$; alors $M \neq 0$; soit*

$m = (M+N)^{\frac{1}{1-p}}$,$r = max(1; m)$; $B_r = \{u \in E : \|u\| < r+1\}$; $u \in \partial B_r$ *et* $0 < \lambda < 1$ *tel que* $u = \lambda Tu$: *On a*

$$\|u\| = \lambda\|Tu\| \leq M\|u\|^p + N.$$

Si $\|u\| > 1$ *il s'ensuit que*

$$\|u\|^{1-p} \leq M + N\|u\|^p \leq M + N.$$

par conséquent

$$\|u\| < (M+N)^{\frac{1}{1-p}} = m \tag{2.19}$$

Sinon $\|u\| < 1$; *donc* $\|u\| \leq max(1; m) = r$; *ce qui montre que la condition (2.18) contredit le fait que* $u \in B_r$: *D'aprés le lemme 2.2, on conclut que l'opérateur* T *possède un point fixe* $u^* \in \overline{B_r}$ *et donc le problème (2.1) (2.2) admet une solution non triviale* $u^* \in C[0; 1]$.

■

Théoréme 2.5 *Supposons que* $f(t; 0) \neq 0$; $\zeta \neq 0$; $p = 1$ *et quils existent deux fonctions positives* k ; $h \in L^1[0; 1]$ *telles que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), pour(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

$$M < 1 \tag{2.20}$$

alors, le problème aux limites (2.1)-(2.2) a au moins une solution non triviale $u^* \in C[0; 1]$.

Preuve. *Comme* f *est continue et* $f(t; 0) \neq 0$; *il existe donc un intervalle* $[\sigma; \tau] \subset [0; 1]$ *telle que* $\underset{0 \leq t \leq 1}{min}|f(t; 0)| > 0$ *et puisque* $h(t) \geqslant |f(t; 0)|; pourtoutt \in [0; 1]$ *alors* $N > 0$.
Posons $r = \frac{N}{1-M}$,*alors* $r \neq 0$:*Soit* $B_r = \{u \in E : \|u\| < r\}$;$u \in \partial B_r$ *et* $\lambda > 1$ *tel que* $Tu = \lambda u$. *Alors*

$$\lambda r = \lambda\|u\| = \|Tu\| = \underset{0 \leq t \leq 1}{max}|(Tu)(t)| \leq M\|u\| + N$$

D'ici on obtient $\lambda \leq M + \frac{N}{\tau} = 1$. *Ce qui contredit le fait que* $\lambda > 1$. *En vertu du Lemme 2.2 on conclut que l'opérateur* T *a un point fixe* $u^* \in B_r$ *et donc le problème aux limites (2.1)-(2.2) admet une solution non triviale* $u^* \in C[0;1]$. ■

Théoréme 2.6 *Supposons que* $f(t;0) \neq 0$; $\zeta \neq 0$; $p > 1$ *et quils existent deux fonctions nonnegatives* k ; $h \in L_1[0;1]$; $k(t) \neq 0$; *pour tout* $t \in [0;1]$ *et telle que*

$$|f(t;x)| \leq k(t)|x|^p + h(t);$$

$$M + N < 1 \tag{2.21}$$

alors, le problème aux limites (2,1)-(2,2) a au moins une solution non triviale $u^* \in C[0;1]$.

Preuve. *Soit* $B_1 = \{u \in E : \|u\| < 1\}$;$u \in \partial B_1$ *et* $\lambda > 1$ *tel que* $Tu = \lambda u$: *Alors*

$$\lambda\|u\| = \|Tu\| \leq M\|u\| + N.$$

Des lors $\lambda \leq M + N = 1$: *La condition (2,20) entraine* $\lambda < 1$; *contrediction avec le fait que* $\lambda > 1$. *En conséquence* T *a un point fixe* $u \in \overline{B_1}$ *qui est une solution du problème (1)-(2)* . ■

2.6 Exemple

Afin d'illustrer nos résultats obtenus.considérons les deux exemples suivants :

Exemple 2.3 *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} u''' + \frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}}arcsint + 2cost + 4sint = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = -\frac{1}{5}u(1), u'(1) = -\frac{1}{2}u'(\frac{1}{3}), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Nous avons $f(t;x) = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right) arcsint + 2cost + 4sint$: *Alors* $|f(t;x)| \leq (\frac{1}{2}arcsint)|x|^{\frac{1}{3}} + 2cost + 4sint = k(t)|x|^{\frac{1}{3}} + h(t)$; $p = \frac{1}{3} < 1$; $\zeta = \frac{7}{5} \neq 0$; $f(t;0) = 2cost + 4sint \neq 0$. *Par le théorème 2.4, on conclut que le problème (2.21) a au moins une solution non triviale* u^* *dans* E.

