

Application moment en géométrie

Hadda Hanichet

18 mai 2016

Remerciement

Je voudrais adresser quelques mots de remerciement, tout d'abord à Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et l'énergie durant toutes mes années d'études.

Je remercie mes parents qui m'ont soutenu et qui ont toujours été une source de motivation et d'encouragements et de beaucoup de bonheur. J'ai une pensée émue pour mon père décédé, que Dieu lui accorde sa miséricorde.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements à mon encadreur, **Mr. Mohamed Amine Bahayou**. La disponibilité et l'aide qu'il m'a apportées ont été précieuses, tout comme la liberté d'action et de recherche dont j'ai pu bénéficier tout au long de cette année.

J'exprime ma reconnaissance à **Mr. Laid Youmbai** qui m'a honoré par sa présidence du jury et à **Mr. Mohamed Tayeb Benmoussa** qui a accepté la tâche d'examineur.

Je tiens également à remercier tous les professeurs du département de mathématiques de l'université Kasdi Merbeh Ouargla et toutes les personnes ayant contribué à ce mémoire de manière directe ou indirecte.

Je dédie ce mémoire à ma famille et à tous mes amis.



Table des matières

1	Géométrie symplectique	6
1.1	Algèbre linéaire symplectique	6
1.2	Variétés symplectiques	7
1.2.1	Théorème de Darboux	9
1.2.2	Structure presque complexe	10
1.3	Actions de groupes	10
1.3.1	Actions symplectiques et actions hamiltoniennes	11
1.3.2	Application moment	12
2	Convexité de l'application moment	13
2.1	Préliminaires topologiques	13
2.2	Fonctions de Morse-Bott	21
2.3	Théorème de Atiyah-Guillemin-Sternberg	24
3	Exemples et applications	33
3.1	Théorème de Schur-Horn	33
4	Conclusion	34

Introduction

Lorsqu'un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} agit sur une variété symplectique (M, ω) en respectant la structure symplectique, ceci donne naissance à une application (dite *application moment*)

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Si M est compacte et connexe, l'application moment μ possède des propriétés remarquables. Atiyah, Guillemin et Sternberg ont montré que lorsque l'action est torique (le groupe qui agit sur M est un tore $\mathbb{T}^m = S^1 \times \dots \times S^1$), l'image de μ est un convexe. Le Théorème de Atiyah-Guillemin-Sternberg s'énonce alors :

Théorème 1. *Soit M une variété symplectique compacte et connexe. Considérons une action hamiltonienne d'un tore \mathbb{T}^m sur M d'application moment $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ (où on a identifié le dual de l'algèbre de Lie de \mathbb{T}^m avec \mathbb{R}^m). Alors*

- *Les fibres de μ sont connexes.*
- *L'image de μ est convexe.*
- *L'image de μ est l'enveloppe convexe de l'image des points fixes de l'action du tore \mathbb{T}^m sur M .*

L'objet de ce mémoire est de donner une preuve géométrique du Théorème de Atiyah-Guillemin-Sternberg et de développer quelques exemples d'application importants. Ce mémoire est composé de trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous étudions la notion de variété symplectique et les actions de groupes sur ces structures.
- Dans le deuxième chapitre, nous étudions la notion d'application moment et le Théorème de convexité de Atiyah-Guillemin-Sternberg.
- Dans le troisième chapitre, nous développons quelques exemples d'application : Théorème de Schur-Horn, systèmes complètement intégrables.

À la fin, nous donnons une bibliographie sommaire de la littérature qui existe sur la géométrie de l'application moment.



Notations

$C^\infty(M)$	fonctions lisses sur M .
Γ_f	le graphe de la fonction f .
$\deg(f)$	le degré de la fonction f .
\dim	la dimension.
∂M	le bord de M .
$\Omega^k(M)$	formes différentielles de degré k sur M .
R_f	l'ensemble des valeurs régulières de f .
S^n	sphère de dimension n .
sign	le signe.
$D_x f, T_x f$	applications tangente au point x .
$T_x M$	espace tangent à M au point x .
T^n	tore de dimension n .
tr	la trace.
(U, φ)	carte locale d'une variété.
$\chi(M)$	caractéristique d'Euler de M .
$\#f^{-1}(Z)$	le nombre d'éléments de $f^{-1}(Z)$.



Table des figures

2.1	L'intersection d'une parabole et l'axe des abscisses dans \mathbb{R}^2	14
2.2	L'intersection des courbes X et Y dans \mathbb{R}^2	14
2.3	Deux surfaces transverses dans \mathbb{R}^3	15
2.4	Deux courbes homotopes dans un espace X	17

Géométrie symplectique



1.1 Algèbre linéaire symplectique

Définition. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une forme symplectique sur V est la donnée d'une forme bilinéaire et antisymétrique :

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

qui est non dégénérée :

$$[\omega(x, y) = 0, \forall y \in V] \Rightarrow x = 0.$$

Un espace vectoriel symplectique est la donnée d'un tel couple (V, ω) .

Exemple. Soit V un espace vectoriel et V^* son espace dual. La forme bilinéaire antisymétrique sur $V \times V^*$ définie par :

$$\omega((x, \alpha), (y, \beta)) = \beta(x) - \alpha(y)$$

est symplectique.

Base symplectique

Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Le rang de ω est égal à la dimension (nécessairement paire) de V .

Si $\text{rang } \omega = 2n \neq 0$, alors V possède une base $B = \{f_1, f_2, \dots, f_{2n}\}$ telle que :

$$\omega = f_1^* \wedge f_{n+1}^* + \dots + f_n^* \wedge f_{2n}^* = \sum_{i=1}^n f_i^* \wedge f_{n+i}^*$$

où $B^* = \{f_1^*, \dots, f_{2n}^*\}$ est la base duale de B . En d'autres termes, l'application linéaire $\omega_{\#} : V \rightarrow V^*$ définie, pour tout $x, y \in V$, par :

$$\langle \omega_{\#}(x), y \rangle = \omega(x, y)$$

est un isomorphisme et sa matrice dans les bases B et B^* est de la forme :

$$\omega_{\#} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Orthogonalité symplectique

Définition. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et W un sous-espace vectoriel de V . On appelle orthogonal symplectique de W le sous-espace :

$$W^\perp = \{x \in V, \omega(x, y) = 0, \forall y \in W\}.$$

Un sous-espace vectoriel W de V est dit :

- isotrope si $W \subset W^\perp$,
- coisotrope si $W^\perp \subset W$,
- lagrangien si $W = W^\perp$,
- symplectique si $W \cap W^\perp = \{0\}$, i.e. $\omega|_W$ est non dégénérée.

Proposition 1. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et E et F des sous-espaces vectoriels de V . On a :

1. $(E^\perp)^\perp = E$.
2. $\dim E + \dim E^\perp = \dim V$.
3. $E \subset F \Leftrightarrow F^\perp \subset E^\perp$.

Exemple. • Tout sous-espace vectoriel dimension 1 est isotrope.

- Tout sous-espace vectoriel codimension 1 est coisotrope.

1.2 Variétés symplectiques

Définition. Une variété différentielle munie d'une forme symplectique, i.e. une 2-forme différentielle ω telles que :

- $d\omega = 0$, (la forme est fermée).
- $X \rightarrow i_X \omega$ est un isomorphisme entre le tangent TM et le cotangent T^*M , (la forme est non dégénérée).

On appelle variété symplectique le couple (M, ω) .

Remarque. Soit (M, ω) une variété symplectique. Pour tout $x \in M$, l'espace vectoriel tangent en x , $T_x M$ muni de la forme ω_x symplectique est un espace vectoriel symplectique.

Proposition 2. Soit (M, ω) une variété symplectique.

1. la dimension de M est paire.
2. La variété M est orientable. Plus précisément, si $\dim M = 2n$, la $2n$ -forme ω^n est une forme volume sur M .
3. Toute surface orientable peut être muni d'une structure symplectique, (la forme volume est la forme symplectique).

Exemples.

1. L'espace $M = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la 2-forme

$$\omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k,$$

où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des coordonnées locales est une variété symplectique. les vecteurs $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p, (\frac{\partial}{\partial y_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial y_n})_p$, pour $p \in M$, constituent une base symplectique de l'espace tangent $T_p M$.

2. L'espace \mathbb{C}^n (de coordonnées z_1, \dots, z_n) muni de la forme

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k$$

est une variété symplectique. notons que cette forme coïncide avec celle de l'exemple précédent moyennant l'identification $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, $z_k = x_k + iy_k$.

Symplectomorphisme

Définition. Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques et $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ un difféomorphisme. On dit que ψ est un symplectomorphisme si

$$\psi^* \omega_2 = \omega_1.$$

En d'autres termes, pour tout $x \in M_1$ et tout champs de vecteurs X, Y sur M_1 on a :

$$\omega_2(\psi(x)) (d_x \psi(X), d_x \psi(Y)) = \omega_1(x) (X, Y).$$

Exemple.

$$f : (\mathbb{R}^2, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega)(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy), \omega = dx \wedge dy$$

$$f^* \omega = f^*(dx \wedge dy) = f^*(dx) \wedge f^*(dy) = d(f^*(x)) \wedge d(f^*(y)) = d(ax + by) \wedge d(cx + dy) = \det A (dx \wedge dy) \text{ donc } f \text{ symplectique} \Leftrightarrow \det A = 1$$

Sous-variétés particulières

Définition. Soit (M, ω) une variété symplectique et N une sous-variété de M . On dit que N est une sous-variété isotrope (resp. coisotrope, lagrangienne, symplectique) si pour tout $x \in N$, l'espace tangent $T_x N$ est un sous-espace vectoriel isotrope (resp. coisotrope, lagrangienne, symplectique) de l'espace vectoriel symplectique $(T_x M, \omega_x)$.

Champs de vecteurs hamiltoniens

L'isomorphisme entre le tangent et le cotangent donnée par une forme symplectique permet d'associer à toute fonction lisse un unique champ de vecteurs dit *champ hamiltonien*.

Définition. Soit (M, ω) une variété symplectique et soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. On associe à f l'unique champ de vecteur $X \in \mathfrak{X}(M)$ défini par :

$$i_X \omega = df,$$

i.e. $X = \omega_{\sharp}^{-1}(df)$. On l'appelle champ hamiltonien et on le note par X_f .

Exemple. Dans la variété symplectique $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$, le champ hamiltonien d'une fonction lisse f est donné par :

$$X_f = -\frac{\partial f}{\partial y} \partial_x + \frac{\partial f}{\partial x} \partial_y.$$

Remarque. X est hamiltonien si $i_X \omega$ est exacte.

1.2.1 Théorème de Darboux

Théorème 2. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2m$. Il existe, au voisinage de chaque point de M , des coordonnées locales (x_1, \dots, x_{2m}) telles que :

$$\omega = \sum_{k=1}^m dx_k \wedge dx_{m+k}.$$

Démonstration. Nous allons montrer l'équivalent :

Proposition 3. Soit M une variété différentielle munie de deux formes symplectiques ω_0 et ω_1 et $p \in M$ avec $\omega_0(p) = \omega_1(p)$. Alors, il existe un difféomorphisme $f : U \rightarrow V$ entre deux voisinages de p tel que :

$$f^* \omega_1 = \omega_0.$$

L'idée est de considérer la famille à un paramètre de 2-formes $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + t\alpha$, où $\alpha = \omega_1 - \omega_0$. Nous envisagerons un petit voisinage U avec p et une application lisse $G : U \times [0, 1] \rightarrow M$ tel que $G_t := G(\cdot, t)$ est un difféomorphisme, $G_0 = id$, and $G_t^*(\omega_t) = \omega_0(*)$. Il nous faudra donc de trouver un champ de vecteurs dépendant du temps approprié X_t . Choisir U faire si petit qu'il est un voisinage de coordonnées (difféomorphe à une balle) et telle que ω_t est symplectique (i.e, non dégénérée) sur U pour tous t . Ceci peut être fait depuis $\omega_t(p)$ est constante !

