UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :DOUBATE Mebarka

Thème

Méthode de Newton semi-régulière pour le problème d'obstacle

Soutenu publiquement le : 10/06/2016

Devant le jury composé de :

Chacha Djamal Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.B. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Ghezal Abderrazek	M.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Merabet Ismail	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Dieu le tout puissant, mon cérteur. A mon père, en signe d'amour, de reconnaiance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacriffices dont il a fait preuve à mon égard. A ma mère, ma raison d'être, ma raisonde vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin et m'illumine de deouceur et d'amour. A mon maris "**Abd Elbasset**" et à mon père des enfants pour soutenir le sien et arrêtez. A m'enfant de plus têtr ne me voit lueur vaillante dethight ensinte et son frères **Mariya** et **Loudjaine** . A tous la famille **DOUBBAT** et **BAHRI** de leur enfant au grand.

Remerciement

Tout d'adord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble.

J'exprime ma gratiude, mes remerciements à mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider. Je tiens a remercier vivement :
Mon enncadreur **Mr. Smail Merabet** qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail. Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé et encouragé le long ce travail.

Table des matières

Notations

- V : Espace de Hilbert avec le produit scalaire(.,.) et la norme associée $\|.\|$.
- K : Est un ensemble non vide vonvexe fermé de V.
- Ω : Un ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$.
- $V^{'}$: L'espace dual de V.
- J_h^1 : Est l'interpolé de Lagrange .
- V_h : Un espace de dimonsion finie dans V.
- Δ : Laplacian.
- $\mathcal{A}$: L'ensemble actif.
- $\mathcal{I}$: L'ensemble inactif.
- λ : Multiplicateur de Lagrange.
- $R_{\tilde{\Omega}}$: L'opérateur de restriction.

Introduction

Le problème d'obstacle consiste à étudier les déplacements d'une membrane élastique sous l'action des forces extérieures et des conditions aux limites. Mathématiquement ce probléme peut être posé comme un probléme d'optimisation convexe formulé sous forme d'une inéquation variationnelle . Problème de frontière libre ou comme problème non linéaire de complémentarité. Le mathématique formulatins de ce problème apparît dans beaucoup d'autres applications : filtration liquide dans le milieux poreux l'élastoplasticité, le contrôle optimale et les mathématiques de finance.
Les formulations du problème d'obstacle et de l'existence de la solution ont élé études dans beaucoup de travaux par exemple par G. Stampacchia, L.A. Caffarelli, A. Friedman. Bien qu'il y ait des résultats sur l'existence de la solution, il est difficile de trouver cas analytique de solution en général. C'est pourquoi les methodes efficaces de la concluion de la solution numérique de ce problème prenez l'endroit important dans les applications.
Ce mémoire est divisé en qutre chapitres. On débute notre travail par un chapitre sur l'existence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles et quelque théorème pour cela.
Le deuxième chapitre est consacré a l'étude d'approximation par éléments finis

du problème d'obstacle.

Le troisième chapitre, on passe à l'étude le méthode de Newton semi-régulière.

Dans le dernier chapitre, on va donner des tests numériques sous freefem++.

Nous terminons par une conclussion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Modélisation mathématique du problème d'obstacle

Dans ce chapitre nous étudions le problème d'obstacle. Nous donnons le méthode physique du problème d'obstacle et dérivent plus loin les différents formulations mathématiques pour ceci problème. Nous montrons l'équivanlence de ces formulations et analysons plus loin l'existenece et l'unicité de la solution de ces formulations.

1.1 Position du problème

Le méthode physique :

Considérons un fil circulaire horizontal et une membrane accrocrochant sur ce fil. Nous supposons que cette membrane est horizontale et au-dessous d'un plat, Quand nous chargeons membrane avec une force f dans la direction verticale, il subit le déplacement et nous obtenez un secteur de contact entre la membrane et l'obstacle qui est le plat. Cet seteur de contact s'appelle l'ensemble de coïncidence .

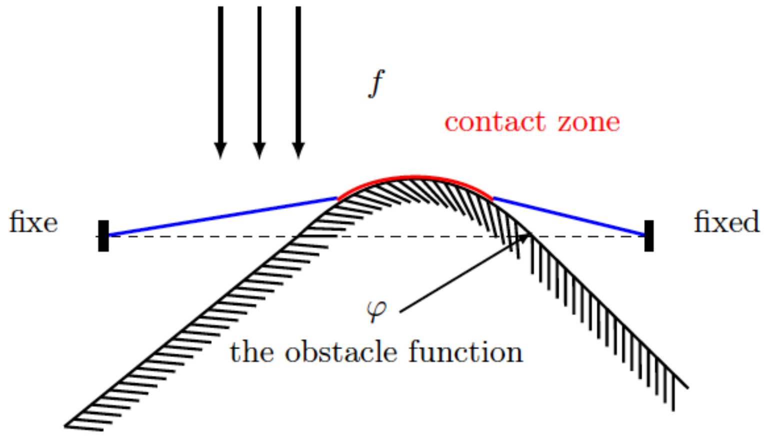

FIGURE 1.1 – Problème d'obstacle

La frontière de l'ensemble de coïncidence s'appelle la frontière libre pour l'obstacle problème. l'emplacement de cette frontière n'est pas apriori connu et sa partie de notre problème.

Formulation mathématique :

Nous donnons maitenant un modèle mathématique simple pour ce problème. Nous supposons un homogène membrane représentée par un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une distance g du plat (obstacle), Quand cette membrane est chargée avec uneforce f dans la verticale direction, il subit un déplacement . Soit v décrire la nouvelle position de cette membrane à un poit $(x, y) \in \Omega$. L membrane est restcreinte de dessous par a plat horizontal c-à-d

$$v \geq 0 \quad sur \quad \Omega$$

En outre le fil est décrit par

$$v = \quad constante \quad = g \quad sur \quad \Omega$$

Du calcul des variations, la superficie de la membrane déformée est indiquée par superficie

$$superficie \quad Area \ = \int_{\Omega} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} dxdy$$

Nous supposons que l'énergie potentielle de la membrane guidée est proportionnelle à le chargemant du secteur de sa surface telle que

$$P(v) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} dxdy - mes(\Omega)$$