Exemple 2.4

$$\begin{cases} u''' + \frac{1}{(1+t)^5}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+t^2} = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = \frac{1}{6}u(1), u'(1) = 8u'(\frac{1}{4}), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Nous avons $f(t,x) = \frac{1}{(1+t)^5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+t^2} = 0$, $f(t,x) \leq \frac{1}{(1+t)^5}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+t^2} = k(t)|x|^{\frac{3}{2}} + h(t)$ $f(t;0) \neq 0$ *;* $p = \frac{3}{2} > 1$ *;* $\zeta = \frac{5}{6} \neq 0$*. Par application du théorème 2.6, on obtient*

$$M + N = 0.4564 + 0.20690 = 0.6633 < 1.$$

Dés lors, le problème (2.22) a au moins une solution non triviale u^* *dans* E *:*

Conclusion

Le resultat obtenu suite a cette étude est l'existence et unicité de solutions d'une équation différentielle d'ordre trois avec conditions aux limites en trois points $[13, 14]$.

Bibliographie

[1] *R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.*

[2] *K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.*

[3] *G. Dinca, J. Mawhin, Brouwer Degree and Applications, January 17, 2009.*

[4] *R. P. Agarwal, Focal boundary value problems for differential and difference equations, Kluwer Academic Publ., 1998.*

[5] *D. R. Anderson, J. M. Davis, Multiple solutions and eigenvalues for third-order right focal boundary value problems, J. Math. Anal. Appl., 267 (2002), 135157.*

[6] *V. I. Istratescu, Fixed Point Theory : An Introduction, Springer, 30 nov. 2001 - 488 pages.*

[7] *D. Anderson, R. Avery,Multiple positive solutions to third-order discrete focal boundary value problem, Acta Math. Appl. Sinica, 19(2003), 117122*

[8] *J. Mawhin, Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, CBMS Reg. Conf. in Math., No 40, American Math. Soc., Providence, RI, 1979*

[9] *S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133181.*

[10] *K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.*

[11] *J. R. Graef, Bo Yang, Existence and nonexistence of positive solutions of a nonlinear third order boundary value problem, Electronic J. Qualitative Theory Diff. Eq., Proc. 8th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ, 9 (2008), 113*

[12] *J. R. Graef and Bo Yang, Positive solutions for a third order nonlocal boundary value problem, Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S., 1 (2008), 8997.*

[13] *A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, Existence of solutions of a nonlinear third order boundary value problem, Fixed Point Theory,13 (2012), No.2, 501-506.*

[14] *A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, R. Khaldi, Existence of positive solutions for a nonlinear third order boundary value problem, Advances in Fixed Point Theory, 2 (2012), No. 4, 473-490.*

[15] *A. Guezane-Lakoud, S. Kelaiaia, Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem, Electron. J. Differential Equations., 139 (2010) 19.*

[16] *G. Infante, J. R. L. Webb, Three point boundary value problems with solutions that change sign, J. Integ. Eqns Appl, 15 (2003), 3757.*

[17] *O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques Applications. Springer-Verlag, 1993.*

[18] *L. J. Kong, J. S. W. Wong, Positive solutions for multi-point boundary value problems with nonhomogeneous boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., 367 (2010), 588611*

[19] *W. C. Troy, Solutions of third order di erential equations relevant to draining and coating ows, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993) 155-71.*

[20] *J. R. L. Webb, G. Infante, Nonlocal boundary value problems of arbitrary order. J. Lond. Math. Soc., (2) 79 (2009), No. 1, 238 258.*

[21] *D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.*

[22] *E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin, (1986).*