Maintenant, nous veut choisir X_t telle que $\frac{d}{dt} G_t^*(\omega_t) = 0$. Cela allons montrer (*) donc, ce qui équivaut à (voir ci)

$$\frac{d}{dt} G_t^*(\omega_t) = G_t^*(L_{X_t} \omega_t) + G_t^*(\alpha) = G_t^*(\alpha + di_{X_t} \omega_t + i_{X_t} d\omega_t).$$

Comment le savons nous ? Eh bien, d'abord, si ω est fixe, Je affirme :

$$\frac{d}{dt} G_t^*(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_{t+h}^* \omega - G_t^* \omega}{h}$$

Une façon de voir ceci est d'abord pour vérifier l'identité des fonctions pour lesquelles il est bien (les deux parties sont égales à $X_t f$). Ensuite, il est possible de vérifier que les deux parties de l'équation $\frac{d}{dt} G_t^*(\omega)$ sont dérivations de l'algèbre des formules (tenseurs alternés) sous le produit de coin. Enfin, les deux parties font la navette avec le dérivé

extérieur d puisque le de rappel fait. Par conséquent, par récurrence sur la taille k de la k -forme ω , nous obtenons le résultat en boucle. Le résultat le plus grand

$$\frac{d}{dt}G_t^*(\omega_t) = G_t^*(L_{X_t}\omega_t) + G_t^*\left(\frac{d\omega_t}{dt}\right)$$

suit de ceci utilise la même astuce que dans la règle du produit. De retour au théorème de Darboux.

Le dernier terme sur la gauche (avec est $i_{X_t}d\omega_t$) disparaît par closedness. Le premier terme devient

$$G_t^*(d(\beta + i_{X_t}\omega))$$

donc si nous choisissons X_t telle que $i_{X_t}\omega_t = -\beta$ alors nous avons le champ de vecteurs dépendant du temps approprié. X_t est déterminée uniquement parce que ω_t est symplectique sur U Bien sur, nous ne savons pas encore si le flux de X_t dure tout le chemin jusqu'au 1er G est défini. Mais le flux ne dure passé 1er à p (où $X_t(p) \equiv 0$ tout t) il doit, dans un voisinage de p par l'ouverture du domaine de l'écoulement.

Donc, la diminution U si nécessaire, G_1 est le difféomorphisme en question. □

1.2.2 Structure presque complexe

Définition. Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique. Une structure complexe J sur E est un endomorphisme de E tel que $J^2 = -\text{Id}_E$.

On dit que J est compatible avec ω si $\omega(\bullet, J\bullet)$ est définie positive.

Soit (M, ω) une variété symplectique. On appelle structure presque complexe sur M toute application qui, à chaque point x de M associe une structure complexe J_x sur T_xM . On dit que ω est compatible avec J si pour tout $x \in M$, ω_x et J_x sont compatibles. Dans ce cas, la forme $g(\bullet, \bullet) = \omega(\bullet, J\bullet)$ est une métrique riemannienne sur M .

Proposition 4. Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique muni d'une structure complexe J compatible. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par J alors il est symplectique.

Démonstration. Supposons F stable par J . Soit $u \in F \cap F^\omega$. Alors $Ju \in F$ donc $\omega(u, Ju) = 0$. La compatibilité de J implique que $u = 0$. □

1.3 Actions de groupes

Définition. Une action à gauche d'un groupe de Lie G sur une variété différentielle M est une application différentiable

$$\psi : G \times M \rightarrow M$$

vérifiant, pour tout $g, h \in G$ et tout $x \in M$

$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(gh, x) \quad \text{et} \quad \psi(e, x) = x.$$

On note alors $G \curvearrowright M$ et on remplace la notation $\psi(g, x)$ par gx .

Orbites On définit l'orbite d'un point $x \in M$ par

$$O(x) = \{y \in M, \exists g \in G, y = gx\}.$$

- Les orbites forment une partition de M (le fait d'appartenir à une même orbite est une relation d'équivalence sur M).
- Si l'action est propre, alors les orbites sont des sous-variétés plongées dans M .

Sous-groupes d'isotropie Le stabilisateur d'un point $x \in M$ est le sous-groupe de G (appelé sous-groupe d'isotropie) :

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G, gx = x\}.$$

noté aussi G_x .

- G_x est un sous-groupe de Lie de G , (c'est un sous-groupe fermé).

Champs fondamentaux

Définition. soit $\psi : G \times M \rightarrow M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété différentielle M . Pour tout ξ dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe G , on associe un champ de vecteur X_ξ sur M défini par :

$$X_\xi(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp t\xi, x)$$

À noter que les champs fondamentaux constituent une algèbre de Lie de champs complets, isomorphe à \mathfrak{g} (donc de dimension finie).

Exemple. Le groupe affine $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a > 0 \right\}$ agit sur le plan symplectique par multiplication à gauche.

L'algèbre affine est $\mathfrak{g} = \langle x\partial_x, x\partial_y \rangle$ et l'algèbre des champs fondamentaux est $\langle x\partial_x, y\partial_x \rangle$.

1.3.1 Actions symplectiques et actions hamiltoniennes

Actions symplectiques

Définition. Une action ψ d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) est dite symplectique si pour tout $g \in G$, $\psi_g : M \rightarrow M, x \mapsto gx$ est un symplectomorphisme.

Exemple. L'action du groupe abélien $(\mathbb{R}^2, +)$ sur le plan symplectique par translation :

$$(s, t) \cdot (x, y) \mapsto (x + t, y - s),$$

est un symplectomorphisme

Remarque. Un champ de vecteurs X est dit symplectique si la 1-forme $i_X\omega$ est fermée. Avec cette définition, une action à gauche est symplectique, si et seulement si, les champs fondamentaux sont symplectiques. En effet, d'une part

$$\mathcal{L}_{X_\xi}\omega = i_{X_\xi}(d\omega) + d(i_{X_\xi}\omega) = d(i_{X_\xi}\omega),$$

et d'autre part,

$$\mathcal{L}_{X_\xi}\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp tX_\xi)^* \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\exp t\xi}^* \omega = 0$$

Action hamiltonienne

Définition. Une action symplectique d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) est dite hamiltonienne si les champs fondamentaux sont des champs hamiltoniens. En d'autres termes, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, la 1-forme $i_{X_\xi} \omega$ est exacte.

Remarque. Toute action symplectique sur une variété (M, ω) , avec $H^1(M) = 0$, est hamiltonienne.

1.3.2 Application moment

L'existence d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) est équivalente à l'existence d'une application lisse, dite *application moment* :

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

qui vérifie $i_{X_\xi} \omega = d \langle \mu, \xi \rangle$, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$.

On demande, en plus, à cette application d'être G -équivariante :

$$\forall g \in G, \mu \circ \psi_g = \text{Ad}_g^* \circ \mu,$$

i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \\ \psi_g \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_g^* \\ M & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

où l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* est définie, pour tout $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $X \in \mathfrak{g}$, par

$$\langle \text{Ad}_g^* \alpha, X \rangle = \langle \alpha, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle .$$

Convexité de l'application moment



2.1 Préliminaires topologiques

Nous allons voir un résultat de topologie essentiel pour la suite. Il s'agit de montrer que lorsqu'on enlève une sous-variété de codimension supérieure à 2 à une variété connexe, elle reste connexe. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Il existe un homéomorphisme en entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $S^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$. En particulier, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe pour $n \geq 2$.*

Démonstration.

L'homéomorphisme entre $S^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est donné par $\varphi(x, t) = tx$. □

Théorème 3. *Soit M une variété différentielle connexe de dimension n et soit S une sous-variété de codimension $k \geq 2$. Alors $M \setminus S$ est connexe.*

Démonstration. Soient $x, y \in M \setminus S$ et soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin reliant les points x et y dans M , (M étant connexe). Montrons qu'il existe un chemin qui n'intersecte pas S . Par compacité, l'image de γ admet un recouvrement fini par des domaines de cartes $R = \{(U_i, \varphi_i), i = 1, \dots, r\}$ avec

$$x \in U_1, \dots, y \in U_r$$

Soit $(U, \varphi) \in R$ telle que $U \cap S \neq \emptyset$, alors

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\}).$$

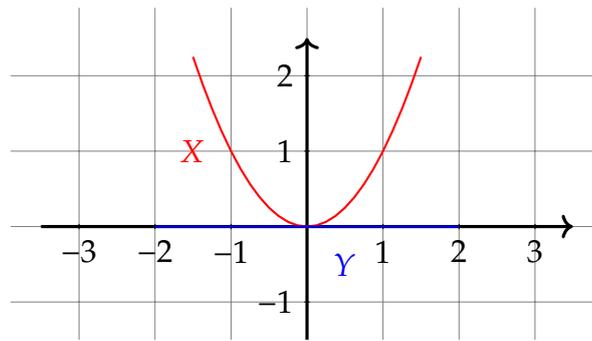
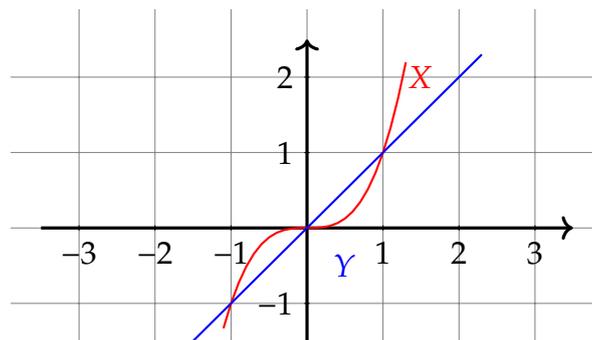
Si $p, q \in U \setminus S$, $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$ peuvent être joints par un chemin, par connexité de $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ (d'après le lemme ci-dessus). Donc p et q peuvent être reliés par un chemin dans U qui n'intersecte pas S . Par concaténation, on obtient un chemin continu qui relie x et y dans $M \setminus S$. □

Dans la partie suivante, nous redémontrerons ce théorème à l'aide d'un argument de transversalité.

Transversalité

Deux sous-espaces vectoriels F, G d'un espace vectoriel E sont dits *transverses* et on écrit $F \pitchfork G$ quand $F + G = E$ ou, de manière équivalente :

$$\text{codim}(F \cap G) = \text{codim}(F) + \text{codim}(G).$$

FIG. 2.1 : L'intersection du parabole et l'axe des abscisses dans \mathbb{R}^2 FIG. 2.2 : L'intersection des courbes X et Y dans \mathbb{R}^2

Deux sous-variétés X et Y d'une variété différentielle M sont dites transverses lorsque, pour tout point x de $X \cap Y$, les espaces tangents $T_x X$ et $T_x Y$ sont transverses dans l'espace tangent $T_x M$, c'est-à-dire si $T_x M = T_x X + T_x Y$.