Où $mes(\Omega)$ est la superficie de la membrane undeflected, petits déplacements arrogants $((v-g) << 1)$ des termes évolués sont négligés. Par conséquent nous obtenons

$$P(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

Le travail des forces externes, correspondant à v est donné par

$$E(v) = \int_{\Omega} fvdxdy$$

Et énergie totale

$$j(v) = P(v) - E(v) \ i.e$$
$$j(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} fvdxdy.$$

Théorème 1.1.1 *Soit K un sous ensemble convexe fermé et non vide de V, Alors pour tout $x \in V$, il existe un unique $y \in K$ telle que*

$$\inf_{x \in K} \|x - z\| = \|x - y\| \quad \forall \, z \in K$$

Théorème de Représentation de Ries

Théorème 1.1.2 *Soit V un espace de Hilbert, pour tout $F \in V'$ (dual de V), il existe un unique $v \in V$ telle que :*

$$F(u) = (u, v) \quad \forall \, u \in V$$

et de plus :

$$\|F\|_{V'} = \|v\|_V$$

Preuve. Voir ([2]) ■

1.2 Inéquations variationnelles elliptiques

Définition 1.2.1 *On appelle inéquation variationnelle elliptique tout inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} \textit{trouver } \ u \in K \ \textit{ telle que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u) \ \ \forall v \in K \end{cases} \tag{1.1}$$

1.3 Théorème de Stampacchia

Théorème 1.3.1 *Soit V un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $(.,.)$, soit K une partie convexe fermée non vide de V, $a(u,v) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive qui :*

- *Continue sur $V \times V : \exists\, \alpha > 0 \quad \forall u, v \in V$*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|.\|v\| \tag{1.2}$$

- *Coercive sur $V : \exists\, \alpha > 0 \quad \forall v \in V$*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \tag{1.3}$$

Et $L(.)$ une forme linéaire continue sur V. Alors l'inéquation variationnelle (1.1) admet une solution unique.
Si de plus la forme a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$$

Pour tout v de K, en particulier :

$$\exists!\ u \in K\ J(u) = \min_{u \in K} J(v) \tag{1.4}$$

Preuve. Unicité :

Sopposons u_1, u_2 solution du problème (1.1) alors

$$\begin{cases} a(u_1, v-u_1) \geq (f, v-u_1) \ \ \forall v \in K \\ a(u_2, v-u_2) \geq (f, v-u_2) \ \ \forall v \in K \end{cases} \tag{1.5}$$

On pose $v = u_2$ dans (1.5) et $v = u_1$ dans (1.5), on a

$$\begin{cases} a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f, u_2 - u_1) \\ a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f, u_1 - u_2) \end{cases} \tag{1.6}$$

On addtition (1.6), on obtient

$$a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) \geq 0$$

$$a(u_2 - u_1, u_1 - u_2) \geq 0$$

D'aprés la coercivété de $a(.,.)$, on a

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$$\|u_1 - u_2\| = 0$$

$$u_1 = u_2$$

Existence. Soient $\rho > 0$ et le problème auxilliaire suivante

$$(P_{aux}) \begin{cases} trouver \;\; w \in K \;\; telle \;\; que \\ (w, v - w) \geq \rho(-Au + l, v - w) + (u, v - w) \end{cases} \tag{1.7}$$

On a

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u)$$

$$(Au, v - u) \geq (l, v - u)$$

$$0 \geq (-Au, v - u) + (l, v - u)$$

$$(u, v - u) \geq \rho(-Au + l, v - u) + (u, v - u)$$

telle que u fixé dans K

Donc w vérifie

$$(w, v - w) \geq (\rho(-Au + l) + u, v - w) \;\; \forall \, v \in K$$

Si on pose

$$F_{\rho,u} = \rho(-Au + l) + u$$

$$(w, v - w) \geq (F_{\rho,u}, v - w)$$

D'aprés la theoémè de projection w existe et unique

$$w = P_K.F_{\rho,u}$$

Soit l'application

$$T_\rho : u \longrightarrow w \quad pour \;\; \rho > 0 \; fixe$$

$$w = T_\rho u$$

Si T_ρ admet un point fixé $u = T_\rho u$, alors u est solution de $(P_{aux}) \Rightarrow u$ solution de (1.1)
Donc, il suffit de montrer que T_ρ est structement contractant (i.e)

$$\|T_\rho u_1 - T_\rho u_2\| \leq C\|u_1 - u_2\| \qquad C > 1$$

$$\|w_1 - w_2\| \leqslant C\|u_1 - u_2\|$$

$u_1 \longrightarrow w_1$ et $u_2 \longrightarrow w_2$

$$\begin{cases} (w_1, v - w_1) \geq (F_{\rho,u_1}, v - w_1) \;\; \forall v \in K \\ (w_2, v - w_2) \geq (F_{\rho,u_2}, v - w_2) \;\; \forall v \in K \end{cases} \tag{1.8}$$

Donc pour $v = w_2$ et $v = w_1$ dans (1.9), on a :

$$\begin{aligned} &-(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \geqslant (F_{\rho,u_1} - F_{\rho,u_2}, w_1 - w_2) \\ &\|w_1 - w_2\|^2 \leqslant (F_{\rho,u_1} - F_{\rho,u_2}, w_1 - w_2) \\ &\leqslant ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \\ &\leqslant \|(-\rho A + I)(u_1 - u_2)\|.\|w_1 - w_2\| \end{aligned}$$

Alors

$$\|w_1 - w_2\| \leqslant \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|$$

$\exists \rho > 0$ telle que $\|-\rho A + I\| < 1$

On a :

$$\|(-\rho A + I)v\|^2 = ((-\rho A + I)v, (-\rho A + I)v)$$
$$= (-\rho Av + v, -\rho Av + v)$$
$$= \rho^2 (Av, Av) - 2\rho(Av, v) + (v, v)$$
$$\leqslant \rho^2 \|A\|^2 . \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \|v\|^2$$
$$\leqslant (\rho^2 \|A\|^2 - 2\rho\alpha + 1).\|v\|^2$$

Pour $\rho \in]0, \frac{2\alpha}{\|A\|^2}[$, alors

$$\rho^2 \|A\|^2 - 2\rho\alpha + 1 < 1$$
$$\rho(\rho\|A\|^2 - 2\alpha) < 0$$
$$\rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$$

D'où $\|-\rho A + I\| < 1$

Par conséquent $\exists \ C > 1$

$$\|w_1 - w_2\| \leqslant C\|u_1 - u_2\|$$

D'où $T_\rho : u \longrightarrow w$ est strictement contrante alors admet un point fixe u. ■

Lemme 1.3.2 *Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble K défini par*

$$K = \{v \in H_0^1 \ \ , v \geqslant \varphi\}$$

est convexe, férme et non vide.