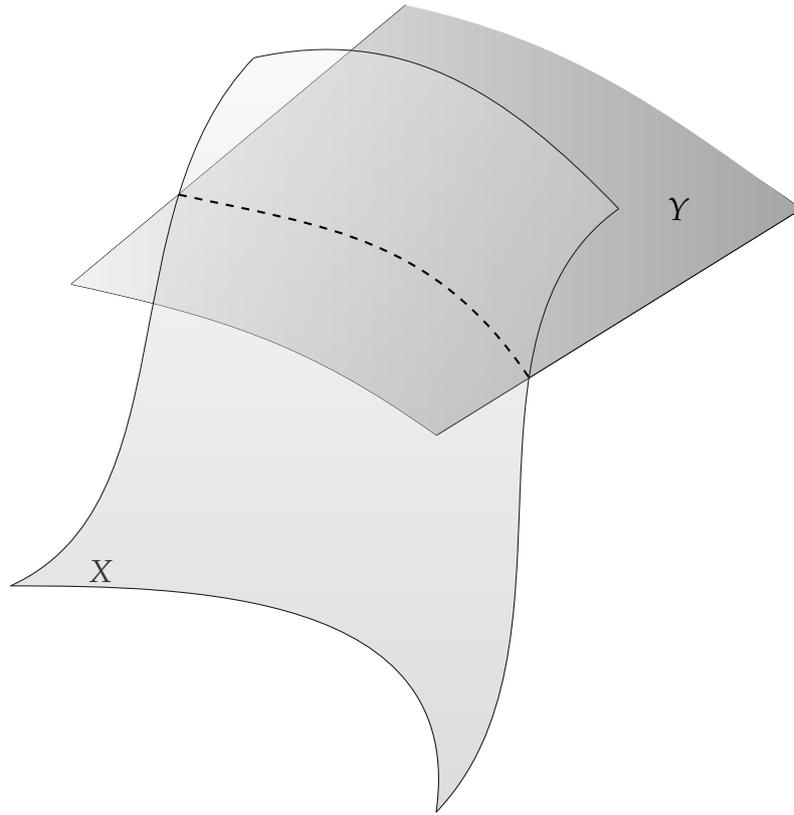
Exemples.

1. Dans le plan, la parabole $X = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$ et l'axe des abscisses $Y = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ ne sont pas transverses (car tangents en $(0, 0)$).
2. Dans le plan, les deux courbes $X = \{(x, x^3), x \in \mathbb{R}\}$ et $Y = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ sont transverses (en les trois points d'intersection, les droites tangentes sont complémentaires). Les mêmes courbes plongées dans l'espace, $\{0\} \times X$ et $\{0\} \times Y$, ne sont pas transverses. Par exemples, $T_{(0,0,0)}\{0\} \times X = \langle (0, 1, 0) \rangle$ et $T_{(0,0,0)}\{0\} \times Y = \langle (0, 1, 1) \rangle$ n'engendrent pas l'espace \mathbb{R}^3 .

Remarques. 1. La transversalité est fortement liée à la dimension de l'espace ambiant : deux droites non tangentes sont transverses dans le plan, mais elles ne le sont pas dans l'espace.

2. Deux sous-variétés disjointes sont transverses.

Un premier résultat concernant l'intersection de sous-variétés transverses est donné par la proposition suivante :

FIG. 2.3 : Deux surfaces transverses dans \mathbb{R}^3 .

Proposition 5. Une intersection non vide $X \cap Y$ de deux sous-variétés transverses, d'une variété différentielle M , est une sous-variété de dimension :

$$\dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y - \dim M. \quad (2.1)$$

et, pour tout $x \in X \cap Y$

$$T_x(X \cap Y) = T_x X \cap T_x Y \quad (2.2)$$

2.1.1 Application transverse à une sous-variété

L'ensemble des solutions d'une équation $f(x) = y$ forme une variété différentielle si y est une valeur régulière de $f : X \rightarrow Y$. Si Z est maintenant, au lieu d'un point, une sous-variété de Y , quelle condition assure que $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété? Cette question va nous amener à définir la notion de transversalité comme une extension toute naturelle de celle de régularité.

Soient X et Y deux variétés différentielles et Z une sous-variété de Y . On dit que la fonction $f : X \rightarrow Y$ est transverse à Z et on écrit $f \pitchfork Z$ si, pour tout $x \in f^{-1}(Z)$

$$\text{Im} D_x f + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

En d'autres termes, f est transverse à Z si, pour tout $x \in f^{-1}(Z)$, $\text{Im} D_x f$ et $T_{f(x)} Z$ sont transverses (en tant que sous-espaces vectoriels de $T_{f(x)} Y$).

Remarque.

1. Les deux notions de transversalité ci-dessus sont équivalentes :
Si X et Y sont deux sous-variétés de M et i est l'injection de X dans M alors

$$X \pitchfork Y \iff i \pitchfork Y.$$

Réciproquement, si $f : X \rightarrow Y$ et Z est une sous-variété de Y alors

$$f \pitchfork Z \iff \Gamma_f \pitchfork (X \times Z),$$

où $\Gamma_f = \{(x, f(x), x \in X)\}$ est le graphe de f .

2. Si $f : X \rightarrow Y$ est une submersion alors f est transverse à toute sous variété de Y .

L'image réciproque d'une sous-variété par une application qui lui est transverse est une sous-variété.

Proposition 6. Si $f \pitchfork Z$ et si $f^{-1}(Z)$ n'est pas vide alors :

1. $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété qui a la même codimension que Z :

$$\text{codim} f^{-1}(Z) = \text{codim} Z.$$

2. L'espace tangent de $f^{-1}(Z)$ est l'image réciproque par la différentielle de f de l'espace tangent à Z :

$$\forall x \in f^{-1}(Z), \quad T_x(f^{-1}(Z)) = (D_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z).$$

Démonstration.

1. Montrons que tout point de $f^{-1}(Z)$ admet un voisinage (dans $f^{-1}(Z)$) qui est la fibre d'une submersion. Pour $x \in f^{-1}(Z)$, il existe un voisinage U de $y = f(x)$ dans Y et une submersion $\varphi : U \cap Z \rightarrow \mathbb{R}^d$ (avec $d = \text{codim} Z$) telle que $U \cap Z = \varphi^{-1}(0)$. Vérifions que si $V = f^{-1}(U)$, alors $V \cap f^{-1}(Z) = (\varphi \circ f)^{-1}(0)$ et que $\varphi \circ f$ est une submersion. Comme $T_y Z = \ker D_y \varphi$ et comme $f \pitchfork Z$ alors

$$\text{Im} D_x(\varphi \circ f) = D_y \varphi(\text{Im} D_x f) = D_y \varphi(\text{Im} D_x f + \ker D_y \varphi) = D_y \varphi(T_y Y) = \mathbb{R}^d.$$

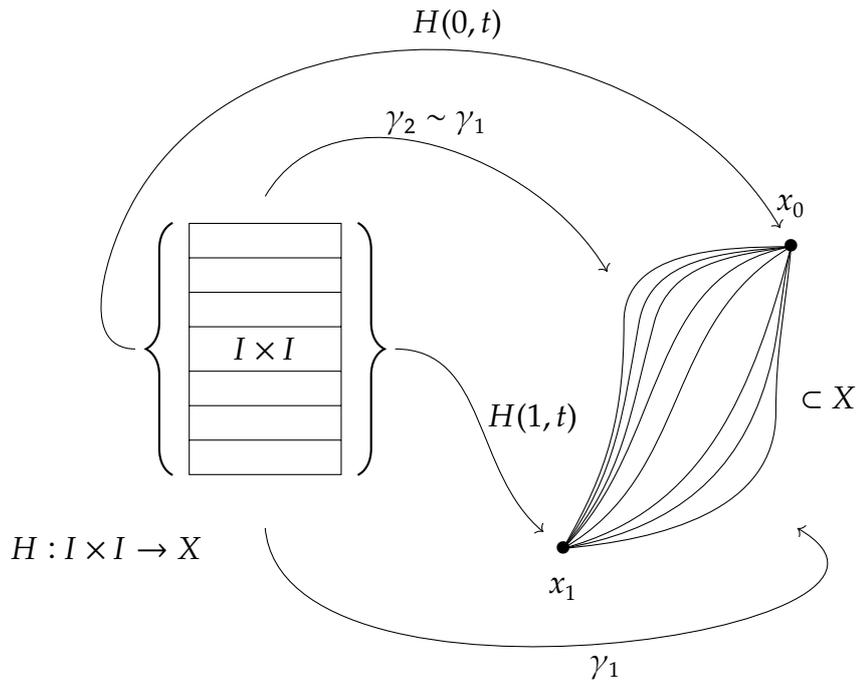
$$\text{et } \text{codim} f^{-1}(Z) = \dim X - \dim \ker D_x(\varphi \circ f) = \text{rang} D_x(\varphi \circ f) = d = \text{codim} Z.$$

2. On a

$$\begin{aligned} T_x(f^{-1}(Z)) &= \ker D_x(\varphi \circ f) = \ker(D_y \varphi \circ D_x f) = (D_y \varphi \circ D_x f)^{-1}(0) \\ &= (D_x f)^{-1}((D_y \varphi)^{-1}(0)) = (D_x f)^{-1}(\ker D_y \varphi) = (D_x f)^{-1}(T_y Z). \end{aligned}$$

□

On retrouve aussi le résultat concernant l'intersection de deux sous-variétés transverses.

FIG. 2.4 : Deux courbes homotopes dans un espace X .

2.1.2 Stabilité et Généricité

La première propriété fondamentale de la transversalité est la *stabilité* : une *petite perturbation* d'une application transverse à une sous-variété est encore transverse à la sous-variété. Nous allons donner la formulation précise de cette propriété intuitive. Pour cela, nous allons commencer par quelques définitions.

Définition (Homotopie). Soient X et Y deux espaces topologiques et soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues.

On dit que f est homotope à g et on note $f \sim g$, s'il existe une application continue (dite homotopie)

$$\begin{aligned} H : X \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$.

Remarques. 1. L'homotopie est une relation d'équivalence.

2. Si X et Y sont des variétés différentielles et si f et g sont lisses et homotopes, alors elles sont C^∞ -homotopes.

Définition (Type d'homotopie). On dit que deux espaces topologiques X et Y ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que :

$$f \circ g \sim \text{Id}_Y \quad \text{et} \quad g \circ f \sim \text{Id}_X.$$

Rétraction par déformation. Un exemple important et intuitive d'homotopie entre deux espaces est la rétraction par déformation. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Une rétraction de X sur A est une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r(x) = x$ pour $x \in A$. L'application $r : X \rightarrow A$ est appelée une *rétraction par déformation* si de plus $i \circ r : X \rightarrow X$, où $i : A \rightarrow X$ est l'injection canonique, est homotope à Id_X . On dit que A est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction par déformation $X \rightarrow A$.

Exemples. 1. Deux espaces homéomorphes sont homotopes.

2. Un cercle est un rétracte par déformation d'un cylindre.

3. Si Y est contractile (homotope à un point), alors toutes applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes.

4. Un espace est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et si tout lacet (courbe fermée) est homotope à un point. Tout espace contractile est simplement connexe; la réciproque est fautive : les sphères S^n ($n \geq 2$) sont simplement connexes mais non contractiles.