Preuve. Soit $u, v \in \ K$ et pour tout $0 < t < 1$

$$tu + (1-t)v \in \ K$$

On a

$$u(x) \geqslant \varphi(x) \ \ et \ \ v(x) \geqslant \varphi(x)$$

Alors

$$\begin{cases} tu(x) \geqslant t\varphi(x) \\ (1-t)v(x) \geqslant (1-t)\varphi(x) \end{cases} \tag{1.9}$$

Par addition on obtient

$$tu(x) + (1-t)v(x) \geqslant \varphi(x)$$

Donc K convexe.

Soit $\{v_n\} \in K$ un suite convergence

$$v_n \longrightarrow v \quad dans \quad H_0^1(\Omega)$$

On va démontre que $v \in K$

On a

$$v_n \geqslant \varphi \Rightarrow v_n - v + v \geqslant \varphi$$

$$(v_n - v) + v \geqslant \varphi$$

On a

$$|v_n - v| \longrightarrow 0$$

Et

$$|v_n - v| \geqslant v_n - v \geqslant \varphi - v$$

Donc

$$0 \geqslant \varphi - v \quad \Rightarrow v \geqslant \varphi \quad \Rightarrow v \in K$$

D'où K est férme. ■

1.4 Formulations variationnelles équivalentes

On a la formulation variationnelle de l'équation (1.1)

$$\begin{cases} trouver \;\; u \in K \;\; telle \;\; que \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \, \nabla(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u)dx \;\; \forall v \in K \end{cases}$$

Proposition 1.4.1 *Le problème de minimisation (1.4) est équivalente à l'inéquation variationnelle (1.5).*

Preuve. (1.5) $\Rightarrow$ (1.4)

On a

$$J(u) \leq J(v) \;\; \forall \;\; v \in K$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a(u,u) - \int_\Omega fu \leqslant \frac{1}{2}a(v,v) - \int_\Omega fv \\
&\frac{1}{2}a(u,u) - \int_\Omega fu \leqslant \frac{1}{2}a((1-t)u+tv,(1-t)u+tv) - \int_\Omega f((1-t)u+tv) \\
&= \frac{1}{2}a(u+t(v-u),u+t(v-u)) - \int_\Omega f((1-t)u+tv) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{t^2}{2}a(v-u,v-u) + ta(u,v-u) - \int_\Omega fu + t\int_\Omega f(v-u) \\
&\frac{t^2}{2}a(v-u,v-u) + ta(u,v-u) - t\int_\Omega f(v-u) \geqslant 0 \\
&\frac{t}{2}a(v-u,v-u) + a(u,v-u) - \int_\Omega f(v-u) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Quand t tend vers 0, on obtient

$$a(u,v-u) \geqslant \int_\Omega f(v-u)$$

$$a(u,v-u) \geqslant (f,v-u) \quad \forall \;\; v \in K$$

(1.6) $\Rightarrow$ (1.5)

Soient $v \in K$ telle que $v \neq u$, $F(\varepsilon) = (u+\varepsilon(v-u))$ et pour tout $0 \leq \varepsilon \leq 1$, on a

$F(0) = J(u)$ et $F(1) = J(v)$

En calcule $F^{'}(\varepsilon)$ pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$F^{'}(\varepsilon) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{J(u+(\varepsilon+h)(v-u)) - J(u+\varepsilon(v-u))}{h} \tag{1.10}$$

On prend $w = u + \varepsilon(v-u)$ dans (1.17) $\Rightarrow$

$$F^{'}(\varepsilon) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{ha(w,v-u) + \frac{h^2}{2}a(v-u,v-u) - h(f,v-u)}{h}$$

$$= a(w, v-u) - (f, v-u) \geq 0$$

Lorsque $F(0) < F(1)$, alors $J(u) \leq J(v)$

Donc u est une minimun de J ■

Proposition 1.4.2 *Soit u solution de (1.5) alors*

$$-\Delta u \geqslant f \ \ dans \ \ \Omega \tag{1.11}$$

$$u - \varphi \geqslant 0 \ \ dans \ \ \Omega \tag{1.12}$$

$$(u-\varphi)(-\Delta u - f) = 0 \ \ dans \ \ \partial\Omega \tag{1.13}$$

Preuve. D'aprés la défition de K, on a

$$u \geq \varphi \ \ alors \ \ \ u - \varphi \geqslant 0$$

On pose $\Omega = \mathcal{O} \cup C$

Avec

$$C = \{x \in \Omega, u(x) = \varphi(x)\}$$

$$\mathcal{O} = \{x \in \Omega, u(x) > \varphi(x)\}$$

D'aprés la formulation variationnelle de inéquation, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla(v-u)dx \geq \int_\Omega f \ (v-u)dx$$

Si on prend $u + \varepsilon\xi$

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla \xi dx \geq \int_\Omega f \ \xi dx \tag{1.14}$$

Alors

$$-\int_\Omega \Delta u \ \xi dx \geq \int_\Omega f \ \xi dx$$

Donc

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)dx \geq 0$$

$$-\Delta u \geq f \quad dans \quad \Omega$$

D'auter partie si on pose $u - \varepsilon\xi$ et $\xi \in C_c^\infty(\mathcal{O})$, on a

$$\int_\theta \nabla u \ \nabla\xi dx \leq \int_\theta f \ \xi dx \tag{1.15}$$

De (1.14) et (1.15), on obtient

$$-\Delta u = f \quad dans \quad \mathcal{O}$$

Et

$$u - \varphi = 0 \quad \forall \ x \in C$$

Donc

$$(u - \varphi)(-\Delta u - f) = 0 \quad \forall \quad x \in \Omega$$

. ■

Chapitre 2

Approximation par éléments finis du problème d'obstacle

2.1 Introduction

L'object de ce chapitre est l'approximation numérique de la solution d'une inéquation variationnelle pour le problème d'obstacle

2.2 Estimation d'erreur

2.2.1 Estimation a priori

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné régulier.