5. Le plan privé de l'origine n'est pas simplement connexe; une courbe qui entoure l'origine n'est pas homotope à un point. L'anneau $\{z \in \mathbb{C}, 0 < r < |z| < R\}$ et le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ ne sont pas simplement connexes.

6. $\mathbb{R}^n - \{pt\}$ est homotope à la sphère S^{n-1} (la sphère est un rétracte par déformation de $(\mathbb{R}^n)^*$ par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$).

7. Par les projections stéréographiques $S^n - \{pt\} \sim \mathbb{R}^n$ et

$$(S^n - \{N\}) \cap (S^n - \{S\}) \sim (\mathbb{R}^n)^* \sim S^{n-1}.$$

Définition (Stabilité locale). Une propriété (\mathcal{P}) d'une classe d'applications $f : X \rightarrow Y$ est dite localement stable si tout point $x \in X$ possède un voisinage U telles que si $f|_U : U \rightarrow Y$ possède la propriété (\mathcal{P}) et si $H : U \times [0, 1] \rightarrow Y$ est une homotopie avec $H(\cdot, 0) = f$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f_t = H(\cdot, t) : U \rightarrow Y$ possède la propriété (\mathcal{P}) pour tout $t > \varepsilon$. On dit que la propriété est globalement stable si les conditions ci-dessus sont vérifiées avec $U = X$.

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème de stabilité de la transversalité.

Théorème 4. Soient X et Y deux variétés différentielles. Les classes des applications lisses $f : X \rightarrow Y$ suivantes sont localement stables :

1. immersions,
2. submersions,
3. plongements,
4. applications transverses à une sous-variété donnée Z de Y .

Si X est compacte la stabilité est globale.

Démonstration. Seul le cas de transversalité nous intéresse (pour une preuve complète, voir [6], page 49). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse et transverse à Z , avec $\text{codim}Z = d$. Soit $x_0 \in f^{-1}(Z)$ et soit V un voisinage de $y_0 = f(x_0)$ telle que $V \cap Z = \varphi^{-1}(0)$ où $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une submersion sur $V \cap Z$. $W = f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 , $W \cap f^{-1}(Z) = (\varphi \circ f)^{-1}(0)$ et $\varphi \circ f : W \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une submersion sur $W \cap f^{-1}(Z)$ (car $f \pitchfork Z$).

Pour tout $x \in W \cap f^{-1}(Z)$, la matrice de $D_x(\varphi \circ f)$ possède un mineur $M_d(x, \varphi \circ f)$ d'ordre $d \times d$ de déterminant non nul. L'application $(x, t) \mapsto \det M_d(x, \varphi \circ f_t)$ est continue (comme composée d'applications continues) et ne s'annule pas en $(x_0, 0)$. Il existe donc un ouvert $U \subset W$ et un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(x, t) \in U \times [0, \varepsilon[$, $\det M_d(x, \varphi \circ f_t) \neq 0$. Mais $D_x(\varphi \circ f_t)$ surjective sur $U \times [0, \varepsilon[$ signifie que $f_t \pitchfork Z$.

Si X est compacte elle peut être recouverte par un nombre fini de U_i ($i = 1, \dots, k$). Il suffit de prendre $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \varepsilon_i$ pour avoir la stabilité globale. \square

Exemple. Soit $f_t(x) = (x, x^2 + 2t - 1)$ et soit l'axe des abscisses $d = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $f_t \pitchfork d$. En effet, $f_t^{-1}(d) = \{(\pm\sqrt{1-2t}, 0)\}$ et $\text{Im} D_{(\pm\sqrt{1-2t}, 0)} f_t$ est engendrée par le vecteur $(1, \pm\sqrt{1-2t})$. D'autre part, $f_{\frac{1}{2}} \not\pitchfork d$ (donc ici $\varepsilon = \frac{1}{2}$).

Théorème 5. Soient X et Y deux variétés différentielles, Z une sous-variété de Y et $f : X \rightarrow Y$ une fonction de classe C^∞ . Alors il existe une fonction $g \in C^\infty(X, Y)$, qui est à la fois, homotope à f et transverse à Z .

Généricité. La deuxième propriété fondamentale de la transversalité est connue sous le nom de généricité (ou la propriété d'être en position générale). Nous allons voir que, grâce au Théorème de Sard, la propriété d'être transverse est générique dans le sens que, si f n'est pas transverse à Z on peut la rendre transverse moyennant une petite perturbation. En particulier, f sera toujours homotope à une application transverse à Z . Commençons par un exemple. Soit $F : X \times S \rightarrow Y$ lisse et $F_s : X \rightarrow Y$ telle que $F_s(x) = F(x, s)$. Si $F \pitchfork Z$, est-ce que $F_s \pitchfork Z$ pour tout $s \in S$? La réponse est négative :

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((x, y), s) \mapsto (x, y, s)$$

F est une submersion et donc transverse à toute sous-variété de \mathbb{R}^3 . En particulier, $F \pitchfork S^2$. F_s envoie le plan \mathbb{R}^2 sur le plan horizontal $\{z = s\}$ de \mathbb{R}^3 . Pour $s = -1, 1$, F_s n'est pas transverse à S^2 (les deux plans $\{z = \pm 1\}$ sont tangents à S^2). Remarquons tout de suite que pour tout s différent de -1 et 1 , $F_s \pitchfork S^2$ (i.e. la transversalité pour presque tout s).

Théorème 6 (Théorème de Transversalité). Soit $F : X \times S \rightarrow Y$ une application lisse entre des variétés différentielles telles que seule X ait un bord (éventuellement vide!). Soit Z une sous-variété sans bord de Y . Si F et $\partial F = F|_{\partial X \times S}$ sont transverses à Z , alors pour presque tout $s \in S$ les applications F_s et ∂F_s sont transverses à Z .

Démonstration. L'image réciproque $W = F^{-1}(Z)$ est une sous-variété de $X \times S$ de bord $\partial W = W \cap (\partial X \times S)$. Soit $\pi : W \rightarrow S$ la restriction à W de la projection $X \times S \rightarrow S$. Nous allons montrer que si $s \in S$ est une valeur régulière de π alors $F_s \pitchfork Z$ et de même, si $s \in S$ est valeur régulière de $\partial\pi$ alors $\partial F_s \pitchfork Z$. Le théorème suit alors immédiatement

du Théorème de Sard, car presque tout $s \in S$ est valeur régulière à la fois de π et de $\partial\pi$. On a s valeur régulière de π si, pour tout $(x, s) \in W$:

$$\forall e \in T_s S, \exists (v, e) \in T_{(x,s)} W = (D_{(x,s)} F)^{-1}(T_z Z),$$

pour $z = F_s(x)$. Ceci se traduit par, $\forall (u, e) \in T_{(x,s)} X \times S = T_x X \times T_s S, \exists v \in T_x X$ tels que $D_{(x,s)} F(u, e) - D_{(x,s)} F(u - v, 0) \in T_z Z$, ou encore

$$D_{(x,s)} F(u, e) - D_x F_s(u - v) \in T_z Z,$$

$$\left(\text{car } D_{(x,s)} F(a, 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\gamma(t), s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F_s(\gamma(t)) = D_x F_s(a) \right).$$

On peut dire que tout vecteur de l'image de $D_{(x,s)} F$ est un vecteur de l'image de $D_x f_s$ à un vecteur de $T_z Z$ près ou encore

$$\text{Im} D_{(x,s)} F + T_z Z = \text{Im} D_x F_s + T_z Z.$$

D'où, sous la condition s valeur régulière de π :

$$F \pitchfork Z \implies F_s \pitchfork Z.$$

De même, $\partial F \pitchfork Z \implies \partial F_s \pitchfork Z$. □

Théorème 7 (ε -Voisinage). Soit Y une variété compacte sans bord de \mathbb{R}^n et $\varepsilon > 0$, soit l'ensemble $Y^\varepsilon = \{\omega \in \mathbb{R}^n, \exists y \in Y, |\omega - y| < \varepsilon\}$

Si ε est assez petit, pour tout point $\omega \in Y^\varepsilon$ il existe un unique point dans Y qui est le plus proche noté $\pi(\omega)$. Alors $\pi : Y^\varepsilon \rightarrow Y$ est une submersion.

Lorsque Y n'est pas compacte, la même conclusion est vraie en autorisant une épaisseur ε variable dans la définition de Y^ε .

Démonstration. Pour une démonstration de ce théorème, voir [6], page 71. □

Corollaire 2.1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application différentielle avec Y sans bord, alors il existe une boule ouverte S d'un espace \mathbb{R}^m et une application différentiable $F : X \times S \rightarrow Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$ et pour tout x fixé l'application $s \mapsto F(x, s)$ est une submersion de S dans Y . En particulier F et ∂F sont des submersions.

Démonstration. Soit S la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n dans lequel est réalisé Y , posons

$$F(x, s) = \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))s)$$

Où ε est la fonction lisse « épaisseur » du voisinage Y^ε . Puisque $\pi : Y^\varepsilon \rightarrow Y$ est l'identité en restriction de Y , on a $F(x, 0) = f(x)$. À x fixé, l'application $s \mapsto f(x) + \varepsilon(f(x))s$ est une submersion. Donc $s \mapsto F(x, s)$ est une submersion comme composée de deux submersions. Il est alors évident que F et ∂F sont des submersions. □

Le caractère générique de la transversalité est formulé dans le

Théorème 8 (homotopie à une application transverse). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse. Soit Z une sous variété de Y (toutes les deux sans bord), alors il existe $g : X \rightarrow Y$ lisse, homotope à f telle que g et ∂g soient transverse à Z .

Démonstration. Le théorème de transversalité s'applique à l'application F du corollaire et donne $f_s \pitchfork Z$ et $\partial f \pitchfork Z$ pour presque tout $s \in S$. Mais chaque f_s est homotope à f par l'homotopie $(x, t) \in X \times I \mapsto F(x, ts)$. \square

Nous aurons besoin de la version plus forte suivante (que nous admettrons) du théorème d'homotopie à une application transverse. On dira que $f : X \rightarrow Y$ est transverse à Z sur un sous ensemble C de X si la condition de la transversalité

$$\text{Im}(T_x f) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y$$

est satisfaite en tout point $x \in C \cap f^{-1}(Z)$.

Théorème 9 (de Prolongement). *Soit Y une variété sans bord et Z une sous variété fermée sans bord de Y . Soient $f : X \rightarrow Y$ une application lisse et C un fermé de X . Si f et ∂f sont transverses à Z sur C et $C \cap \partial X$ respectivement alors il existe une application lisse $g : X \rightarrow Y$ homotope à f telle que g et ∂g soient transverses à Z et que sur un voisinage de C on ait $f = g$.*

Puisque ∂X est fermé dans X on a le

Corollaire 2.2. *Si $f : X \rightarrow Y$ est telle que $\partial f : \partial X \rightarrow Y$ soit transverse à Z , alors il existe $g : X \rightarrow Y$ homotope à f telle que g soit transverse à Z .*

La conséquence la plus utile de ce corollaire est que si $h : \partial X \rightarrow Y$ est transverse à Z et peut se prolonger en une application lisse définie sur tout X , alors h peut se prolonger en une application lisse définie sur tout X et transverse à Z .

Nous terminons cette partie avec une preuve élégante du théorème 3. Soit donc une variété connexe et S une sous-variété de codimension au moins égale à 2. Soient $x, y \in M \setminus S$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe qui relie x et y . Il existe d'après 8 une courbe $\Gamma : [0, 1] \rightarrow M$ qui relie x et y (homotope à γ), qui est transverse à S . En raison des dimensions, transverse ici veut dire que l'image de Γ n'intersecte pas S .

2.2 Fonctions de Morse-Bott

Soit M une variété différentielle et soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. On dit que f est une fonction de *Morse-Bott* si :

- L'ensemble de ses points critique $\text{Crit}(f)$ se décompose en réunion finie de sous-variétés de M .
- Pour tout $x \in \text{Crit}(f)$, $T_x \text{Crit}(f) = \ker H_f(x)$ où $H_f(x)$ est la hessienne de f au point x , définie par

$$H_f(x)(u, v) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f)(x)$$

pour tout champs de vecteurs X et Y avec $X(x) = u$ et $Y(x) = v$.

Dans ce cas, pour tout point critique x de f ,

$$T_x M = T_x \text{Crit}(f) \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$$

où E_x^+ (respectivement E_x^-) est le sous-espace propre associé aux valeurs propres strictement positives (respectivement négatives) de H_f .

Exemples :

- Toute fonction de Morse est de Morse-Bott (la variété critique est discrète).
- La fonction $f(x, y, z) = z^2$ sur la sphère S^2 :

$$\text{Crit}(f) = \{(0, 0, -1)\} \cup \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0, 1)\}.$$

Champ gradient : Le champ gradient X_f est définie par :

$$g(X_f, Y) = \mathcal{L}_Y f,$$

de sorte que les points critiques de f correspondent aux point singuliers de X_f , i.e. les points fixes du flot $\exp(tX_f)$.

On considère désormais le champ gradient négatif $-X_f$ et on notera son flot (défini sur tout \mathbb{R} , puisque M est compacte) par ϕ_t .

Variétés stables et instables Pour toute composante critique C de $\text{Crit}(f)$, on considère la variété stable (respectivement instable) :

$$W^s(C) = \{x \in M, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) \in C\}$$

$$W^u(C) = \{x \in M, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) \in C\}$$

Proposition 7. *La variété stable $W^s(C)$ d'une composante connexe de $\text{Crit}(f)$ est une sous-variété et son espace tangent en tout $x \in C$ est donné par : $T_x W^s(C) = T_x C \oplus E_x^+$. Avec un résultat similaire pour la variété instable $W^u(C)$.*

Ceci résulte d'un théorème plus général, non trivial, qui est le Théorème des variétés stables et instables (en systèmes dynamiques hyperboliques). Dans le cas des fonctions de Morse-Bott, on peut retrouver le résultat ci-dessus grace au lemme suivant :

Lemme 2.2 (Lemme de Morse-Bott). *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse-Bott, soit C une composante connexe de dimension m de la variété critique $\text{Crit}(f)$. et soit $p \in C$. Il existe une carte centrée en p , (U, φ) telle que :*

- $\varphi(U \cap C) = \varphi(U) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, y = 0\}$,
- $f \circ \varphi^{-1}(x, y) = f(C) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_{n-m}^2$

où k est l'indice de la hessienne $H_f(p)$ et $f(C)$ est la valeur commune de f sur C .

Ceci implique que l'indice est localement constant, donc constant sur toute composante connexe C . Pour une preuve complète en peut se référer à [?].

Proposition 8. *Pour toute fonction de Morse-Bott sur une variété compacte sans bord,*

$$M = \bigcup_{C \subset \text{Crit}(f)} W^s(C) = \bigcup_{C \subset \text{Crit}(f)} W^u(C).$$

Démonstration. Montrons que tout point de M est dans une variété stable d'une composante critique. En remplaçant f par $-f$ on obtient que tout point est aussi dans une variété instable d'une composante critique de f .

Comme M est compacte, le champ gradient de f est complet, ce qui veut dire que son flot est défini sur tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $a \in M$, un point critique non critique. Le long de $\phi_t(a)$ la fonction f est strictement décroissante. En effet,

$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(a)) = \mathcal{L}_{X_f}f(\phi_t(a)) = -\|X_f\|^2(\phi_t(a)) < 0.$$

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\phi_t(a)) \geq \inf f$, la borne inférieure de f qui est finie par compacité de M . Il s'ensuit :

$$\int_0^{+\infty} \|\mathcal{L}_{X_f}\|^2(\phi_t(a)) dt \leq f(a) - \inf f < +\infty.$$

La convergence de l'intégrale implique alors qu'il existe une suite (t_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{L}_{X_f}\|(\phi_{t_n}) = 0$. Par compacité de M , quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\phi_{t_n}(a)$ converge vers $c \in M$. Le champ gradient s'annule donc en c et le point a appartient à la variété stable de la composante critique de c . \square

L'indice et le co-indice d'une composante critique C sont définis, respectivement, par :

$$n^-(C) = \dim W^u(C) - \dim C = \text{codim} W^s(C)$$

$$n^+(C) = \dim W^s(C) - \dim C = \text{codim} W^u(C).$$

Théorème 10. *Soit f une fonction de Morse-Bott sur une variété compacte, connexe M . Supposons que toute composante connexe de la variété critique $\text{Crit}(f)$ de f soit d'indice et de co-indice différent de 1. Alors les fibres $f^{-1}(c)$ ($c \in \mathbb{R}$), sont connexes (ou vides).*

Démonstration. Montrons qu'il y a exactement une composante critique d'indice zéro et, de même, une seule composante critique de co-indice zéro.

L'existence est immédiate, puisque sinon $M = \cup_C W^s(C)$ serait la réunion finie de sous-variétés de codimension supérieure ou égale à 2, ce qui est impossible.

Soit C_0 la réunion de toutes les composantes d'indice nulle. Comme

$$W^s(C_0) = M \setminus \left(\bigcup_{C \in \text{Crit}(f), n^-(C) \geq 2} W^s(C) \right)$$

et, pour toute composante critique $C \neq C_0$, la variété stable $W^s(C)$ est de codimension au moins 2, il s'ensuit que $W^s(C_0)$ est connexe (d'après 3).

Comme $W^s(C_0)$ est un ouvert, car de codimension zéro, alors C_0 est aussi connexe. Sinon, si $C_0 = U \cup V$ avec les deux ouverts U et V disjoints, alors $W^s(C_0) = W^s(U) \cup W^s(V)$ (réunion disjointe de deux ouverts) et nous aurions $W^s(C_0)$ non connexe. Un raisonnement similaire montre qu'il y a exactement une composante critique de co-indice zéro.

Notez également que si un collecteur critique est un minimum local ou maximale de f , alors il doit être d'indice zéro ou coindice zéro, respectivement. Comme il n'y a qu'une seule composante critique d'indice zéro, et une seule de co-indice zéro, on voit que f a

un minimum local unique (qui est donc le minimum) et un maximum local unique (qui est donc le maximum). Par conséquent, la composante critique d'indice zéro c'est là où f atteint son minimum, et la composante critique de co-indice zéro est là où f atteint son maximum.

Montrons que la fibre $f^{-1}(c)$ est connexe pour toute valeur régulière $c \in \mathbb{R}$ soit $c_0 < c_1 < \dots < c_N$ être les niveaux critiques de f . alors $C_0 = f^{-1}(c_0)$ est le collecteur critique relié de l'indice zéro, et $C_N = f^{-1}(c_N)$ le collecteur est connecté critique de coindex zéro.

Tout d'abord, nous montrons que $f^{-1}(c)$ est relié à $c_0 < c < c_1$ Pour ce faire, prendre les deux points $x_0, x_1 \in f^{-1}(c)$ et notez que les trajectoires $\phi_t(x_0)$ et $\phi_t(x_1)$ doivent converger vers des points $y_0, y_1 \in C_0$ comme $t \rightarrow \infty$ Ainsi, nous pouvons rejoindre $x_0 x_1$ par suivre les lignes de flux de ϕ_t de x_0 à y_0 et x_1 à y_1 , puis connectez y_0 à y_1 en C_0 , étant donné que C_0 est connecté. Nous avons alors seulement besoin avis que $\text{codim } C_0 = \dim M - \dim C_0 = \dim W^s(C_0) - \dim C_0 = n^+(C_0) \geq 2$, et donc l'examen des dimensions et de la stabilité théorème de transversalité nous permet de déplacer légèrement notre chemin donc il ne coupe pas C_0 . De là, nous pouvons déplacer le chemin jusqu'au niveau de c via le gradient, en laissant un chemin $f^{-1}(c)$ de x_0 à x_1 .

De là, nous supposons par induction que $f^{-1}(c)$ est connectée à des valeurs régulier $c < c_k$ Supposons donc que nous avons une valeur régulière c avec $c_k < c$ Prendre deux quelconques des points $x_0, x_1 \in f^{-1}(c)$, et les connecter via des chemins dans $f^{-1}(c)$ aux points $W^s(C_0)$ De là, nous pouvons relier ces points dans $W^s(C_0)$ aux points $f^{-1}(c_k - \epsilon)$ en utilisant le pente descendante écoulement. Ces points résultants peuvent être reliés entre eux depuis notre hypothèse inductive, $f^{-1}(c_k - \epsilon)$ est connecté. Encore une fois, par le théorème de stabilité, nous peut se déplacer légèrement dans cette voie afin qu'il soit transversal à l'ensemble des collecteurs instables.. Depuis $\text{codim } W^u(C_i) \geq 2$ pour tous $i \neq N$ notre chemin doit se trouver entièrement à l'intérieur $W^u(C_N)$ Nous pouvons maintenant utiliser le flux de déplacer ce chemin de retour au niveau de $f^{-1}(c)$ Ceci prouve donc que $f^{-1}(c)$ est connecté pour chaque valeur régulière $c \in \mathbb{R}$

3) $f^{-1}(c_j)$ est relié aux valeurs critiques restantes $0 < j < N$

Choisissez une valeur régulière $c > c_j$ ces pas qu'il existe des valeurs critiques entre c et c_j .

Ensuite, nous pouvons définir une surjection continue par $\psi : f^{-1}(c) \rightarrow f^{-1}(c_j)$ Défini par :

$$\psi(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) & \text{si } f(\phi_t(x)) > c_j \text{ pour tout } t > 0 \\ \psi_t(x) & \text{si } f(\phi_t(x)) > c_j \text{ pour certains } t. \end{cases}$$

Le fait que f est Morse-Bott montre que ψ est surjectif, et un examen de limites des lignes d'écoulement à gradient montre que est continue. Par conséquent, nous pouvons conclure cette $f^{-1}(c_j)$ est connecte .

Tanker dans son ensemble, nous voyons que la preuve est terminée. \square

2.3 Théorème de Atiyah-Guillemin-Sternberg

Cette partie sera consacrée au Théorème de convexité de Atiyah-Guillemin-Sternberg. Nous allons monter que toute action hamiltonienne d'un tore \mathbb{T}^m sur une variété symplectique (M, ω) compacte et connexe donne naissance à une application moment $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ équivariante qui possède des propriétés importantes :

1. Les fibres de μ sont connexes.
2. L'image de μ est convexe.
3. L'image de μ est exactement l'enveloppe convexe de l'image des points fixes de l'action torique.