On considére l'inquation variationnelle suivante

$$\begin{cases} trouver \;\; u \in K \;\; telle \;\; que \\ a(u, v-u) \geq f(v-u)dx \;\; \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geqslant \varphi \ \ p.p \ \ dans \ \ \Omega\}$$

On suppose que $\varphi \in H^2(\Omega)$. Soit $V_h \subset V$ un espace de dimonsion finie et on construitun sous ensemble convexe et $K_h \subset V_h$

$$K_h = \{v_h \in V_h; v_h \geqslant \varphi_h \ \ \forall \ \ x \in \Omega\}$$

Où φ_h est l'interpolé de φ dans V_h.

Remarque 2.2.1 *Dans le cas* $V_h = V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad v_h|_T \in P^1\}$, $v_h \in K_h$ *est equivalent à* $v_h(a_i) \geqslant \varphi_h(a_i) \ \ \forall \ \ a_i$ *sommet.*

Remarque 2.2.2 *La première difficulté dans l'analyse d' erreur pour les inéquation variationnelles réside dans le fait que même si* $V_h \subset V$ *et* $K_h \subset V$. K_h *n'est pas formement inclu dans* K
Ceci est du au fait que φ_h *peut étre* $< \varphi$ *et donc* $v_h \geqslant \varphi_h$ *ne garanti pas que* $v_h \geqslant \varphi$.

Nous rappellons que le cas d'une équation variationnelle si $V_h \subset V$, le lemme de Céa affirre que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{M}{\alpha}\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \ \ \forall \ \ v_h \in V_h$$

Où M est la constante de la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ et α la constante de coercivité.
Et nous rappelons aussi que si la solution $u \in H^2(\Omega)$, alors on a

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant Cte \ h\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Pour ceci il suffit de choisir $v_h = J_h^1(u)$
J_h^1 est l'interpolé de Lagrange.
Nous rappelons aussi (voir ch.I.de ce mémoire) que pour le problème d'obstacle on

$$\begin{cases} -\Delta u - f \geqslant 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega \\ u \geqslant \varphi \quad p.p \quad dans \quad \Omega \\ (u - \varphi)(\Delta u + f) = 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

En utilisant cette caraclésisation on peut démonter l'estimation d'erreur suivante

Lemme 2.2.3 *Soit u et u_h les solution du problème continue et du problème discret. Alors si $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$ et $\varphi \in H^2(\Omega)$, a on*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant Cte\ h(\|u\|_{H^2} + \|f\|_{L^2} + \|\varphi\|_{H^2})$$

Preuve. [3] Tout d'abord nous démontrons que

$$a(u - u_h, u - u_h) \leqslant a(u - u_h, u - v_h) + (\Delta u + f, u - v_h) + (\Delta u + f, \varphi_h - \varphi)$$

En effet on a

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\
&\leqslant a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u, v_h - u_h) - (f, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h + \varphi_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h)
\end{aligned}$$

Ici on utilise le fait que $(\Delta u + f, v_h - \varphi_h) \geqslant 0$

On obtient

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, u - u_h) &\leqslant a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u + u - \varphi + \varphi - \varphi_h)
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité

$$a\ b \leqslant \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\ b^2 \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{\alpha}$; $a = M\|u - u_h\|_{H^1}$ et $b = \|u - v_h\|_{H^1}$

On obtient

$$\alpha\|u - u_h\|_{H^1}^2 \leqslant \frac{\alpha}{2}\ \|u - u_h\|_{H^1}^2 + \frac{M^2}{2\alpha}\ \|u - v_h\|_{H^1}^2 + \|\Delta u + f\|_0(\|v_h - u\|_0 + \|\varphi - \varphi_h\|_0)$$

$$\|u - J_h^1 u\|_0 \leqslant Cte\ h^2\ \|u\|_{H^2}$$

$$\|\varphi - \varphi_h\|_0 \leqslant Cte\ h^2\ \|\varphi\|_{H^2}$$

On trouve

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant Cte\ h\ (\|u\|_{H^2} + \|f\|_0 + \|\varphi\|_{H^2}).$$

■

Remarque 2.2.4 *Pour détmonirer u_h on peut utiliser le problème minimisation pour*

$$\begin{aligned}
&v_h \in K \quad v_h = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \, \phi_j \\
&J(v_h) = \frac{1}{2}\, a(v_h, v_h) - (f, v_h) \\
&= \frac{1}{2}\, \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \beta_j \, \beta_i \, a(\phi_j, \phi_i) - \sum_{i=1}^{M} \beta_i (f, \phi_i) \\
&= (A\beta, \beta) - (F, \beta)
\end{aligned}$$

Le point clé réside dans le fait que $v_h - \varphi_h$ est linéaire sur chaque T donc le problème est un problème minimisation d'une forme quadratique sous contrainte $(v_h - \varphi_h)(a_i) \geqslant 0 \quad \forall \ a_i$ dans l'ensemble des sommets.
Mais en chaque sommet a_i $\ v_h(a_k) = \beta_k$ par conséquent la contruction de K_h est équivalente conditions $\beta_k \geqslant \varphi_h(a_k) \quad k = 1, ..., M$
Ce qui est un nombre fini de contraintes sur β.

2.2.2 Estimation a posteriori

Comme dans le cas des équations varaitionnelles l'analyse a priori nécessite régularité aditionnelle sur la solution ainsi que pour l'obstacle pour que la convergence soit assmée.
Dans cette section nous faisons une analyse a posteriori inspirée de l'unticel.
On introduit le Lagrangian pou le problème d'obstacle

$$L(u, \lambda) = \frac{1}{2}\, a(u, u) - (f, u) - (\lambda, u - \varphi)$$

Qui vient l'écriture du problème d'obstacle sous la forme d'un problème de type point-selle

$$\begin{cases} trouver \ \ (u, \lambda) \in V \times \Lambda \ \ telle \ \ que \\ a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v) \ \ \forall v \in K \\ (u, \mu - \lambda) \geqslant (\varphi, \mu - \lambda) \ \ \forall \mu \in \Lambda \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors

$$L(u, \lambda) = \inf_{v} \ \sup_{\mu} \ L(v, \mu)$$

$$L(v, \mu) = \frac{1}{2}\, a(v, v) - (f, v) - (\mu, v - \varphi)$$

Mais rappelons d'abord comment obtenir (2.3), on a

$$\begin{cases} -\Delta u - f \geqslant 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega \\ u \geqslant \varphi \quad p.p \quad dans \quad \Omega \\ (u - \varphi)(-\Delta u - f) = 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