Pour cela, nous allons commencer par un certains nombres de Lemmes, pour montrer que :

- L'ensemble des points fixe de l'action de tout sous-groupe du tore est une sous-variété presque complexe (donc symplectique, de dimension paire).
- les composantes de l'application moment sont des fonctions de Morse-Bott à indices et co-indices paires.
- Les fibres de μ sont connexes, par récurrence sur la dimension du tore.
- L'image de μ est convexe et égale à l'enveloppe convexe des valeurs critiques (image des composantes critiques).

Lemme 7.1 Supposons que (M, ω) est une variété symplectique compacte connexe avec une action symplectique d'un groupe compact $G \rightarrow (M, \omega) : \tau \mapsto \psi_\tau$ Il existe alors une structure presque complexe J sur M qui est compatible avec ω et invariant sous l'action de G . Par " invariant sous l'action de G ", nous voulons dire que $\psi_\tau^* J = J$ pour chaque $\tau \in G$.

Preuve. Il suffit de prendre toute g' métrique riemannienne et moyenne (que nous pouvons faire, puisque G est supposé être compact) pour obtenir une métrique g invariant : en d'autres termes :

$$g_p(X, Y) = \int_{\tau \in G} g'_p(d\psi_\tau X, d\psi_\tau Y) d\tau$$

pour tous les vecteurs X, Y en tout $T_p M$ espace tangent. Ensemble avec la forme symplectique ω , Ce invariante g induit une structure presque complexe compatible J . Ainsi, pour toute ψ_τ , nous avons :

$$g_p(X, Y) = \omega_p(X, J_p Y) = \psi_\tau^* \omega_p(X, J_p Y) = \omega_{\psi_\tau(p)}(d\psi_\tau(p)X, d\psi_\tau(p)J_p Y)$$

||

$$\psi_\tau^* g_p(X, Y) = g_{\psi_\tau(p)}(d\psi_\tau(p)X, d\psi_\tau(p)Y) \omega_{\psi_\tau(p)}(d\psi_\tau(p)X, J_{\psi_\tau(p)} d\psi_\tau(p)Y) .$$

pour tous les vecteurs X, Y dans un espace tangent $T_p M$. Par la non dégénère ω , nous devons avoir

$$d\psi_\tau(p)J_p Y = J_{\psi_\tau(p)} d\psi_\tau(p)Y \text{ i.e., } J_p Y = (d\psi_\tau(p))^{-1} J_{\psi_\tau(p)} d\psi_\tau(p)Y = \psi_\tau^* J_p Y \text{ Par conséquent, } \psi_\tau^* J = J \text{ si nécessaire.}$$

Proposition 7.2 Soit $H \subset G$ un sous-groupe. Soit $\text{Fix}(H) \subset M$ l'ensemble de points de M fixé par tous symplectomorphisme en $\text{Im}(H) \subset (M, \omega)$ c'est

$$\text{Fix}(H) = \bigcap_{h \in H} \text{Fix}(\psi_h)$$

Ensuite $\text{Fix}(H)$ est une sous-variété de M .

prouve soit $x \in \text{Fix}(H)$. pour tout $h \in H$ Pour le lemme7, 1 prouve que $d\psi_h(x) : T_x M \rightarrow$

$T_x M$ (du différentiel de l'symplectomorphisme ψ_h) est une action unitaire de G sur l'espace vectoriel complexe $(T_x M, \omega, J_x)$. Étant donné un vecteur $\xi \in T_x M$ il est unique géodésique γ (déterminé par notre invariant métrique riemannienne g précédemment déterminé) avec $\gamma(0) = x$ et la vitesse initiale $\gamma'(0) = \xi$, puis $\exp_x(\xi) = \gamma(1)$. Comme g est invariant sous l'action de G , il en résulte nécessairement que, depuis γ est une géodésique, est donc $\psi_h \circ \gamma$. Ainsi, nous avons une géodésique $\psi_h \circ \gamma$ avec $\psi_h \circ \gamma(0) = \psi_h(x) = x$ et la vitesse initiale $(\psi_h \circ \gamma)'(0) = d\psi_h(x) \circ \gamma'(0) = d\psi_h(x)\xi$. Par conséquent, $\exp_x(d\psi_h(x)\xi) = \psi_h \circ \gamma(1) = \psi_h(\exp_x(\xi))$. tiquement spéci :

$$\exp_x(d\psi_h(x)\xi) = \psi_h(\exp_x(\xi))$$

Par conséquent, il existe une correspondance entre les points fixes par ψ_h et les vecteurs fixé par $d\psi_h$. Nous pouvons donc conclure que :

$$T_x \text{Fix}(H) = \bigcap_{h \in H} \ker(1 - d\psi_h(x))$$

Explicitement, si nous prenons un vecteur $\xi \in T_x \text{Fix}(H)$ nous pouvons restreindre \exp_x à $\exp_x|_{T_x \text{Fix}(H)} : T_x \text{Fix}(H) \rightarrow \text{Fix}(H)$ de voir que $\exp_x(\xi) \in \text{Fix}(H)$. Ainsi, pour toute $h \in H$ nous avons $\psi_h(\exp_x(\xi)) = \exp_x(\xi) = \exp_x(d\psi_h(x)\xi)$, et fourni ξ est petit, \exp_x est injective. Ainsi, ξ est fixée par $d\psi_h(x)$ pour toute $h \in H$ et donc $\xi \in \bigcap_{h \in H} \ker(1 - d\psi_h(x))$. Par ailleurs, si nous prenons un vecteur $\xi \in \bigcap_{h \in H} \ker(1 - d\psi_h(x))$ pour tout $h \in H$ nous pouvons obtenir une géodésique $\gamma : \mathbb{C}[-1, 1] \rightarrow M$ par $\gamma(t) = \exp_x(d\psi_h(x)t\xi)$. Puis, pour tout $h \in H$, $\gamma(t) = \exp_x(d\psi_h(x)t\xi) = \exp_x(t\xi) = \psi_h(\exp_x(t\xi))$. Par conséquent $\gamma[-1, 1] \subset \bigcap_{h \in H} \text{Fix}(\psi_h) = \text{Fix}(H)$, Ainsi $\gamma'(0) = \xi \in T_x \text{Fix}(H)$.

Nous pouvons l'utiliser pour prouver que $\text{Fix}(H)$ est une sous-variété symplectique. Maintenant laisse $\xi \in T_x \text{Fix}(H)$. Ensuite, pour chaque $h \in H$, ξ est fixée par $d\psi_h(x)$. Depuis J_x est invariant sous l'action de G , nous avons $d\psi_h(x)J_x(\xi) = J_x d\psi_h(x)(\xi) = J_x(\xi)$. Ainsi, pour chaque $h \in H$, $d\psi_h(x)J_x(\xi) = J_x(\xi)$ et $J_x(\xi) \in \bigcap_{h \in H} \ker(1 - d\psi_h(x)) = T_x \text{Fix}(H)$. Par conséquent, pour chaque $x \in \text{Fix}(H)$, $T_x \text{Fix}(H)$ est un espace vectoriel symplectique, et nous conclure que $\text{Fix}(H)$ est une sous-variété symplectique.

Lemme 7.4. Supposons que (M, ω) est une variété symplectique compacte connexe avec Hamiltonien action tore $\mathbb{T}^m \rightarrow (M, \omega) : \theta \mapsto \psi_\theta$ avec un moment carte $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pour chaque $\theta \in \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^m$, soit H_θ la fonction hamiltonien associée $H_\theta = \langle \mu, \theta \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ensuite, le jeu critique de H_θ est égal à l'ensemble des points de M fixé par chaque symplectomorphisme dans $\text{Im}(T_\theta) \subset (M, \omega)$, où $T_\theta = \text{cl}(\{t\theta + K \mid t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\} / \mathbb{Z}^m)$. En d'autres termes,

$$\text{Crit}(H_\theta) = \bigcap_{\tau \in T_\theta} \text{Fix}(\psi_\tau).$$

Enfin, et surtout, H_θ est une fonction de Morse-Bott qui a ensemble critique $\text{Crit}(H_\theta)$ Une sous-variété symplectique et variétés critiques qui sont à la fois même dimension et de même index et noindex.

Preuve. Nous obtenons le vecteur champ X_{H_θ} sur M de résoudre $i_{X_{H_\theta}} = dH_\theta$, et par propriétés des cartes de moment, nous savons que X_{H_θ} est égal au vecteur champ généré

sur M par le sous-groupe à un paramètre fexp , $\{\exp(t\theta) | t \in \mathbb{R}\} \subset G$, et donc nous avons aussi :

$$\frac{d}{dt}\psi_{t\theta} = X_{H_\theta} \circ \psi_{t\theta}$$

Supposons donc que $x \in \text{Crit}(H_\theta)$. Puis $dH_\theta(x) = 0$, et depuis $i_{X_{H_\theta}}\omega = dH_\theta$, nous devons avoir $X_{H_\theta}(x) = 0$. Ainsi, $\frac{d}{dt}\psi_{t\theta}(\psi_{t\theta}^{-1}(x)) = 0$, et depuis $\psi_0(x) = x$, on doit $\psi_t(x) = x$ ont pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il en résulte par la continuité que x est fixé par la symplectomorphismes à la fermeture, aussi bien. Ainsi, $x \in \bigcap_{\tau \in T_\theta} \text{Fix}(\psi_\tau)$.

Alternativement, supposons que $x \in \bigcap_{\tau \in T_\theta} \text{Fix}(\psi_\tau)$. Alors $0 = \frac{d}{dt}\psi_{t\theta}(x) = X_{H_\theta} \circ \psi_{t\theta}(x) = X_{H_\theta}(x)$, et ainsi $i_{X_{H_\theta}(x)}\omega_x = dH_\theta(x) = 0$. Ainsi, $x \in \text{Crit}(H_\theta)$. Donc, $\text{Crit}(H_\theta) = \bigcap_{\tau \in T_\theta} \text{Fix}(\psi_\tau)$ Telle que revendiquée.

Il suit alors par le lemme 7.3 pour le sous-groupe $T_\theta \subset \mathbb{T}^m$ que $\text{Crit}(H_\theta)$ Est un symplectique de sous-variété et, par conséquent, a de nombreux composants nit. À tout point $x \in M$, considérons le Hessian $\nabla^2 H_\theta(x) : T_x M \rightarrow T_x M$. Nous affirmons que $dX_{H_\theta}(x) = -J_x \nabla^2 H_\theta(x)$ et par conséquent, $d\psi_{\exp(tx)}(x) = \exp(-tJ_x \nabla^2 H_\theta(x))$, etc. nous pouvons conclure que le noyau de $\nabla^2 H_\theta(x)$ est égal aux points xes de $d\psi_{\exp(t\theta)}(x)$. Par continuité, on voit que :

$$T_x \text{Crit}(H_\theta) = \bigcap_{\tau \in T_\theta} \ker(\text{Id} - d\psi_\tau(x)) = \ker \nabla^2 H_\theta(x)$$

Cela prouve que H_θ est une fonction de Morse-Bott. Nous affirmons maintenant que puisque chaque $d\psi_{\exp(tx)}(x) = \exp(-tJ_x \nabla^2 H_\theta(x))$ est unitaire, que $\nabla^2 H_\theta(x)$ commute avec J_x ; par conséquent, les espaces propres de $\nabla^2 H_\theta(x)$ sont invariants par J_x , et doit donc être même dimensions. Ainsi, nous voyons que les variétés critiques de H_θ sont encore dimensionnelle (car ils sont symplectique) et sont de même index et noindex.