On pose $\lambda = -\Delta u - f$ donc $\lambda \geqslant 0$

On pose $\Lambda = \{\mu \in L^2(\Omega); \;\; \mu \geqslant 0\}$

Donc

$$(-\Delta u - f, v) = (\lambda, v)$$
$$(u, \lambda) \geqslant (\varphi, \lambda)$$
$$(u, \mu) \geqslant (\varphi, \mu)$$

Donc

$$\begin{cases} a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v) \;\; \forall v \in K \\ (u - \varphi, \lambda) \geqslant 0 \\ (u - \varphi, \mu) \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Donc

$$a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v)$$
$$(u, \mu) \geqslant (\varphi, \mu)$$
$$(u, \mu) - (u, \lambda) \geqslant (\varphi, \mu) - (u, \lambda)$$
$$(u, \mu - \lambda) \geqslant (\varphi, \mu) - (u - \varphi + \varphi, -\Delta u - f)$$
$$= (\varphi - \mu) - (\varphi, \lambda)$$

Donc

$$(u, \mu - \lambda) \geqslant (\varphi, \mu - \lambda) \quad \forall \;\; \mu$$

Donc

$$\begin{cases} a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v) \;\; \forall v \in V \\ (u, \mu - \lambda) \geqslant (\varphi, \mu - \lambda) \quad \forall \;\; \mu \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors la version on le problème discret corespondontant à (2.3) s'écrit

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) - (\lambda_h, v_h) = (f, v_h) \\ (u_h, \mu_h - \lambda_h) \geqslant (\varphi_h, \mu_h - \lambda_h) \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour la suite on note $e = u - u_h$

Lemme 2.2.5 *Soit u solution de (2.6) et u_h solution de (2.7),. Alors on a*

$$\int_\Omega \nabla e \; \nabla e_h \; dx \leqslant (\nabla u, \nabla(e_h - e)) - (f, (e_h - e))$$

$e_h = c_h(e)$ intérpolé de Clement.

Preuve. [4] (2.3)

On a si $v_h \in V_h \subset V$ donc

$$\int_\Omega \nabla u \; \nabla v_h \; dx - (\lambda, v_h) = (f, v_h)$$
$$\int_\Omega \nabla u_h \; \nabla v_h \; dx - (\lambda_h, v_h) = (f, v_h)$$

Par soustraction on obtient

$$\int_\Omega \nabla(e) \; \nabla v_h \; dx - (\lambda - \lambda_h, v_h) = 0$$
$$\int_\Omega \nabla e \; \nabla v_h \; dx \; = (\lambda - \lambda_h, v_h)$$
$$(\lambda_h, v_h) = -\int_\Omega f, v_h - \int_\Omega \nabla u_h \; \nabla v_h \; dx$$

Et

$$(\lambda, v_h) = (-\Delta u - f, v_h - e + e)$$

Pour $v_h = c_h u - u_h = e_h$ où $c_h u$ est l'interpolé de Clement, Alors

$$\int_\Omega \nabla e \; \nabla e_h \; dx = (\lambda - \lambda_h, e_h)$$
$$= (\lambda, e_h - e) + (\lambda, e) - (\lambda_h - e_h)$$

$(\lambda, e) \leqslant 0$ car

$$(-\Delta u - f, u - u_h) = \int_\Omega \nabla u . \nabla(u - u_h) - \int_\Omega f(u - u_h)$$
$$- a(u, v_h - u) + (f, v_h - u) \quad v_h = u_h$$

Donc $(\lambda, e) \leqslant 0$

D'autre part on a

$$-(\lambda_h, e_h) = \int_\Omega f\ e_h - \int_\Omega \nabla u_h\ \nabla e_h$$

$e_h = c_h(u) - c_h(u_h)$ admettant (voir[.]) que $c_h(u) \in K$ et $c_h(u_h) = u_h$

Alors

$$-(\lambda_h, e_h) = \int_\Omega f(c_h(u) - u_h)\ dx - \int_\Omega \nabla u_h\ (c_h(u) - u_h)\ dx \leqslant 0$$

Donc

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla e\ \nabla e_h\ dx \leqslant (\lambda, e_h - e) \\ &= \int_\Omega \nabla e.\nabla(e_h - e))\ dx - \int_\Omega f.(e_h - e) \end{aligned}$$

Mais

$$\int_\Omega \nabla u \nabla e\ dx - \int_\Omega f\ e\ dx \leqslant 0$$

Donc

$$\int_\Omega \nabla e \nabla e_h\ dx \leqslant \int_\Omega \nabla e.\nabla(e_h - e))\ dx - \int_\Omega f.(e_h - e)$$

On a l'estimation. ■

Chapitre 3

Méthode de Newton semi-régulière

3.1 Introduction

On considére le problème suivant :

$$\begin{cases} \min J(v) \quad \textit{telle que} \\ F(v) \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec $J(v) = \dfrac{1}{2}\,(Av, v)_X - (f, v)_{V',V}$, $A \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur de auto-adjoint dans l'espace de Hilbert X et $F \in \mathcal{L}(X, L^2)$

On suppose que le problème (3.1) admet une solution unique notée par u.

On introduit l'ensemble

$$K = \{v \in X; F(v) \leq 0\}$$

Théorème 3.1.1 *Existence de multiplicateur de Lagrange.*

Si u est un point régulièr au sens de Maurer-Zowe. Alors il existe un multiplicateur de Lagrange λ telle que

$$\begin{cases} Au + F^{*}\lambda = f \\ \lambda = (0, \lambda + c(F(u))) \end{cases} \tag{3.2}$$

Preuve. Voire [6] ■

Remarque 3.1.2 [7] *Si u est l'unique solution de problème et F est surjectif, alors u est un point régulièr au sens de Maurer-Zowe .*

Donc si soit a priori l'existence de λ du problème (3.1) se tronsforme à une systeme EDP de (3.2) .

Mais le problème c'est que dans le cas générale ce n'est pas facile de démonter que u est régulièr au sens de Maurer-Zowe.