Supposons que (M, ω) est une variété symplectique connecté muni d'une action hamiltonien du tore $T = T^n$. soit $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ l'application du moment de cette action, où \mathfrak{t} dénote l'algèbre de Lie de \mathbb{T} . Puis pour chaque $X \in \mathfrak{t}$ la fonction

$$\xi_X : M \rightarrow \mathbb{R}, \xi_X(x) = \langle \mu(x), X \rangle$$

est une fonction de Morse-Bott. Les sous-variétés critiques sont des sous-variétés symplectiques \mathbb{T} -invariants de M , et tous les indices et indices Morse sont encore.

Preuve. Fixer une structure J presque complexe et métrique h sur TM qui sont équivariante domptée par ω .

Pour chaque sous-ensemble $A \subset \mathbb{T}$ on note $\text{Fix}_A(M)$ l'ensemble des points de M fixé par tous les éléments en A , i.e.

$$\text{Fix}_A(M) = \{x \in M; a.x = x, \forall a \in A\}$$

lemme

Supposons G est un sous-groupe de \mathbb{T} . dénoté par \bar{G} il est fermeture. alors

$$\text{Fix}_G(M) = \text{Fix}_{\bar{G}}(M)$$

est une union de \mathbb{T} -invariant sous-variétés symplectiques de M .

prouve

Il est clair que $Fix_G(M) = Fix_{\bar{G}}(M)$. Comme \mathbb{T} il est commutative, l'ensemble $Fix_G(M)$ est \mathbb{T} -invariant .

soit $x \in Fix_G(M)$ et $g \in G \setminus \{1\}$ Noterons A_g du différentiable en x de la carte lisse

$$M \ni y \longmapsto g.y \in M.$$

La carte A_g est un isomorphisme unitaire de l'espace hermitique $(T_x M, h, J)$ Définir

$$Fix_g(T_x M) := \ker(1 - A_g) \text{ et } Fix_G(T_x M) = \bigcap_{g \in G} Fix_g(T_x M)$$

Considérons l'application exponentielle définie par le équivariante apprivoisée métrique h

$$exp_x : T_x M \longrightarrow M.$$

Fix $r > 0$ telle que exp_x est un difféomorphisme de $\{v \in T_x M; |v|_h < r\}$ sur un voisinage ouvert de $x \in M$.

Comme g est une isométrie , Il application géodésiques à géodésiques et on en déduit que $\forall v \in T_x(M)$ telle que $|v|_h < r$ nous avons

$$(exp_x(v)).g = exp(A_g v).$$

Ainsi $exp(v)$ est un point fixe de g si et seulement si v est un point fixe de A_g , i.e., $v \in T_x(Fix_G(T_x M))$. On en déduit que l'application exponentielle induit un homéomorphisme d'un voisinage de l'origine dans le espace vectoriel $Fix_G(T_x M)$ à un voisinage ouvert de $x \in Fix_G(M)$. Cela prouve que $Fix_G(M)$ est une sous-variété de M et pour chaque $x \in Fix_G(M)$, nous avons

$$T_x Fix_G(M) = Fix_G(T_x M)$$

Le sous-espace $Fix_G(T_x M) \subset T_x$ est J -invariant, ce qui implique que $Fix_G(M)$ est une sous-variété symplectique.

Soit $X \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$ et désignons par G_X l'un paramètre sous-groupe

$$G_X = \{e^{tX} \in \mathbb{T}; t \in \mathbb{R}\}$$

Sa fermeture est un sous-groupe connexe de \mathbb{T} , et il est donc un \mathbb{T}_X tore de dimension positive. Noterons \mathfrak{t}_X son algèbre de Lie. Considérons la fonction

$$\xi_X : M \rightarrow \mathbb{R}, \xi_X(x) = \langle \mu(x), X \rangle, x \in M.$$

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème Il nous faut montrer que les composantes de $Fix_{\mathbb{T}_X}(M)$ sont des variétés critiques non dégénérés.

Soit C une composante connexe de $Fix_{\mathbb{T}_X}(M)$ et choisir $x \in C$ Comme dans la preuve du lemme , pour chaque $t \in \mathbb{R}$ on note $A_t(X) : T_x M \longrightarrow T_x M$ le différentiable en x de l'application lisse

$$M \ni y \longmapsto y.e^{tX} =: \phi_t^X(y) \in M$$

Alors $A_t(X)$ est un opérateur unitaire et

$$\ker(1 - A_t(X)) = T_x C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous laissons

$$\dot{A}_X := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t.$$

Puis $\dot{A}_X \dot{A}$ est un endomorphisme anti-hermitienne de $(T_x M, J)$ et nous avons

$$A_t(X) := e^{\dot{A}_X t} \text{et } T_x F = \ker \dot{A}.$$

Notez que

$$\dot{A}_X u = [U, X^b]_x, \forall u \in T_x M, \forall U \in \text{Vect}(M), U(x) = u$$

En effet,

$$\dot{A}_X u = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t(X)u = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((\phi_t^X)_* U)_x = -(L_{X^b} U)_x = [U, X^b]_x.$$

Considérons le Hessien H_x de ξ_X du x pour $U_1, U_2 \in \text{vect}(M)$

$$u_i := U_i(x) \in T_x M,$$

et nous avons

$$H_x(u_1, u_2) = (U_1(U_2 \xi_X))|_x.$$

D'autre part,

$$U_1(U_2 \xi_X) = U_1 d\xi_X(U_2) = U_1 \omega(X^b, U_2) = (L_{U_1} \omega)(X^b, U_2) + \omega([U_1, X^b], U_2) + \omega(X^b, [U_1, U_2]).$$

At x , Nous avons

$$[U_1, X^b]_x = \dot{A}u_1, X^b(x) = 0,$$

et nous déduit

$$H_x(u_1, u_2) = \omega(\dot{A}_X u_1, u_2) = h(J \dot{A}_X u_1, u_2)$$

Maintenant constater que $B = J \dot{A}$ est un endomorphisme symétrique de $T_x M$ qui commute avec J . De plus

$$\ker B = \ker \dot{A} = T_x C.$$

Ainsi B induit un isomorphisme linéaire symétrique $B : (T_x C) \longrightarrow (T_x C)$ Comme il commute avec J , tous ses espaces propres sont J -invariant et en particulier même dimensions. Cela prouve que C est une sous-variété critique non dégénéré de ξ_X et son indice Morse est encore, complétant ainsi la preuve du théorème

Définition 7.5. On note les composants de la carte de ce moment

$\mu : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ comme $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$. Nous disons que μ est irréductible si les 1-formes $d\mu_1, \dots, d\mu_m$ sont linéairement indépendants, à savoir, étant donné un scalaire $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, puis

$$\alpha_1 d\mu_1(\xi) + \dots + \alpha_m d\mu_m(\xi) = 0$$

à tous les points $x \in M$ et tous les vecteurs $\xi \in T_x M$ si et seulement si $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Nous dit le μ est réductible autrement.

Definition 7.6. On dit qu'un ensemble de nombres réels $\{\theta_i | 1 \leq i \leq s, \theta_i \in \mathbb{R}\}$ est rationnellement à charge si $\frac{\theta_i}{\theta_j}$ est rationnel pour tous i non nul; $\theta_{i,j}$ avec $1 \leq i, j \leq s$.

Proposition 7.7. Si μ est réductibles, alors nous pouvons le réduire à l'action d'un $(m-1)$ -torus. tiquement Speci, il existe une action de tore hamiltonien $\mathbb{T}^{m-1} \longrightarrow (M, \omega)$:

$\tau \rightarrow \psi'_\tau$ avec un moment la carte $\mu' : M \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ et une matrice entière $A \in \mathbb{Z}^{(m-1) \times m}$ de telle sorte que, pour $\theta \in \mathbb{T}^m$ et $x \in M$:

$$\psi_\theta = \psi'_{A\theta} \text{ et } \mu(x) = A^T \mu'(x)$$

Preuve. Notez que nous avons $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m$ et $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^m$, et celle donnée $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathfrak{g}$ et $\mu(p) = (\mu_1(p), \dots, \mu_m(p)) \in \mathfrak{g}^*$ alors
 $\langle \mu(p), \theta \rangle = \sum_{i=1}^m \theta_i \mu_i(p)$. Par conséquent, nous peut écrire l'action hamiltonien $H_\theta < \mu(p), \theta >$ l en tant que :

$$H_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i \mu_i$$

Ensuite, nous avons aussi :

$$dH_\theta = \theta_1 d\mu_1 + \dots + \theta_m d\mu_m$$

Par hypothèse μ est réductibles, et donc il doit exister une certaine non nulle $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que $dH_\theta(x)(\xi) = 0$ à tous les points $x \in M$ et tous les vecteurs $\xi \in T_x M$. Il en résulte donc que $H_\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$ est constante pour cela θ . Ensuite, nous avons également noter que $H_{t\theta} = \text{Constante}$ et donc $dH_{t\theta} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Depuis $i_{X_{H_{t\theta}}} \omega = dH_{t\theta}$, nous ont $X_{H_{t\theta}} = 0$ et donc $\psi_{\exp(t\theta)} = Id$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Enfin, notez que $\exp : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ est la même que la saillie naturelle $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$.

Maintenant, prenez un maximum rationnellement dépendant de sous-ensemble $\{\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_l} | 1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq m\} \subset \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, et réorganiser les indices de sorte que ce sous-ensemble est dans les premiers l taches. Il est un exercice pour montrer que la projection de la ligne $L_a = \{t(\theta_1, \dots, \theta_l) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^l$ au tore par l'intermédiaire de la saillie \mathbb{T}^l naturelle $\pi : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l / \mathbb{Z}^l$, referme', à savoir, $\pi|_{L_a}$ est pas surjective. Si $L \neq 1$, alors nous pouvons dire en outre que $\pi(L_a)$ est pas dense dans \mathbb{T}^l . Il est aussi un exercice pour montrer que la projection de la ligne $L_b = \{t(\theta_{l+1}, \dots, \theta_m) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{m-l}$ au tore par l'intermédiaire de la saillie \mathbb{T}^{m-l} naturelle $\pi : \mathbb{R}^{m-l} \rightarrow \mathbb{T}^{m-l}$ est dense, à-dire, $cl\{\pi(L_b)\} = \mathbb{T}^{m-l}$. Si $m-l \neq 1$, alors nous pouvons dire en outre que $\pi(L_b)$ fait pas 'fermer'.

Ainsi, nous concluons que nous pouvons trouver une direction rationnelle dépendante $\nu \in cl\{\exp(t\theta) | t \in \mathbb{R}\} = cl\{\pi(L)\} \subset \mathbb{T}^m$ (où $L = \{t\theta | t \in \mathbb{R}\}$). Pour les premiers l positions, prendre $\pi(\theta_1, \dots, \theta_l)$ et pour les dernières positions de $m-l$ nous pouvons choisir des valeurs compatibles depuis Nous avons tous $cl\{\pi(L_b)\} = \mathbb{T}^{m-l}$ à choisir; par exemple, nous pourrions prendre θ_1 pour tous les des positions restantes. Depuis $\psi_\gamma = Id$ pour chaque $\gamma \in \{\exp(t\theta) | t \in \mathbb{R}\} = \pi(L)$, on en déduit par la continuité que depuis $\nu \in cl\{\exp(t\theta) | t \in \mathbb{R}\} = cl\{\pi(L)\}$ nous devons avoir $\psi_\nu = Id$.