Par exemple, le problème d'obstacle qui consiste à

$$\begin{cases} \min J(v) \\ u - \psi \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

L'application $F : H_0^1 \longrightarrow L^2(\Omega)$ n'est pas surjectif. Même si pour le problème d'obstacle il y a d'autre méthode avec les quelles on peut démontre l' existence de λ.

3.2 Méthode primale duale de l'ensemble actif

3.2.1 Principes de la méthode

Définition 3.2.1 *.[6]*

On définit l'ensemble $\mathcal{A}$ par

$$\mathcal{A} = \{x \in \Omega \; / \; \lambda(x) + c(F(u)) > 0\}$$

Pour tout $c > 0$.

Cet ensemble est appelée l'ensemble actif.

Si l'ensemble $\mathcal{A}$ connu, donc

$$\begin{cases} Au + F^*\lambda = f \\ F(u) = 0 \;\; dans \;\; \mathcal{A} \\ \lambda = 0 \;\; dans \;\; \mathcal{A}^c \end{cases} \tag{3.4}$$

Donc en tout point x on a

$$\begin{cases} Au = f \;\; dans \;\; \mathcal{A}^c \\ u = \psi \;\; dans \;\; \mathcal{A} \end{cases}$$

La métode de l'ensemble actif consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ par une méthode itérative et cet algorithme comme suit :

Algorithm 1 primal dual actif method algorithm

(i) données intialies u^0, λ^0. $k = 0$.

(ii)

$$\mathcal{I}_k = \{\lambda^k + cF(u^k) \leqslant 0\}$$
$$\mathcal{A}_k = \{\lambda^k + cF(u^k) > 0\}$$

(iii) calculer (u^{k+1}, λ^{k+1})

$$Au^{k+1} + \lambda^{k+1} = a$$
$$F(u^{k+1}) = \psi \;\; sur\; \mathcal{A}_k \; et \;\; \lambda^{k+1} = 0 \;\; sur \;\; \mathcal{I}_k$$

(iv) Si $A_{k+1} = A_k$ stop , si non $k = k + 1$.

Remarque 3.2.2 [8] *Dans (iii) on obtient $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{k+1}$ impleque la solution est trouvé, i.e. $(u_k, \lambda_k) = (u^*, \lambda^*)$. On numérique pratique on va voir que $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{k+1}$ peuvent être employés en tant qu'arrêt du critère, voient par exemple [7].*

Récememt, Kunich ont démontré qui la méthode de l'ensemble actif peut être interpreter comme une méthode de Newton semi-réguliér.

Rappelons d'abord le méthode de Newton.

3.3 Méthode de Newton

On se place en dimension finie $V = \mathbb{R}^d$. Expliquons le principe de la méthode de Newton. Soit F une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Soit u un zéro régulier de F c'est-à-dire que

$$F(u) = 0 \ \ et \ \ F^{'}(u) \ \ matrice \ \ inversible.$$

Une formule de Taylor au voisinage de v nous donne

$$F(u) = F(v) + F^{'}(v)(u - v) + \mathcal{O}(\|u - v\|^2)$$

Alors

$$F^{-1}(u) = F^{-1}(v) + (F^{'}(v))^{-1}F^{-1}(u - v) + ...$$

C'est-à-dire

$$u = v - (F^{'}(v))^{-1}F(v) + \mathcal{O}(\|u - v\|^2)$$

Car $F(u) = F^{-1}(u) = 0$.

La méthode de Newton consiste à résordre de facon itérative cette équation en négligeant le reste. Pour un choix initial $u^0 \in \mathbb{R}^d$, on calcule

$$u^{n+1} = u^n - (F^{'}(u^n))^{-1}F(u^n) \ \ pour \ \ n \geq 0. \tag{3.5}$$

Rappelons que l'on ne calcule pas l'inverse de la matrice $F^{'}(u^n)$ dans (3.5) mais que l'on résout un système linéaire par l'une des méthode exposées. Du point de vue de l'optimisation, la méthode de Newton s'interprète de la manière suivante. Soit J une fonction de classe C^3 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, et soit u un minimum local de J. Si on pose $F = J^{'}$, on peut applique la méthode précédente pour résoudre la condition nécessaire d'optimalité $J^{'}(u) = 0$. Cependant, on peut aussi envisager la méthode de Newton comme une méthode de minimisation. A cause du développement de Taylor

$$J(w) = J(v) + J^{'}(v)(w - v) + \frac{1}{2}\, J^{"}(v)(w - v) + \mathcal{O}(\|u - v\|^3) \tag{3.6}$$

On peut approcher $J(w)$ au voisinage de v par une fonction quadratique. L méthode de Newton consiste alors à minimiser cette approximation quadratique et à itérer.

La minimun de la pratie quadratique du terme de droite (3.6) est donné par $w = v - (J"(v))^{-1}J'(v)$ si la matrice $J"(v)$ est définie positive. On retrouve alors la formule itérative (3.5).

L'avantage principal de la méthode de Newton est sa convergence bien plus rapide que les méthodes précédentes.

Proposition 3.3.1 *Soit F nue fonction de class C^2 de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, et u un zéro régulier de F (i.e. $F(u) = 0$ et $F'(u)$ inversible). Il existe un réal $\varepsilon > 0$ tel que, si u^0 est assez proche de u au sens où $\|u - u^0\| \leq \varepsilon$, la méthode de Newton définie par (3.5) converge, c'est-à-dire que la suite (u^n) converge vers u, et il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u^{n+1} - u\| \leq \|u^{n+1} - u\|^2. \tag{3.7}$$

Preuve. [9].Par continuité de F' il existe $\varepsilon > 0$ tel que F' est inversible en tout point de la boule de centre u et de rayon ε. Supposons que u^n soit resté proche de u, au sens où $\|u - u^n\| \leq \varepsilon$, donc $F'(u^n)$ est inversible. Comme $F(u) = 0$, on déduit de (3.5)

$$u^{n+1} - u = u^n - u - (F'(u^n))^{-1}(F(u^n) - F(u)) \tag{3.8}$$

Qui, par développement de Taylor autour de u^n, devient

$$u^{n+1} - u = (F'(u^n))^{-1}\mathcal{O}(\|u^n - u\|^2) \tag{3.9}$$

Comme $\|u^n - u\| \leq \varepsilon$, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ (indépendante de n et liée au module de cntinuité de F' et de $F"$ sur la boule de centre u et de rayon ε) telle que

$$\|u^{n+1} - u\| \leq \|u^n - u\|^2. \tag{3.10}$$

Si, est suffisamment petit de manière à ce que $C\varepsilon \leq 1$, on déduit de (3.10) que u^{n+1} reste dans la boule de centre u et de rayon ε. Celapermet de vérifier par récurrence l'hypothèse que $\|u^n - u\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$, et (3.10) est bien la conclusion désirée. ∎

3.4 La Méthode primale duale comme une méthode de Newton semi-régulière

Soit X, Z sont des espaces de Banach et soit $D \subset X$ un ensemble ouvert

Définition 3.4.1 [9]. *(1) $F : D \subset X \longrightarrow Z$ est dit Newton differentiable en x si il existe un ouvert voisinage $N(x) \subset D$ et un application $G : N(x) \longrightarrow \pounds(X, Z)$ telle que.*

$$\lim_{|h| \longrightarrow 0} \frac{|F(x+h) - F(x) - G(x+h)h|_Z}{|h|_X} = 0.$$

l'ensemble $\{G(.) : . \in N(x)\}$ est dit N -differentiable sur F en x.

(2) F est dit semi-régulière en x ,s'il est Newton differentiable en x et

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} G(x+th)h \; existe \;\; uniformly \;\; dans \;\; |h| = 1$$

Exemble.3.1.

Soit X un espace de Hilbert et soit F une fonction définie par $F(x) = |x|$ est Newton differonnielle , $G(x+h) = (\frac{x+h}{|x+h|}, h)_X$ et $G(0)h = (\lambda, h)_X$ pou chaque λ avec $\lambda \in X$

On a

$$|h|^{-1}|F(x+h) - F(x) - G(x+h)h| = |h|^{-1} \; \frac{(2(x+h), h)_X - |h|^{-2}}{|x| + |x+h|} - \frac{(x+h, h)_X}{|x+h|} \longrightarrow 0$$

Lorsque $h \longrightarrow 0$. Donc F est Newton differntiable, de plus F est semi-régulier.

Nous considérons le problème suivante avec les inconnus $(u, \lambda) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} Au + \lambda = a \\ \lambda = \max(0, \lambda + c(u - \psi)) \end{cases} \tag{3.11}$$

Avec $A \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$, Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$, $c > 0$, $a \in L^p(\lambda)$ et $\psi \in L^p(\lambda)$ pour chaque $p > 2$. Vous rappelez que la deuxième équation dans (3.11) est équivalent à

$$\begin{cases} u \leq \psi \\ \lambda \geq 0 \\ (\lambda, u - \psi)_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Nous rappellons que la méthode primale duale de l'ensemble actif dans la section précédente est équivalente à la méthode de Newton semi-régulière appliquée à

$$0 = F(u,\lambda) = \begin{cases} Au + \lambda = a \\ \lambda = \max(0, \lambda + c(u-\psi)) \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour ce la on définie $G(x)(s) : L^p(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ par

$$G(x)(s) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ x(s) \leq 0 \\ 1 \ \ si \ \ x(s) > 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Et vous rappelez que la fonction maximum est Newton differentiable de $L^p(\Omega)$ à $L^2(\Omega)$ si $p > 2$ avec G est N-differentiable. Une étape de Newton appliquée à la deuxième l'équation dans (3.11) résulte de dans

$$\begin{cases} c(u^{k+1} - u^k) + c(u^k - \psi) = 0 \ \ sur \ \ \mathcal{A}_k = \{s : \lambda^k(s) + c(u^k(s) - \psi(s)) > 0\} \\ (\lambda^{k+1} - \lambda^k) + \lambda^k = 0 \ \ sur \ \ \mathcal{I}_k = \{s : \lambda^k(s) + c(u^k(s) - \psi(s)) \leq 0\} \end{cases}$$

Par conséquent une étape de Newton pour (3.13) est donner par

$$\begin{cases} Au^{k+1} - a + \lambda^{k+1} = 0 \\ u^{k+1} = \psi \ \ sur \ \ \mathcal{A}_k \\ \lambda^{k+1} = 0 \ \ sur \ \ \mathcal{I}_k \end{cases} \tag{3.15}$$

Pour analyser ses propriétés locales de convergence notez cela dans l'hypothése (3.12) de l'équation (4.13) avec $c = \alpha$ est équivalente au problème réduit

$$Au - a + max(0, -Cu + a - \alpha\psi) = 0 \tag{3.16}$$

Appliquant Newton semi-régulière fait un pas à (3.15) résultats de dans

$$\begin{aligned} A(u^{k+1} - u^k) - (-Cu^k + a - \alpha\psi)C((u^{k+1} - u^k) \\ +Au^k - a + max(0, -Cu^k + a - \alpha\psi) = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Placant $\lambda^{k+1} = a - Au^{k+1}$ réitère de (3.16) coïncide avec ceux de (3.15)

Si l'initialisation pour l'itérration réduite (3.16) est choisie tel que $\lambda^0 = a - Au^0$. Ceci suit du fait ce $\lambda^k + \alpha(u^k - \psi) = -Cu^k + a - \alpha\psi$

Pour tout séparation $\Omega = \mathcal{A} \bigcup \mathcal{I}$ dans les ensemble mesurables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$

$R_{\mathcal{I}} : L^2(\mathcal{I}) \longrightarrow L^2(\mathcal{I})$ dénotent l'opérateur de restriction et $R^*_{\mathcal{I}} : L^2(\mathcal{I}) \longrightarrow L^2(\mathcal{I})$ son adjoint. Encore réglé $A_{\mathcal{I}} = R_{\mathcal{I}} A R^*_{\mathcal{I}}$.

Chapitre 4

Tests numériques sous Freefem++

4.1 Exemple

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$

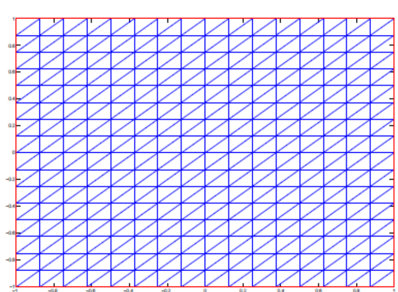

Figure 4.1 – les Maillages de domaine Ω

Soit le problème d'obstacle suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u - f \leq 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega \\ u \leq \varphi \quad p.p \quad dans \quad \Omega \\ (u - \varphi)(\Delta u + f) = 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega \end{cases}$$

Avec $f = 1$ et $\varphi = 0$.