Il est immédiat que nos observations précédentes au sujet θ sont vraies pour ν aussi bien (Si l'on considère ν comme un élément de \mathbb{R}^m) : En particulier, $\psi_{\exp(t\nu)} = Id$ pour toutes $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, nous pouvons quotient la direction de ν : il est facile de montrer que $\mathbb{R}^m / L \cong \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \cap \nu^\perp$ où $L = \{t\nu | t \in \mathbb{R}\}$ et ν^\perp est le plan unique \mathbb{R}^m normal ν . Cependant, nous affirmons qu'il est seulement parce que ν est rationnellement dépendante que $\mathbb{R}^m \cap \nu^\perp / \mathbb{Z}^m \cong \mathbb{R}^{m-1} / \mathbb{Z}^{m-1}$ (car ν En rationnellement dépendant, il doit être un vecteur non nul avec des composantes entières dans $\mathbb{R}^m \cap \nu^\perp$, etc.). alors la matrice qui prend $\mathbb{R}^m \cap \nu^\perp / \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$ à $\mathbb{R}^{m-1} / \mathbb{R}^{m-1}$ est une matrice entière $A \in \mathbb{Z}^{(m-1) \times m}$. Ceci est la matrice souhaitée.

Théorème 11. Soit M une variété symplectique compacte et connexe. Considérons une action hamiltonienne d'un tore \mathbb{T}^m sur M d'application moment $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ (où on a identifié le dual de l'algèbre de Lie de \mathbb{T}^m avec \mathbb{R}^m). Alors

- Les fibres de μ sont connexes.
- L'image de μ est convexe.
- L'image de μ est l'enveloppe convexe de l'image des points fixes de l'action du tore \mathbb{T}^m sur M .

Démonstration. Première étape : Les fibres $\mu^{-1}(\eta)$ des valeurs régulières η sont connexes. Nous montrerons ce résultat par récurrence sur m la dimension du tore (et donc de l'image de μ). Le cas initial $m = 1$ est une conséquence des résultats obtenus sur les fonctions de Morse-Bott. Soit $m > 1$. Supposons que pour les actions de tore de dimension $m - 1$, les fibres de l'application moment aux valeurs régulières sont connexes. Ayant identifié \mathfrak{t}^* à \mathbb{R}^m notons $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$. Soit $(\eta_1, \dots, \eta_{m-1})$ une valeur régulière de $(\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$ pour tout $x \in M$, si $\forall 1 \leq j \leq m-1, \mu_j(x) = \eta_j$ alors $(d\mu_1(x), \dots, d\mu_{m-1}(x))$ est une famille libre de T_x^*M

soit $Q = \bigcap_{j=1}^{m-1} \mu_j^{-1}(\eta_j)$. Par hypothèse de récurrence, Q est une sous-variété compacte connexe de M .

Considérons $\mu_m : M \rightarrow \mathbb{R}$. Pour que $x \in Q$ soit un point critique de $\mu_m|_Q$ il faut et il suffit que $d\mu_m(x)$ soit une combinaison linéaire des $d\mu_j(x), \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j d\mu_j(x)$ en effet, $T_x^*Q = \bigcap_{j=1}^{m-1} \ker(d\mu_j(x))$. Dans ce cas, x est un point critique de H_θ ou $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, 1)$. Cette fonction est de Morse-Bott et x appartient à une de ses sous-variétés connexes critiques, C .

Montrons que C et Q sont transversales, c'est à dire que $T_x M = T_x Q + T_x C$. D'après la proposition précédente 2, C est une sous-variété symplectique de M . Le groupe étant commutatif, H_θ commute avec tous les μ_j et c'est aussi le cas pour leurs flots hamiltoniens respectifs. On en déduit que les champs hamiltoniens X_j associés aux applications μ_j sont tangents à C . Mais, comme $(d\mu_1(x), \dots, d\mu_{m-1}(x))$ est libre, $(X_1(x), \dots, X_{m-1}(x))$ est une famille libre de $T_x C$ qui engendre un sous-espace de $T_x M$ supplémentaire à $T_x Q$. En ajoutant une base de $T_x Q$, on obtient une famille libre de rang n . C et Q sont bien transverses.

On en déduit que $(T_x Q \cap T_x^\perp C) \oplus T_x C = T_x M$, mais H_θ est une fonction de Morse-Bott donc sa hessienne est non-dégénérée sur $(T_x Q \cap T_x^\perp C)$. De plus $\mu_j|_Q - H_j|_Q = \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j \eta_j$ est constante donc $\mu_j|_Q$ est une fonction de Morse-Bott. Son indice et son coindice en chaque point sont les mêmes que ceux de H_θ donc pairs. La proposition précédente permet de conclure que ses niveaux sont connexes. Pour tout $\eta_m \in \mathbb{R}, \mu^{-1}(\eta) = Q \cap \mu_m^{-1}(\eta_m) / \mu_m^{-1}(\eta_m) \subset Q$ est connexe.

En particulier, pour toutes les valeurs régulières $\eta \in \mathbb{R}$ $\mu^{-1}(\eta)$ est connexe. **Deuxième étape :** L'image de μ est convexe. Le cas unidimensionnel découle de la connexité de M . Considérons une projection linéaire quelconque $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Alors la composition $v = \pi \circ \mu$ est l'application moment d'une action de tore.

Soit c une valeur régulière de v . On en déduit que $\mu(M) \cap \pi^{-1}(c) = \mu(v^{-1}(c))$ est connexe ou vide. Par le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs singulières de v est de mesure nulle donc en particulier, l'image par μ de l'ensemble de ces dernières est d'intérieur

vide. Mais l'image de μ est fermée donc le résultat est aussi valable pour les valeurs singulières de v . Comme ceci est vrai pour toutes les projections π , l'image de μ est convexe.

Troisième étape : L'image de μ est exactement l'enveloppe convexe de ses valeurs critiques. Pour les éléments $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in T\mathbb{Q} - \text{libres}$, l'adhérence du tore engendré par θ est T tout entier donc la fonction $\langle \mu, \theta \rangle$ a les mêmes valeurs critiques que μ . En particulier, elle atteint son maximum en une telle valeur. Mais $\langle \mu, \theta \rangle$ est la projection de μ sur une droite. Ceci étant vrai pour presque toutes les droites de \mathbb{R}^m , on en déduit que $\mu(M) \subset \text{Conv}(\mu(\text{Crit}(\mu)))$. \square

Exemples et applications



3.1 Théorème de Schur-Horn

Nous présentons ici un résultat dû à Schur et Horn qui a servi d'inspiration pour le théorème de convexité.

Soit $\mathcal{H}(n)$ l'ensemble des matrices A de taille n , complexes hermitiennes, i.e. $A^* = A$. Rappelons qu'une matrice hermitienne A possède les propriétés suivantes :

- elle est diagonalisable,
- ses valeurs propres sont réels,
- les éléments de sa diagonale sont réels.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit \mathcal{O}_λ le sous-ensemble de $\mathcal{H}(n)$ constitué des matrices de spectre égale à λ .

Théorème 12 (Théorème de Schur-Horn). Soit $\mu : \mathcal{O}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\mu(A) = (a_{11}, \dots, a_{nn}),$$

où (a_{11}, \dots, a_{nn}) est la diagonale de A . Alors $\mu(\mathcal{O}_\lambda)$ est l'enveloppe convexe des $\{\sigma^* \lambda = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n\}$.

Réciproquement, pour toute combinaison convexe D des $\{\sigma^* \lambda, \sigma \in S_n\}$, il existe une matrice hermitienne A , de diagonale D dont les valeurs propres comptées avec multiplicité forment le vecteur λ .

Démonstration. Considérons l'action coadjointe du groupe unitaire $U(n)$ sur une orbite \mathcal{O} de $u(n)^*$ qui s'identifie à $u(n) = i\mathcal{H}(n)$ par le produit scalaire $\langle A, B \rangle = -\text{tr}(AB)$. Alors cette action est hamiltonienne et l'application moment μ est l'inclusion

$$\mathcal{O} \hookrightarrow u(n)^* \cong u(n).$$

En restreignant l'action au sous-groupe diagonal T de $U(n)$ on obtient une action de tore hamiltonienne d'application moment la projection sur la diagonale de μ . Les points fixes de l'action étant exactement les matrices diagonales, pour toute matrice $A \in \mathcal{O}$, la diagonale est une combinaison convexe des matrices diagonales de la classe de conjugaison. Le résultat est alors obtenu simplement en multipliant la matrice hermitienne par i et en appliquant ce qui précède. \square

Conclusion



Nous avons montré dans ce mémoire un théorème de convexité très important dans la catégorie des variétés toriques (variétés symplectiques compactes connexes sur lesquelles agit un tore de façon hamiltonienne).

Si M est torique d'application moment μ alors la caractéristique d'Euler de M est égale au nombre de sommets de $\mu(M)$ (conséquence des inégalités de Morse pour les composantes de μ qui sont des applications de Morse-Bott *parfaites*).

La question naturelle qui se pose : connaissant le type de l'image de l'application moment sur une variété symplectique, peut-on déduire des informations sur la variété elle-même ? En d'autres termes, est-il possible de classifier les variétés symplectiques suivant le type de polyèdre convexe donné par l'application moment ? La réponse est oui et elle est donnée par un Théorème de Delzant qui a de nombreuses applications en géométrie algébrique. Voir [5].



Bibliographie

- [1] M. F. Atiyah. *Convexity and commuting hamiltonians*. Bulletin of the London Mathematical Society, 14(1), 1-15, 1982.
- [2] M. Audin, *Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Birkhäuser Verlag, 2004.
- [3] A. Banyaga & D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Springer ; 2004.
- [4] A. Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin 2001.
- [5] t. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes du moment*. Bull. Soc. Math. fr. 116 N°3 315-339 (1988).
- [6] V. Guillemin & A. Pollack, *Differential Topology*. Prentice Hall (1974).
- [7] V. Guillemin & S. Sternberg. *Convexity properties of the moment mapping*. Inventiones Mathematicae, 67, 491–513, 1982.
- [8] D. McDuff & D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, USA, 1999.

Moment map in geometry

ABSTRACT

This Master thesis is devoted to the study of the Atiyah-Guillemin-Sternberg theorem. This convexity theorem is very important and has many applications in geometry. We have developed the notion of moment map to prove this theorem and we have adopted the approach of Morse theory.

We have developed some examples and outlined some important applications in symplectic geometry, namely the Schur-Horn theorem, completely integrable systems.

Keywords : symplectic manifolds, hamiltonian action, moment map, Morse-Bott functions, almost-complex structures, convexity.

Application moment en géométrie

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à l'étude du Théorème de Atiyah-Guillemin-Sternberg. Ce Théorème de convexité est très important et possède de nombreuses applications en géométrie. Nous avons développé la notion d'application moment pour démontrer ce Théorème et nous avons adopté l'approche de la théorie de Morse.

Nous avons développé quelques exemples et exposé quelques applications importantes en géométrie symplectique, à savoir : le Théorème de Schur-Horn, systèmes complètement intégrables.

Mots-clés : Variétés symplectiques, actions hamiltoniennes, application moment, fonctions de Morse-Bott, structures presque-complexes, convexité.