Dans ce section on va donner quelques exemples dans le cas d'obstacle et membrane sont contact, mais il y a un exemple entre les quatre exemples nous avons voir que l'obstacle et membrane ne sont pas de contact

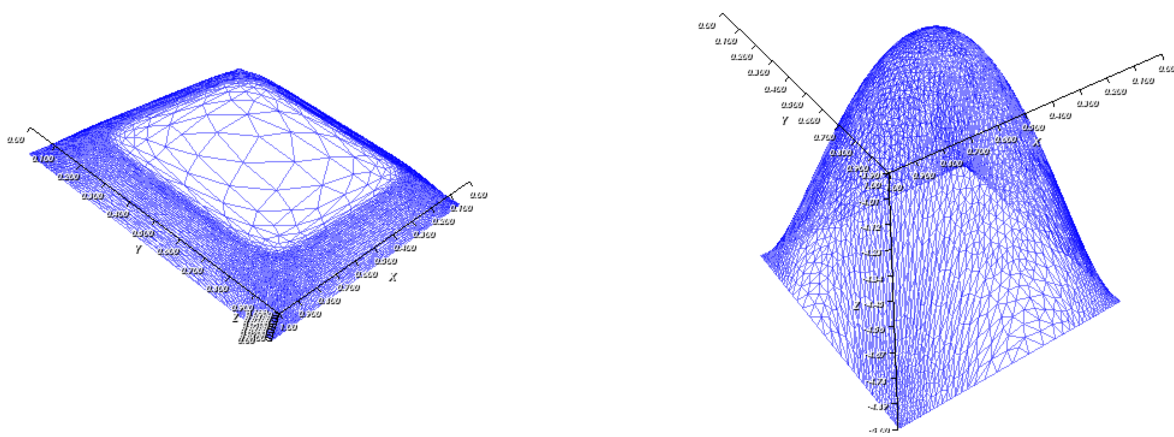

FIGURE 4.2 – la différence entre contact et incontact de l'obstacle avec le membrane

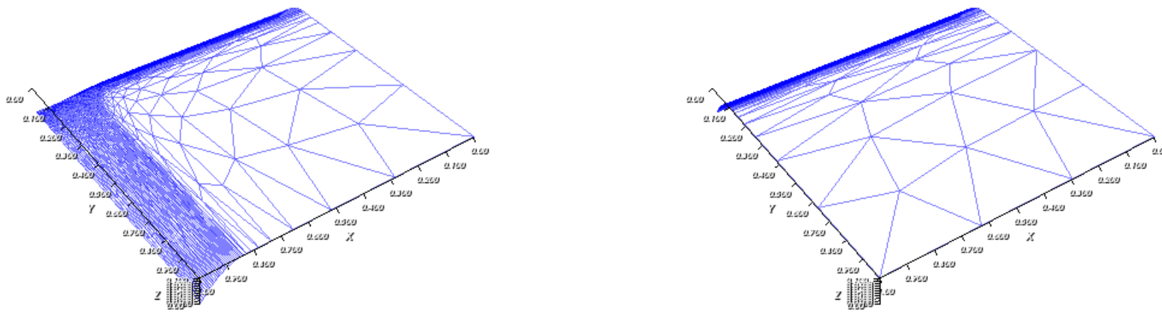

FIGURE 4.3 – Problème d'obstacle avec couche limite sur le frontièr

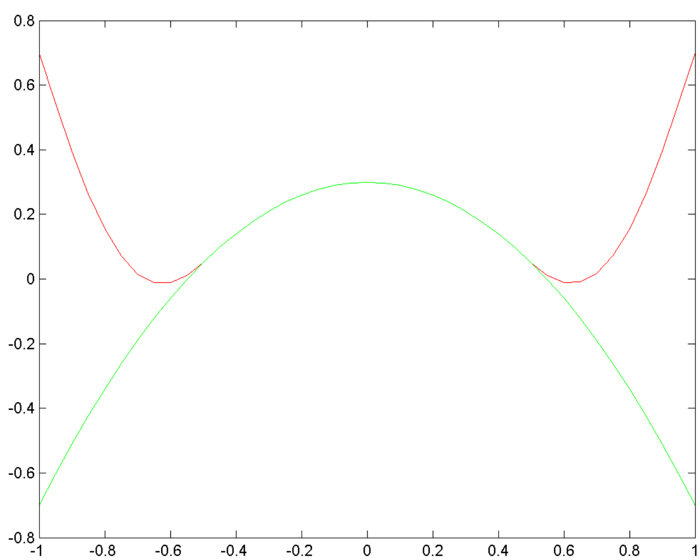

FIGURE 4.4 – Problème d'obstacle

Bibliographie

[1] R.Glowinski.Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variatioal Problems.Bombay 1980.

[2] H.Brizes,Analyse fonctionnelle théories et application.Dunod 1999.

[3] Z. Chen,et H. Nochetto .Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems ,University

[4] Z. Chen, Nochetto, R. : Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems. Numer. Math. 84, 527-548 (2000)

[5] K.Kunisch : Semi-Smooth Newton Methode for Non-differntiable Optomization Problems.(2008)

[6] M.Hintermauller, K. ITO and K. Kunisch : The primal dual active set strategy as a semi-smooth Newton method, SIAM Journal on Optimization, 13(2002), 865-888.

[7] M. HINTERMÄULLER and K. KUNISCH : Total bounded varia- tion regularization as bilaterally constrained optimization problem, SIAM J. Appl. Mathematics 64(2004), 1311-1333.

[8] M. HINTERMÄULLER and K. KUNISCH : Path-following methods for a class of constrained minimization problems in function space, SIAM J. on Optimization, 17 (2006), 159-187

[9] G. Allaire :Analye numrique et optimisation, Paris,le 4 Janvier 2005.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on trouver l'existence et l'unicité de l'inquation variationnelle et on étude l'approximation du problème d'obstacle et nous avons utilisé la méthode de Newton semi-régulière pour étude le problème obstacle. Cette méthode sont analysées une class de inégalités variationnelle. on lui montre qu'elles sont équivalentes à certain stratégies régulées d'actif.